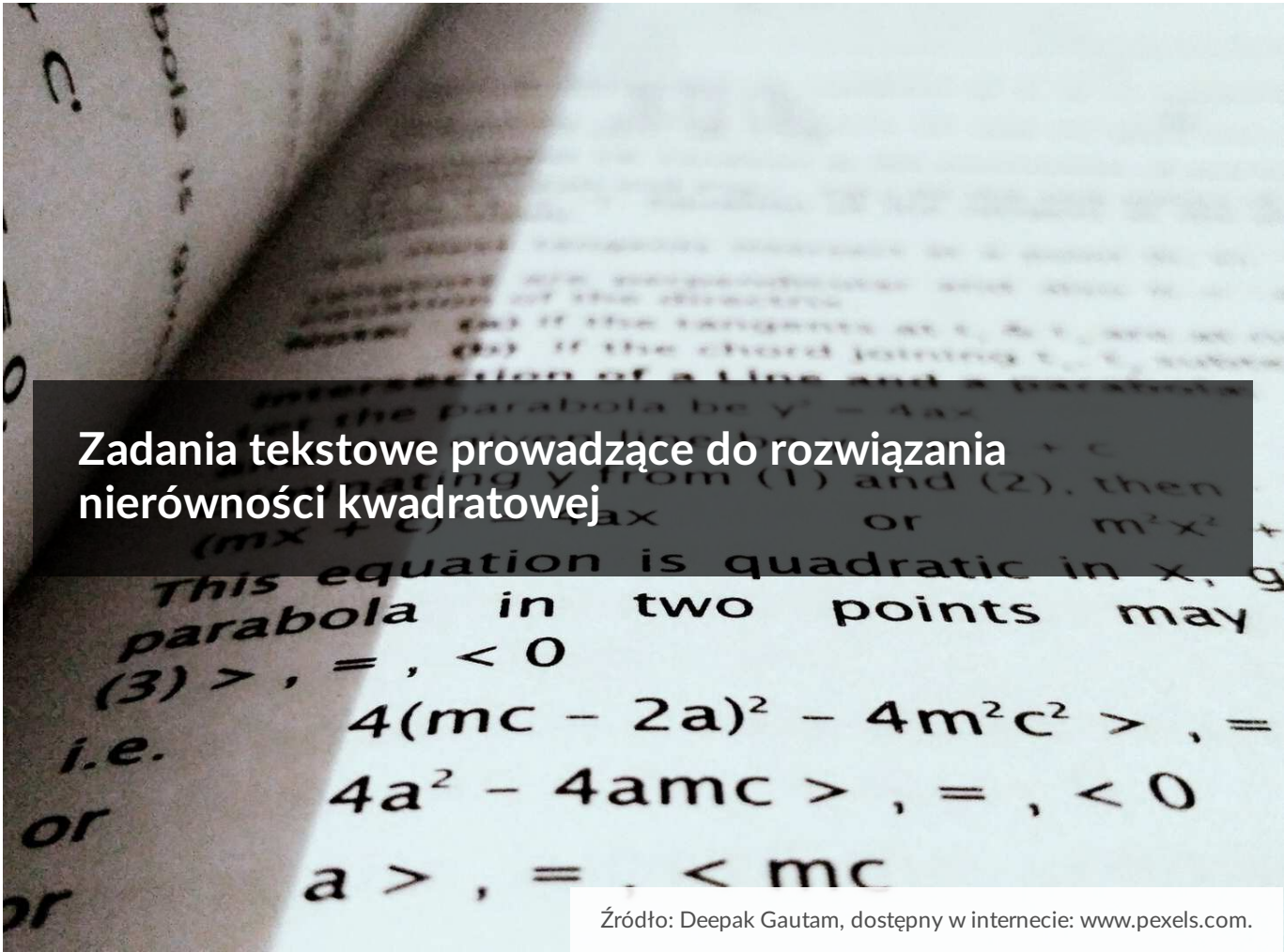




Zadania tekstowe prowadzące do rozwiązania nierówności kwadratowej

- [Wprowadzenie](#)
- [Przeczytaj](#)
- [Galeria zdjęć interaktywnych](#)
- [Sprawdź się](#)
- [Dla nauczyciela](#)



Zadania tekstowe prowadzące do rozwiązania nierówności kwadratowej

Źródło: Deepak Gautam, dostępny w internecie: www.pexels.com.

Nierówności kwadratowe bardzo często wykorzystuje się jako narzędzie do rozwiązywania problemów z innych dziedzin wiedzy, na przykład z geometrii, teorii liczb lub zadań dotyczących lokat bankowych.

Słownik języka polskiego definiuje liczbę jako podstawowe pojęcie matematyczne, którego treścią jest wynik liczenia, wyrażane najczęściej za pomocą cyfr.

W tym materiale zajmiemy się zapisywaniem i rozwiązywaniem nierówności kwadratowych opisujących zależności między liczbami, pojęciami geometrycznymi, wielkościami bankowymi.

Twoje cele

- Zapiszesz i rozwiążesz nierówność kwadratową opisującą zależności między danymi.
- Ustalisz współczynniki nierówności kwadratowej tak, aby nierówność opisywała sytuację przedstawioną w zadaniu.
- Dobierzesz nierówność do treści zadania.

Przeczytaj

W zadaniach zajmiemy się między innymi problemami związanymi z oprocentowaniem lokat i kapitalizacją odsetek w kilku okresach oszczędzania.

Przypomnimy wzór na procent składany, pozwalający obliczyć wielkość kapitału zgromadzonego po n latach oszczędzania.

$$K_n = K \cdot \left(1 + \frac{p}{k}\right)^{n \cdot k}$$

K – kapitał początkowy

n – liczba lat oszczędzania

p – oprocentowanie w skali roku, wyrażone w ułamku dziesiętnym

k – liczba kapitalizacji w ciągu roku

K_n – kapitał zgromadzony po n latach oszczędzania

Przykład 1

Pani Zosia wpłaciła do banku na dwuletnią lokatę kwotę 5000 zł. Kapitalizacja odsetek jest naliczana w banku po każdym roku oszczędzania. Po dwóch latach pani Zosia odebrała z banku kwotę nie mniejszą niż 5618 zł. Obliczymy jakie było roczne oprocentowanie tej lokaty (nie uwzględniamy podatku od dochodu).

Niech:

x – oznacza roczne oprocentowanie lokat (wyrażone w ułamku dziesiętnym).

Korzystając z wzoru na procent składany mamy:

$$5000 \cdot (1 + x)^2 \geq 5618$$

$$(1 + x)^2 \geq 1,1236$$

$$|1 + x| \geq 1,06$$

$$1 + x \geq 1,06 \text{ lub } 1 + x \leq -1,06$$

$$x \geq 0,06 \text{ lub } x \leq -2,06$$

sprzeczność

Oprocentowanie lokaty w stosunku rocznym było nie mniejsze niż 6%.

Przykład 2

Długości boków trójkąta są kolejnymi dwucyfrowymi liczbami naturalnymi niepodzielnymi przez 4. Obliczymy te liczby, jeżeli wiadomo że suma ich kwadratów jest nie większa od 590.

Kolejne liczby naturalne niepodzielne przez 4 to $4n + 1$, $4n + 2$, $4n + 3$ dla $n \in \mathbb{N}$.

Zapiszemy i rozwiążemy nierówność opisującą sytuację przedstawioną w zadaniu.

$$(4n + 1)^2 + (4n + 2)^2 + (4n + 3)^2 \leq 590$$

$$16n^2 + 8n + 1 + 16n^2 + 16n + 4 + 16n^2 + 24n + 9 \leq 590$$

$$48n^2 + 48n - 576 \leq 0 \quad | : 48$$

$$n^2 + n - 12 \leq 0$$

$$(n + 4)(n - 3) \leq 0$$

$$n \in \langle -4, 3 \rangle \text{ i } n \in \mathbb{N}$$

$$n \in \{0, 1, 2, 3\}$$

Dla $n = 0$ otrzymujemy liczby 1, 2, 3.

Dla $n = 1$ otrzymujemy liczby 5, 6, 7.

Dla $n = 2$ otrzymujemy liczby 9, 10, 11.

Liczby nie spełniają warunków zadania, bo nie są dwucyfrowe.

Dla $n = 3$ otrzymujemy liczby 13, 14, 15.

Długości boków trójkąta to 13, 14, 15.

Przykład 3

Wyznamy trzy kolejne liczby naturalne takie, że podwojona różnica kwadratów trzeciej i pierwszej liczby jest większa od kwadratu drugiej liczby.

Kolejne liczby naturalne, to n , $n + 1$, $n + 2$ dla $n \in \mathbb{N}$.

$$2[(n + 2)^2 - n^2] > (n + 1)^2$$

$$2(n^2 + 4n + 4 - n^2) > n^2 + 2n + 1$$

$$8n + 8 > n^2 + 2n + 1$$

$$-n^2 + 6n + 7 > 0$$

$$-(n+1)(n-7) > 0$$

$$n \in (-1, 7) \text{ i } n \in \mathbb{N}$$

$$n \in \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6\}$$

Czyli szukane trójki liczb naturalnych to:

$$(0, 1, 2), (1, 2, 3), (2, 3, 4), (3, 4, 5), (4, 5, 6), (5, 6, 7), (6, 7, 8).$$

Przykład 4

Długości boków prostokąta wyrażają się liczbami naturalnymi mniejszymi od 16 i różnią się o 4. Obliczymy długości boków prostokąta, jeżeli pole prostokąta jest większe od 45.

Niech:

x - pierwszy bok prostokąta,

$x + 4$ - drugi bok prostokąta.

Czyli mamy:

$$x(x+4) > 45$$

$$x^2 + 4x - 45 > 0$$

$$(x-5)(x+9) > 0$$

$$x \in (-\infty, -9) \cup (5, \infty)$$

Ponieważ $x \in \mathbb{N}$ i $x < 16$

$$x+4 \in \mathbb{N} \text{ i } x+4 < 16$$

$$x < 12$$

Czyli $x \in \{6, 7, 8, 9, 10, 11\}$

Zatem prostokąt może mieć boki o długości 6 i 10, lub 7 i 11, lub 8 i 12, lub 9 i 13, lub 10 i 14, lub 11 i 15.

Słownik

kolejne liczby naturalne niepodzielne przez 4

liczby postaci $4n+1$, $4n+2$, $4n+3$ dla $n \in \mathbb{N}$

Galeria zdjęć interaktywnych

Polecenie 1

Przeanalizuj galerię zdjęć interaktywnych i zapoznaj się ze sposobem rozwiązania zadania i wyboru liczb, które są rozwiązaniami zadania.

Różnica długości krótszych boków w trójkącie rozwartokątnym jest równa 5. Najdłuższy bok trójkąta jest o 1 dłuższy od środkowego boku. Obliczymy możliwe długości boków trójkąta jeżeli wiadomo, że są one wyrażone liczbami naturalnymi jednocyfrowymi.

Skorzystamy z warunku, że jeżeli a, b, c są bokami w trójkącie i c jest najdłuższym bokiem to aby trójkąt był rozwartokątny musi być spełniony warunek $c^2 > a^2 + b^2$.

1

Różnica długości krótszych boków w trójkącie rozwartokątnym jest równa 5. Najdłuższy bok trójkąta jest o 1 dłuższy od środkowego boku. Obliczymy możliwe długości boków trójkąta jeżeli wiadomo, że są one wyrażone liczbami naturalnymi jednocyfrowymi.

Skorzystamy z warunku, że jeżeli a, b, c są bokami w trójkącie i c jest najdłuższym bokiem to aby trójkąt był rozwartokątny musi być spełniony warunek $c^2 > a^2 + b^2$.

1. Najpierw skorzystamy z wniosku z twierdzenia Pitagorasa.

Polecenie 2

Różnica długości krótszych boków w trójkącie rozwartokątnym jest równa 2. Najdłuższy bok trójkąta jest o 3 dłuższy od najkrótszego boku. Oblicz możliwe długości boków tego trójkąta, jeżeli wiadomo, że wyrażają się one liczbami jednocyfrowymi.

Jeżeli a , b , c są bokami w trójkącie i c jest najdłuższym bokiem, to aby trójkąt był rozwartokątny musi być spełniony warunek $c^2 > a^2 + b^2$.

Sprawdź się

Pokaż ćwiczenia:   

Ćwiczenie 1



Suma kwadratów trzech kolejnych liczb nieparzystych jest nie większa od 251. Wybierz wszystkie nierówności opisujące powyższą sytuację, jeżeli $2n + 1$, $n \in \mathbb{N}$ jest najmniejszą liczbą nieparzystą.

☐ $3n^2 + 12n - 54 \geq 0$

☐ $n^2 + 3n - 18 \leq 0$

☐ $4n^2 + 4n + 1 + 4n^2 + 12n + 9 + 4n^2 + 20n + 25 \leq 251$

☐ $(2n - 1)^2 + (2n + 1)^2 + (2n + 3)^2 \leq 251$

☐ $12n^2 + 36n - 216 \leq 0$

☐ $(2n + 1)^2 + (2n + 3)^2 + (2n + 5)^2 < 251$

☐ $(3 - n)(n + 6) \geq 0$

Ćwiczenie 2



Dane są cztery kolejne liczby naturalne x , $x + 1$, $x + 2$, $x + 3$, dla $x \in \mathbb{N}$ takie, że suma kwadratów pierwszej i drugiej liczby jest mniejsza od różnicy kwadratów czwartej i trzeciej liczby. Wybierz i wstaw taki jednomian, aby rozwiązując nierówność obliczyć wszystkie możliwe najmniejsze liczby naturalne spełniające warunki zadania.

$-4 < 0$

Ćwiczenie 3



Zaznacz poprawną odpowiedź. Trzy kolejne liczby dwucyfrowe, których suma kwadratów jest mniejsza od 366 to:

☐ 11, 12, 13

☐ 12, 13, 14

☐ 9, 10, 11

☐ 10, 11, 12

Ćwiczenie 4



Wstaw w wyznaczone miejsce odpowiednie wyrażenie.

Pan Janusz wpłacił do banku na dwuletnią lokatę kwotę 4000 zł. Kapitalizacja odsetek jest naliczana w banku po każdym roku oszczędzania. Po dwóch latach pan Janusz odebrał z banku wraz z odsetkami kwotę mniejszą niż 4326,40 zł.

Roczne oprocentowanie tej lokaty było .

nie większe od 4%

nie mniejsze od 4%

mniejsze od 4%

większe od 4%

Ćwiczenie 5



Długości boków trójkąta wyrażają się kolejnymi naturalnymi i dwucyfrowymi, które w wyniku dzielenia przez 5 dają resztę odpowiednio 1, 2, 3. Jeżeli suma kwadratów tych liczb jest nie większa niż 434 to szukane liczby to:

☐ 11, 12, 13 i 10, 11, 12

☐ tylko 10, 11, 12

☐ 9, 10, 11 i 10, 11, 12

☐ tylko 11, 12, 13

Ćwiczenie 6



Boki prostokąta różnią się o 2 cm, a pole prostokąta nie przekracza 24 cm^2 . Krótszy bok prostokąta jest:

☐ równy 4 cm

☐ mniejszy niż 2 cm

☐ nie większy niż 4 cm

☐ nie mniejszy niż 2 cm

Ćwiczenie 7



Zaznacz taką liczbę naturalną n , że kwadrat tej liczby powiększony o 4 jest większy lub równy od liczby $4n$ i mniejszy lub równy od liczby $5n$. Wybierz wszystkie poprawne odpowiedzi.

☐ 2

☐ 5

☐ 3

☐ 4

☐ 1

☐ 0

Ćwiczenie 8



Wpisz w wyznaczone miejsce brakującą liczbę.

Oblicz trzy kolejne liczby naturalne takie, że podwojona suma kwadratów pierwszej i drugiej liczby jest mniejsza od kwadratu trzeciej liczby.

Największą liczbą jest .

Dla nauczyciela

Autor: Jolanta Schilling

Przedmiot: Matematyka

Temat: Zadania tekstowe prowadzące do rozwiązywania nierówności kwadratowej

Grupa docelowa: III etap edukacyjny, liceum, technikum, zakres rozszerzony

Podstawa programowa:

III. Równania i nierówności. Zakres podstawowy.

Uczeń:

1) przekształca równania i nierówności w sposób równoważny.

Kształtowane kompetencje kluczowe:

- kompetencje w zakresie rozumienia i tworzenia informacji,
- kompetencje matematyczne oraz kompetencje w zakresie nauk przyrodniczych, technologii i inżynierii,
- kompetencje cyfrowe,
- kompetencje osobiste, społeczne i w zakresie umiejętności uczenia się.

Cele operacyjne:

Uczeń:

- zapisuje i rozwiązuje nierówność kwadratową opisującą zależności między danymi,
- ustala współczynniki nierówności kwadratowej tak, aby opisywała sytuację przedstawioną w zadaniu
- dobiera nierówność do treści zadania,
- analizuje podane warunki i buduje na ich podstawie odpowiednią nierówność.

Strategie nauczania:

- konstruktywizm.

Metody i techniki nauczania:

- metoda wędrujących plakatów,
- dyskusja,
- burza mózgów.

Formy zajęć:

- praca indywidualna,
- praca w parach,
- praca całego zespołu klasowego

Środki dydaktyczne:

- komputery z głośnikami i dostępem do internetu, słuchawki,
- zasoby multimedialne zawarte w e-materiale,
- tablica interaktywna/tablica, pisak/kreda.

Przebieg lekcji**Faza wprowadzająca:**

1. Nauczyciel podaje temat i cele zajęć oraz wspólnie z uczniami ustala kryteria sukcesu.
2. Wybrany przez nauczyciela uczeń przypomina definicję nierówności kwadratowej i podaje przykłady opisu nierówności za pomocą metody słownej, a uczniowie dopowiadają zapis za pomocą konkretnego wzoru.

Faza realizacyjna:

1. Uczniowie w grupach 4 osobowych pracują metodą wędrujących plakatów. Celem jest przypomnienie zapisu wyrażeń algebraicznych opisujących liczby podzielne przez 2 i niepodzielne przez 2. Rozpoczyna grupa wybrana losowo – zapisuje na kartonie cztery kolejne liczby podzielne przez 2. Kolejna grupa podaje przykład zastosowania tych wyrażeń w konkretnym zadaniu. Plakat wędruje do następnej grupy, która dopisuje kolejne cztery liczby niepodzielne przez 2 itd. W ten sposób uczniowie przypominają poznane wcześniej sposoby zapisu liczb.
2. Uczniowie w parach oglądają galerię zdjęć interaktywnych i następnie omawiają ją wraz z nauczycielem.
3. Uczniowie w parach rozwiązują zadania interaktywne 1 – 6. Wspólnie omawiają odpowiedzi.

Faza podsumowująca:

1. Jako podsumowanie nauczyciel zadaje uczniom pytania dotyczące metod i analizy zadań tekstowych prowadzących do rozwiązywania nierówności kwadratowych.
2. Nauczyciel omawia przebieg zajęć, wskazuje mocne i słabe strony pracy uczniów, udzielając im tym samym informacji zwrotnej. Omawia ewentualne problemy, które powstały podczas rozwiązywania ćwiczeń interaktywnych.

Praca domowa:

Uczniowie dobierają się w pary i tworzą dla drugiej osoby zadania analogiczne do zadań 6 i 7 z części „Sprawdź się”.

Materiały pomocnicze:

[Nierówność kwadratowa](#)

Wskazówki metodyczne

Przykład zawarty w galerii zdjęć interaktywnych uczniowie mogą wykorzystać jako materiał powtórzeniowy przed sprawdzianem. Przykład może być też wykorzystany w czasie zajęć z geometrii.