



Sposoby rozwiązywania równań dwukwadratowych i równań sprowadzanych do równań kwadratowych

- [Wprowadzenie](#)
- [Przeczytaj](#)
- [Animacja](#)
- [Sprawdź się](#)
- [Dla nauczyciela](#)



Sposoby rozwiązywania równań dwukwadratowych i równań sprowadzanych do równań kwadratowych

Źródło: Charles Deluvio, dostępny w internecie: <https://unsplash.com/>.

Równania dwukwadratowe możemy rozwiązywać poprzez zastosowanie podstawienia i rozwiązanie odpowiedniego równania kwadratowego wybraną metodą.

Równanie dwukwadratowe rozwiążemy obliczając wyróżnik odpowiedniego trójmianu kwadratowego oraz skorzystamy ze wzorów na pierwiastki równania kwadratowego. Możemy również wykorzystać sposób rozkładania na czynniki, poprzez wyłączanie wspólnego czynnika przed nawias, wykorzystanie wzorów skróconego mnożenia lub grupowanie wyrazów.

Twoje cele

- Rozwiążesz różnymi metodami równania dwukwadratowe.
- Wyznaczysz wartości parametrów tak, aby dane równania posiadały ten sam zbiór rozwiązań.

Przeczytaj

Równanie postaci $ax^4 + bx^2 + c = 0$, gdzie $a \neq 0$ nazwiemy równaniem dwukwadratowym.

Przykład 1

Wyznamy taką wartość parametru z , aby liczba $x_0 = -1$ spełniała równanie

$$-(z^2 + 1)x^4 - 3x^2 - 2z + 3 = 0$$

Ponieważ -1 jest pierwiastkiem równania, więc możemy zapisać:

$$-z^2 - 1 - 3 - 2z + 3 = 0$$

$$-z^2 - 2z - 1 = 0$$

$$z^2 + 2z + 1 = 0$$

$$(z + 1)^2 = 0$$

$$z + 1 = 0$$

$$z = -1$$

Rozwiązaniem równania jest liczba -1 , gdy $z = -1$.

Przykład 2

Rozwiążemy równanie $x^4 - 5x^2 + 4 = 0$ metodą wyłączania wspólnego czynnika przed nawias.

Zastosujemy podstawienie $x^2 = z$, gdzie $z \geq 0$.

$$z^2 - 5z + 4 = 0$$

$$\text{Zapiszemy } -5z = -z - 4z.$$

$$z^2 - z - 4z + 4 = 0$$

$$z(z - 1) - 4 \cdot (z - 1) = 0$$

Wyrażenie $(z - 1)$ możemy wyłączyć przed nawias.

$$(z - 1)(z - 4) = 0$$

Otrzymaliśmy postać iloczynową równania

$$(z - 1) = 0 \text{ lub } (z - 4) = 0$$

$$z = 1 \text{ lub } z = 4$$

Teraz wróćmy do podstawienia $x^2 = z$.

$$z = 1$$

$$x^2 = 1$$

$$x = -1 \text{ lub } x = 1$$

$$z = 4$$

$$x^2 = 4$$

$$x = -2 \text{ lub } x = 2$$

Odpowiedź: $x \in \{-2, -1, 1, 2\}$.

Przykład 3

Rozwiążemy to samo równanie $x^4 - 5x^2 + 4 = 0$ metodą wyłączania wspólnego czynnika przed nawias, zastosujemy inne podstawienie.

$$x^4 - x^2 - 4x^2 + 4 = 0$$

$$x^2(x^2 - 1) - 4 \cdot (x^2 - 1) = 0$$

Zastosujemy podstawienie $x^2 - 1 = t$.

Zatem $x^2 = t + 1$, gdzie $t + 1 \geq 0, t \geq -1$.

$$(t + 1)t - 4t = 0$$

$$t^2 + t - 4t = 0$$

$$t^2 - 3t = 0$$

$$t(t - 3) = 0$$

$$t = 0 \text{ lub } (t - 3) = 0$$

$$t = 0 \text{ lub } t = 3$$

Teraz wróćmy do podstawienia $x^2 - 1 = t$.

$$t = 0$$

$$x^2 - 1 = 0$$

$$x = -1 \text{ lub } x = 1$$

$$t = 3$$

$$x^2 - 1 = 3$$

$$x^2 = 4$$

$$x = -2 \text{ lub } x = 2$$

Odpowiedź: $x = -2$, $x = -1$, $x = 1$, $x = 2$.

Przykład 4

Rozwiążemy równanie $x^2(x^2 - 9) = 16x^2 - 144$.

Zastosujemy podstawienie $x^2 = z$, gdzie $z \geq 0$.

$$z(z - 9) = 16z - 144$$

$$z^2 - 9z = 16z - 144$$

$$z^2 - 25z + 144 = 0$$

Obliczymy wyróżnik trójmianu kwadratowego.

$$\Delta = 25^2 - 4 \cdot 1 \cdot 144 = 625 - 576 = 49 \Rightarrow \sqrt{\Delta} = \sqrt{49} = 7$$

Ponieważ $\Delta > 0$ zatem równanie ma dwa rozwiązania.

$$z_1 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a}$$

$$z_1 = \frac{-(-25) - 7}{2 \cdot 1}$$

$$z_1 = 9$$

$$z_2 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a}$$

$$z_2 = \frac{-(-25) + 7}{2 \cdot 1}$$

$$z_2 = 16$$

Teraz wrócimy do podstawienia $x^2 = z$.

$$z = 9$$

$$x^2 = 9$$

$$x = -3 \text{ lub } x = 3$$

$$z = 16$$

$$x^2 = 16$$

$$x = -4 \text{ lub } x = 4$$

Odpowiedź: $x \in \{-4, -3, 3, 4\}$.

Przykład 5

Rozwiążemy równanie dwukwadratowe $x^4 + 2x^2 - 15 = 0$ z zastosowaniem wzoru skróconego mnożenia.

Zapiszemy równanie w postaci równoważnej.

$$x^4 + 2x^2 + 1 - 16 = 0$$

$$(x^2 + 1)^2 = 16$$

$$\sqrt{(x^2 + 1)^2} = 4$$

$$|x^2 + 1| = 4$$

$$x^2 + 1 = -4 \text{ lub } x^2 + 1 = 4$$

$$x^2 = -5 \text{ lub } x^2 = 3$$

Równanie $x^2 = -5$ jest sprzeczne.

$$x^2 = 3$$

$$x = -\sqrt{3} \text{ lub } x = \sqrt{3}$$

Odpowiedź: $x = -\sqrt{3}, x = \sqrt{3}$.

Słownik

liczba spełniająca równanie

liczba, po podstawieniu której w miejsce niewiadomej otrzymamy równość prawdziwą

Animacja

Polecenie 1

Zapoznaj się z animacją przedstawiającą rozwiązanie równania dwukwadratowego różnymi metodami.

Film dostępny pod adresem <https://zpe.gov.pl/a/DKCrDsj0x>

Film przedstawiający rozwiązanie równania dwukwadratowego różnymi metodami.

Polecenie 2

Rozwiąż równanie $x^4 + 2x^2 - 3 = 0$ czterema metodami przedstawionymi w animacji.

Sprawdź się

Pokaż ćwiczenia:   

Ćwiczenie 1



Zaznacz wszystkie takie wartości parametru z , aby liczba $x_0 = -1$ spełniała równanie $(2z^2 - 1)x^4 - 3 \cdot (z + 2)x^2 - z^2 + 2z - 13 = 0$.

☐ 2

☐ 4

☐ 5

☐ -4

☐ -2

☐ -5

Ćwiczenie 2



Połącz w pary równania równoważne.

$$x^4 - 4x^2 + 3 = 0$$

$$x^4 - 2x^2 - 3 = 0$$

$$x^4 + 4x^2 + 3 = 0$$

$$x^4 + 2x^2 - 3 = 0$$

$$|x^2 - 1| = 2$$

$$|x^2 + 2| = 1$$

$$|x^2 - 2| = 1$$

$$|x^2 + 1| = 2$$

Ćwiczenie 3



Wybierz równanie równoważne do równania $x^4 - 8x^2 + 7 = 0$.

☐ $(x^2 - 7)(x^2 + 1) = 0$

☐ $(x^2 - 7)(x^2 - 1) = 0$

☐ $(x^2 + 7)(x^2 + 1) = 0$

☐ $(x^2 + 7)(x^2 - 1) = 0$

Ćwiczenie 4



Podaj wartość współczynników a i b , aby równania $4x^4 + 4x^2 - 8 = 0$ i $|2x^2 + a| = b$ miały ten sam zbiór rozwiązań. Przeciągnij poprawne odpowiedzi.

$a =$, $b =$

4

6

2

0

1

3

5

Ćwiczenie 5



Zaznacz poprawną odpowiedź. Równanie $x^4 - 6x^2 + 5 = 0$ można zapisać w postaci $(t + 1)t - 5t = 0$ dla:

☐ $x^2 = t - 2$

☐ $x^2 + 1 = t$

☐ $x^2 = t$

☐ $x^2 = t + 1$

Ćwiczenie 6



Uporządkuj rozwiązanie równania w odpowiedniej kolejności.

$$x = -\sqrt{3,5} \text{ lub } x = \sqrt{3,5}$$



$$\sqrt{(2x^2 - 3)^2} = 4$$



$$(2x^2 - 3)^2 = 16$$



$$2x^2 = -1 \text{ lub } 2x^2 = 7$$



$$2x^2 - 3 = -4 \text{ lub } 2x^2 - 3 = 4$$



$$x^2 = -\frac{1}{2} \text{ lub } x^2 = 3,5$$



$$4x^4 - 12x^2 - 7 = 0$$



$$4x^4 - 12x^2 + 9 = 16$$



$$|2x^2 - 3| = 4$$



Ćwiczenie 7



Stosując metodę podstawiania $x^2 = z$, $z \geq 0$ dla równania $x^4 - 12x^2 - 7 = 0$ wybierz wszystkie równania które powstały w wyniku tego podstawienia.

☐ $(z - 6)^2 = 36$

☐ $(z^2 + 3)(z^2 - 4) = 0$

☐ $z^2 - 12z - 7 = 0$

☐ $(z - 6)^2 = 43$

☐ $(z^2 - 3)(z^2 + 4) = 0$

☐ $z^2 - 12z + 36 = 43$

Ćwiczenie 8



Rozwiąż równanie $x^6 - 2x^3 + 1 = 0$.

Dla nauczyciela

Autor: Jolanta Schilling

Przedmiot: Matematyka

Temat: Sposoby rozwiązywania równań dwukwadratowych

Grupa docelowa:

III etap edukacyjny, liceum, technikum, zakres rozszerzony

Podstawa programowa:

III. Równania i nierówności.

Zakres podstawowy. Uczeń:

5) rozwiązuje równania wielomianowe, które dają się doprowadzić do równania kwadratowego, w szczególności równania dwukwadratowe.

Kształtowane kompetencje kluczowe:

- kompetencje w zakresie rozumienia i tworzenia informacji
- kompetencje w zakresie wielojęzyczności
- kompetencje matematyczne oraz kompetencje w zakresie nauk przyrodniczych, technologii i inżynierii
- kompetencje cyfrowe
- kompetencje osobiste, społeczne i w zakresie umiejętności uczenia się

Cele operacyjne:

Uczeń:

- rozwiązuje równanie dwukwadratowe różnymi sposobami
- wyznacza wartości parametrów tak, aby dane równania posiadały ten sam zbiór rozwiązań
- dobiera model matematyczny do rozwiązania równania dwukwadratowego

Strategie nauczania:

- konstruktywizm

Metody i techniki nauczania:

- analiza przypadku

- burza mózgów
- dyskusja

Formy pracy:

- praca indywidualna
- praca w grupach
- praca całego zespołu klasowego

Środki dydaktyczne:

- komputery z głośnikami i dostępem do Internetu, słuchawki
- zasoby multimedialne zawarte w e-materiale
- tablica interaktywna/tablica, pisak/kreda

Przebieg lekcji

Faza wstępna:

1. Uczniowie metodą burzy mózgów przypominają metody rozwiązywania równań kwadratowych.
2. Nauczyciel podaje temat i cele zajęć oraz wspólnie z uczniami ustala kryteria sukcesu.

Faza realizacyjna:

1. Uczniowie analizują rozwiązania przykładów z sekcji „Przeczytaj”.
2. Uczniowie podzieleni na grupy 4 osobowe omawiają rezultaty swojej pracy i porównują wyniki. Tworzą wspólny plakat ilustrujący sposoby rozwiązania równań.
3. Uczniowie oglądają animację i omawiają ją wraz z nauczycielem.
4. Uczniowie w parach lub indywidualnie wykonują ćwiczenia interaktywne wskazane przez nauczyciela. Wspólnie omawiają odpowiedzi.

Faza podsumowująca:

1. Jako podsumowanie nauczyciel zadaje uczniom pytania dotyczące rozwiązywania równań dwukwadratowych różnymi metodami.
2. Nauczyciel omawia przebieg zajęć, wskazuje mocne i słabe strony pracy uczniów, udzielając im tym samym informacji zwrotnej.

Praca domowa:

Zadaniem uczniów jest rozwiązanie polecenia 2.

Materiały pomocnicze:

- [Równania kwadratowe](#)

Wskazówki metodyczne:

Animacja może być wykorzystana przez chętnych uczniów jako materiał powtórzeniowy przed sprawdzianem. Animację można też wykorzystać, pokazując różne sposoby rozwiązywania równań - nie tylko dwukwadratowych.