Długość okręgu

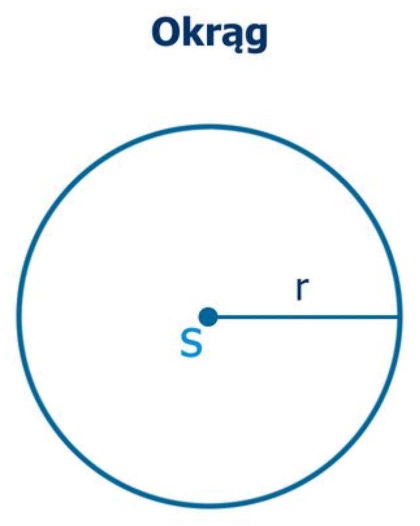
Rektyfikacja okręgu. Obliczanie długości okręgu - przykłady, obliczania. Liczba Pi i jej przybliżenia. Ciekawostki o liczbie Pi. Ilustracja interaktywna opisująca okrąg. Prezentacja multimedialna rektyfikacji okręgu. Ilustracja interaktywna o długości okręgu i obwodzie koła.

Zmiany długości okręgu w zależności od długości promienia. Ilustracja interaktywna: Stosunek długości okręgu do jego średnicy. Animacja: Zależność długości okręgu od jego promienia.

Długość okręgu

Czy wiesz, jaką długość ma okrąg o danym promieniu? Oczywistym jest, że im dłuższy jest promień okręgu, tym większa jest długość okręgu. Jeżeli rozetniemy okrąg i „wyprostujemy” tą krzywą to otrzymamy odcinek, którego długość jest równa długości okręgu.
To „wyprostowanie” okręgu nazywa się rektyfikacją i polega na skonstruowaniu odcinka, którego długość jest równa obwodowi danego okręgu. Już bardzo dawno temu uczeni poszukiwali wzoru pozwalającego obliczyć długość okręgu. Zauważyli oni, że stosunek długości okręgu do długości średnicy jest dla dowolnego okręgu zawsze taki sam.
W tym materiale będziesz korzystać ze wzoru na długość okręgu w rozwiązywaniu problemów teoretycznych i praktycznych.

Okrąg

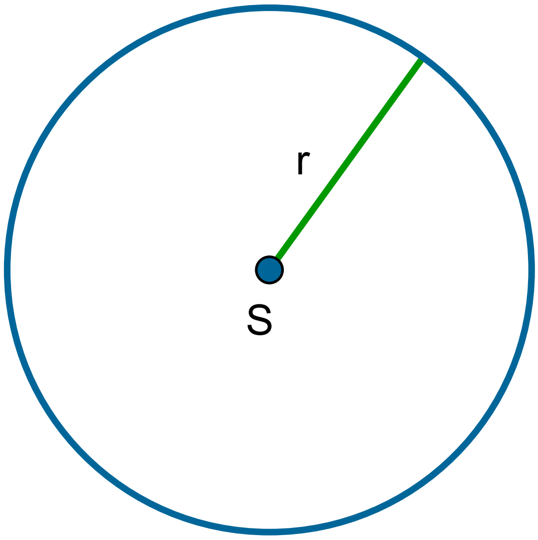


Film dostępny pod adresem /preview/resource/R1ZWWaC0z6ZjA

Animacja pokazuje, czym jest okrąg.

Zapamiętaj!

Okręgiem o środku w punkcie S i promieniu r nazywamy zbiór wszystkich punktów płaszczyzny, których odległość od punktu S jest równa r.
Okrąg o środku w punkcie S i promieniu r oznaczamy $O(S, r)$.



Źródło: Zespół autorski Politechniki Łódzkiej, licencja: CC BY 3.0.

Długość okręgu

Przez wiele stuleci uczeni poszukiwali wzoru pozwalającego określić długość okręgu, którego promień jest znany. Dokonując przybliżonych pomiarów, zauważyli, że stosunek długości okręgu do jego średnicy jest w każdym przypadku w przybliżeniu równy 3. Zapoznaj się z poniższym apletem.

Zasób interaktywny dostępny pod adresem https://zpe.gov.pl/b/PiLYuQqII

Źródło: Zespół autorski Politechniki Łódzkiej, licencja: CC BY 3.0.

Przeprowadzony eksperyment pozwolił na znalezienie dokładniejszej liczby określającej stosunek długości okręgu do jego średnicy.
Liczbę tę w XVIII w. oznaczono grecką literą π (pi) od pierwszej litery greckiego słowa perimetron, czyli obwód.

$$\pi = \frac{\text{długość okręgu}}{\text{średnica okręgu}}.$$

Oznaczmy:
L – długość okręgu,
r – promień okręgu.
Wtedy średnica okręgu jest równa $2r$ oraz

$$\pi = \frac{L}{2r}$$

$$2\pi r = L.$$

Ważne!

Długość okręgu L o promieniu r wyraża się wzorem $L = 2\pi r$.

Zapoznaj się z poniższym apletem.

Zasób interaktywny dostępny pod adresem https://zpe.gov.pl/b/PiLYuQqII

Liczba π

Ciekawostka

Starożytni Egipcjanie przyjmowali, że stosunek obwodu koła do jego średnicy jest równy

$$\left(\frac{4}{3}\right)^4 \approx 3,1604\ldots$$

Średniowieczni Chińczycy uważali, że jest on równy $\frac{22}{7} \approx 3,1428\ldots$
Przez wieki podawano coraz lepsze przybliżenie liczby π.
W XVI w. matematyk holenderski Ludolph van Ceulen [Ludolf fan keule] podał jej wartość z dokładnością do 35 miejsc po przecinku:
$3,14159265358979323846264338327950288\ldots$
Na cześć tego matematyka liczba pi zwana jest też ludolfiną.
W XVIII w. udowodniono, że liczba π nie jest liczbą wymierną. Nie da się jej zatem zapisać w postaci ułamka dziesiętnego skończonego, ani w postaci ułamka dziesiętnego nieskończonego okresowego.
Obecnie znamy przybliżenie liczby π z dokładnością do kilku bilionów miejsc po przecinku.

Rektyfikacja koła

Ciekawostka

Rektyfikacja lub wyprostowanie okręgu polega na skonstruowaniu odcinka, którego długość jest równa obwodowi danego okręgu.
Jedną z przybliżonych konstrukcji wyprostowania okręgu podał w 1685 r. Adam Kochański, nadworny matematyk króla Jana III Sobieskiego.

Fragment dzieła Kochańskiego “Acta Eruditorium”

Zasób interaktywny dostępny pod adresem https://zpe.gov.pl/b/PiLYuQqlI

Źródło: Zespół autorski Politechniki Łódzkiej, licencja: CC BY 3.0.

Przykład 1

W I w. p.n.e. rzymski architekt Witruwiusz zaproponował sposób pomiaru odległości drogowych, wykorzystujący poruszający się rydwan. Koło takiego rydwanu miało promień $0,6$ m. Na pokonanie jednej mili rzymskiej (1400 m) musiało wykonać 400 obrotów.

Źródło: Zespół autorski Politechniki Łódzkiej, licencja: CC BY 3.0.

Oblicz wartość liczby π, przyjmowaną przez Witruwiusza.

Rozwiązanie:

$$400 \cdot 2\pi r = 1400$$

$$400 \cdot 2\pi \cdot 0,6 = 1400$$

$$\pi = \frac{1400}{480} \approx 2,92.$$

Ważne!

W obliczeniach praktycznych najczęściej przyjmuje się, że $\pi \approx 3,14$.

Przykład 2

Średnica kółka do deskorolki jest równa $50\ \text{mm}$. Obliczymy, ile razy obróci się to kółko na drodze długości $1\ \text{m}$.

Rozwiązanie:

Obliczamy długość drogi, jaką pokona kółko podczas jednego obrotu, czyli obwód kółka.

$$L = 2r \cdot \pi$$

$$L \approx 50 \cdot 3,14$$

$$L \approx 157\ \text{mm}.$$

Zamieniamy metr na milimetry.

$$1\ \text{m} = 1000\ \text{mm}.$$

Obliczamy, ile razy obróci się kółko.

$$1000 : 157 = 6,369\ldots$$

Kółko obróci się około 6 razy.

Przykład 3

Obliczymy długość okręgu o promieniu $9\ \text{cm}$.

Rozwiązanie:

Korzystamy ze wzoru na długość okręgu, tym razem nie zastępując liczby π jej wartością przybliżoną.

$$L = 2\pi r$$

$$L = 2\pi \cdot 9 = 18\pi$$

$$L = 18\pi \, \mathrm{cm}.$$

Długość okręgu jest równa 18π cm.

Przykład 4

Obliczymy przybliżoną długość promienia koła o obwodzie $50 \ \mathrm{cm}$.

Rozwiązanie:

Oznaczymy przez r przybliżoną długość (w cm) promienia koła i skorzystamy ze wzoru ma długość okręgu.

$$L = 2\pi r$$

$$2\pi r = 50$$

$$r = \frac{50}{2\pi}$$

$$r \approx \frac{50}{2 \cdot 3,14}$$

$$r \approx 8 \ \mathrm{cm}.$$

Promień koła ma około $8 \ \mathrm{cm}$ długości.

Przykład 5

Koniec dużej wskazówki zegara w ciągu godziny pokonał drogę długości $94,2 \, \mathrm{cm}$. Obliczymy przybliżoną długość tej wskazówki.

Rozwiązanie:

Oznaczmy przez x długość (w cm) dłuższej wskazówki zegara i skorzystajmy ze wzoru na obwód koła.

$$L = 2\pi x$$

$$x = \frac{L}{2\pi}$$

$$x \approx \frac{94,2}{2 \cdot 3,14}$$

$$x \approx 15 \text{ cm.}$$

Wskazówka ma około 15 cm długości.

Przykład 6

Basia spakowała prezent dla swojej siostry w rulon o średnicy 12 cm. Czy starczy jej 120 cm wstążki na obwiązanie tego prezentu w dwóch miejscach skoro na węzeł i kokardę potrzeba 25 cm?

Rozwiązanie:

Zaczniemy od obliczenia obwodu rulonu.

Wyznaczymy do tego jego promień, czyli

$r = 12 \text{ cm} : 2 = 6 \text{ cm}.$

Zatem obwód rulonu jest równy

$L = 2\pi r = 2 \cdot 6 \text{ cm} \cdot 3,14 \approx 37,68 \text{ cm}.$

Na jedno obwiązanie potrzeba $37,68 \text{ cm} + 25 \text{ cm} = 62,68 \text{ cm}$, zatem na dwa $62,68 \text{ cm} \cdot 2 = 125,36 \text{ cm}$.

Oznacza to, że Basi nie starczy wstążki na obwiązanie prezentu w dwóch miejscach.

Przykład 7

Sprawdzimy, czy z drutu o długości 280 cm można uformować trzy obręcze, każda o promieniu 15 cm?

Rozwiązanie:

Najpierw obliczymy obwód jednej obręczy.
$L = 2\pi r$
$L = 2\pi \cdot 15 = 30\pi \approx 30 \cdot 3,14 = 94,2.$
Zatem na trzy obręcze potrzeba:
$94,2 \cdot 3 = 282,6 \text{ cm}.$
Oznacza to, że 280 cm drutu nie wystarczy na wykonanie trzech obręczy o promieniu 15 cm każda.

Przykład 8

Która z figur ma większy obwód: okrąg o promieniu 3 cm, czy trójkąt równoboczny o boku długości 6 cm?

Rozwiązanie:

Zacznijmy od wyznaczenia obwodu okręgu, czyli

$L = 2\pi r = 2 \cdot 3 \text{ cm} \cdot 3,14 \approx 18,84 \text{ cm}.$

Obwód trójkąta jest równy $3 \cdot 6 \text{ cm} = 18 \text{ cm}.$

Wynika stąd, że obwód okręgu jest większy od obwodu trójkąta równobocznego.

Ćwiczenie 1

Dany jest okrąg o obwodzie 32 cm. Uzupełnij poniższą lukę. Kliknij w nią, aby rozwinąć listę, a następnie wybierz prawidłową odpowiedź. Przyjmij $\pi = 3,14$.

Odpowiedź: Promień okręgu wynosi około ______.

$4,87 \text{ cm}$ | $5,9 \text{ cm}$ | $6,21 \text{ cm}$ | $5,10 \text{ cm}$ | $5,01 \text{ cm}$

Ćwiczenie 2

Połącz w pary długości okręgów z odpowiadającymi im promieniami.

$L = 36\pi$	$r = 18$
$L = 20\pi$	$r = 24$
$L = 8\pi$	$r = 10$
$L = 12\pi$	$r = 6$
$L = 48\pi$	$r = 4$

Ćwiczenie 3

Uzupełnij tabelkę. Przeciągnij w luki odpowiednie liczby.

Promień okręgu	Średnica okręgu	Obwód okręgu
8		
	20	
		24π
11		

12 16π 22 22π 20π 16 24 10

Ćwiczenie 4

Łańcuch wykonany jest z 45 ogniw. Każde z nich jest w kształcie okręgu o średnicy 5 cm. Zaznacz zdanie prawdziwe.

- Gdyby łańcuch składał się z 50 ogniw, to miałby długość 3 m.
- Łańcuch ma długość $2,25 \text{ m}$.
- Gdyby średnica jednego ogniwa zwiększyła się dwukrotnie, to długość łańcucha zwiększyłaby się czterokrotnie.
- Łańcuch jest krótszy niż 2 m.

Ćwiczenie 5

Obwód obręczy kosza do gry w koszykówkę wynosi około $141,3 \text{ cm}$. Oblicz długość średnicy tego kosza. Wpisz w lukę odpowiednią liczbę. Przyjmij $\pi = 3,14$.

Odpowiedź: Średnica kosza wynosi około ______ cm.

Ćwiczenie 6

Rozstrzygnij, czy podane zdanie jest prawdziwe, czy fałszywe. Zaznacz wszystkie zdania prawdziwe.

- [ ] Jeśli dwa okręgi mają równe obwody, to są współśrodkowe.
- [ ] Długość okręgu wyraża się zawsze liczbą wymierną.
- [ ] Dla każdego okręgu stosunek jego obwodu do średnicy jest stały.
- [ ] Jeśli dwa okręgi mają równe promienie, to są przystające.

Ćwiczenie 7

Dokończ zdania tak, aby otrzymać zdania prawdziwe. Wpisz w luki odpowiednie liczby.

- Promień koła o obwodzie 16π wynosi ______.
- Średnica koła o obwodzie π wynosi ______.

Ćwiczenie 8

Wyścig polega na wykonaniu dziesięciu okrążeń wokół toru w kształcie okręgu o promieniu $1{,}2\ \mathrm{km}$. Trasę jakiej długości pokonuje samochód podczas wyścigu? Zaznacz poprawną odpowiedź. Przyjmij $\pi = 3,14$.

- $12\,\mathrm{km}$
- $70,5\ \mathrm{km}$
- $75,36\,\mathrm{km}$
- $72,56\,\mathrm{km}$

Ćwiczenie 9

Koło oraz romb o przekątnych długości $8\ \text{cm}$ i $6\ \text{cm}$ mają taki sam obwód. Ile wynosi promień koła? Zaznacz poprawną odpowiedź.

- $\frac{\pi}{10}\ \text{cm}$
- $\frac{\pi}{20}\ \text{cm}$
- $\frac{20}{\pi}\ \text{cm}$
- $\frac{10}{\pi}\ \text{cm}$

Ćwiczenie 10

Natalia zrobiła z kolorowych koralików gumkę do włosów o obwodzie równym $6\pi\ \text{cm}$. Chciałaby zrobić dla Kingi podobną gumkę, jednak o obwodzie mniejszym o $2\pi\ \text{cm}$. Jaki promień będzie miała gumka Kingi? Zaznacz poprawną odpowiedź.

- $4\ \text{cm}$
- $4\pi\ \text{cm}$
- $2\ \text{cm}$
- $2\pi\ \text{cm}$

Ćwiczenie 11

Trzy dyplomy zwinięte w rulony, każdy o średnicy $6\ \mathrm{cm}$, należy obwiązać wstążką. Jaka długa powinna być wstążka, jeśli na jeden węzeł i jedną kokardkę potrzeba $20\ \mathrm{cm}$? Wynik zaokrąglij do drugiego miejsca po przecinku. Uzupełnij poniższą lukę. Kliknij w nią, aby rozwinąć listę, a następnie wybierz poprawną odpowiedź.

Odpowiedź: Wstążka powinna mieć długość około ______ cm.

$115,52$ $114,51$ $116,51$ $114,53$ $116,52$ $115,52$

Ćwiczenie 12

Odpowiedz na pytania. Wpisz w luki odpowiednie liczby.

- Ile razy obwód koła o promieniu 8 jest większy od długości okręgu o średnicy 4?

  Odpowiedź: Obwód jest większy ______ razy.

- Ile razy obwód koła o promieniu 8 jest większy od długości okręgu o promieniu 1?

  Odpowiedź: Obwód jest większy ______ razy.

Ćwiczenie 13

Ile razy zwiększy się długość okręgu, jeśli jego promień zwiększymy dwukrotnie? Wpisz w lukę odpowiednią liczbę.

Odpowiedź: Długość okręgu zwiększy się ______ razy.

Ćwiczenie 14

Jak zmieni się długość okręgu, jeśli jego średnicę zmniejszymy o 2? Zaznacz prawidłową odpowiedź.

- Zmniejszy się o 4π.
- Zmniejszy się o 3π.
- Zwiększy się o 4π.
- Zmniejszy się o 2π.
- Zwiększy się o 2π.
- Zwiększy się o 3π.

Ćwiczenie 15

Zaznacz, czy zdanie jest prawdziwe, czy fałszywe.

Zdanie	Prawda	Fałsz
Z drutu o długości 73 cm, można wykonać obręcz o promieniu długości około $11,5 \text{ cm}$.	◯	◯
Z drutu o długości 80 cm, można wykonać obręcz o promieniu długości około $12,8 \text{ cm}$.	◯	◯
Z drutu o długości 56 cm można wykonać dwie obręcze o promieniu długości 9 cm.	◯	◯

Ćwiczenie 16

Ustaw obwody figur od najmniejszego do największego.

- Romb o przekątnych długości 6 cm i 8 cm.
- Kwadrat o boku równym 4 cm.
- Prostokąt o bokach długości 10 cm oraz 12 cm.
- Trójkąt równoboczny o boku równym 5 cm.
- Okrąg o promieniu 6 cm.

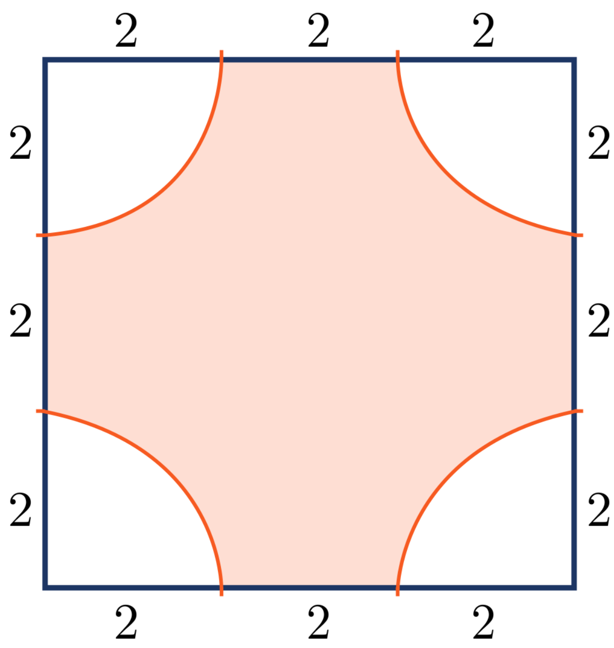
Ćwiczenie 17

Jubiler zrobił obrączkę o promieniu 7 mm. Przyszła panna młoda ma palec o obwodzie 5 cm. Zaznacz wszystkie zdania prawdziwe.

- [ ] Promień palca panny młodej wynosi około 8 mm.
- [ ] Obwód obrączki jest większy od $4,5$ cm.
- [ ] Obrączka zmieści się na palec przyszłej panny młodej.
- [ ] Obrączka będzie za mała dla przyszłej panny młodej.

Ćwiczenie 18

Oblicz obwód zacieniowanej figury przedstawionej na rysunku.



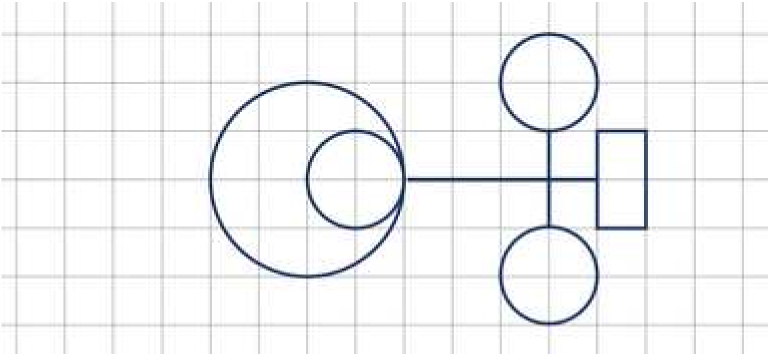
Kliknij w lukę, aby rozwinąć listę i wybierz odpowiednie liczby.

Obwód figury= ______ + ______ π.

7 5 3 4 8 2 6

Ćwiczenie 19

Oblicz łączną długość narysowanych linii. Przyjmij długość jednej kratki jako odcinek jednostkowy.



Źródło: Zespół autorski Politechniki Łódzkiej, licencja: CC BY 3.0.

Zaznacz prawidłową odpowiedź.

- $L = 6\pi + 12$
- $L = 10(\pi + 2)$
- $L = 10\pi + 12$
- $L = 7\pi + 12$

Źródło: Zespół autorski Politechniki Łódzkiej, licencja: CC BY 3.0.

Ćwiczenie 20

Tomek zwinął mapę Polski w rulon o średnicy $8 \ \mathrm{cm}$. Ile sznurka potrzebuje na związanie tego rulonu, jeżeli na kokardę potrzebuje dodatkowo $15 \ \mathrm{cm}$ sznurka?

Źródło: Zespół autorski Politechniki Łódzkiej, licencja: CC BY 3.0.

Ćwiczenie 21

Martyna postanowiła ogrodzić swój ogródek w kształcie ćwiartki koła o promieniu $63\ \mathrm{m}$. Siatka ogrodzeniowa pakowana jest w rolkach po $50\ \mathrm{m}$. Ile paczek musi kupić Martyna, aby ogrodzić swój ogród, uwzględniając miejsce na furtkę szerokości $2\ \mathrm{m}$? Przyjmij $\pi = \frac{22}{7}$.