



Granice funkcji opisanych kilkoma wzorami w kilku różnych przedziałach

- [Wprowadzenie](#)
- [Przeczytaj](#)
- [Infografika](#)
- [Sprawdź się](#)
- [Dla nauczyciela](#)



Granice funkcji opisanych kilkoma wzorami w kilku różnych przedziałach

Źródło: dostępny w internecie: pixnio.com, domena publiczna.

Funkcje elementarne takie jak wielomiany, funkcje wymierne, wykładnicze, logarytmiczne czy trygonometryczne posiadają granice w każdym punkcie swojej dziedziny. Co więcej granica ta jest równa wartości funkcji w tym punkcie. Oprócz funkcji elementarnych możemy też rozważać funkcje, które są określane różnymi wzorami na kilku przedziałach. W tym temacie zajmiemy się badaniem granic takich właśnie funkcji.

Twoje cele

- Policzysz granicę funkcji określonej różnymi wzorami na kilku przedziałach, w punktach w których zmienia się wzór tej funkcji.
- Uzasadnisz, że funkcja określona różnymi wzorami na kilku przedziałach może nie posiadać granicy w pewnych punktach.

Przeczytaj

W temacie tym zajmiemy się funkcjami, które są określone na kilku różnych przedziałach poprzez różne **funkcje elementarne**. Jak wiemy **funkcje elementarne** posiadają granicę w każdym punkcie swojej dziedziny oraz granica ta jest równa wartości funkcji w tym punkcie. W związku z tym badając granice funkcji określonych różnymi wzorami na kilku przedziałach wystarczy ograniczyć się do badania granicy w punktach, w których funkcja „zmienia swój wzór”. W argumentach należących do wnętrza każdego z przedziałów granica będzie równa wartości funkcji liczonej według wzoru, którym funkcja jest określona na tym przedziale. Przy obliczaniu granicy w punktach, w których funkcja zmienia wzór, korzystać będziemy z poniższego twierdzenia.

Twierdzenie: o istnieniu granicy funkcji w punkcie

Jeśli funkcja $f : D_f \rightarrow \mathbb{R}$ posiada w punkcie $x_0 \in \mathbb{R}$ granicę lewo- oraz prawostronną oraz granice te są równe, to wówczas posiada ona także granicę w tym punkcie oraz

$$\lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$$

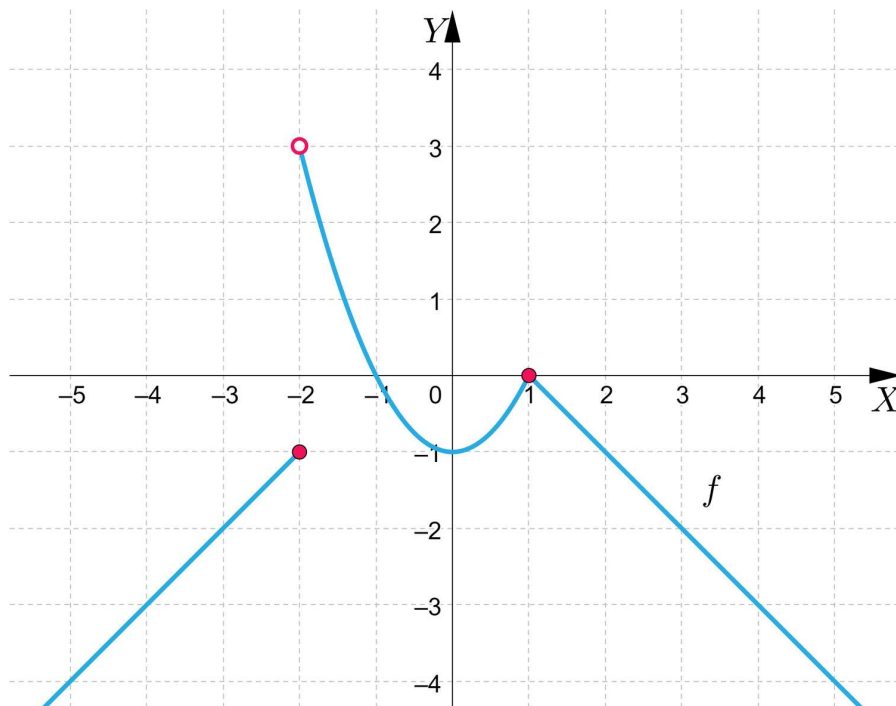
Spójrzmy na poniższe przykłady.

Przykład 1

Rozważmy funkcję

$$f(x) = \begin{cases} x + 1 & \text{dla } x \in (-\infty, -2) \\ x^2 - 1 & \text{dla } x \in (-2, 1) \\ 1 - x & \text{dla } x \in (1, +\infty) \end{cases}.$$

Sprawdzimy czy posiada ona granicę w punktach $x_1 = -2$ oraz $x_2 = 1$. Na początek spójrzmy na wykres tej funkcji.



Jak widzimy funkcja jest określona różnymi wzorami na lewo oraz na prawo od danych punktów. Oznacza to, że konieczne jest obliczenie granic jednostronnych. Ponieważ na lewo od punktu $x_1 = -2$ funkcja jest określona wzorem $f(x) = x + 1$ więc

$$\lim_{x \rightarrow -2^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow -2^-} (x + 1) = -2 + 1 = -1.$$

Z drugiej strony na prawo od punktu $x_1 = -2$ funkcja jest określona wzorem $f(x) = x^2 - 1$ więc

$$\lim_{x \rightarrow -2^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow -2^+} (x^2 - 1) = 4 - 1 = 3.$$

Jak widzimy granice jednostronne funkcji f w punkcie $x_1 = -2$ są różne. Oznacza to, że granica funkcji f w punkcie $x_1 = -2$ nie istnieje. Rozważmy teraz punkt $x_2 = 1$. Na lewo od tego punktu $f(x) = x^2 - 1$ więc

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^-} (x^2 - 1) = 1 - 1 = 0.$$

Z kolei na prawo od punktu $x_2 = 1$ mamy $f(x) = 1 - x$, zatem

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} (1 - x) = 1 - 1 = 0.$$

Jak widzimy granice jednostronne funkcji f w punkcie $x_2 = 1$ są równe. Wynika stąd, że funkcja f posiada granicę w punkcie $x_2 = 1$ oraz

$$\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = 0.$$

Przykład 2

Rozważmy funkcję

$$f(x) = \begin{cases} \frac{x^2-x-6}{x-3} & \text{dla } x \in \langle 0, 3 \rangle \\ 5 & \text{dla } x \in \langle 3, 4 \rangle \\ \frac{x^2-3x-4}{x-4} & \text{dla } x \in \langle 4, 6 \rangle \end{cases}.$$

Dziedziną danej funkcji jest zbiór $D_f = \langle 0, 6 \rangle$. Sprawdźmy czy istnieje granica funkcji f w punktach $x_1 = 3$ oraz $x_2 = 4$, w których zmienia się jej wzór. Zauważmy, że $x^2 - x - 6 = (x - 3)(x + 2)$ oraz $x^2 - 3x - 4 = (x - 4)(x + 1)$. W związku z tym wzór funkcji f możemy zapisać w prostszej postaci

$$f(x) = \begin{cases} x + 2 & \text{dla } x \in \langle 0, 3 \rangle \\ 5 & \text{dla } x \in \langle 3, 4 \rangle \\ x + 1 & \text{dla } x \in \langle 4, 6 \rangle \end{cases}.$$

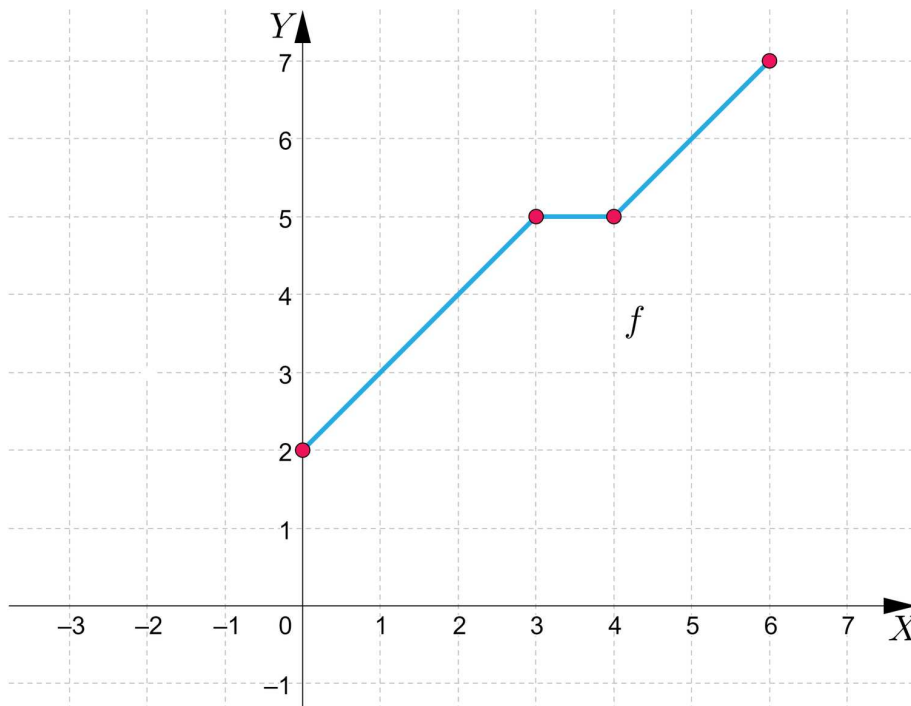
Obliczymy teraz granice jednostronne funkcji f . Mamy kolejno

1. $\lim_{x \rightarrow 3^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 3^-} (x + 2) = 3 + 2 = 5.$
2. $\lim_{x \rightarrow 3^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 3^+} f(x) = 5.$
3. $\lim_{x \rightarrow 4^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 4^-} f(x) = 5.$
3. $\lim_{x \rightarrow 4^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 4^+} (x + 1) = 4 + 1 = 5.$

Jak widzimy granice jednostronne funkcji f w punktach $x_1 = 3$ oraz $x_2 = 4$ są równe. Wynika stąd, że funkcja f posiada w obu tych punktach granicę oraz

$$\lim_{x \rightarrow 3} f(x) = \lim_{x \rightarrow 4} f(x) = 5.$$

Poniżej znajduje się wykres funkcji f .



Przykład 3

Obliczmy granicę funkcji

$$f(x) = \begin{cases} \log_4 x & \text{dla } x \in (0, 2) \\ x - 1 & \text{dla } x \in (2, 4) \\ 3^{2x-7} & \text{dla } x \in (4, +\infty) \end{cases}$$

w punktach $x_1 = 2$ oraz $x_2 = 4$. W tym celu obliczymy granice jednostronne w tych punktach. Ponieważ na lewo od punktu $x_1 = 2$ mamy $f(x) = \log_4 x$, więc

$$\lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2^-} \log_4 x = \log_4 2 = \frac{1}{2}.$$

Z kolei na prawo od punktu $x_1 = 2$ funkcja jest określona wzorem $f(x) = x - 1$, czyli

$$\lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2^+} (x - 1) = 2 - 1 = 1.$$

Jak widzimy granice jednostronne funkcji f w punkcie $x_1 = 2$ są różne. Oznacza to, że funkcja nie posiada granicy w tym punkcie. Sprawdźmy teraz czy funkcja posiada granicę w punkcie $x_2 = 4$. w tym celu liczymy granice jednostronne. Mamy

$$\lim_{x \rightarrow 4^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 4^-} (x - 1) = 4 - 1 = 3.$$

oraz

$$\lim_{x \rightarrow 4^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 4^+} 3^{2x-7} = 3^{8-7} = 3.$$

W tym przypadku granice jednostronne są sobie równe co oznacza, że funkcja posiada granicę w punkcie $x_2 = 4$ oraz

$$\lim_{x \rightarrow 4} f(x) = 3.$$

Przykład 4

Obliczymy granicę funkcji

$$f(x) = \begin{cases} \sin x & \text{dla } x \in \langle 0, \frac{\pi}{6} \rangle \\ \cos 2x & \text{dla } x \in (\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{2}) \\ 1 + 2 \sin 3x & \text{dla } x \in (\frac{\pi}{2}, 2\pi) \end{cases}$$

w punktach $x_1 = \frac{\pi}{6}$ oraz $x_2 = \frac{\pi}{2}$. Na lewo oraz na prawo od punktu $x_1 = \frac{\pi}{6}$ funkcja f określona jest różnymi wzorami więc liczymy granice jednostronne. Mamy

$$\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{6}^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{6}^-} \sin x = \sin \frac{\pi}{6} = \frac{1}{2}$$

oraz

$$\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{6}^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{6}^+} \cos 2x = \cos \frac{\pi}{3} = \frac{1}{2}.$$

Jak widzimy granica lewostronna funkcji f w punkcie $x_1 = \frac{\pi}{6}$ jest równa granicy prawostronnej w tym punkcie, zatem

$$\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{6}} f(x) = \frac{1}{2}.$$

Obliczmy teraz granice jednostronne funkcji f w punkcie $x_2 = \frac{\pi}{2}$. Mamy

$$\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}^-} \cos 2x = \cos \pi = -1$$

oraz

$$\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}^+} (1 + 2 \sin 3x) = 1 + 2 \sin \frac{3\pi}{2} = 1 - 2 = -1.$$

W tym przypadku granice jednostronne także są równe. Wnioskujemy stąd, że funkcja f posiada w punkcie $x_2 = \frac{\pi}{2}$ granicę oraz

$$\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} f(x) = -1.$$

Słownik

funkcje elementarne

do funkcji elementarnych zaliczamy następujące funkcje

- wielomiany (w szczególności funkcje liniowe i kwadratowe)
- funkcje wymierne
- funkcje wykładnicze
- funkcje logarytmiczne
- funkcje trygonometryczne
- funkcje typu $f(x) = \sqrt[n]{x}$

ponadto funkcją elementarną jest suma, różnica, iloczyn, iloraz oraz złożenie dowolnych dwóch funkcji elementarnych

Infografika

Polecenie 1

Na poniższej infografice przedstawiono metodę obliczania granicy funkcji danej kilkoma wzorami w kilku różnych przedziałach z wykorzystaniem wartości bezwzględnej. Zapoznaj się z przedstawionym sposobem wyznaczania granicy takiej funkcji a następnie wykonaj zamieszczone poniżej polecenia.

Polecenie 2

Dana jest funkcja $f(x) = \begin{cases} |x + 1| & \text{dla } |x| > 3 \\ 2^{x-1} & \text{dla } |x| \leq 3 \end{cases}$.

1. Zapisz wzór funkcji f bez użycia wartości bezwzględnej.
2. Oblicz (o ile istnieją) granice funkcji f w punktach $x_1 = -3$ oraz $x_2 = 3$.

Sprawdź się

Pokaż ćwiczenia:   

Ćwiczenie 1



Dana jest funkcja $f(x) = \begin{cases} 2x - 3 & \text{dla } x \leq -1 \\ x - 4 & \text{dla } x > -1 \end{cases}$. Wówczas granica funkcji f w punkcie $x_0 = -1$:

☐ nie istnieje.

☐ jest równa 1.

☐ jest równa (-5) .

Ćwiczenie 2



Dana jest funkcja $f(x) = \begin{cases} x^2 + 1 & \text{dla } x < 0 \\ 3x^2 - 2 & \text{dla } x \in \langle 0, 1 \rangle \\ 2 - x & \text{dla } x > 1 \end{cases}$. Wówczas:

☐ $\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = 1$

☐ $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = -2$

☐ $\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = 1$

Ćwiczenie 3



Dana jest funkcja $f(x) = \begin{cases} \frac{2}{x-1} & \text{dla } x \in (0, 4) \\ \log_8 x & \text{dla } x \in \langle 4, 8 \rangle \end{cases}$. Wówczas

- ☐ Funkcja f posiada granicę w punkcie $x_0 = 4$ równą $\frac{1}{2}$.
- ☐ Funkcja f posiada granicę w punkcie $x_0 = 4$ równą $\frac{1}{3}$.
- ☐ Funkcja f posiada granicę w punkcie $x_0 = 4$ równą $\frac{2}{3}$.
- ☐ Funkcja f nie posiada granicy w punkcie $x_0 = 4$.

Ćwiczenie 4



Dana jest funkcja $f(x) = \begin{cases} 2^{x+1} & \text{dla } x < -1 \\ \log_3(x+4) & \text{dla } x \in \langle -1, 2 \rangle \\ \sqrt{3x-2} & \text{dla } x > 2 \end{cases}$. Wówczas

- ☐ $\lim_{x \rightarrow -1} f(x) = 1$
- ☐ $\lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) = 2$
- ☐ $\lim_{x \rightarrow 2} f(x) = 2$
- ☐ $\lim_{x \rightarrow -1^-} f(x) = 0$

Ćwiczenie 5



Dana jest funkcja $f(x) = \begin{cases} \frac{2x^2-8}{x+2} & \text{dla } x < -2 \\ x^3 + x + 2 & \text{dla } x \geq -2 \end{cases}$.

Przeciągnij w puste miejsca właściwe wyrażenia.

$$\lim_{x \rightarrow -2^-} f(x) = \boxed{}$$

$$\lim_{x \rightarrow -2^+} f(x) = \boxed{}$$

$$\lim_{x \rightarrow -2} f(x) = \boxed{}$$

Ćwiczenie 6



Dana jest funkcja $f(x) = \begin{cases} 3^{2x-1} & \text{dla } x < 1 \\ \log_4(3-x) & \text{dla } x \in \langle 1, 2 \rangle \\ \sqrt{x-2} & \text{dla } x > 2 \end{cases}$. Przeciągnij w puste pola

właściwe wyrażenia.

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = \boxed{}$$

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = \boxed{}$$

$$\lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) = \boxed{}$$

$$\lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) = \boxed{}$$

$$\lim_{x \rightarrow 2} f(x) = \boxed{}$$

Ćwiczenie 7



Ćwiczenie 8



Połącz w pary funkcje z pasującymi do nich wyrażeniami.

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{x+1} & \text{dla } x \in (0, 1) \\ \log_4(x+1) & \text{dla } x \in \langle 1, 4 \end{cases}$$

$$\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = \frac{1}{2}$$

$$f(x) = \begin{cases} \log_3 \sqrt[3]{x+2} & \text{dla } x \in (0, 1) \\ \log_8(x+1) & \text{dla } x \in \langle 1, 2 \end{cases}$$

$$\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = \frac{3}{2}$$

$$f(x) = \begin{cases} \log_4(5x+3) & \text{dla } x \in (0, 1) \\ 3 \log_9(x+2) & \text{dla } x \in \langle 1, 4 \end{cases}$$

$$\lim_{x \rightarrow 1} f(x) \text{ nie istnieje}$$

$$f(x) = \begin{cases} x^3 - 2 & \text{dla } x \in (0, 1) \\ \log_2 \frac{1}{x+3} & \text{dla } x \in \langle 1, 4 \end{cases}$$

$$\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = \frac{1}{3}$$

Dla nauczyciela

Autor: Mariusz Doliński

Przedmiot: Matematyka

Temat: Granice funkcji opisanych kilkoma wzorami w kilku różnych przedziałach

Grupa docelowa: III etap edukacyjny, liceum, technikum, zakres rozszerzony

Podstawa programowa:

XIII. Optymalizacja i rachunek różniczkowy.

Uczeń spełnia wymagania określone dla zakresu podstawowego, a ponadto:

1. oblicza granice funkcji (w tym jednostronne);

Kształtowane kompetencje kluczowe:

- kompetencje w zakresie rozumienia i tworzenia informacji;
- kompetencje matematyczne oraz kompetencje w zakresie nauk przyrodniczych, technologii i inżynierii
- kompetencje cyfrowe
- kompetencje osobiste, społeczne i w zakresie umiejętności uczenia się

Cele operacyjne:

Uczeń:

- oblicza granice funkcji opisanych kilkoma wzorami w kilku różnych przedziałach w zadanych punktach.
- potrafi uzasadnić, że funkcja opisana kilkoma wzorami w kilku różnych przedziałach nie posiada granicy w danym punkcie
- oblicza granice funkcji opisanych kilkoma wzorami w kilku różnych przedziałach za pomocą wartości bezwzględnej.

Strategie nauczania:

- konstruktywizm;
- konektywizm.

Metody i techniki nauczania:

- odwrócona klasa;

- dyskusja;
- rozmowa nauczająca w oparciu o treści zawarte w Samouczku i ćwiczenia interaktywne.

Formy pracy:

- praca indywidualna;
- praca w parach;
- praca w grupach;
- praca całego zespołu klasowego.

Środki dydaktyczne:

- komputery z głośnikami, słuchawkami i dostępem do internetu;
- zasoby multimedialne zawarte w e-materiale;
- tablica interaktywna/tablica, pisak/kreda.

Przebieg lekcji

Przed lekcją:

1. Uczniowie zapoznają się z treściami zapisanymi w sekcji „Przeczytaj”.

Faza wstępna:

1. Nauczyciel określa temat lekcji: „Granice funkcji opisanych kilkoma wzorami w kilku różnych przedziałach” oraz cele, wybrana osoba formułuje kryteria sukcesu.
2. Nauczyciel zadaje uczniom pytanie dotyczące ich aktualnego stanu wiedzy w zakresie poruszanej tematyki. Prosi wybranego ucznia lub uczennicę o zapisywanie propozycji.

Faza realizacyjna:

1. Nauczyciel prosi, aby wybrany uczeń przeczytał polecenie numer 1 z sekcji „Infografika”. Uczniowie zapoznają się z materiałem i zapisują ewentualne problemy z jego zrozumieniem. Następnie dzielą się na grupy i ponownie analizują jego treść wspólnie wyjaśniając zaistniałe wątpliwości.
2. Uczniowie wykonują wspólnie na forum klasy ćwiczenia nr 1-2.
3. Kolejne ćwiczenia nr 3-5 uczniowie wykonują w parach. Następnie konsultują swoje rozwiązania z inną parą uczniów i ustalają jedną wersję odpowiedzi, zapisują problemy, które napotkali podczas rozwiązywania ćwiczeń.
4. Uczniowie indywidualnie wykonują ćwiczenia nr 6-8, ale następnie konsultują swoje rozwiązania z innym uczniem i zapisują na kartce problemy, które mieli podczas ich wykonywania.

Faza podsumowująca:

1. Omówienie ewentualnych problemów z rozwiązaniem ćwiczeń z sekcji „Sprawdź się”.

Praca domowa:

1. Uczniowie opracowują FAQ (minimum 3 pytania i odpowiedzi prezentujące przykład i rozwiązanie) do tematu lekcji („Granice funkcji opisanych kilkoma wzorami w kilku różnych przedziałach”).

Materiały dodatkowe:

[Obliczanie granic funkcji](#)

Wskazówki metodyczne:

- Nauczyciel może wykorzystać medium w sekcji „Infografika” do pracy przed lekcją. Uczniowie zapoznają się z jego treścią i przygotowują do pracy na zajęciach w ten sposób, żeby móc samodzielnie rozwiązać zadania w temacie „Granice funkcji opisanych kilkoma wzorami w kilku różnych przedziałach”.