O twierdzeniu Snelliusa, czyli rozwiązywaniu trójkątów dowolnych

O twierdzeniu Snelliusa, czyli rozwiązywaniu trójkątów dowolnych

Źródło: Margaret Stokman, dostępny w internecie: www.unsplash.com.

Trudno powiedzieć, dlaczego wszyscy adepci szkolnej matematyki znają postać Pitagorasa, a przynajmniej potrafią tę postać związać z najsłynniejszym bodaj twierdzeniem planimetrii, liczni posługują się wzorami Bernoulliego, dwumianem Newtona, wzorami Viete'a, a prawie nikomu nie kojarzy się postać Snelliusa, a przecież jest ona związana z podstawowym narzędziem używanym przy badaniu związków miarowych na płaszczyźnie, doskonale znanym pod nazwą twierdzenia sinusów.

Twoje cele

- Zbadasz zależności między bokami i kątami w trójkącie i poznasz twierdzenie sinusów.
- Udowodnisz twierdzenie sinusów.
- Zastosujesz twierdzenie sinusów do rozwiązywania trójkątów w sytuacjach problemowych.
- Zastosujesz twierdzenie sinusów do wyznaczenia zależności miarowych w trójkącie.

Przeczytaj

Rozwiązywanie trójkątów

Przez rozwiązywanie trójkąta będziemy rozumieli wyznaczanie długości wszystkich jego boków i miar wszystkich jego kątów.

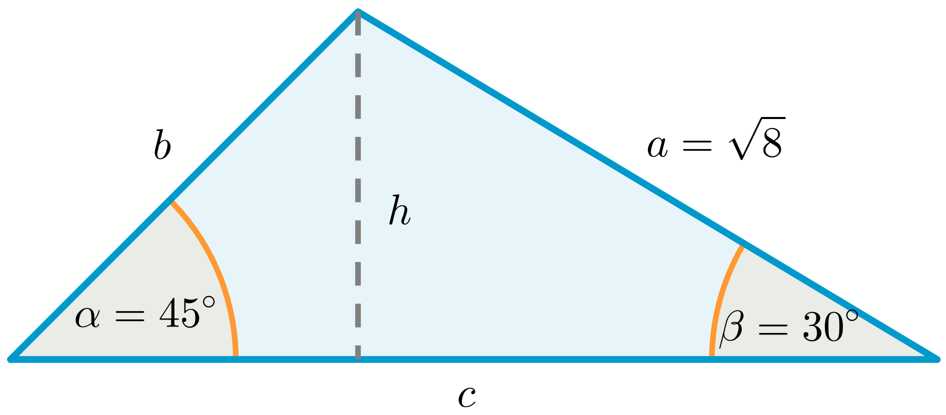
Przykład 1

Rozważmy trójkąt, w którym jeden z kątów ma miarę 45°, a bok leżący naprzeciw tego kąta ma długość $\sqrt{8}$, zaś drugi z kątów ma miarę 30°. Wyznaczymy miarę trzeciego kąta tego trójkąta i długości jego dwóch pozostałych boków.

Oczywiście miarę trzeciego kąta tego trójkąta wyznaczymy korzystając z bilansu kątów:

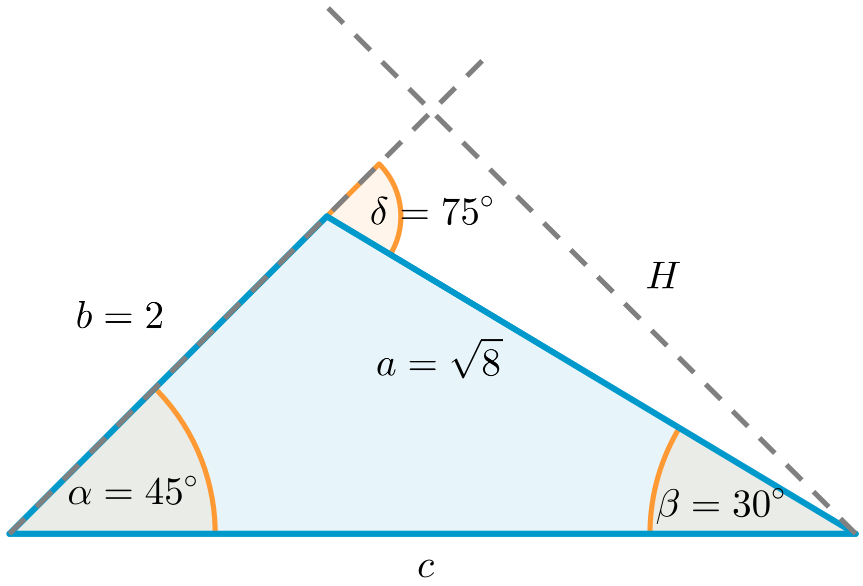
$180^\circ - 30^\circ - 45^\circ = 105^\circ$, a do wyznaczenia długości jego boków posłużymy się definicjami odpowiednich funkcji trygonometrycznych w trójkątach prostokątnych, jakie powstaną, gdy poprowadzimy odpowiednio wysokości.

Przyjmijmy oznaczenia takie, jak na rysunku.



Wtedy mamy oczywiście $\sin\beta = \frac{h}{a}$, a stąd $h = a \cdot \sin\beta$. Podobnie $\sin\alpha = \frac{h}{b}$, a stąd $h = b \cdot \sin\alpha$. Zatem $h = b \cdot \sin\alpha$ oraz $h = a \cdot \sin\beta$, czyli $b \cdot \sin\alpha = a \cdot \sin\beta$. Możemy już teraz podstawić wartości liczbowe: $b \cdot \sin 45^\circ = \sqrt{8} \cdot \sin 30^\circ$ i wyznaczyć, że $b = \frac{\sqrt{8} \cdot \frac{1}{2}}{\frac{\sqrt{2}}{2}} = \frac{\sqrt{8}}{\sqrt{2}} = 2$.

Zauważmy, że równość $b \cdot \sin\alpha = a \cdot \sin\beta$ możemy zapisać w postaci proporcji: $\frac{b}{\sin\beta} = \frac{a}{\sin\alpha}$ Dokonamy teraz pewnych modyfikacji naszego rysunku poprzez dorysowanie wysokości H poprowadzonej z wierzchołka kąta o mierze 30° i usunięcie wysokości h.



Teraz mamy oczywiście $\sin\alpha = \frac{H}{c}$ oraz $\sin 75^\circ = \frac{H}{a}$. Stąd $H = c \cdot \sin\alpha$ oraz $H = a \cdot \sin 75^\circ$, czyli $a \cdot \sin 75^\circ = c \cdot \sin\alpha$. Zatem $c = \frac{\sqrt{8} \cdot \sin 75^\circ}{\frac{\sqrt{2}}{2}} = 4 \cdot \sin 75^\circ$. Pozostaje odczytać z tablic wartość sinusa kąta i podać przybliżony wynik, albo skorzystać z dokładnej wartości (odpowiedni wzór można znaleźć w dostępnych źródłach) i zapisać, że $c = 4 \cdot \sin 75^\circ = 4 \cdot \left(\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}\right) = \sqrt{6} + \sqrt{2}$.

Podobnie jak wcześniej, równość $a \cdot \sin 75^\circ = c \cdot \sin\alpha$ możemy zapisać w postaci proporcji:

$$\frac{c}{\sin 75^\circ} = \frac{a}{\sin\alpha}$$

Ponieważ $\sin 75^\circ = \sin(180^\circ - 75^\circ) = \sin(180^\circ - 45^\circ - 30^\circ) = \sin(180^\circ - \alpha - \beta) = \sin\gamma$,

więc wcześniejszą proporcję można zapisać, jako: $\frac{c}{\sin\gamma} = \frac{a}{\sin\alpha}$

Ponieważ $\frac{c}{\sin\gamma} = \frac{a}{\sin\alpha}$ oraz $\frac{b}{\sin\beta} = \frac{a}{\sin\alpha}$, więc $\frac{a}{\sin\alpha} = \frac{b}{\sin\beta} = \frac{c}{\sin\gamma}$

Otrzymana w naszym przykładzie zależność oznacza, że stosunek długości boku trójkąta do sinusa kąta leżącego naprzeciw tego boku jest wielkością stałą.

Pozostaje zbadać, czy zależność ta jest prawdziwa dla dowolnego trójkąta, a jeśli tak, to czym jest ta stała wielkość, będąca ilorazem długości boku i sinusa odpowiedniego kąta w danym trójkącie.

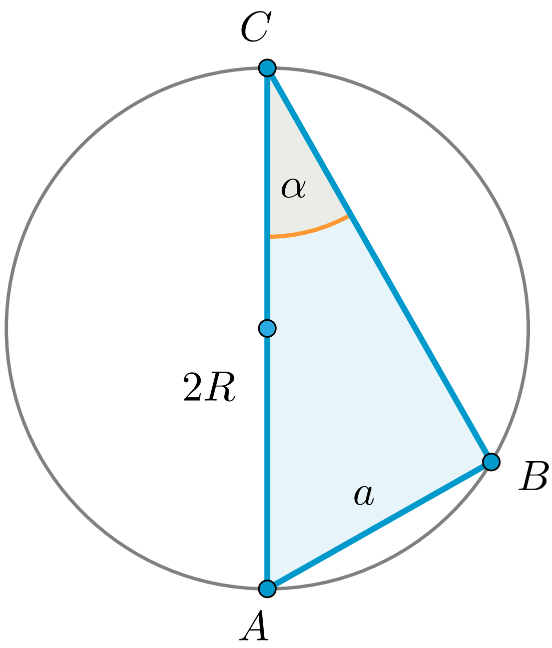
Twierdzenie: Twierdzenie Snelliusa (alternatywnie Twierdzenie sinusów)

W dowolnym trójkącie na płaszczyźnie stosunki długości boków do sinusów przeciwległych kątów są równe średnicy okręgu opisanego na tym trójkącie:

$$\frac{a}{\sin\alpha} = \frac{b}{\sin\beta} = \frac{c}{\sin\gamma} = 2R$$

Dowód

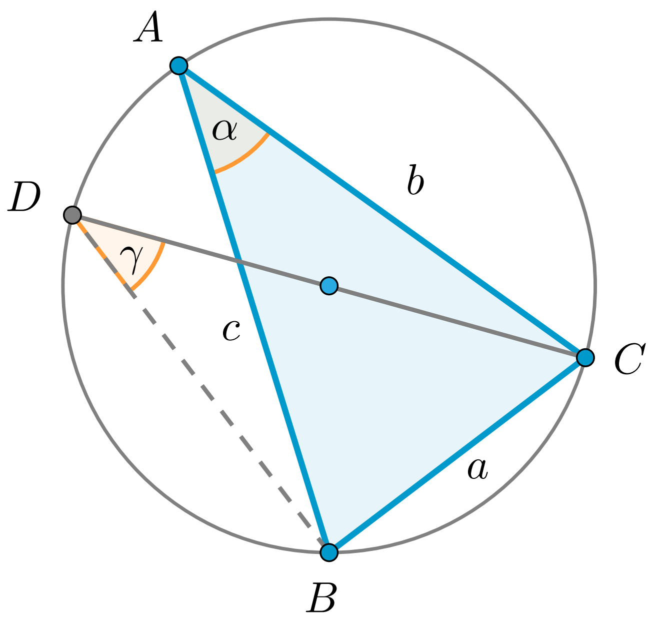
Rozważmy najpierw trójkąt prostokątny i przyjmijmy oznaczenia jak na rysunku.



Bezpośrednio z definicji funkcji sinus kąta w trójkącie prostokątnym mamy: $\sin\alpha = \frac{a}{2R}$, czyli $2R = \frac{a}{\sin\alpha}$. Analogicznie możemy postąpić z drugą przyprostokątną. Pamiętając, że $\sin 90^\circ = 1$ oraz przyjmując oznaczenie $c = 2R$, możemy zapisać, że $\frac{c}{\sin 90^\circ} = 2R$. Co kończy dowód w przypadku trójkąta prostokątnego.

Rozważmy teraz dowolny trójkąt ostrokątny ABC i przyjmijmy oznaczenia takie, jak na rysunku.

Odcinek CD jest średnicą okręgu (trójkąt CBD jest prostokątny).



Pokażemy, że $\frac{a}{\sin\alpha} = 2R$. Zauważmy, że kąty α i γ są kątami wpisanymi w dany okrąg i są oparte na tym samym łuku, zatem są równe. Stąd $\sin\alpha = \sin\gamma$. Ale $\sin\gamma = \frac{|BC|}{|CD|} = \frac{a}{2R}$, więc $2R = \frac{a}{\sin\gamma} = \frac{a}{\sin\alpha}$, co należało wykazać.

Analogicznie, dorysowując odpowiednio średnice i cięciwy poprowadzone z pozostałych wierzchołków, można udowodnić, że stosunek długości każdego z pozostałych boków do sinusa kąta leżacego naprzeciwko danego boku jest równy średnicy okręgu opisanego na danym trójkącie.

Dowód w przypadku trójkąta rozwartokątnego jest treścią Ćwiczenia 1.

Słownik

sinus kąta w trójkącie prostokątnym

stosunek długości przyprostokątnej leżącej naprzeciw tego kąta do długości przeciwprostokątnej w tym trójkącie

Aplet

Polecenie 1

Uruchom aplet. Zauważ, że dla danego trójkąta stosunek długości każdego z jego boków do sinusa kąta leżącego naprzeciw tego boku jest taki sam. Zmień wskaźnikiem położenie któregoś z wierzchołków. Zaobserwuj jak zmieniają się odpowiednie ilorazy. Czy zależy to od wybranego wierzchołka? Sformułuj hipotezę dotyczącą stosunku długości boku i sinusa kąta leżącego naprzeciw tego boku w dowolnym trójkącie.

Zasób interaktywny dostępny pod adresem https://zpe.gov.pl/a/DgAnlq40L

Polecenie 2

Uruchom aplet. Zaznacz przycisk OKRĄG OPISANY. Zmieniając położenie wierzchołka obserwuj, jak zmieniają się poszczególne ilorazy i długość promienia okręgu opisanego. Zapisz na kartce obok siebie wartości ilorazów i długości promienia okręgu oraz jego średnicy. Sformułuj hipotezę dotyczącą zależności między obserwowanymi wielkościami w dowolnym trójkącie.

Polecenie 3

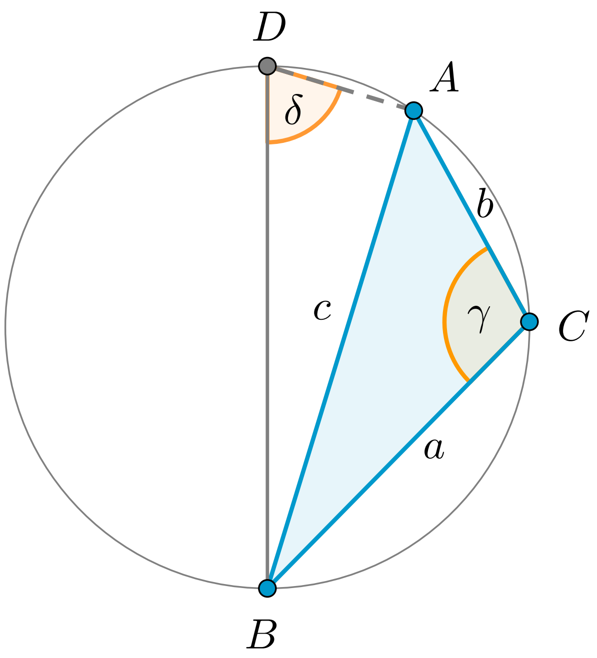
Zauważ, że przy niektórych położeniach wierzchołków trójkąta, iloraz długości boku i sinusa kąta leżącego naprzeciw tego boku nie jest równy średnicy okręgu opisanego na tym trójkącie. Wyjaśnij przyczynę występujących różnic.

Sprawdź się

Pokaż ćwiczenia:

Ćwiczenie 1

Niech γ będzie kątem rozwartym w trójkącie ABC wpisanym w okrąg o promieniu R, gdzie BD jest średnicą tego okręgu (jak na rysunku).



Udowodnij, że $\frac{c}{\sin\gamma} = 2R$.
Ułóż w odpowiedniej kolejności elementy dowodu.

- Zatem $\delta + \gamma = \frac{1}{2} \cdot 360^\circ$.
- Trójkąt ABD jest rozpięty na średnicy, czyli jest prostokątny, zatem $\sin\delta = \frac{c}{2R}$.
- Widać, że dla dowodu wystarczy pokazać, że $\sin\delta = \sin\gamma$.
- Kąty wpisane δ oraz γ są oparte na łukach, które uzupełniają się do całego okręgu.
- Stąd $\delta = \frac{1}{2} \cdot 360^\circ - \gamma = 180^\circ - \gamma$.
- Ale wiemy, że $\sin(180^\circ - \gamma) = \sin\gamma$, co kończy dowód.
- Stąd $\frac{c}{\sin\delta} = 2R$.

Ćwiczenie 2

W trójkącie o bokach a, b, c i kątach odpowiednio równych α, β, γ mamy $\frac{a}{b} = \sqrt{2}$. Wtedy

- $2\cos^2\beta - \cos^2\alpha = 1$
- $2\cos^2\alpha - \cos^2\beta = 1$
- $2\cos^2\alpha = \cos^2\beta$
- $\cos^2\alpha = 2\cos^2\beta$

Ćwiczenie 3

W trójkącie o bokach a, b, c i kątach odpowiednio równych α, β, γ mamy $a : b = 2 : 1$. Wtedy

- $\sin\beta = \sin 2\alpha$
- $2\sin\alpha = \sin\beta$
- $\sin\alpha = 2\sin\beta$
- $\sin\alpha = \sin 2\beta$

Ćwiczenie 4

Przeciągnij poprawne odpowiedzi.

Najdłuższy bok trójkąta ma długość $\sqrt{50}$, a kąty mają miary 15°, 30°, 135°. Promień okręgu opisanego na tym trójkącie jest równy: ______.
Najdłuższy bok trójkąta ma długość $2\sqrt{3}$, a kąty mają miary 20°, 40°, 120°. Promień okręgu opisanego na tym trójkącie jest równy: ______.
Najdłuższy bok trójkąta ma długość $\sqrt{20}$, a dwa jego kąty mają miary 35° i 55°. Promień okręgu opisanego na tym trójkącie jest równy: ______.

10 | $2\sqrt{5}$ | $5\sqrt{2}$ | $2\sqrt{3}$ | 5 | $5\sqrt{3}$ | $10\sqrt{2}$ | 1 | 2 | $\sqrt{5}$

Ćwiczenie 5

Dwa kąty trójkąta mają w sumie miarę 150°. Uzasadnij, że jeden z boków tego trójkąta ma długość równą promieniowi okręgu opisanego na tym trójkącie.

Ćwiczenie 6

W trójkącie o bokach $a = 12$, $b = 15$ kąt α, leżący naprzeciw boku a, ma miarę 30°. Korzystając z twierdzenia sinusów uzasadnij, że istnieją dwa trójkąty o takich własnościach.

Ćwiczenie 7

Uzasadnij, korzystając z twierdzenia sinusów, że istnieje tylko jeden trójkąt, którego boki miałyby długości: $a = 12$, $b = 9$ i w którym kąt α, leżący naprzeciw boku a, miałby miarę 30°.

Ćwiczenie 8

Dwa kąty ostre trójkąta mają miary 30° oraz 45°. Uzasadnij, że długości dwóch krótszych boków tego trójkąta nie mogą być jednocześnie liczbami wymiernymi.

Dla nauczyciela

Imię i nazwisko autora: Jacek Czapiński

Przedmiot: Matematyka

Temat zajęć: O twierdzeniu Snelliusa, czyli rozwiązywaniu trójkątów dowolnych

Grupa docelowa: III etap edukacyjny, liceum, technikum, zakres rozszerzony

Podstawa programowa

VII. Trygonometria PP

Uczeń

2) znajduje przybliżone wartości funkcji trygonometrycznych, korzystając z tablic lub kalkulatora;

5) stosuje twierdzenia sinusów i cosinusów oraz wzór na pole trójkąta $P_{\Delta} = \frac{1}{2}ab \cdot \sin\gamma$

6) oblicza kąty trójkąta i długości jego boków przy odpowiednich danych (rozwiązuje trójkąty)

VIII. Planimetria PP

5) stosuje własności kątów wpisanych i środkowych

Kształtowane kompetencje kluczowe:

- kompetencje w zakresie rozumienia i tworzenia informacji;
- kompetencje matematyczne oraz kompetencje w zakresie nauk przyrodniczych, technologii i inżynierii;
- kompetencje cyfrowe;
- kompetencje osobiste, społeczne i w zakresie umiejętności uczenia się.

Cele operacyjne:

Uczeń:

- bada zależności między bokami i kątami w trójkącie i formułuje hipotezy dotyczące tych zależności
- dowodzi twierdzenia sinusów
- stosuje twierdzenie sinusów do wyznaczania zależności miarowych w trójkącie
- stosuje twierdzenie sinusów do badania istnienia trójkątów o danych własnościach

- stosuje związki między kątami w okręgu do rozwiązywania problemów geometrycznych

Strategie i metody nauczania:

- konstruktywizm.
- dyskusja
- rozmowa nauczająca z wykorzystaniem ćwiczeń interaktywnych

Formy zajęć:

- praca indywidualna
- praca w grupach
- praca całego zespołu klasowego

Środki dydaktyczne:

- komputery z dostępem do Internetu w takiej liczbie, żeby każda grupa uczniów miała do dyspozycji komputer. Lekcję tę można przeprowadzić, mając do dyspozycji jeden komputer z rzutnikiem multimedialnym.

Przebieg lekcji:

Faza wprowadzająca

1. Nauczyciel prosi uczniów o podanie twierdzeń (faktów, wzorów), które w swojej nazwie (tytule) odwołują sie do postaci ich odkrywców (autorów). Nawiązuje do postaci Snelliusa, wspominając jego dokonania w fizyce i astronomii oraz akcentuje dokonania w matematyce.

2.Nauczyciel prosi uczniów o przypomnienie pojęcia sinusa kąta w trójkącie prostokątnym oraz zależności dotyczących kątów w kole.

3. Nauczyciel podaje temat i cele zajęć, uczniowie ustalają kryteria sukcesu.

Faza realizacyjna

1.Nauczyciel formułuje problem opisany w Przykładzie 1. i prosi o jego rozwiązanie. Uczniowie pod kierunkiem nauczyciela rozwiązują konkretny problem i stawiają hipotezy uogólniające.

2. Uczniowie, pracując w grupach, wykorzystują aplet geogebry Twierdzenie sinusów.

3. Nauczyciel steruje dyskusją, jaką uczniowie prowadzą w trakcie wykonywania ćwiczeń z użyciem apletu w takim kierunku, aby uczniowie samodzielnie odkryli, że odpowiedni

stosunek jest niezależny od położenia wierzchołków na okręgu, czyli od długości boków i miar kątów oraz dostrzegli, że jest on równy średnicy okręgu opisanego. Następnie omawia dowód twierdzenia sinusów.

4. Uczniowie wykonują zaproponowane ćwiczenia interaktywne, wykorzystując umiejętności z różnych działów matematyki.

Faza podsumowująca

Nauczyciel prosi wybranych uczniów o przedstawienie najważniejszych elementów, jakie były omawiane w trakcie lekcji. Nauczyciel inicjuje dyskusję - czy twierdzenie sinusów jest narzędziem, które pozwala rozwiązać każdy trójkąt, by w ten sposób nawiązać do twierdzenia cosinusów, które winno być wprowadzone niebawem.

Praca domowa

Nauczyciel poleca, aby uczniowie wykonali w domu ćwiczenia interaktywne, które nie zostały wykonane w czasie zajęć.

Materiały pomocnicze:

- Twierdzenie o kącie wpisanym i środkowym

Wskazówki metodyczne opisujące różne zastosowania multimedium:

Warto zwrócić uwagę, że wielkości prezentowane w Aplecie jako długości boków i promień okręgu opisanego, miary kątów oraz odpowiednie ilorazy są wielkościami przybliżonymi. Tym samym nie zawsze wyznaczony iloraz długości boku i sinusa kąta leżącego naprzeciw tego boku jest równy średnicy okręgu opisanego. Jest zatem okazja by przywołać przy tej okazji pojęcie przybliżenia i jego błędu bezwzględnego i względnego.