



Odczytywanie własności funkcji na podstawie jej wykresu

- Wprowadzenie
- Przeczytaj
- Aplet
- Sprawdź się
- Dla nauczyciela

Odczytywanie własności funkcji na podstawie jej wykresu

Źródło: dostępny w internecie: [NomeVisualizzato](#) z [Pixabay](#), domena publiczna.

Wykresy w wielu dziedzinach są nośnikami ważnych informacji: finansowych, giełdowych, statystycznych, medycznych. Wiemy, że jednym z powszechnie wykonywanych badań lekarskich jest elektrokardiogram. Wynik badania otrzymujemy w postaci wykresu funkcji napięcia elektrycznego, wytworzonego na skutek skurczu mięśnia sercowego, w zależności od czasu. Na podstawie takiego wykresu można odczytać prawidłową lub zaburzoną czynność serca.



Prawidłowa czynność serca



Zaburzenie rytmu serca

Umiejętność odczytywania własności funkcji z wykresu, jak widzimy powyżej, jest bardzo przydatna nie tylko z punktu widzenia umiejętności matematycznych. W tym temacie skupimy się na doskonaleniu umiejętności matematycznych w zakresie odczytywania własności funkcji z wykresu.

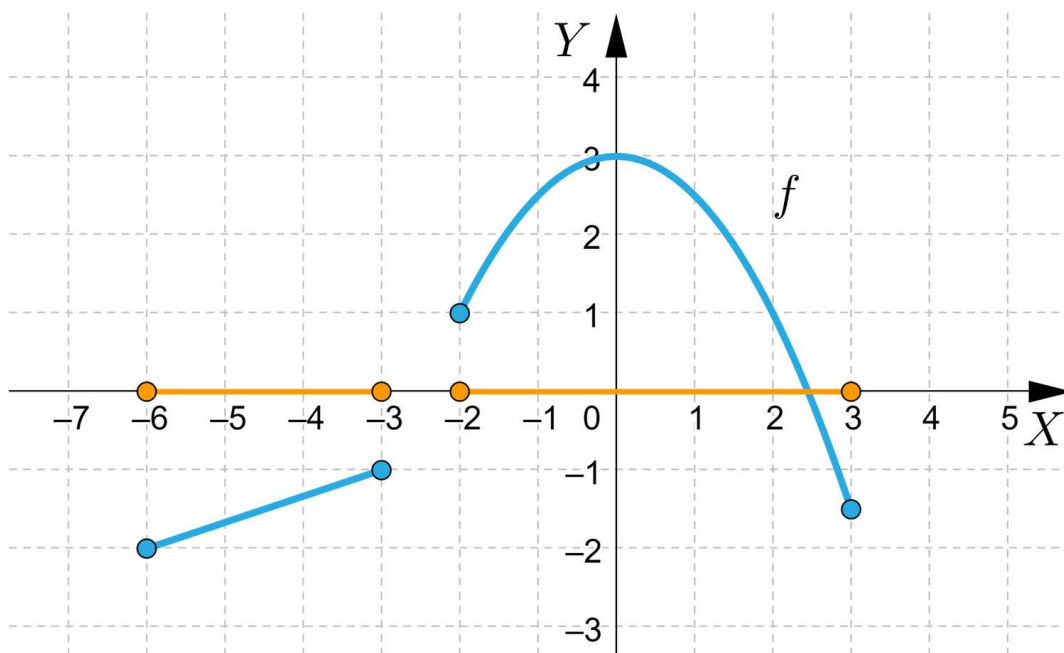
Twoje cele

- Odczytasz z wykresu funkcji:
 - jej dziedzinę,
 - zbiór wartości,
 - miejsca zerowe,
 - argumenty, dla których funkcja przyjmuje wartości ujemne,
 - argumenty, dla których funkcja przyjmuje wartości dodatnie,
 - maksymalne przedziały monotoniczności funkcji,
 - różnowartościowość funkcji,
 - najmniejszą/największą wartość funkcji oraz argumenty, dla których te wartości są przyjmowane.

Przeczytaj

Odczytywanie dziedziny funkcji

Dziedzina funkcji takiej, że $y = f(x)$ to zbiór wszystkich argumentów x , dla których funkcja jest określona. Dziedzinę funkcji f oznaczamy przez D lub D_f .



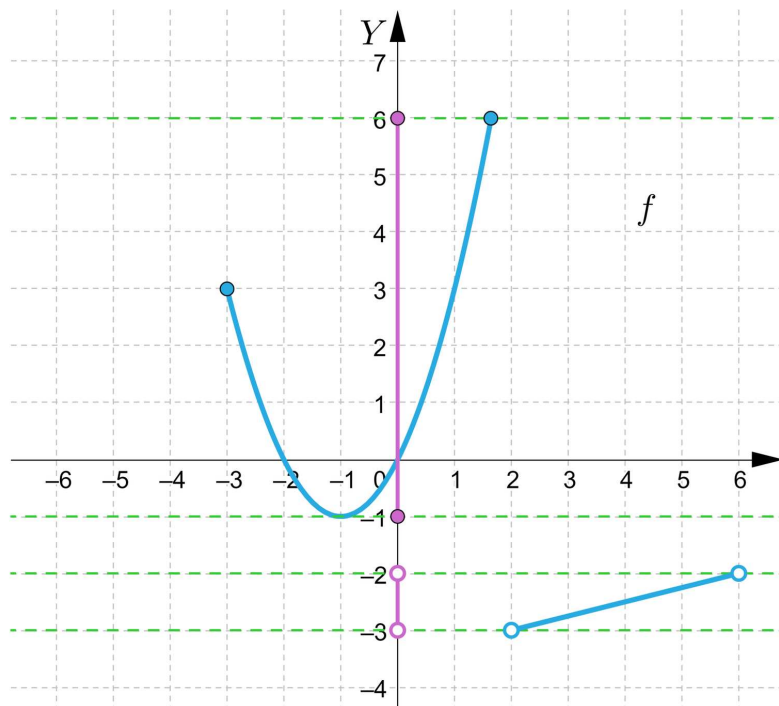
Na rysunku powyżej mamy wykres funkcji f . Jej dziedziną jest zbiór:

$D_f = \langle -6, -3 \rangle \cup \langle -2, 3 \rangle$. Na rysunku został on zaznaczony na osi X kolorem pomarańczowym.

Odczytywanie zbioru wartości funkcji

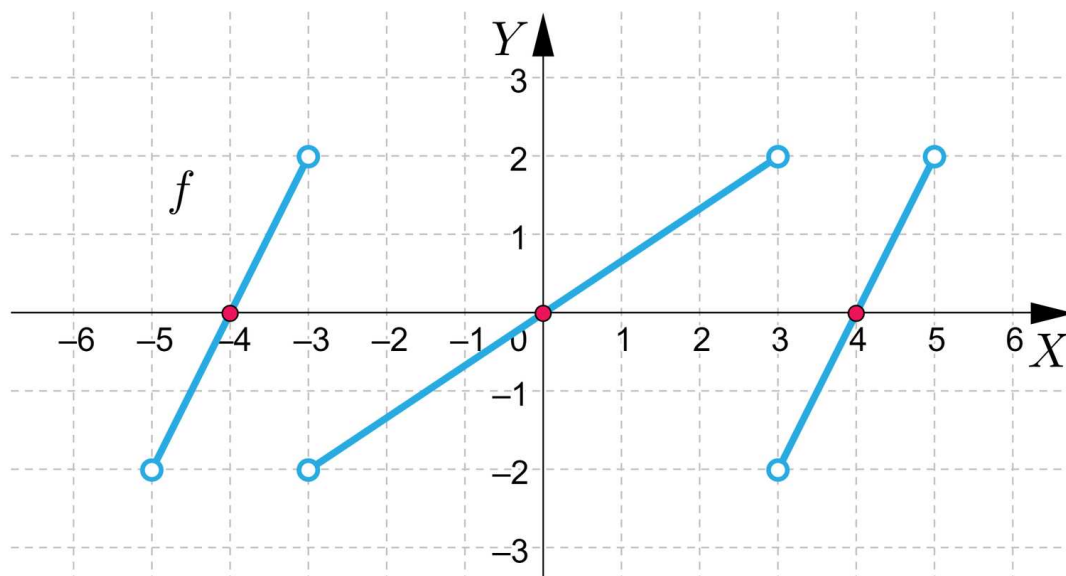
Z wykresu funkcji często można odczytać nie tylko wartość, jaką ta funkcja przyjmuje dla danego argumentu, ale także zbiór wszystkich liczb, które są wartościami tej funkcji. Zbiór ten nazywamy **zbiorem wartości funkcji**.

Zbiór wartości funkcji $f : D \rightarrow Y$ to zbiór tych wszystkich $y \in Y$, dla których istnieje taki argument $x \in D$, że $f(x) = y$. Zbiór wartości funkcji f oznaczamy przez $f(D)$ lub $f(D_f)$ albo po prostu ZW_f .



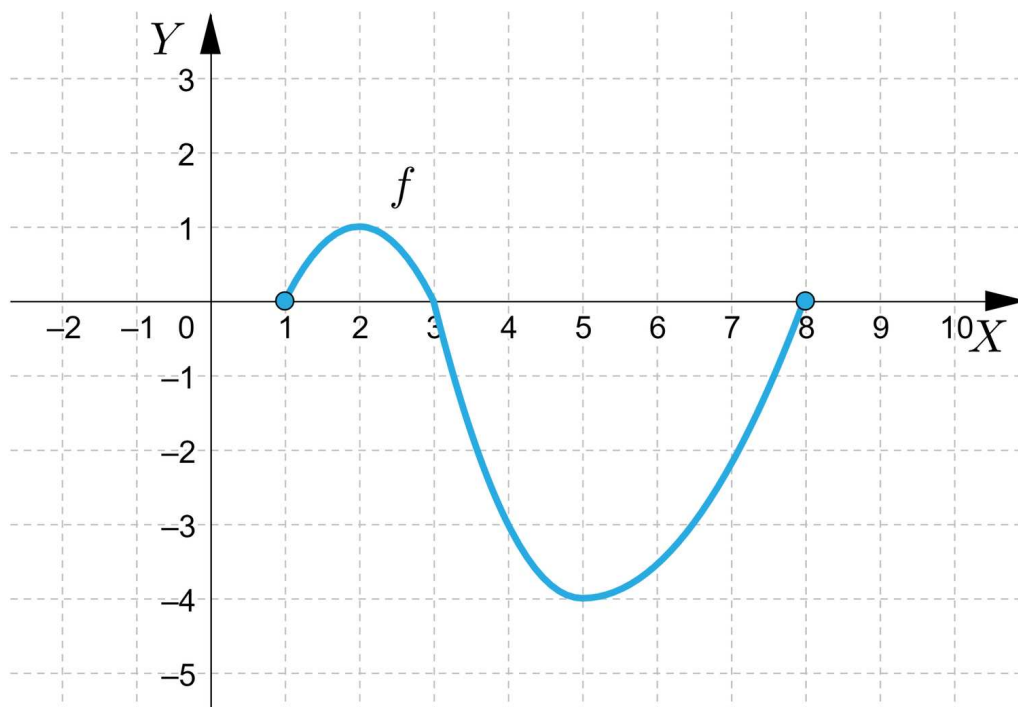
Przy odczytywaniu zbioru wartości funkcji wygodnie jest poprowadzić odpowiednie proste poziome (równoległe do osi X). Zbiór wartości funkcji przedstawionej na rysunku został zaznaczony na osi Y kolorem wrzosowym. Zapisujemy: $ZW_f = (-3, -2) \cup \langle -1, 6 \rangle$.

Odczytywanie miejsc zerowych funkcji



Miejsca zerowe funkcji odczytamy z wykresu. Znajdujemy punkty przecięcia wykresu z osią X – miejsca te zostały zaznaczone na rysunku kolorem czerwonym. Miejsca zerowe to argumenty, dla których $f(x) = 0$, w tym przypadku mamy trzy miejsca zerowe, $x = -4$, $x = 0$ oraz $x = 4$, dla tych argumentów $f(-4) = 0$, $f(0) = 0$ oraz $f(4) = 0$.

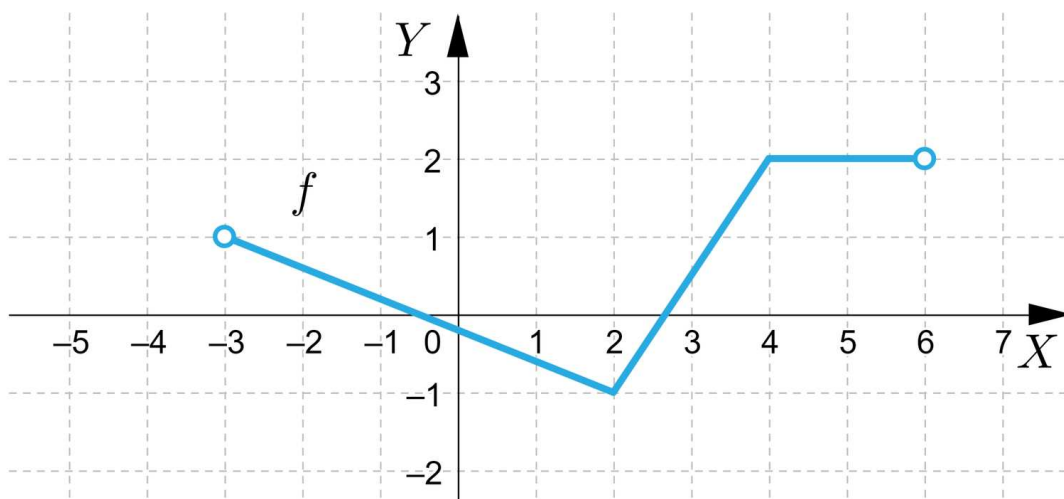
Odczytywanie wartości dodatnich lub ujemnych funkcji



Wartości dodatnie funkcji odczytamy z części wykresu nad osią X , która składa się z punktów o drugiej współrzędnej dodatniej, co oznacza, że nierówność $f(x) > 0$ zachodzi dla $x \in (1, 3)$. Wartości **nieujemne** funkcji odczytamy, gdy $f(x) \geq 0$ a to zachodzi dla $x \in \langle 1, 3 \rangle \cup \{8\}$.

Wartości ujemne funkcji odczytamy z części wykresu poniżej osi X , która składa się z punktów o drugiej współrzędnej ujemnej, co oznacza, że nierówność $f(x) < 0$ zachodzi dla $x \in (3, 8)$. Wartości **niedodatnie** funkcji odczytamy wtedy, gdy $f(x) \leq 0$ a to zachodzi dla $x \in \{1\} \cup \langle 3, 8 \rangle$.

Odczytywanie przedziałów monotoniczności funkcji

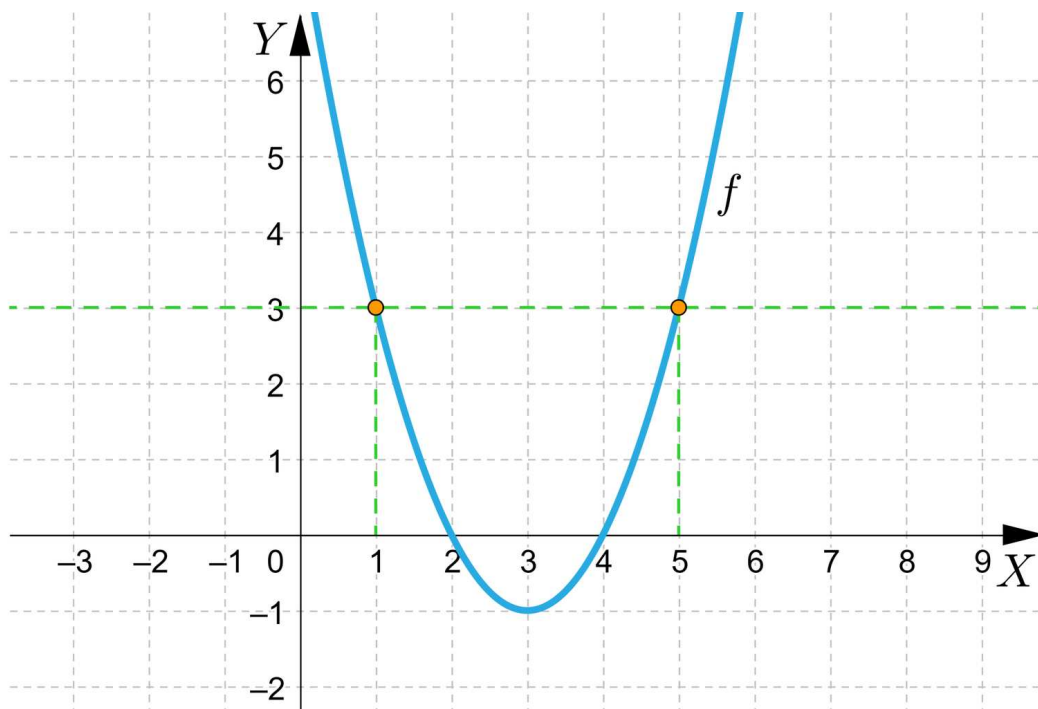


Znajdujemy na osi X maksymalne przedziały **monotoniczności funkcji f** .

Na podanym wykresie funkcja jest:

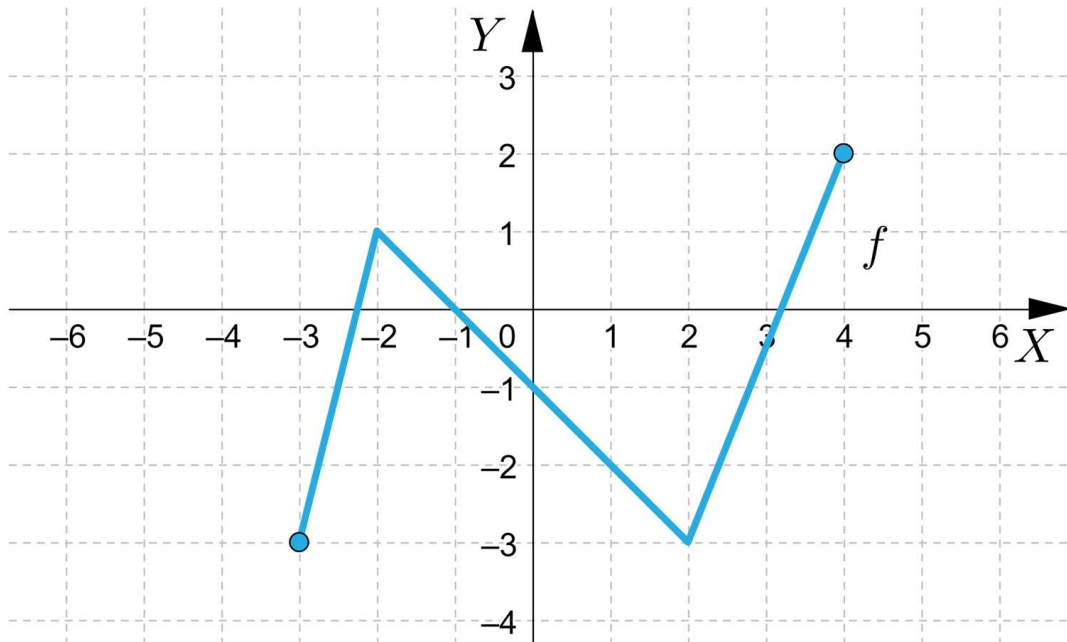
- malejąca w przedziale $(-3, 2)$,
- rosnąca w przedziale $\langle 2, 4 \rangle$,
- stała w przedziale $\langle 4, 6 \rangle$.

Odczytywanie różnowartościowości funkcji



Funkcja nie jest różnowartościowa, bo istnieją dwa różne argumenty, dla których funkcja przyjmuje tę samą wartość. Wystarczy, gdy narysujemy na przykład prostą $y = 3$. Przecina ona wykres funkcji w punktach $(1, 3)$ i $(5, 3)$. Zatem funkcja f przyjmuje wartość równą 3 dla $x = 1$ i $x = 5$.

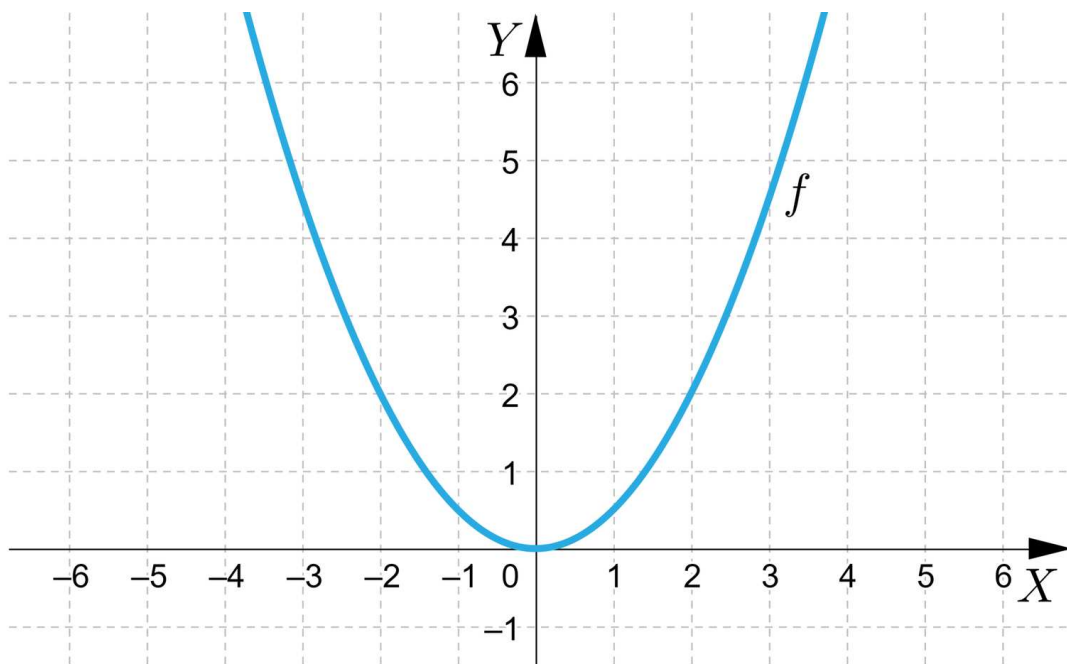
Odczytywanie najmniejszej lub największej wartości funkcji



$$ZW = \langle -3, 2 \rangle$$

Najmniejsza wartość funkcji f jest równa (-3) . Jest ona przyjmowana np. dla $x = 2$. Odczytujemy tę wartość, jako drugą współrzędną punktu znajdującego się najniżej na wykresie.

Największa wartość funkcji f jest równa 2 . Jest ona przyjmowana dla $x = 4$. Odczytujemy tę wartość, jako drugą współrzędną punktu znajdującego się najwyżej na wykresie.

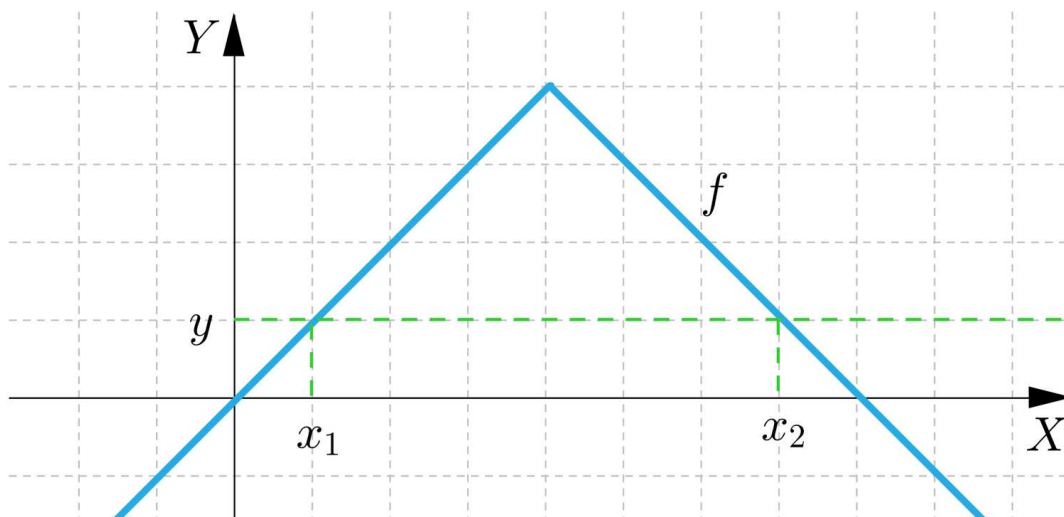


$$ZW = \langle 0, \infty \rangle$$

Zbiorem wartości funkcji f jest przedział $\langle 0, \infty \rangle$. Najmniejsza wartość funkcji f równa 0 jest przyjmowana dla $x = 0$. Funkcja f nie przyjmuje wartości największej.

Inne własności funkcji

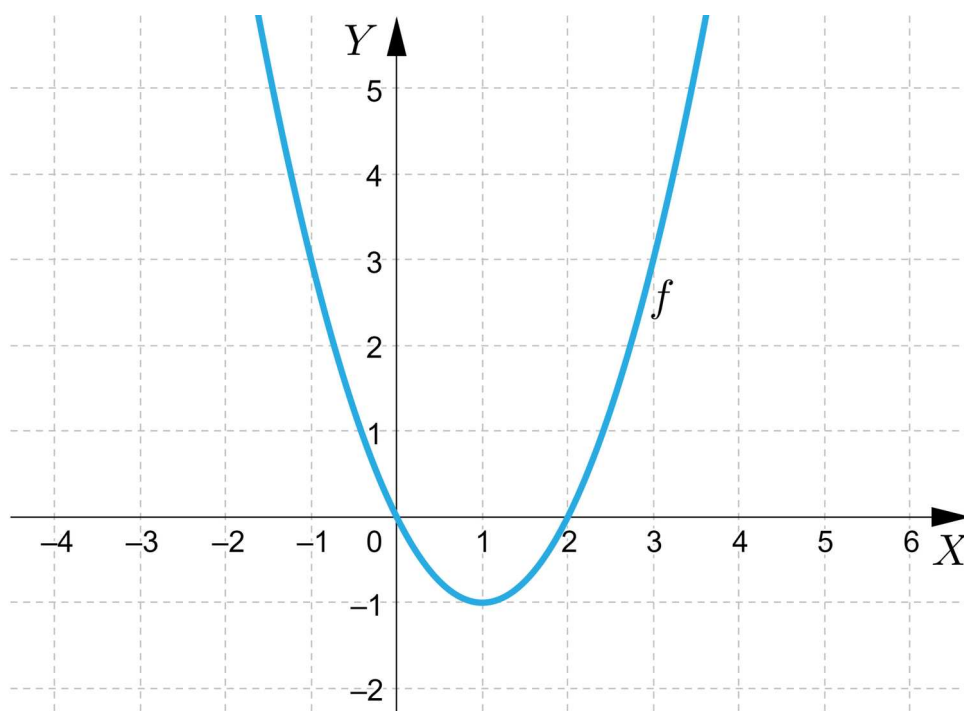
Na podstawie wykresu funkcji możemy podać argumenty, dla których funkcja przyjmuje daną wartość. Zwróć uwagę, że funkcja f , której wykres przedstawiono poniżej, przyjmuje wskazaną wartość y dla dwóch argumentów: x_1 i x_2 .



Zauważmy, że $f(x) > y$ dla $x \in (x_1, x_2)$, natomiast $f(x) < y$ dla $x \in (-\infty, x_1) \cup (x_2, \infty)$.

Przykład 1

Na rysunku przedstawiono wykres funkcji f . Odczytamy na podstawie wykresu funkcji f jej własności.

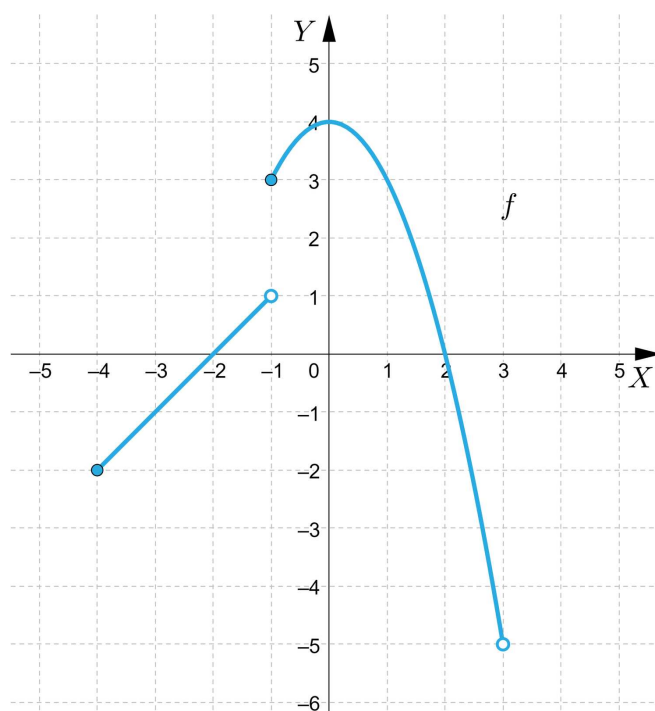


Rozwiązanie:

- dziedziina funkcji $D_f = \mathbb{R}$,
- zbiór wartości $f(D) = \langle 1, \infty \rangle$,
- miejsca zerowe funkcji $x = 0$ oraz $x = 2$,
- funkcja przyjmuje wartości dodatnie dla $x \in (-\infty, 0) \cup (2, \infty)$,
- funkcja przyjmuje wartości ujemne dla $x \in (0, 2)$,
- funkcja jest rosnąca w przedziale $\langle 1, \infty \rangle$,
- funkcja jest malejąca w przedziale $(-\infty, 1)$,
- funkcja ma wartość najmniejszą $y = -1$ dla $x = 1$, nie przyjmuje wartości największej.

Przykład 2

Odczytamy z wykresu funkcji f jej dziedzinę, zbiór wartości, miejsca zerowe, przedziały monotoniczności, wartości dodatnie oraz ujemne, najmniejszą wartość i największą wartość oraz argumenty, dla których są one przyjmowane.



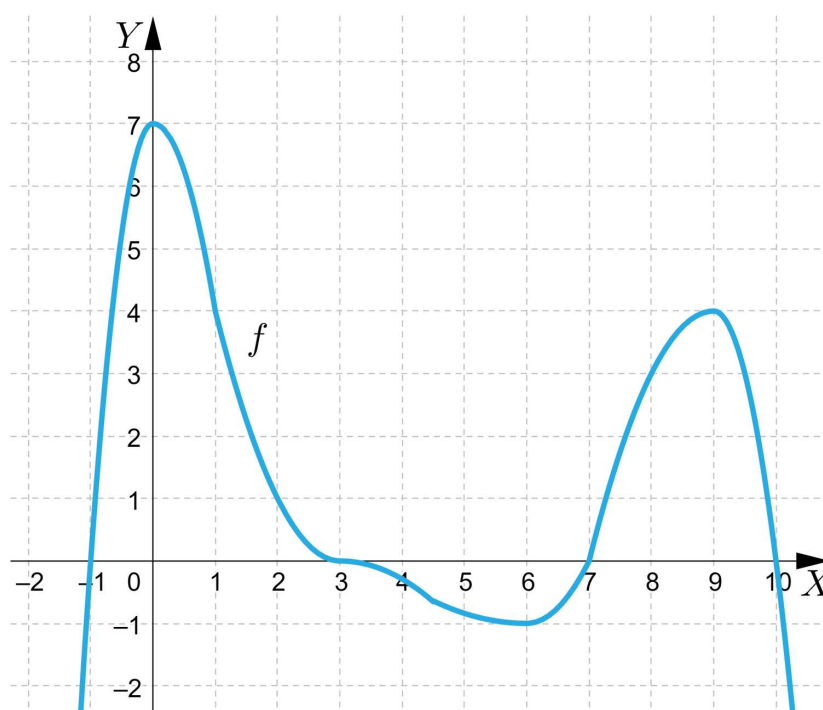
Rozwiązanie:

- $D = \langle -4, 3 \rangle$,
- $f(D) = (-5, 4)$,

- miejsca zerowe funkcji $x = -2$ oraz $x = 2$,
- funkcja jest rosnąca w przedziałach $\langle -4, -1 \rangle$ oraz $\langle -1, 0 \rangle$, malejąca w przedziale $\langle 0, 3 \rangle$,
- wartości dodatnie $f(x) > 0$ dla $x \in (-2, 2)$,
- wartości ujemne $f(x) < 0$ dla $x \in \langle -4, -2 \rangle \cup (2, 3)$,
- funkcja nie przyjmuje wartości najmniejszej, wartość największa $y_{\max} = 4$ dla $x = 0$.

Przykład 3

Odczytamy własności funkcji f , której wykres przedstawiony jest na rysunku poniżej.



Rozwiązanie:

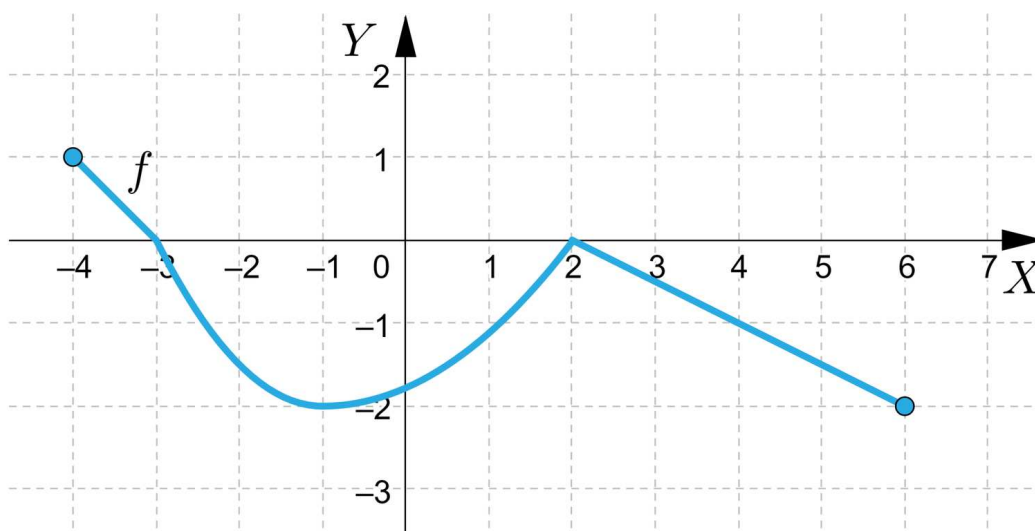
1. $D = \mathbb{R}$,
2. $f(D) = (-\infty, 7)$,
3. miejsca zerowe funkcji $f(x) = 0$ dla $x \in \{-1, 3, 7, 10\}$,
4. funkcja jest **rosnąca** w przedziałach $(-\infty, 0)$ oraz $\langle 6, 9 \rangle$, malejąca w przedziałach $\langle 0, 6 \rangle$ oraz $\langle 9, \infty \rangle$,
5. $f(x) > 0$ dla $x \in (-1, 3) \cup (7, 10)$,
 $f(x) < 0$ dla $x \in (-\infty, -1) \cup (3, 7) \cup (10, \infty)$,
6. funkcja nie przyjmuje wartości najmniejszej, wartość największa $y_{\max} = 7$ dla $x = 0$,
7. funkcja nie jest różnowartościowa.

Przykład 4

Z wykresu funkcji f odczytamy jej miejsca zerowe, zbiór rozwiązań nierówności $f(x) > 0$ oraz nierówności $f(x) \leq 0$.

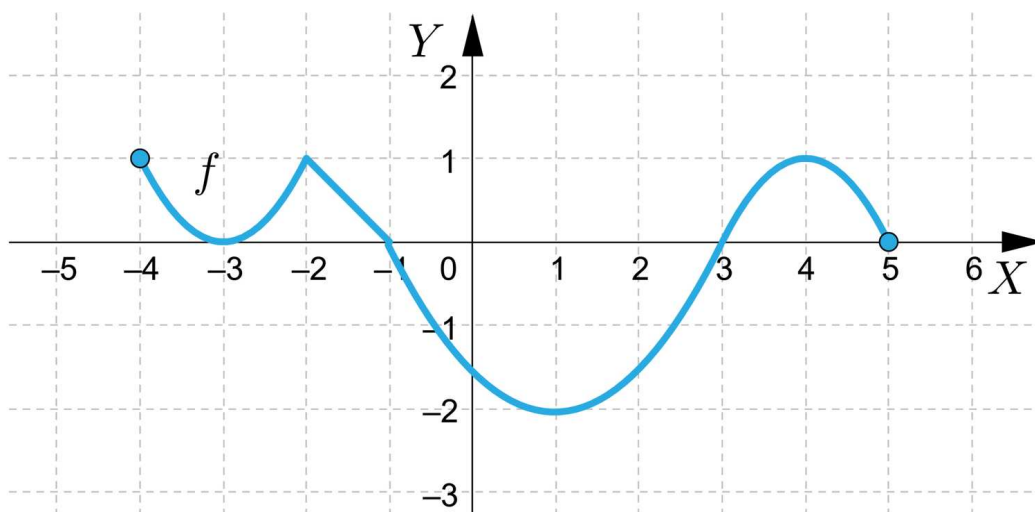
Rozwiązanie:

a)



$f(x) = 0$ dla $x \in \{-3, 2\}$, $f(x) > 0$ dla $x \in \langle -4, -3 \rangle$, $f(x) \leq 0$ dla $x \in \langle -3, 6 \rangle$,

b)



$f(x) = 0$ dla $x \in \{-3, -1, 3, 5\}$, $f(x) > 0$ dla $x \in \langle -4, -3 \rangle \cup \langle -3, -1 \rangle \cup \langle 3, 5 \rangle$,
 $f(x) \leq 0$ dla $x \in \langle -1, 3 \rangle \cup \{-3, 5\}$.

Słownik

dziedzina funkcji

dziedziną funkcji $y = f(x)$ nazywamy zbiór wszystkich elementów x , dla których funkcja jest określona

zbiór wartości funkcji

zbiorem wartości funkcji $f : D \rightarrow Y$ nazywamy zbiór tych wszystkich $y \in Y$, dla których istnieje taki argument $x \in D$, że $f(x) = y$

miejsca zerowe funkcji

argumenty, dla których $f(x) = 0$

funkcja rosnąca

funkcja, której wartości rosną wraz ze wzrostem argumentów funkcji

funkcja malejąca

funkcja, której wartości maleją wraz ze wzrostem argumentów funkcji

funkcja stała

funkcja, która dla każdego argumentu przyjmuje tę samą wartość

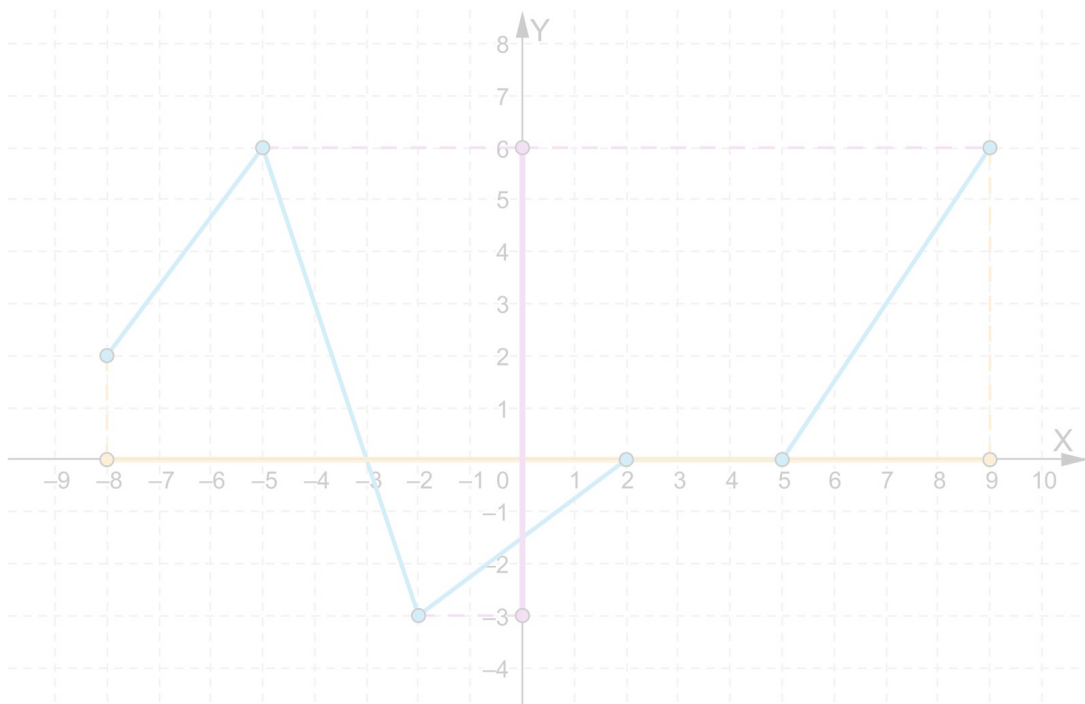
funkcje monotoniczne

funkcje rosnące, malejące, nierosnące, niemalejące lub stałe w całej dziedzinie

Aplet

Polecenie 1

Zapoznaj się z dynamicznym wykresem funkcji (aplet własności funkcji). Zmieniając wielkość parametru n na suwaku, możesz zmieniać elementy wykresu funkcji oraz zaznaczając odpowiednie pola dotyczące własności funkcji sprawdzać, czy poprawnie odczytujesz z wykresu własności wybranej funkcji.



Zasób interaktywny dostępny pod adresem <https://zpe.gov.pl/a/Di1lU3WLe>




Polecenie 2

Na podstawie wykresu w aplecie dla $n = 3$ przeanalizuj przebieg wykresu funkcji i odczytaj z wykresu dziedzinę, zbiór wartości, miejsca zerowe, przedziały monotoniczności funkcji. Za dziedzinę funkcji przyjmij przedział $\langle -8; 2 \rangle$.

Polecenie 3

Na podstawie wykresu w aplecie dla $n = 4$ przeanalizuj przebieg wykresu funkcji i odczytaj z wykresu dziedzinę, zbiór wartości, miejsca zerowe, przedziały monotoniczności funkcji. Za dziedzinę funkcji przyjmij przedział $\langle -8, 5 \rangle$.

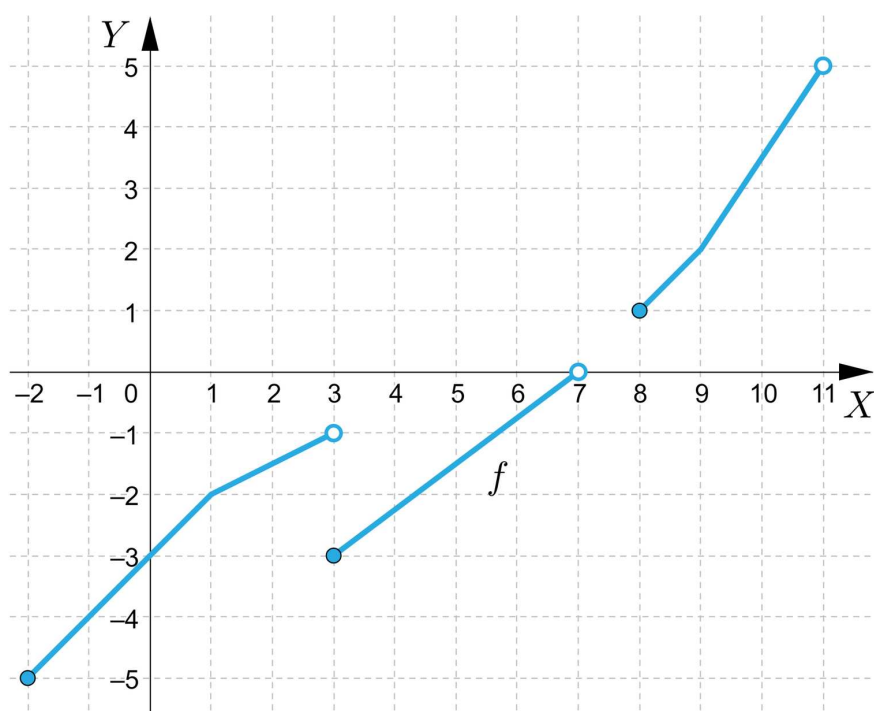
Sprawdź się

Pokaż ćwiczenia:   

Ćwiczenie 1



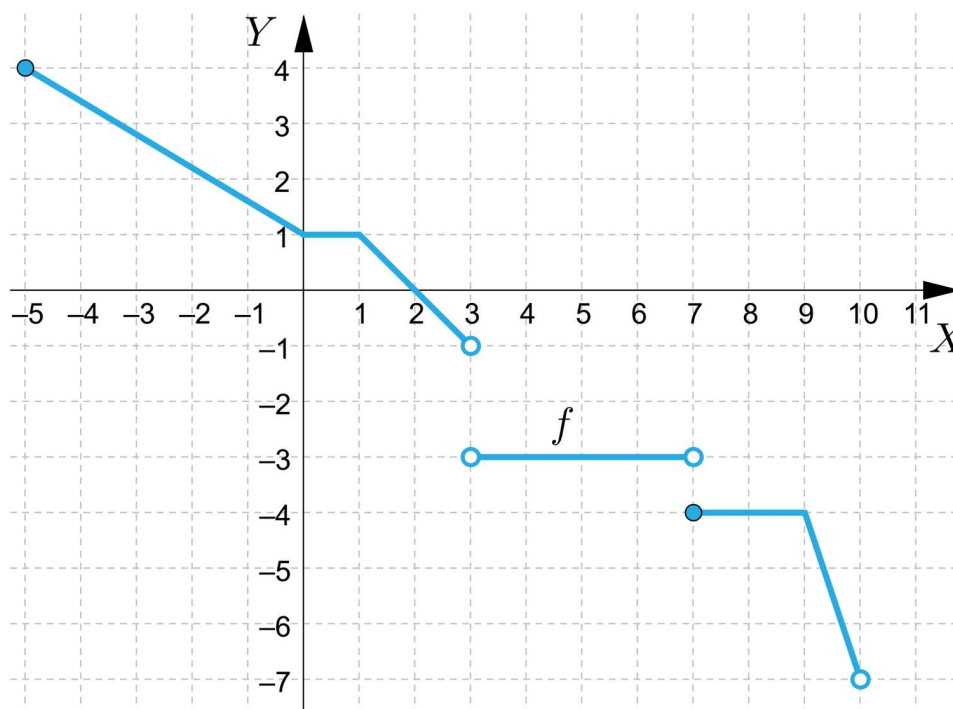
Na rysunku przedstawiony jest wykres funkcji $y = f(x)$. Dziedziną funkcji jest zbiór:



Ćwiczenie 2



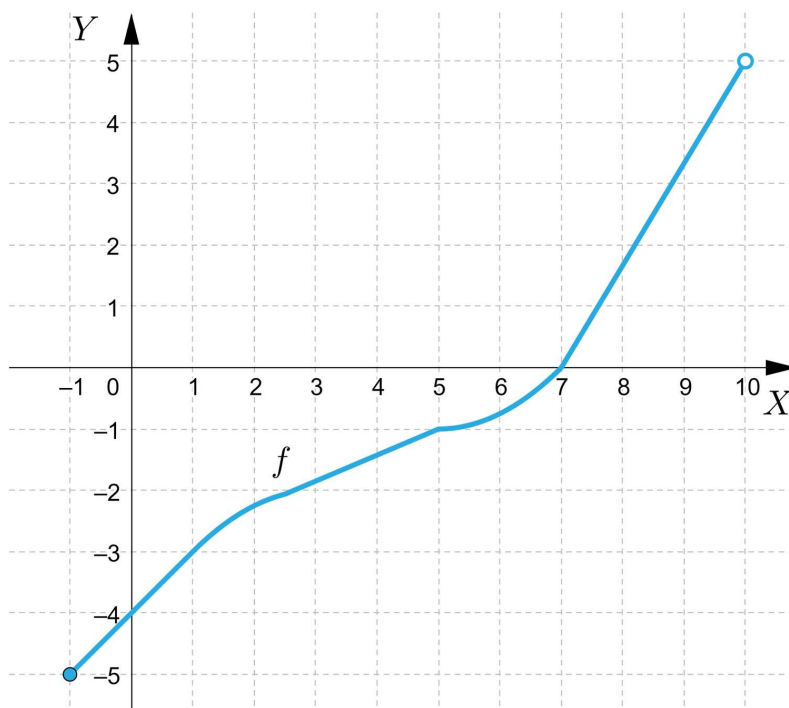
Na rysunku przedstawiony jest wykres funkcji $y = f(x)$. Zbiorem wartości tej funkcji jest:



Ćwiczenie 3



Na rysunku przedstawiono wykres funkcji f .



Ćwiczenie 4



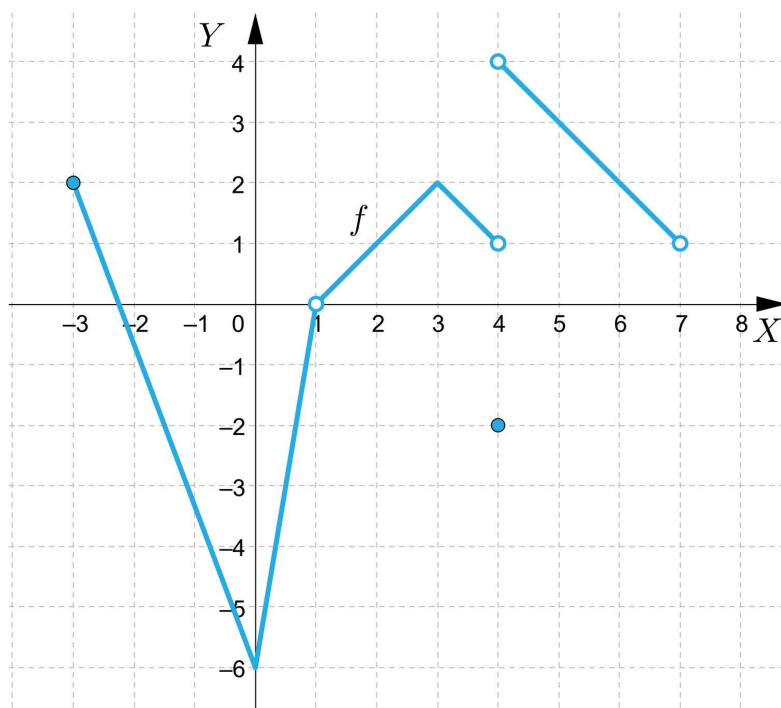
Ćwiczenie 5



Ćwiczenie 6



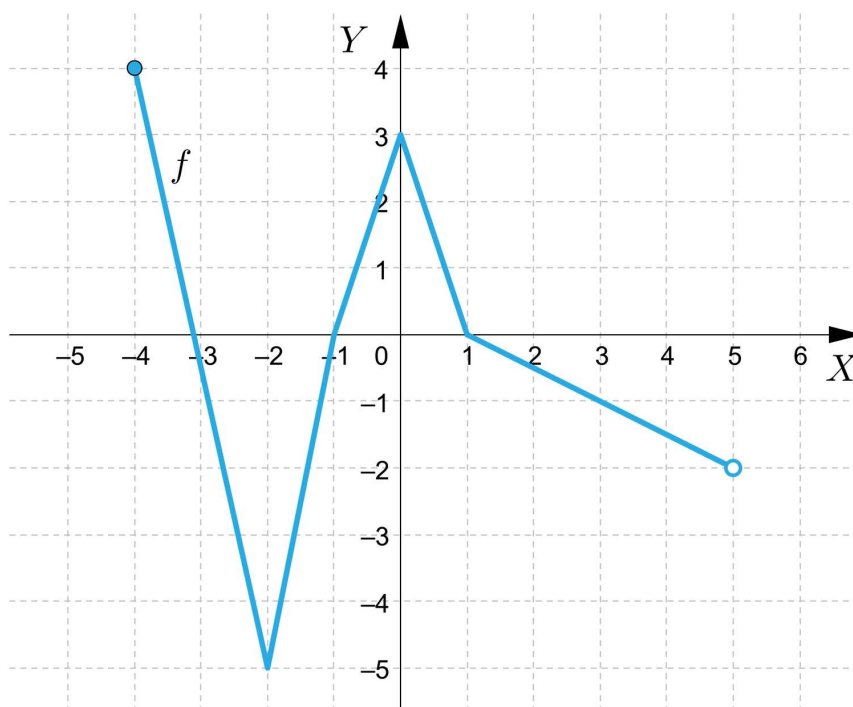
Na podstawie analizy przedstawionego na rysunku wykresu funkcji zaznacz poprawnie opisane własności funkcji:



Ćwiczenie 7



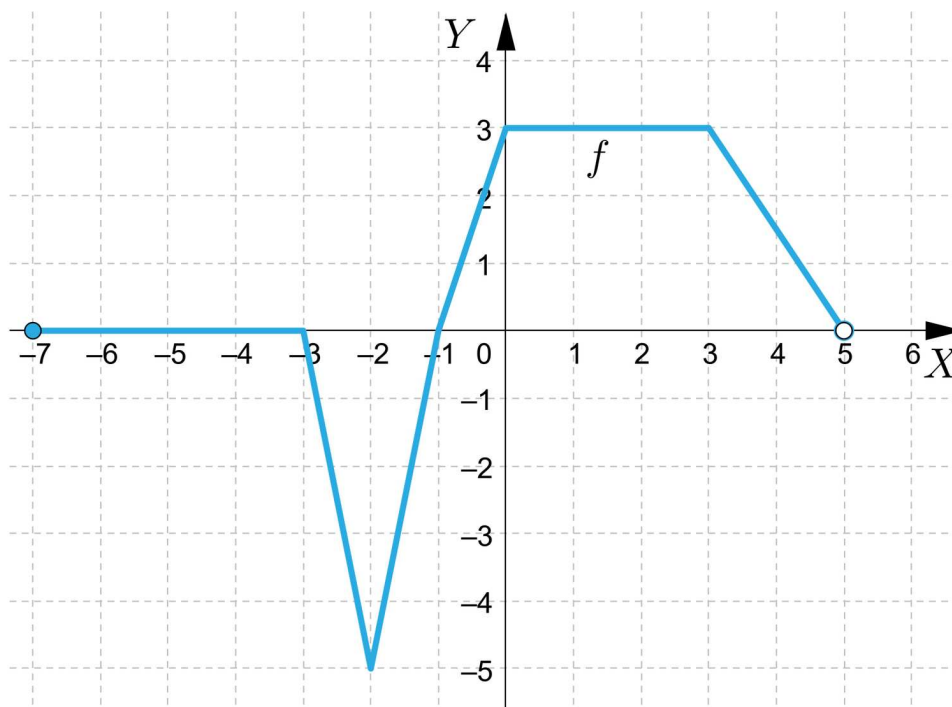
Na rysunku przedstawiono wykres funkcji f .



Ćwiczenie 8



Na rysunku przedstawiono wykres funkcji f .



Odczytaj z wykresu i zapisz:

1. dziedzinę funkcji,
2. zbiór wartości,
3. miejsca zerowe,
4. argumenty, dla których funkcja przyjmuje wartości ujemne,
5. argumenty, dla których funkcja przyjmuje wartości dodatnie,
6. maksymalne przedziały monotoniczności funkcji,
7. różnowartościowość funkcji,
8. najmniejszą i największą wartość funkcji oraz argumenty, dla których te wartości są przyjmowane.

Dla nauczyciela

Autor: Justyna Biernacka

Przedmiot: Matematyka

Temat: Odczytywanie własności funkcji na podstawie jej wykresu

Grupa docelowa:

III etap edukacyjny, liceum ogólnokształcące, technikum, zakres rozszerzony

Podstawa programowa:

V. Funkcje.

Zakres podstawowy. Uczeń:

- 1) określa funkcje, jako jednoznaczne przyporządkowanie za pomocą opisu słownego, tabeli, wykresu, wzoru (także różnymi wzorami na różnych przedziałach);
- 2) oblicza wartość funkcji zadanej wzorem algebraicznym;
- 3) odczytuje i interpretuje wartości funkcji określonych za pomocą tabel, wykresów, wzorów itp., również w sytuacjach wielokrotnego użycia tego samego źródła informacji lub kilku źródeł jednocześnie;
- 4) odczytuje z wykresu funkcji: dziedzinę, zbiór wartości, miejsca zerowe, przedziały monotoniczności, przedziały, w których funkcja przyjmuje wartości większe (nie mniejsze) lub mniejsze (nie większe) od danej liczby, największe i najmniejsze wartości funkcji (o ile istnieją) w danym przedziale domkniętym oraz argumenty, dla których wartości największe i najmniejsze są przez funkcję przyjmowane.

Zakres rozszerzony. Uczeń spełnia wymagania określone dla zakresu podstawowego, a ponadto:

- 1) na podstawie wykresu funkcji $y = f(x)$ rysuje wykres funkcji $y = |f(x)|$;
- 2) posługuje się złożeniami funkcji;
- 3) dowodzi monotoniczności funkcji zadanej wzorem, jak w przykładzie: wykaż, że funkcja $f(x) = (x - 1)(x + 2)$ jest monotoniczna w przedziale $(-\infty, -2)$.

Kształtowane kompetencje kluczowe:

- kompetencje w zakresie rozumienia i tworzenia informacji;

- kompetencje matematyczne oraz kompetencje w zakresie nauk przyrodniczych, technologii i inżynierii;
- kompetencje cyfrowe;
- kompetencje osobiste, społeczne i w zakresie umiejętności uczenia się.

Cele operacyjne:

Uczeń:

- odczytuje z wykresu funkcji:
 - jej dziedzinę;
 - zbiór wartości;
 - miejsca zerowe;
 - argumenty, dla których funkcja przyjmuje wartości ujemne;
 - argumenty, dla których funkcja przyjmuje wartości dodatnie;
 - maksymalne przedziały monotoniczności funkcji,
 - różnowartościowość funkcji;
 - najmniejszą oraz największą wartość funkcji oraz argumenty, dla których te wartości są przyjmowane.

Strategie nauczania:

- konstruktywizm;
- konektywizm.

Metody i techniki nauczania:

- odwrócona lekcja;
- analiza przypadku.

Formy pracy:

- praca w grupach;
- praca indywidualna;
- praca całego zespołu klasowego.

Środki dydaktyczne:

- komputery z dostępem do internetu w takiej liczbie, żeby każdy uczeń miał do dyspozycji komputer;
- zasoby multimedialne zawarte w e-materiale;
- tablica interaktywna/tablica, pisak/kreda.

Przebieg lekcji

Faza wstępna:

1. Nauczyciel może wykorzystać element lekcji odwróconej polecając, aby uczniowie w ramach przygotowania do lekcji przypomnieli sobie wiadomości dotyczące funkcji i jej własności.
2. Uczniowie w domu zapoznają się z materiałem zawartym w sekcji „Przeczytaj” odnośnie opisu własności funkcji.
3. Nauczyciel podaje temat i cele zajęć, wspólnie z uczniami ustala kryteria sukcesu.

Faza realizacyjna:

1. Nauczyciel prosi o przypomnienie, jakie własności funkcji odczytujemy na podstawie wykresu.
2. Podział klasy na grupy.
3. Uczniowie pracują w grupach metodą analizy przypadku. Analizują przykłady zawarte w sekcji „Aplet”.
4. Podczas pracy indywidualnej, uczniowie wykonują polecenia umieszczone pod apletem . Napotkane trudności wyjaśniają korzystając z pomocy nauczyciela.
5. Uczniowie wykonują zaproponowane ćwiczenia interaktywne.

Faza podsumowująca:

1. Na podsumowanie lekcji nauczyciel zadaje uczniom pytania dotyczące ćwiczeń. Uczniowie wskazują nauczycielowi, na jakie trudności natknęli się rozwiązując zadania.
2. Nauczyciel omawia przebieg zajęć, wskazuje mocne i słabe strony pracy uczniów, udziela uczniom informacji zwrotnej.

Praca domowa:

Zadaniem uczniów jest sporządzenie wykresów trzech funkcji i na podstawie wykresów opisanie własności tych funkcji.

Materiały pomocnicze:

[Funkcja i jej własności](#)

Wskazówki metodyczne:

Aplet można wykorzystać na zajęciach poświęconych określaniu poszczególnych własności funkcji.