



Szeregi geometryczne w równaniach

- [Wprowadzenie](#)
- [Przeczytaj](#)
- [Infografika](#)
- [Sprawdź się](#)
- [Dla nauczyciela](#)



Szeregi geometryczne w równaniach

Źródło: dostępny w internecie: pixabay.com, domena publiczna.

W tym materiale zapoznamy się z typowymi równaniami, w których występują sumy szeregu geometrycznego. Szczególną uwagę będziemy zwracać na to, jak rozpoznajemy szeregi geometryczne występujące w zadaniu. Bardzo istotną kwestią będzie wyznaczanie dziedziny równania w związku z warunkami zbieżności szeregu geometrycznego.

Twoje cele

- Nauczysz się rozwiązywać równania za pomocą szeregów geometrycznych.
- Przypomnisz sobie metody rozwiązywania równań wielomianowych i wymiernych.

Przeczytaj

W tym materiale przedstawimy przykłady równań, w których występują sumy szeregów geometrycznych.

Przy rozwiązywaniu równań należy zwrócić szczególną uwagę na to, jaka część nieskończonej sumy jest sumą szeregu geometrycznego. Najczęściej jest to zapisane w poleceniu, ale jeżeli nie ma takiej informacji, trzeba rozpoznać szereg na podstawie kilku początkowych wyrazów oraz wyrazu zapisanego w postaci ogólnej.

Należy także pamiętać o sprawdzeniu dziedziny, na którą istotny wpływ ma wartość ilorazu szeregu geometrycznego.

Konieczne na końcu każdego rozwiązania równania trzeba sprawdzić, czy otrzymane wyniki należą do dziedziny równania.

Przykład 1

Rozwiążemy równanie: $\frac{1}{x} + x + x^2 + \dots + x^n + \dots = \frac{7}{2}$.

Rozwiązanie

Zapiszmy równanie w postaci:

$$x + x^2 + \dots + x^n + \dots = \frac{7}{2} - \frac{1}{x}.$$

Lewa strona równania jest sumą szeregu geometrycznego o pierwszym wyrazie $a_1 = x$ i ilorazie $q = x$.

Aby szereg geometryczny był zbieżny, musi zachodzić warunek: $|x| < 1$, czyli $x \in (-1, 1)$.

Korzystając z twierdzenia o [sumie szeregu geometrycznego](#), otrzymujemy:

$$\frac{x}{1-x} = \frac{7}{2} - \frac{1}{x}.$$

Mnożymy równanie stronami przez $2x(1-x)$ i otrzymujemy:

$$9x^2 - 9x + 2 = 0$$

$$\Delta = 9^2 - 4 \cdot 2 \cdot 9 = 9$$

$$x_1 = \frac{1}{3}, x_2 = \frac{2}{3}.$$

Sprawdzamy, że oba rozwiązania należą do przedziału $(-1, 1)$.

Odpowiedź: $x = \frac{1}{3}$ lub $x = \frac{2}{3}$.

Przykład 2

Rozwiążemy równanie, w którym lewa strona równania jest sumą szeregu geometrycznego: $x^2 - 2x^3 + 4x^4 - 8x^5 + \dots = 2x + 1$.

Rozwiązanie

Lewa strona równania jest sumą szeregu geometrycznego o pierwszym wyrazie $a_1 = x^2$ i ilorazie $q = -2x$.

Aby szereg geometryczny był zbieżny, musi zachodzić warunek: $|-2x| < 1$, czyli $x \in \left(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$.

Korzystając ze wzoru na sumę szeregu geometrycznego, otrzymujemy:

$$\frac{x^2}{1+2x} = 2x + 1$$

$$(2x + 1)^2 - x^2 = 0$$

$$(2x + 1 + x)(2x + 1 - x) = 0$$

$$(3x + 1)(x + 1) = 0.$$

Rozwiązaniami równania są:

$$x = -1 \notin \left(-\frac{1}{2}; \frac{1}{2}\right)$$

lub

$$x = -\frac{1}{3} \in \left(-\frac{1}{2}; \frac{1}{2}\right).$$

Odpowiedź: $x = -\frac{1}{3}$.

Przykład 3

Rozwiążemy równanie, w którym lewa strona jest sumą szeregu geometrycznego: $1 + (x^2 + 3x + 1) + (x^2 + 3x + 1)^2 + \dots = \frac{4}{9}$.

Rozwiązanie

Aby szereg z lewej strony równania był zbieżny, musi być spełniony warunek: $|x^2 + 3x + 1| < 1$.

Zatem $x^2 + 3x + 1 < -1$ lub $1 < x^2 + 3x + 1$.

Rozwiązujemy nierówność: $x^2 + 3x + 1 < -1$.

$$x^2 + 3x + 2 < 0$$

$$\Delta = 1$$

$$x_1 = -1 \text{ lub } x_2 = -2$$

Rozwiązaniem nierówności $x^2 + 3x + 1 < -1$ jest każda liczba z przedziału $(-2, -1)$.

Rozwiązujemy nierówność: $1 < x^2 + 3x + 1$.

$$0 < x^2 + 3x$$

$$0 < x(x + 3)$$

$$x_3 = 0 \text{ lub } x_4 = -3$$

Rozwiązaniem nierówności $1 < x^2 + 3x + 1$ jest każda liczba ze zbioru $(-\infty, -3) \cup (0, +\infty)$.

Wobec tego szereg jest zbieżny dla $x \in (-\infty, -3) \cup (-2, -1) \cup (0, +\infty)$. Suma szeregu jest równa $\frac{1}{-x^2-3x}$.

Zatem równanie ma postać:

$$\frac{1}{-x^2-3x} = \frac{4}{9}.$$

$$4x^2 + 12x + 9 = 0$$

$$\Delta = 12^2 - 4 \cdot 4 \cdot 9 = 0$$

$$x = -\frac{3}{2} \in (-2, -1)$$

Odpowiedź: $x = -\frac{3}{2}$.

Przykład 4

Rozwiążemy równanie, w którym lewa strona jest sumą szeregu geometrycznego:

$$(1 - x) + \frac{1-x^2}{x} + \frac{(1-x)(1+x)^2}{x} + \dots = 5x^2 + 21x - 26.$$

Rozwiązanie

Aby szereg z lewej strony równania był zbieżny, musi być spełniony jeden z dwóch warunków: $(1 - x) = 0$ lub $\left| \frac{1+x}{x} \right| < 1$.

Rozwiążemy drugi warunek. Pomnożmy strony nierówności przez $|x|$:

$$|1 + x| < |x|.$$

Podnieśmy nierówność do kwadratu:

$$(1+x)^2 < x^2$$

$$1 + 2x + x^2 < x^2$$

$$x < -\frac{1}{2}.$$

Ostatecznie lewa strona jest sumą szeregu geometrycznego wtedy i tylko wtedy, gdy $x \in (-\infty, -\frac{1}{2}) \cup \{1\}$.

Założmy, że $x < -\frac{1}{2}$.

Wówczas możemy skorzystać ze wzoru na sumę szeregu geometrycznego:

$$S = \frac{1-x}{1-\frac{1+x}{x}} = \frac{1-x}{-\frac{1}{x}} = x(x-1)$$

$$x^2 - x = 5x^2 + 21x - 26$$

$$4x^2 + 22x - 26 = 0$$

$$2x^2 + 11x - 13 = 0.$$

Zatem:

$$x = 1 \notin (-\infty, -\frac{1}{2}) \text{ lub } x = -\frac{13}{2} \in (-\infty, -\frac{1}{2}).$$

Zauważmy jednak, że dla $x = 1$ równanie sprowadza się do postaci $0 = 0$, czyli $x = 1$ jest rozwiązaniem równania.

Odpowiedź: $x = 1$ lub $x = -\frac{13}{2}$.

Słownik

suma szeregu geometrycznego

- jeżeli $|q| < 1$ lub $a_1 = 0$, to szereg geometryczny $\sum_{n=1}^{\infty} a_1 \cdot q^{n-1}$ jest zbieżny
- jeżeli $a_1 = 0$, to $\sum_{n=1}^{\infty} a_1 \cdot q^{n-1} = 0$
- jeżeli $|q| < 1$, to $\sum_{n=1}^{\infty} a_1 \cdot q^{n-1} = \lim_{n \rightarrow \infty} S_n = \frac{a_1}{1-q}$

Infografika

Polecenie 1

Zapoznaj się z infografiką. Na jej podstawie wykonaj następne polecenie.

Polecenie 2

Rozwiąż równanie, w którym lewa strona jest sumą szeregu geometrycznego:

$$\sqrt{1+x} - 1 + \frac{1}{\sqrt{1+x}} - \dots = \frac{3}{4}.$$

Sprawdź się

Pokaż ćwiczenia:   

Ćwiczenie 1



Wskaż wszystkie rozwiązania równania, którego lewa strona jest sumą szeregu geometrycznego: $2x + 4 + \frac{8}{x} + \dots = 5x + 3$.

☐ $\frac{2}{3}$

☐ 2

☐ -1

☐ $-\frac{2}{3}$

☐ 3

☐ $-\frac{3}{2}$

Ćwiczenie 2



Wskaż dziedzinę równania, w którym lewa strona jest sumą szeregu geometrycznego:

$$1 - \frac{x}{x+3} + \frac{x^2}{(x+3)^2} - \dots = \sqrt{1-x}.$$

☐ $(-\frac{3}{2}, 1)$

☐ $(-\frac{3}{2}, +\infty)$

☐ $(-\frac{3}{2}, 1\rangle$

☐ $(-\infty, 1\rangle$

☐ $\langle -\frac{3}{2}, 1\rangle$

Ćwiczenie 3



Czy zbiorem rozwiązań równania $2 + x + x^2 + \dots + x^n + \dots = 3$ jest zbiór $\{\frac{1}{2}\}$.

☐ NIE☐ TAK

Ćwiczenie 4



Wskaż zbiór rozwiązań równania: $2x + 1 + x^2 - x^3 + x^4 - x^5 + \dots + (-x)^n + \dots = \frac{13}{6}$.

☐ $\emptyset$ ☐ $\{\frac{1}{2}, -\frac{7}{9}\}$ ☐ $\{\frac{1}{2}\}$ ☐ $\{-\frac{7}{9}\}$

Ćwiczenie 5



Każde z poniższych równań ma po lewej stronie sumę szeregu geometrycznego. Połącz w pary równanie i zbiór jego rozwiązań.

$$1 + \frac{1}{1-x} + \frac{1}{(1-x)^2} + \frac{1}{(1-x)^3} + \dots = x$$

$$\emptyset$$

$$1 + \frac{1}{1-x} + \frac{1}{(1-x)^2} + \frac{1}{(1-x)^3} + \dots = 3$$

$$\{-1\}$$

$$1 + \frac{1}{1-x} + \frac{1}{(1-x)^2} + \frac{1}{(1-x)^3} + \dots = 1$$

$$\{-\frac{1}{2}\}$$

$$1 + \frac{1}{1-x} + \frac{1}{(1-x)^2} + \frac{1}{(1-x)^3} + \dots = -$$

$$(-\infty, 0) \cup (2, +\infty)$$

Ćwiczenie 6



Zbiorem rozwiązań równania $x^2 + 3x^3 + 9x^4 + 27x^5 + \dots = 1 - 3x$, którego lewa strona jest sumą szeregu geometrycznego, jest:

☐ $\{\frac{1}{2}\}$

☐ $\{\frac{1}{4}, \frac{1}{2}\}$

☐ $\emptyset$

☐ $\{\frac{1}{4}\}$

Ćwiczenie 7



Rozwiąż równanie $8(1 + 2x + 4x^2 + \dots) = 15(1 + x^2 + x^4 + \dots)$, w którym w nawiasach znajdują się sumy szeregów geometrycznych.

Ćwiczenie 8



Rozwiąż równanie $\frac{1}{x+2} + \frac{2x+1}{(x+2)^2} + \dots + \frac{(2x+1)^{n-1}}{(x+2)^n} + \dots = 2$.

Dla nauczyciela

Autor: Jacek Dymel

Przedmiot: Matematyka

Temat: Szeregi geometryczne w równaniach

Grupa docelowa:

III etap edukacyjny, liceum ogólnokształcące, technikum, zakres rozszerzony

Podstawa programowa:

VI. Ciągi. Zakres rozszerzony. Uczeń spełnia wymagania określone dla zakresu podstawowego, a ponadto

2) rozpoznaje zbieżne szeregi geometryczne i oblicza ich sumę.

Kształtowane kompetencje kluczowe:

- kompetencje w zakresie rozumienia i tworzenia informacji;
- kompetencje matematyczne oraz kompetencje w zakresie nauk przyrodniczych, technologii i inżynierii;
- kompetencje cyfrowe;
- kompetencje osobiste, społeczne i w zakresie umiejętności uczenia się.

Cele operacyjne:

Uczeń:

- rozwiązuje równania za pomocą szeregów geometrycznych,
- stosuje metody rozwiązywania równań wielomianowych i wymiernych.

Strategie nauczania:

- konstruktywizm;
- konektywizm.

Metody i techniki nauczania:

- rozmowa kierowana;
- metoda tekstu przewodniego;
- dyskusja.

Formy pracy:

- praca indywidualna;
- praca w parach;
- praca w grupach;
- praca całego zespołu klasowego.

Środki dydaktyczne:

- komputery z głośnikami, słuchawkami i dostępem do internetu;
- zasoby multimedialne zawarte w e-materiale;
- tablica interaktywna/tablica, pisak/kreda.

Przebieg lekcji

Faza wstępna:

1. Nauczyciel prezentuje temat: „Szeregi geometryczne w równaniach” oraz cele zajęć, omawiając lub ustalając razem z uczniami kryteria sukcesu.

Faza realizacyjna:

1. Nauczyciel prosi uczniów o zapoznanie się z treściami zapisanymi w sekcji „Przeczytaj”. Wspólnie na forum klasy omawiają pytania i problemy.
2. Uczniowie zapoznają się indywidualnie z treścią sekcji „Infografika”. Zapisują ewentualne pytania dotyczące napotkanych trudności, po czym następuje dyskusja, w trakcie której nauczyciel wyjaśnia niezrozumiałe elementy z materiału.
3. Uczniowie wykonują wspólnie na forum klasy ćwiczenia nr 1-2.
4. Kolejne ćwiczenia nr 3-5 uczniowie wykonują w parach. Następnie konsultują swoje rozwiązania z inną parą uczniów i ustalają jedną wersję odpowiedzi, zapisują problemy, które napotkali podczas rozwiązywania ćwiczeń.
5. Ćwiczenia numer 6, 7 i 8 uczniowie wykonują indywidualnie, a następnie omawia je nauczyciel.

Faza podsumowująca:

1. Omówienie ewentualnych problemów z rozwiązaniem ćwiczeń z sekcji „Sprawdź się”.
2. Wybrany uczeń podsumowuje zajęcia, zwracając uwagę na nabyte umiejętności, odnosząc się do wyświetlonych na tablicy interaktywnej celów z sekcji „Wprowadzenie”.

Praca domowa:

1. Uczniowie zapoznają się z medium w sekcji „Infografika” i rozwiązują polecenia z nim związane.

Materiały pomocnicze:

Szeregi geometryczne zbieżne

Wskazówki metodyczne:

- Nauczyciel może wykorzystać medium w sekcji „Infografika” do pracy przed lekcją. Uczniowie zapoznają się z jego treścią i przygotowują do pracy na zajęciach w ten sposób, żeby móc samodzielnie rozwiązać zadania w temacie „Szeregi geometryczne w równaniach”.