



Szereg harmoniczny

- [Wprowadzenie](#)
- [Przeczytaj](#)
- [Infografika](#)
- [Sprawdź się](#)
- [Dla nauczyciela](#)



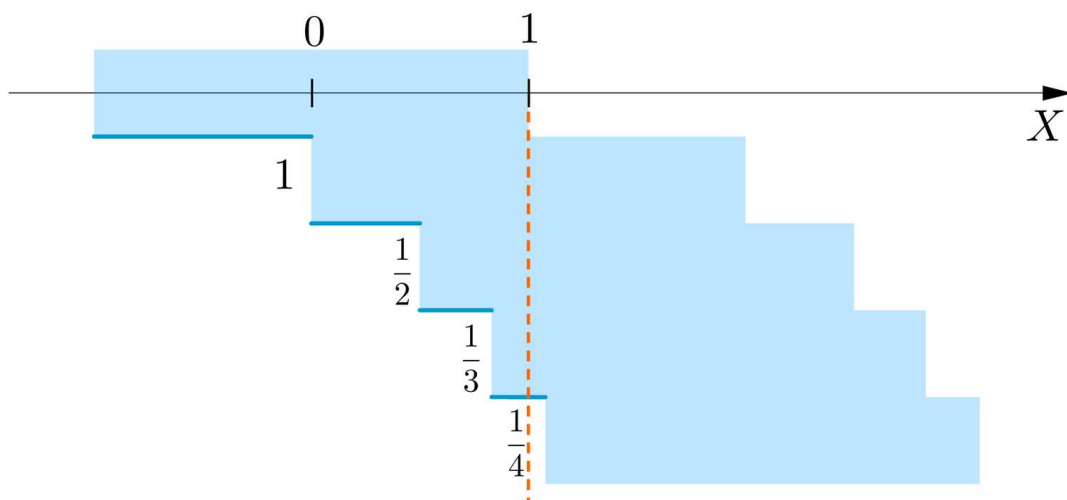
Szereg harmoniczny

Źródło: dostępny w internecie: pxabay.com, domena publiczna.

Wyobraźmy sobie, że chcemy ustawić wieżę z identycznych cegieł, której najwyższa cegła będzie wystawała możliwie daleko od tej cegły ustawionej najniżej. Łatwo zauważyć, że niższe cegły trzeba wysunąć mniej niż te wyższe, aby wieża się nie zawaliła. Ale co to znaczy: mniej? O ile mniej? Przyjmijmy, że każda cegła ma długość 2. Okazuje się, że kolejne cegły powinny być wysuwane: pierwsza (najwyższa) o 1 w stosunku do drugiej, druga o $\frac{1}{2}$ w stosunku do trzeciej, trzecia o $\frac{1}{3}$ w stosunku do czwartej itd. Odległości stanowią odwrotności kolejnych liczb naturalnych. Zatem jak daleko może wystawać najwyżej położona cegła w stosunku do tej położonej najniżej?

Ta lekcja odpowie na to pytanie, gdyż będziemy rozważać szereg zwany harmonicznym:

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \dots$$



Twoje cele

- Dowiesz się, czy szereg harmoniczny jest zbieżny.
- Nauczysz się badać zbieżność szeregów za pomocą szeregu harmonicznego.

Przeczytaj

Na tej lekcji zdefiniujemy szereg harmoniczny oraz uogólniony szereg harmoniczny oraz zaprezentujemy, w jaki sposób wykorzystujemy jego własności do badania zbieżności innych ciągów.

Definicja: szereg harmoniczny

Szeregiem harmonicznym nazywamy szereg postaci:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}.$$

Dlaczego ten szereg nazywamy harmonicznym? Nazwa szeregu pochodzi o liczby nazywanej **średnią harmoniczną dwóch liczb**.

Zwróćmy uwagę, że każdy wyraz ciągu $a_n = \frac{1}{n}$, z wyjątkiem wyrazu pierwszego, jest średnią harmoniczną dwóch wyrazów sąsiednich:

$$\frac{2}{(n-1)+(n+1)} = \frac{2}{2n} = \frac{1}{n}.$$

Twierdzenie: o szeregu harmonicznym

Szereg harmoniczny jest rozbieżny do $+\infty$.

Dowód

Podzielmy szereg harmoniczny na grupy składników:

$$1 + \left(\frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{3} + \frac{1}{4}\right) + \left(\frac{1}{5} + \frac{1}{6} + \frac{1}{7} + \frac{1}{8}\right) + \cdots + \underbrace{\left(\frac{1}{2^{n+1}} + \frac{1}{2^{n+2}} + \cdots + \frac{1}{2^{n+1}}\right)}_{2^n \text{ składników}} + \cdots$$

Zauważmy, że

$$\frac{1}{2} \geq \frac{1}{2}$$

$$\frac{1}{3} + \frac{1}{4} > \frac{1}{4} + \frac{1}{4} = \frac{1}{2}$$

$$\frac{1}{5} + \frac{1}{6} + \frac{1}{7} + \frac{1}{8} > \frac{1}{8} + \frac{1}{8} + \frac{1}{8} + \frac{1}{8} = \frac{1}{2}$$

i dla dowolnej grupy składników:

$$\frac{1}{2^{n+1}} + \frac{1}{2^{n+2}} + \cdots + \frac{1}{2^{n+1}} > \underbrace{\frac{1}{2^{n+1}} + \frac{1}{2^{n+1}} + \cdots + \frac{1}{2^{n+1}}}_{2^n \text{ identycznych składników}} = \frac{1}{2}.$$

Zatem każda grupa składników ma sumę większą od $\frac{1}{2}$, a takich grup jest nieskończenie wiele. Stąd szereg harmoniczny jest rozbieżny do $+\infty$.

Przykład 1

Wykażemy, że szereg $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^{n-1}}$ też jest rozbieżny.

Rozwiązanie

Zauważmy, że zachodzi nierówność $\frac{1}{2^{n-1}} < \frac{1}{n}$ dla każdej liczby naturalnej $n > 1$, a zatem w tej postaci nie możemy wykorzystać kryterium porównawczego.

Skorzystamy z własności mnożenie szeregu przez liczbę: jeżeli szereg $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ jest rozbieżny, to szereg $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2n}$ także jest rozbieżny.

Zauważmy, że $\frac{1}{2n} < \frac{1}{2^{n-1}}$, a to na podstawie kryterium porównawczego oznacza, że szereg $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^{n-1}}$ jest rozbieżny.

Przykład 2

Wykażemy, że szereg $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n}}$ jest rozbieżny.

Rozwiązanie

Zauważmy, że dla każdej dodatniej liczby naturalnej n zachodzi nierówność: $\frac{1}{n} \leq \frac{1}{\sqrt{n}}$. Nierówność zachodzi, ponieważ $\sqrt{n} \leq n$.

Na podstawie kryterium porównawczego oznacza to, że szereg $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n}}$ jest rozbieżny.

Teraz zdefiniujemy pojęcie uogólnionego szeregu harmonicznego.

Definicja: uogólniony szereg harmoniczny

Szeregiem harmonicznym rzędu $\alpha \in \mathbb{R}_+$ nazywa się szereg postaci:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{\alpha}} = 1 + \frac{1}{2^{\alpha}} + \frac{1}{3^{\alpha}} + \frac{1}{4^{\alpha}} + \dots$$

Poniżej przedstawiamy bardzo ważne twierdzenie, dowodu którego nie będziemy tu przedstawiać.

Twierdzenie: o uogólnionym szeregu harmonicznym

Szereg $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{\alpha}}$ jest rozbieżny dla $\alpha \in (0, 1)$.

Szereg $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{\alpha}}$ jest zbieżny dla $\alpha \in (1, +\infty)$.

Przykład 3

1. Wykażemy, że szereg $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt[3]{n}}$ jest rozbieżny.

2. Wykażemy, że szereg $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n^3}}$ jest zbieżny.

Rozwiązanie

1. Szereg $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt[3]{n}}$ jest szeregiem harmonicznym rzędu $\frac{1}{3}$, więc na podstawie twierdzenia jest szeregiem rozbieżnym.

2. Szereg $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n^3}}$ jest szeregiem harmonicznym rzędu $\frac{3}{2}$, więc na podstawie twierdzenia jest szeregiem zbieżnym.

Przykład 4

Wykażemy, że szereg $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt[3]{n^2+n+1}}$ jest rozbieżny.

Rozwiązanie

Udowodnimy, że dla każdej dodatniej liczby naturalnej n zachodzi nierówność

$$\frac{1}{2\sqrt[3]{n^2}} < \frac{1}{\sqrt[3]{n^2+n+1}}.$$

Dla każdej dodatniej liczby naturalnej n zachodzi nierówność

$$n + 1 < 7n^2,$$

a stąd

$$n^2 + n + 1 < 8n^2,$$

czyli

$$\sqrt[3]{n^2+n+1} < 2\sqrt[3]{n^2}.$$

Szereg $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt[3]{n^2}}$ jest szeregiem harmonicznym rzędu $\frac{2}{3}$, a więc jest rozbieżny. Zatem szereg $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2\sqrt[3]{n^2}}$ jest także szeregiem rozbieżnym.

Z kryterium porównawczego, skoro dla każdej dodatniej liczby naturalnej n zachodzi nierówność $\frac{1}{2\sqrt[3]{n^2}} < \frac{1}{\sqrt[3]{n^2+n+1}}$, to szereg $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt[3]{n^2+n+1}}$ jest także rozbieżny.

Słownik

średnia harmoniczna dwóch liczb dodatnich

liczba $H = \frac{2}{\frac{1}{a} + \frac{1}{b}}$, gdzie a i b są liczbami dodatnimi

o mnożeniu szeregu zbieżnego przez liczbę

jeżeli szereg $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ jest zbieżny i jego sumą jest liczba s , to szereg $\sum_{n=1}^{\infty} (k \cdot a_n)$ jest także zbieżny, a jego suma jest równa $k \cdot s$

kryterium porównawcze

zakładamy, że nierówność $0 \leq a_n \leq b_n$ zachodzi dla prawie wszystkich dodatnich liczb naturalnych n ;

jeżeli szereg $\sum_{n=1}^{+\infty} b_n$ jest zbieżny, to również szereg $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ jest zbieżny;

jeżeli szereg $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ jest rozbieżny, to również szereg $\sum_{n=1}^{+\infty} b_n$ jest rozbieżny

Infografika

Polecenie 1

Zapoznaj się z infografiką, a następnie na jej podstawie wykonaj polecenie 2.

Polecenie 2

Czy prawdziwa jest nierówność: $7,9 < 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{1999}$?

☐ NIE

☐ TAK

Sprawdź się

Pokaż ćwiczenia:   

Ćwiczenie 1



Wskaż szeregi rozbieżne.

☐ $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{\sqrt{2}}}$

☐ $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt[n]{n}}$

☐ $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{\pi}}$

☐ $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^3}$

☐ $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{\frac{\sqrt{2}}{2}}}$

☐ $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{\frac{3}{4}}}$

Ćwiczenie 2



Szereg $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{3n+1}$ jest rozbieżny, gdyż możemy skorzystać z kryterium porównawczego i porównać go z szeregiem , gdyż dla każdej dodatniej liczby naturalnej n zachodzi nierówność .

☐ $\frac{1}{4n} < \frac{1}{3n+1}$

☐ $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{n}$

☐ $\frac{2}{n} > \frac{1}{3n+1}$

☐ $\frac{1}{4n} > \frac{1}{3n+1}$

☐ $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$

☐ $\frac{1}{n} < \frac{1}{3n+1}$

☐ $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{4n}$

Ćwiczenie 3



Czy szereg $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{4n-1}$ jest rozbieżny?

☐ NIE

☐ TAK

Ćwiczenie 4



Przypisz każdy szereg do odpowiedniej grupy.

szereg zbieżny

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt[3]{n^4+2}}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2\sqrt{n^3-1}}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{3n-1}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt[4]{n^3+2}}$$

szereg rozbieżny

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n+1}}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2+1}$$

Ćwiczenie 5



Szereg $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n^3+1}}$ jest zbieżny, gdyż możemy skorzystać z kryterium porównawczego i porównać go z szeregiem , gdyż dla każdej dodatniej liczby naturalnej n zachodzi nierówność .

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{n}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{\frac{3}{2}}}$$

$$\frac{1}{n^{\frac{3}{2}}} > \frac{1}{\sqrt{n^3+1}}$$

$$\frac{1}{n} > \frac{1}{\sqrt{n^3+1}}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$$

$$\frac{2}{n} > \frac{1}{\sqrt{n^3+1}}$$

Ćwiczenie 6



Czy szereg $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3n+1}{n^2+n+1}$ jest zbieżny?

☐ NIE

☐ TAK

Ćwiczenie 7



Zbadaj zbieżność szeregu $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt{n+1}}{n^2+2}$.

Wskazówka: Wykorzystaj następujące kryterium: Dane są szeregi $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ i $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ o wyrazach dodatnich.

Jeżeli $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{b_n}$ jest dodatnią liczbą rzeczywistą, to szeregi $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ i $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ albo są oba zbieżne, albo oba rozbieżne.

Ćwiczenie 8



Zbadaj zbieżność szeregu $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt[7]{3n^6-3n^3+n+1}}$.

Dla nauczyciela

Autor: Jacek Dymel

Przedmiot: Matematyka

Temat: Szereg harmoniczny

Grupa docelowa:

III etap edukacyjny, liceum ogólnokształcące, technikum, zakres rozszerzony

Podstawa programowa:

VI. Ciągi.

Zakres rozszerzony. Uczeń spełnia wymagania określone dla zakresu podstawowego, a ponadto:

2) rozpoznaje zbieżne szeregi geometryczne i oblicza ich sumę.

Kształtowane kompetencje kluczowe:

- kompetencje w zakresie rozumienia i tworzenia informacji;
- kompetencje matematyczne oraz kompetencje w zakresie nauk przyrodniczych, technologii i inżynierii;
- kompetencje cyfrowe;
- kompetencje osobiste, społeczne i w zakresie umiejętności uczenia się.

Cele operacyjne:

- badać zbieżność szeregów za pomocą szeregu harmonicznego.

Strategie nauczania:

- konstruktywizm;
- konektywizm.

Metody i techniki nauczania:

Metody i techniki nauczania:

- dyskusja;
- praca z ekspertem.

Formy pracy:

- praca indywidualna;
- praca w parach;
- praca w grupach;
- praca całego zespołu klasowego.

Środki dydaktyczne:

- komputery z głośnikami, słuchawkami i dostępem do internetu;
- zasoby multimedialne zawarte w e-materiale;
- tablica interaktywna/tablica, pisak/kreda.

Przebieg lekcji

Przed lekcją:

1. Nauczyciel prosi uczniów o zapoznanie się z treściami zapisanymi w sekcji „Przeczytaj”.

Faza wstępna:

1. Wskazanie przez nauczyciela tematu: „Szereg harmoniczny” i celów zajęć, przejście do wspólnego ustalenia kryteriów sukcesu.
2. Rozpoznawanie wiedzy uczniów.

Faza realizacyjna:

1. Przed lekcją nauczyciel wyłania wśród uczniów ekspertów, którzy zapoznają się z materiałem zawartym w sekcji „Przeczytaj”. Na lekcji uczniowie pracują w grupach pod kierunkiem ekspertów. Eksperci proponują grupom rozwiązywanie zadań, które przygotowali w domu (zadania oparte na przykładach z sekcji „Przeczytaj”). W razie problemów – służą pomocą, wyjaśniają niezrozumiałe elementy.
2. Uczniowie zapoznają się z materiałem przedstawionym w sekcji Infografika. Po ustalonym wcześniej czasie pyta czy były wątpliwości z jego zrozumieniem i tłumaczy je.
3. Uczniowie rozwiązują wskazane przez nauczyciela ćwiczenia interaktywne.

Faza podsumowująca:

1. Omówienie ewentualnych problemów z rozwiązaniem ćwiczeń z sekcji „Sprawdź się”.
2. Wybrany uczeń podsumowuje zajęcia, zwracając uwagę na nabyte umiejętności, odnosząc się do wyświetlonych na tablicy interaktywnej celów z sekcji „Wprowadzenie”.

Praca domowa:

1. Uczniowie wykonują ćwiczenia interaktywne, które nie zostały dokończone na zajęciach.

Materiały pomocnicze:

- [Co to jest szereg liczbowy?](#)

Wskazówki metodyczne:

- Medium w sekcji „Infografika” można potraktować jako zadania domowe dotyczące analizy problemu w temacie „Szereg harmoniczny”.