



Ciąg argumentów i ciąg wartości funkcji

- [Wprowadzenie](#)
- [Przeczytaj](#)
- [Infografika](#)
- [Sprawdź się](#)
- [Dla nauczyciela](#)



Ciąg argumentów i ciąg wartości funkcji

Źródło: Scot Nelson, dostępny w internecie: www.goodfreephotos.com, domena publiczna.

Jak wiemy każdy ciąg jest funkcją, której dziedziną jest zbiór liczb naturalnych dodatnich. Wiemy już też co to jest granica ciągu. Okazuje się, że możemy uogólnić pojęcie granicy na dowolną funkcję. W tym temacie dowiemy się, czym są ciągi argumentów oraz ciągi wartości funkcji.

Twoje cele

- Dowiesz się, czym jest ciąg argumentów funkcji.
- Dowiesz się, czym jest ciąg wartości funkcji.
- Obliczysz granice ciągu argumentów oraz ciągu wartości dla konkretnych funkcji.

Przeczytaj

Niech $f : D_f \rightarrow \mathbb{R}$ będzie funkcją, której dziedziną jest zbiór D_f , a zbiorem wartości jest zbiór liczb rzeczywistych.

Czym jest ciąg argumentów funkcji?

Ciąg argumentów funkcji

Ciąg (x_n) którego wszystkie wyrazy należą do dziedziny funkcji f , tzn. ciąg spełniający warunek

$$\forall_{x \in \mathbb{N}} x_n \in D_f$$

nazywamy ciągiem argumentów funkcji f .

Aby lepiej zrozumieć, czym jest ciąg argumentów funkcji, spójrzmy na poniższe przykłady.

Przykład 1

Niech funkcja f będzie określona wzorem

$$f(x) = \begin{cases} 2x - 1 & \text{dla } x \in (0, 1) \\ 2 - x & \text{dla } x \in (1, 3) \end{cases}$$

Jak widzimy dziedziną funkcji f jest przedział $(0, 3)$.

Sprawdźmy, które z poniższych ciągów są ciągami argumentów funkcji f .

1. $x_n = n$
2. $x_n = \frac{1}{n}$
3. $x_n = 2 + \frac{1}{n}$

Rozwiązanie

1. Wypiszmy kilka kolejnych wyrazów ciągu: $x_1 = 1$, $x_2 = 2$, $x_3 = 3, \dots$. Ponieważ tylko $x_1 \in (0, 3)$, a pozostałe wyrazy tego ciągu nie należą do dziedziny funkcji f , więc ciąg x_n nie jest ciągiem argumentów funkcji f .
2. Jak wiemy, ciąg $x_n = \frac{1}{n}$ jako ciąg zbieżny do 0 oraz malejący, jest **ciągami ograniczonym**. Ponieważ $a_1 = 1$, więc dla każdego $n \in \mathbb{N}$ prawdą jest, że $x_n \in (0, 1) \subset (0, 3)$. Zatem wszystkie wyrazy ciągu x_n należą do dziedziny funkcji f co oznacza, że ciąg x_n jest ciągiem argumentów funkcji f .
3. Zauważmy, że $x_1 = 2 + 1 = 3 \notin (0, 3)$. Oznacza to, że ciąg x_n nie jest ciągiem argumentów funkcji f .

Przykład 2

Rozważmy funkcję daną wzorem

$$f(x) = \sqrt{6 - 2x}$$

Sprawdźmy, czy poniższe ciągi są ciągami argumentów funkcji f .

1. $x_n = 4 - n$
2. $x_n = n - 7$
3. $x_n = 4 - \frac{3}{n}$

Zanim sprawdzimy, czy podane ciągi są ciągami argumentów funkcji f , wyznaczmy jej dziedzinę. Ponieważ pierwiastek kwadratowy możemy obliczyć tylko dla liczb większych lub równych 0, więc argumenty funkcji f muszą spełniać warunek $6 - 2x \geq 0$.

Rozwiązując uzyskaną nierówność, widzimy, że $D_f = (-\infty, 3]$.

Rozwiązanie

1. Wypiszmy kolejne wyrazy ciągu x_n :

$$x_1 = 4 - 1 = 3, \quad x_2 = 4 - 2 = 2, \quad x_3 = 1, \quad x_4 = 0, \quad x_5 = (-1), \dots$$

Jak widzimy, ciąg x_n jest malejący oraz jego pierwszy wyraz jest równy 3, co oznacza, że wszystkie pozostałe wyrazy są mniejsze od 3. Zatem spełniony jest warunek (1), czyli ciąg x_n jest ciągiem argumentów funkcji f .

2. Wypiszmy kolejne wyrazy ciągu x_n :

$$x_1 = 1 - 7 = (-6), \quad x_2 = 2 - 7 = (-5), \quad x_3 = (-4), \quad x_4 = (-3), \quad x_5 = (-2), \dots$$

Ciąg x_n jest, jak widać, rosnący. Ponadto $x_{11} = 11 - 7 = 4 \notin D_f$. Zatem wszystkie wyrazy ciągu x_n , począwszy od wyrazu jedenastego, nie należą do dziedziny funkcji f , zatem ciąg ten nie jest ciągiem argumentów funkcji f .

3. Ponieważ $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = 4$, więc w dowolnym otoczeniu liczby 4 znajdują się **prawie wszystkie wyrazy ciągu** x_n . W szczególności do otoczenia o promieniu np. $\varepsilon = \frac{1}{2}$, czyli do przedziału $(4 - \frac{1}{2}, 4 + \frac{1}{2}) = (3\frac{1}{2}, 5\frac{1}{2})$, należą **prawie wszystkie wyrazy ciągu** x_n . Oczywiście żadna liczba należąca do przedziału $(3\frac{1}{2}, 5\frac{1}{2})$ nie należy do dziedziny funkcji f . Zatem ciąg x_n nie jest ciągiem argumentów funkcji f .

Ważne!

Aby wykazać, że ciąg x_n nie jest ciągiem argumentów danej funkcji f , wystarczy wskazać choć jeden jego wyraz, który nie należy do dziedziny funkcji f . W punktach 2. oraz 3. w powyższym przykładzie udało nam się wykazać więcej, tzn., że **prawie wszystkie wyrazy** danych ciągów nie należą do dziedziny funkcji f . W punkcie 3. już wskazanie, że

np. $x_6 = 4 - \frac{3}{6} = 3\frac{1}{2} \notin D_f$ wystarczy do tego, aby uzasadnić, że ciąg x_n nie jest ciągiem argumentów funkcji f .

Czym jest ciąg wartości funkcji?

Wiemy już, jak należy rozumieć ciąg argumentów funkcji. Pora, abyśmy przeszli do ciągu wartości danej funkcji.

Ciąg wartości funkcji

Jeżeli ciąg (x_n) jest ciągiem argumentów funkcji $f : D_f \rightarrow \mathbb{R}$, to ciąg $(f(x_n))$ nazywamy ciągiem wartości funkcji f .

Spójrzmy na przykład, który zilustruje pojęcie ciągu wartości funkcji.

Przykład 3

Niech funkcja $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ będzie określona wzorem

$$f(x) = x^2 + 1.$$

Rozważmy dwa ciągi

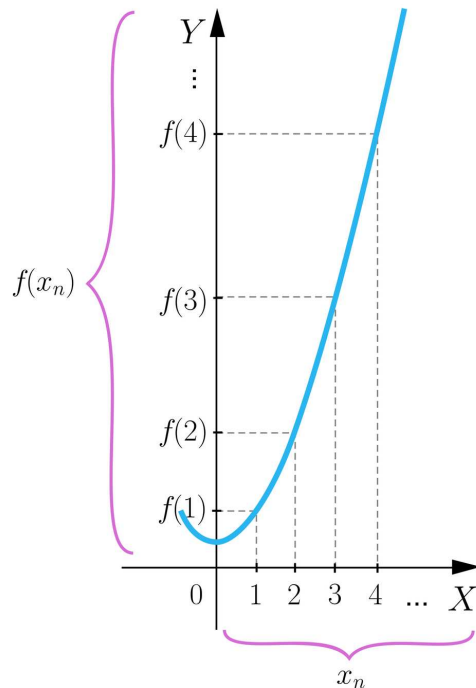
1. $x_n = n$,
2. $x_n = \frac{1}{n}$.

Wyznamy ciągi wartości dla podanych ciągów argumentów funkcji f .

Rozwiązanie

1. $f(x_1) = f(1) = 1 + 1 = 2$
 $f(x_2) = f(2) = 4 + 1 = 5$
 $f(x_3) = f(3) = 9 + 1 = 10$

Ogólnie ciąg wartości funkcji możemy zapisać, podstawiając w miejsce x do wzoru funkcji f wzór na wyraz ogólny ciągu argumentów x_n . Zatem w tym przypadku otrzymamy $f(x_n) = n^2 + 1$. Interpretację graficzną ciągu argumentów oraz ciągu wartości w tym przypadku przedstawia poniższy rysunek.



2. W tym przypadku ciąg argumentów jest równy $x_n = \frac{1}{n}$. Wstawiając ten wzór w miejsce x do wzoru funkcji f , dostaniemy postać ciągu wartości $f(x_n) = \frac{1}{n^2} + 1$. Stąd $f(x_1) = 2$, $f(x_2) = 1\frac{1}{4}$, $f(x_3) = 1\frac{1}{9}$, itd.

Ważne!

Z powyższego przykładu wynika, że postać ciągu wartości funkcji f jest ściśle związana z postacią ciągu argumentów tej funkcji i dla różnych ciągów argumentów x_n otrzymamy różne ciągi wartości $f(x_n)$.

Na koniec spójrzmy na jeszcze jeden przykład.

Przykład 4

Niech funkcja $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ będzie określona wzorem

$$f(x) = \cos(x).$$

Zapiszemy ciągi wartości tej funkcji dla ciągów argumentów

1. $x_n = 2n\pi$,
2. $x_n = (2n + 1)\pi$.

Rozwiązanie

1. Jak wiemy $\cos(0) = \cos(2\pi) = 1$. Z okresowości funkcji cosinus wynika zatem, że cosinus jest równy 1 dla każdej parzystej wielokrotności π . Zatem $f(x_n) = \cos(2n\pi) = 1$ dla każdego $n \in \mathbb{N}$, czyli ciąg wartości funkcji $f(x) = \cos(x)$ jest w tym przypadku stały i równy 1.

2. Ponieważ $\cos(\pi) = (-1)$, więc z okresowości funkcji cosinus wynika zatem, że $\cos(3\pi) = (-1)$, $\cos(5\pi) = (-1)$, itd. Zatem cosinus jest równy (-1) dla każdej nieparzystej wielokrotności π . Stąd $f(x_n) = \cos((2n + 1)\pi) = (-1)$ dla każdego $n \in \mathbb{N}$, czyli ciąg wartości funkcji $f(x) = \cos(x)$ jest w tym przypadku stały i równy (-1) .

Słownik

prawie wszystkie wyrazy ciągu

wszystkie wyrazy ciągu poza co najwyżej ich skończoną ilością

ciąg ograniczony

ciąg a_n , $n \in \mathbb{N}$ jest ograniczony, jeśli istnieją liczby rzeczywiste $m, M \in \mathbb{R}$ takie, że dla każdego $n \in \mathbb{N}$ zachodzą nierówności

$$m \leq a_n \leq M$$

Infografika

Polecenie 1

Na poniższej infografice przedstawiono sposób, dzięki któremu można sprawdzić, czy dany ciąg x_n jest ciągiem argumentów funkcji f . Zapoznaj się z przedstawionym w infografice rozwiązaniem, a następnie wykonaj zamieszczone pod nią polecenia.

Polecenie 2

Korzystając ze sposobu przedstawionego w infografice, sprawdź, czy ciąg x_n jest ciągiem argumentów funkcji f , jeśli

$$f(x) = \frac{3x-2}{x^2-5x+4} \quad , \quad x_n = 4 - \frac{9}{n}.$$

Jeśli tak, to oblicz $f(x_3)$.

Polecenie 3

Korzystając ze sposobu przedstawionego w infografice, sprawdź, czy ciąg x_n jest ciągiem argumentów funkcji f , jeśli

$$f(x) = \frac{2x+1}{x^2-1} \quad , \quad x_n = 1 - \frac{1}{n}.$$

Jeśli tak, to oblicz $f(x_2)$.

Sprawdź się

Pokaż ćwiczenia:   

Ćwiczenie 1



Czy ciąg $x_n = \frac{2n+5}{n+1}$ jest ciągiem argumentów funkcji $f(x) = \sqrt{x-3}$?

☐ Nie

☐ Tak

Ćwiczenie 2



Który z podanych ciągów NIE jest ciągiem argumentów funkcji $f(x) = \sqrt{4-x}$?

☐ $x_n = \sqrt[n]{10}$

☐ $x_n = \frac{n+1}{3n+1}$

☐ $x_n = 5 - \frac{5}{n}$

☐ $x_n = \frac{4n-1}{n}$

Ćwiczenie 3



Dany jest ciąg $x_n = \frac{n-1}{n^2+4}$. Wskaż funkcje, dla których jest on ciągiem argumentów.

☐ $f(x) = \frac{x}{x^2-4}$

☐ $f(x) = \frac{1}{x}$

☐ $f(x) = x^2 + 5$

☐ $f(x) = \sqrt{x-1}$

Ćwiczenie 4



Uzupełnij.

Ciąg $x_n = 4n - 2$ ciągiem argumentów funkcji $f(x) = \frac{1}{\sqrt{x-2}}$, ponieważ dla .

☐ $x_n \notin D_f$

☐ dla każdego $n \in \mathbb{N}$

☐ $x_n \in D_f$

☐ $n = 2$

☐ $n = 1$

☐ nie jest☐ jest

Ćwiczenie 5



Uzupełnij.

Ciąg $x_n = 2n - 1$ ciągiem argumentów funkcji $f(x) = \frac{x-3}{(x-2)(x-4)}$, ponieważ .

☐ $x_n = 2$

☐ dla każdego $n \in \mathbb{N}$

☐ $x_n = 4$

☐ jest☐ nie jest

☐ $x_n \neq 2$ i $x_n \neq 4$

☐ dla pewnego $n \in \mathbb{N}$

Ćwiczenie 6



Które z podanych ciągów są ciągami argumentów funkcji $f(x) = \frac{2x-8}{x^2-2x-3}$? Zaznacz w tabeli poprawne odpowiedzi.

ciąg	jest	nie jest
$x_n = 1 - \frac{1}{n}$	☐	☐
$x_n = 1 + \frac{2}{n}$	☐	☐
$x_n = 2n - 5$	☐	☐
$x_n = 2 - n$	☐	☐

Ćwiczenie 7



Dany jest ciąg $x_n = 2 - \frac{3}{n}$. Ciągami argumentów których z podanych funkcji jest? Zaznacz w tabeli poprawne odpowiedzi.

funkcja	jest	nie jest
$f(x) = x - 1$	☐	☐
$f(x) = \sqrt{2 - x}$	☐	☐
$f(x) = \frac{2}{2x-3}$	☐	☐
$f(x) = \frac{1}{x^2-1}$	☐	☐

Ćwiczenie 8



Dopasuj podane ciągi do funkcji, dla których są one ich ciągami argumentów.

$$f(x) = \sqrt{-x-2}$$

$$x_n = 2 + \frac{1}{n}$$

$$x_n = \frac{-2n}{n+1}$$

$$x_n = \frac{1-3n}{n}$$

$$x_n = \frac{2n}{n+1}$$

$$x_n = -2n$$

$$x_n = (-1)^n$$

$$x_n = 3n - 1$$

$$x_n = 2 - \frac{1}{n}$$

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{4-x^2}}$$

$$f(x) = \sqrt{3x-6}$$

Dla nauczyciela

Autor: Mariusz Doliński

Przedmiot: Matematyka

Temat: Ciąg argumentów i ciąg wartości funkcji

Grupa docelowa: III etap edukacyjny, liceum, technikum, zakres rozszerzony

Podstawa programowa:

XIII. Optymalizacja i rachunek różniczkowy.

Zakres rozszerzony. Uczeń spełnia wymagania określone dla zakresu podstawowego, a ponadto:

1. oblicza granice funkcji (w tym jednostronne).

Kształtowane kompetencje kluczowe:

- kompetencje w zakresie rozumienia i tworzenia informacji;
- kompetencje matematyczne oraz kompetencje w zakresie nauk przyrodniczych, technologii i inżynierii
- kompetencje cyfrowe
- kompetencje osobiste, społeczne i w zakresie umiejętności uczenia się

Cele operacyjne:

Uczeń:

- opisuje czym jest ciąg argumentów funkcji,
- opisuje czym jest ciąg wartości funkcji,
- oblicza granice ciągu argumentów oraz ciągu wartości dla wskazanych funkcji,
- ocenia, czy ciąg jest ciągiem argumentów wskazanej funkcji.

Strategie nauczania:

- konstruktywizm;
- konektywizm.

Metody i techniki nauczania:

- odwrócona klasa;
- dyskusja;

- liga zadaniowa.

Formy pracy:

- praca indywidualna;
- praca w parach;
- praca w grupach;
- praca całego zespołu klasowego.

Środki dydaktyczne:

- komputery z głośnikami, słuchawkami i dostępem do internetu;
- zasoby multimedialne zawarte w e-materiale;
- tablica interaktywna/tablica, pisak/kreda.

Przebieg lekcji

Przed lekcją:

1. Uczniowie zapoznają się z treściami zapisanymi w sekcji „Przeczytaj”.

Faza wstępna:

1. Wskazanie przez nauczyciela tematu: „Ciąg argumentów i ciąg wartości funkcji” i celów zajęć, przejście do wspólnego ustalenia kryteriów sukcesu.
2. Rozpoznawanie wiedzy uczniów. Uczniowie tworzą pytania dotyczące tematu zajęć, na które odpowiedzą w trakcie lekcji.

Faza realizacyjna:

1. Nauczyciel prosi, aby wybrany uczeń przeczytał polecenie numer 1 z sekcji „Infografika” – „Na poniższej infografice przedstawiono w jaki sposób można sprawdzić czy dany ciąg jest ciągiem argumentów funkcji . Zapoznaj się z przedstawionym w infografice rozwiązaniem a następnie wykonaj zamieszczone pod nią polecenia.” Następnie prosi uczniów, aby zapoznali się z materiałem. Po ustalonym wcześniej czasie pyta czy były wątpliwości z jego zrozumieniem i tłumaczy je.
2. Prowadzący zapowiada uczniom, że w kolejnym kroku będą rozwiązywać ćwiczenia nr 1 i 2 z sekcji „Sprawdź się”. Każdy z uczniów robi to samodzielnie. Po ustalonym czasie wybrani uczniowie przedstawiają rozwiązania. Nauczyciel w razie potrzeby koryguje odpowiedzi, dopowiada istotne informacje, udziela uczniom informacji zwrotnej.
3. W następnym kroku uczniowie wykonują w grupach ćwiczenia numer 3, 4 i 5. Następnie wybrana grupa prezentuje swoje rozwiązania. Nauczyciel w razie potrzeby uzupełnia informacje.
4. Uczniowie indywidualnie wykonują ćwiczenia nr 6-8, ale następnie konsultują swoje rozwiązania z innym uczniem i zapisują na kartce problemy, które mieli podczas ich

wykonywania.

Faza podsumowująca:

1. Omówienie ewentualnych problemów z rozwiązaniem ćwiczeń z sekcji „Sprawdź się”.
2. Nauczyciel omawia przebieg zajęć, wskazuje mocne i słabe strony pracy uczniów, udzielając im tym samym informacji zwrotnej.

Praca domowa:

1. Uczniowie opracowują FAQ (minimum 3 pytania i odpowiedzi prezentujące przykład i rozwiązanie) do tematu lekcji („Ciąg argumentów i ciąg wartości funkcji”).

Materiały pomocnicze:

- [Ciąg arytmetyczny](#)
- [Ciągi – własności ciągów arytmetycznych](#)
- [Ciągi – suma wyrazów ciągu arytmetycznego](#)

Wskazówki metodyczne:

- Medium w sekcji „Infografika” można wykorzystać na lekcji jako podsumowanie i utrwalenie wiedzy w temacie „Ciąg argumentów i ciąg wartości funkcji”.