



Parzystość i nieparzystość funkcji trygonometrycznych

- [Wprowadzenie](#)
- [Przeczytaj](#)
- [Aplet](#)
- [Sprawdź się](#)
- [Dla nauczyciela](#)



Parzystość i nieparzystość funkcji trygonometrycznych

Źródło: Ralph Ravi Kayden, dostępny w internecie: www.unsplash.com.

W tej lekcji przypomnimy pojęcia funkcji parzystej oraz funkcji nieparzystej. To bardzo praktyczne własności funkcji, dzięki którym możemy znacznie przyspieszyć szkicowanie ich wykresów: wiedząc jak wygląda wykres danej funkcji dla dodatnich argumentów, możemy od razu wywnioskować wykres dla argumentów ujemnych. Wszystkie własności funkcji trygonometrycznych wykorzystamy w tematach związanych z ich wykresami.

Twoje cele

- Zbadasz parzystość funkcji trygonometrycznych.
- Zbadasz nieparzystość funkcji trygonometrycznych.
- Zastosujesz parzystość/nieparzystość funkcji trygonometrycznych do przekształcania wyrażeń trygonometrycznych.

Przeczytaj

Przypomnijmy najpierw pojęcia funkcji parzystej i funkcji nieparzystej.

Mówimy, że funkcja f jest **parzysta**, gdy spełnia dwa warunki:

1. jeśli liczba x należy do dziedziny funkcji f , to również liczba przeciwna do x należy do dziedziny funkcji f ,
2. dla przeciwnych argumentów funkcja f przyjmuje takie same wartości.

Symbolicznie możemy zapisać powyższą definicję następująco:

Funkcja f jest parzysta, jeśli:

1. dla dowolnego $x \in D_f$ również $-x \in D_f$, oraz
2. dla dowolnego $x \in D_f$ zachodzi $f(-x) = f(x)$.

Można zauważyć, że wykres funkcji parzystej jest symetryczny względem osi Y układu współrzędnych.

Mówimy, że funkcja f jest **nieparzysta**, gdy spełnia dwa warunki:

1. jeśli liczba x należy do dziedziny funkcji f , to również liczba przeciwna do x należy do dziedziny funkcji f ,
2. dla przeciwnych argumentów funkcja f przyjmuje przeciwne wartości.

Symbolicznie możemy zapisać powyższą definicję następująco:

Funkcja f jest nieparzysta, jeśli:

1. dla dowolnego $x \in D_f$ również $-x \in D_f$, oraz
2. dla dowolnego $x \in D_f$ zachodzi $f(-x) = -f(x)$.

Można zauważyć, że wykres funkcji nieparzystej jest symetryczny względem początku układu współrzędnych.

Przede wszystkim zauważmy, że funkcje sinus oraz cosinus są określone dla kąta o dowolnej mierze (również ujemnej).

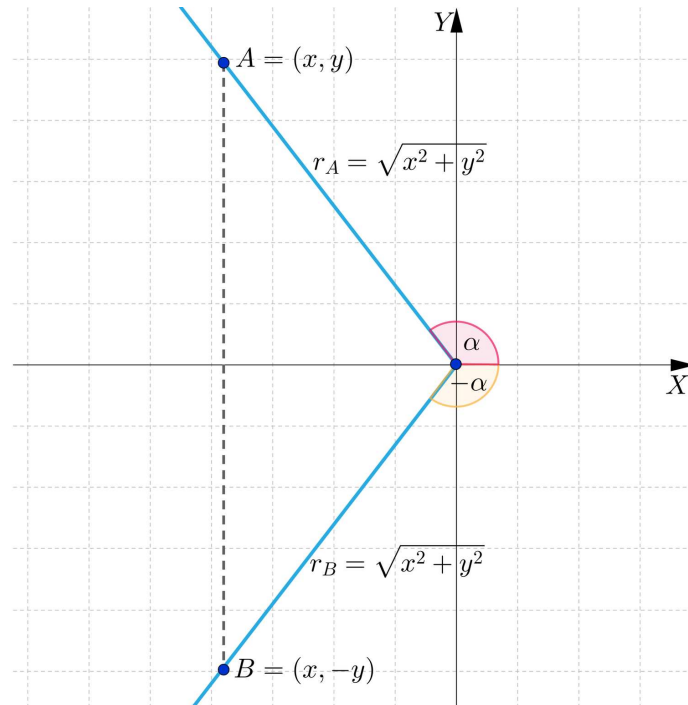
Tangensa nie wyliczymy dla kątów o miarach $90^\circ + k \cdot 180^\circ$, gdzie k jest dowolną liczbą całkowitą, czyli nie jest on określony dla kątów o miarach:

$-270^\circ, -90^\circ, 90^\circ, 270^\circ, \dots$

Zatem dla każdej z rozważanych elementarnych funkcji trygonometrycznych spełniony jest warunek pierwszy definicji obu własności:

jeśli dana liczba należy do dziedziny, to również liczba do niej przeciwna należy do dziedziny.

Rozważmy kąty o miarach α oraz $-\alpha$. Umieszczamy oba kąty w prostokątnym układzie współrzędnych w położeniu standardowym:



Na drugim ramieniu kąta o mierze α wybieramy punkt A o współrzędnych (x, y) . Wówczas na drugim ramieniu kąta o mierze $-\alpha$ możemy wybrać punkt B o współrzędnych $(x, -y)$.

Zauważmy, że oba punkty mają równe promienie wodzące, ponieważ:

$$r_A = \sqrt{x^2 + y^2}$$
$$r_B = \sqrt{x^2 + (-y)^2} = \sqrt{x^2 + y^2}$$

Z definicji funkcji trygonometrycznych kątów dowolnych wynikają następujące równości:

$$\sin \alpha = \frac{y}{r_A}$$
$$\sin(-\alpha) = \frac{-y}{r_B} = -\frac{y}{r_A} = -\sin \alpha$$
$$\cos \alpha = \frac{x}{r_A}$$
$$\cos(-\alpha) = \frac{x}{r_B} = \frac{x}{r_A} = \cos \alpha$$
$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{y}{x}$$

$$\operatorname{tg}(-\alpha) = \frac{-y}{x} = -\frac{y}{x} = -\operatorname{tg} \alpha$$

Z powyższych równości wynikają wzory:

1. $\sin(-\alpha) = -\sin \alpha$
2. $\cos(-\alpha) = \cos \alpha$
3. $\operatorname{tg}(-\alpha) = -\operatorname{tg} \alpha$

Powyższe wzory oznaczają, że sinus i tangens są funkcjami nieparzystymi, zaś cosinus jest **funkcją parzystą** (czasami kwituje się ten fakt zdaniem: *jedynie cosinus gubi minus*).

Zwróćmy uwagę, że powyższe wzory są prawdziwe nie tylko dla kątów, których miary są podane w stopniach. Będą prawdziwe również wówczas, jeśli miary kątów wyrazimy w radianach. W poniższych przykładach rozważamy funkcje trygonometryczne jako funkcje zmiennej rzeczywistej.

Przykład 1

Uzasadnimy, że funkcja o wzorze $f(x) = \sin x \cdot \cos x$ jest funkcją nieparzystą.

Zauważmy najpierw, że ponieważ sinus i cosinus są funkcjami zdefiniowanymi dla dowolnych liczb rzeczywistych, więc ich iloczyn również posiada tę własność, czyli $D_f = \mathbb{R}$.

Zatem spełniony jest pierwszy warunek definicji funkcji nieparzystej: jeśli $x \in D_f$, to $-x \in D_f$.

W celu sprawdzenia, czy zachodzi drugi warunek definicji funkcji nieparzystej rozważmy $f(-x)$:

$$f(-x) = \sin(-x) \cdot \cos(-x)$$

Przypomnijmy, że $\sin(-\alpha) = -\sin \alpha$ oraz $\cos(-\alpha) = \cos \alpha$. Zatem

$$f(-x) = \sin(-x) \cdot \cos(-x) = -\sin x \cdot \cos x = -f(x).$$

Oznacza to, że dla dowolnej liczby $x \in D_f$ spełniony jest warunek $f(-x) = -f(x)$, co pozwala zakończyć dowód faktu, iż f jest **funkcją nieparzystą**.

Przykład 2

Uzasadnimy, że funkcja o wzorze $f(x) = \sin x \cdot \operatorname{tg} x$ jest funkcją parzystą.

Zauważmy najpierw, że sinus jest funkcją zdefiniowaną dla dowolnej liczby rzeczywistej.

Tangens jest zdefiniowany dla wszystkich kątów poza tymi o miarach $\frac{\pi}{2} + k \cdot \pi$, gdzie k jest dowolną liczbą całkowitą.

Ponieważ iloczyn funkcji ma dziedzinę równą iloczynowi dziedzin tych funkcji, więc $D_f = \mathbb{R} \setminus \left\{ \frac{\pi}{2} + k \cdot \pi : k \in \mathbb{Z} \right\}$.

Zatem spełniony jest pierwszy warunek definicji funkcji parzystej: jeśli $x \in D_f$, to $-x \in D_f$.

W celu sprawdzenia, czy zachodzi drugi warunek definicji funkcji parzystej rozważmy $f(-x)$:

$$f(-x) = \sin(-x) \cdot \operatorname{tg}(-x)$$

Przypomnijmy, że $\sin(-\alpha) = -\sin \alpha$ oraz $\operatorname{tg}(-\alpha) = -\operatorname{tg} \alpha$. Zatem

$$f(-x) = \sin(-x) \cdot \operatorname{tg}(-x) = -\sin x \cdot (-\operatorname{tg} x) = \sin x \cdot \operatorname{tg} x = f(x).$$

Oznacza to, że dla dowolnej liczby $x \in D_f$ spełniony jest warunek $f(-x) = f(x)$, co pozwala zakończyć dowód faktu, iż f jest funkcją parzystą.

Ważne!

W obu powyższych przykładach można skorzystać z następujących faktów:

1. iloczyn funkcji parzystych jest **funkcją parzystą**,
2. iloczyn parzystej liczby funkcji nieparzystych jest funkcją parzystą,
3. iloczyn nieparzystej liczby funkcji nieparzystych jest **funkcją nieparzystą**.

Spróbuj udowodnić te fakty.

Przykład 3

Zbadamy, parzystość/nieparzystość funkcji o wzorze $f(x) = \sin x + 1$.

Zauważmy, że dziedziną funkcji f jest zbiór liczb rzeczywistych.

Rozważmy teraz $f(-x)$:

$$f(-x) = \sin(-x) + 1 = -\sin x + 1.$$

Otrzymane wyrażenie nie wygląda ani jak $f(x) = \sin x + 1$, ani jak $-f(x) = -\sin x - 1$.

Jednak nie przyjmujemy tego faktu za dowód, że funkcja f nie jest ani parzysta, ani nieparzysta.

Być może po prostu nie potrafimy otrzymanego wyrażenia przedstawić w żądanej postaci...

W takich przypadkach podajemy kontrprzykład: wskazujemy dwie liczby przeciwne, dla których wartości funkcji nie są ani równe, ani przeciwne.

Weźmy $\frac{\pi}{3}$ oraz $-\frac{\pi}{3}$:

$$f\left(\frac{\pi}{3}\right) = \sin \frac{\pi}{3} + 1 = \frac{\sqrt{3}}{2} + 1 \approx 1,87$$

$$f\left(-\frac{\pi}{3}\right) = \sin\left(-\frac{\pi}{3}\right) + 1 = -\frac{\sqrt{3}}{2} + 1 \approx 0,13.$$

Ponieważ istnieje taka para liczb przeciwnych, dla której wartości funkcji f nie są równe, więc f nie jest funkcją parzystą.

Ponieważ istnieje taka para liczb przeciwnych, dla której wartości funkcji f nie są przeciwne, więc f nie jest funkcją nieparzystą.

Słownik

funkcja parzysta

funkcja liczbowa, która dla przeciwnych argumentów przyjmuje takie same wartości; definicja ta wymaga, aby dziedzina funkcji była symetryczna względem zera (każdy argument ma argument przeciwny); wykres funkcji parzystej jest symetryczny względem osi Y

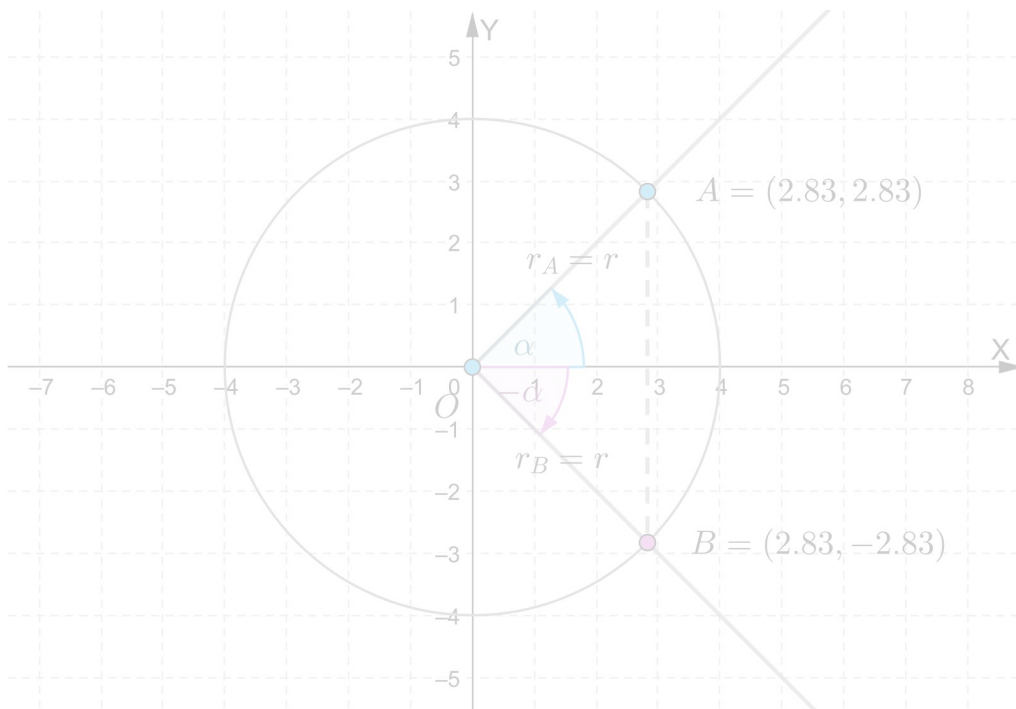
funkcja nieparzysta

funkcja liczbowa, która dla przeciwnych argumentów przyjmuje przeciwne wartości; definicja ta wymaga, aby dziedzina funkcji była symetryczna względem zera (każdy argument ma argument przeciwny); wykres funkcji parzystej jest symetryczny względem początku układu współrzędnych

Aplet

Polecenie 1

Korzystając z apletu, przeanalizuj zależności między wartościami funkcji trygonometrycznych dla kątów przeciwnych. Suwakami możesz zmieniać wartość kąta oraz promień wodzący punktów z drugiego ramienia każdego z kątów.



Zasób interaktywny dostępny pod adresem <https://zpe.gov.pl/a/D16Yynya3>

Polecenie 2

Sprawdź się

Pokaż ćwiczenia:   

Ćwiczenie 1



Wykaż, że podane funkcje są funkcjami parzystymi.

a. $f(x) = \sin^2 x + \operatorname{tg}^4 x$,

b. $f(x) = \sin 2x \cdot \operatorname{tg} x$.

Ćwiczenie 2



Wykaż, że podane funkcje są funkcjami nieparzystymi.

a. $f(x) = \sin^3 x + \operatorname{tg}^5 x$,

b. $f(x) = \sin 3x - \operatorname{tg} x$.

Ćwiczenie 3



Wykaż, że podane funkcje nie są ani funkcjami parzystymi, ani funkcjami nieparzystymi.

a. $f(x) = \sin 2x + \cos x$,

b. $f(x) = \sin 2x \cdot \operatorname{tg}^2 x + \cos x$.

Ćwiczenie 4



Wskaż wszystkie poprawne odpowiedzi. Pamiętaj, że dla dowolnego x zachodzą wzory:
 $\sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \cos x$ oraz $\cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \sin x$.

☐ Liczba $\cos\left(-\frac{\pi}{5}\right)$ jest równa $-\cos \frac{\pi}{5}$.

☐ Wyrażenie $\sin\left(x - \frac{\pi}{7}\right)$ jest dla każdej liczby x równe $-\sin\left(\frac{\pi}{7} - x\right)$.

☐ Liczba $\sin\left(-\frac{\pi}{7}\right)$ jest równa $\cos\left(-\frac{5\pi}{14}\right)$.

☐ Liczba $\operatorname{tg}\left(-\frac{\pi}{5}\right)$ jest równa $-\operatorname{tg} \frac{\pi}{5}$.

Ćwiczenie 5



Połącz w pary wyrażenia o równych wartościach.

$\cos(-10^\circ)$

$-\cos 50^\circ$

$\sin(-80^\circ)$

$-\cos 10^\circ$

$\cos(-80^\circ)$

$\sin 80^\circ$

$\sin(-10^\circ)$

$-\sin 50^\circ$

$\sin(-40^\circ)$

$\cos 50^\circ$

$\cos(-50^\circ)$

$-\sin 10^\circ$

$\cos(-50^\circ)$

$\cos 80^\circ$

$\sin(-50^\circ)$

$\sin 40^\circ$

Ćwiczenie 6



Mówimy, że funkcje f i g są równe, jeśli mają równe dziedziny oraz dla każdego argumentu przyjmują takie same wartości. Oceń, czy podane pary funkcji są parami funkcji równych.

Wzory funkcji f i g	TAK	NIE
$f(x) = \sin(-x) \cdot \cos(-x) + x$ $g(x) = -\sin x \cdot \cos x + x$	☐	☐
$f(x) = \sin(-x) \cdot \cos(-x) \cdot \operatorname{tg}(-x)$ $g(x) = \sin x \cdot \cos x \cdot \operatorname{tg} x$	☐	☐
$f(x) = \sin(-x) \cdot \sin(-2x) \cdot \operatorname{tg}(-x)$ $g(x) = \sin x \cdot \sin 2x \cdot \operatorname{tg} x$	☐	☐
$f(x) = \sin^2(-x)$ $g(x) = -\sin^2 x$	☐	☐
$f(x) = \sin^3(-x)$ $g(x) = -\sin^3 x$	☐	☐

Ćwiczenie 7



Wiedząc, że $\sin 63^\circ \approx 0,891$, podaj przybliżone wartości następujących liczb z dokładnością do trzech miejsc po przecinku. Wpisz poprawne liczby.

Wyrażenie trygonometryczne	Przybliżona wartość
$\cos 63^\circ$	
$\sin(-63^\circ)$	
$\cos 27^\circ$	
$\sin 27^\circ$	
$\sin(-27^\circ)$	

Ćwiczenie 8



Dla nauczyciela

Autor: Sebastian Guz

Przedmiot: Matematyka

Temat: Parzystość i nieparzystość funkcji trygonometrycznych

Grupa docelowa:

III etap edukacyjny, liceum ogólnokształcące, technikum, zakres rozszerzony

Podstawa programowa:

VII. Trygonometria. Zakres rozszerzony. Uczeń spełnia wymagania określone dla zakresu podstawowego, a ponadto:

3) wykorzystuje okresowość funkcji trygonometrycznych;

Kształtowane kompetencje kluczowe:

- kompetencje w zakresie rozumienia i tworzenia informacji;
- kompetencje matematyczne oraz kompetencje w zakresie nauk przyrodniczych, technologii i inżynierii;
- kompetencje cyfrowe;
- kompetencje osobiste, społeczne i w zakresie umiejętności uczenia się.

Cele operacyjne:

Uczeń:

- bada parzystość funkcji trygonometrycznych,
- bada nieparzystość funkcji trygonometrycznych,
- stosuje parzystość/nieparzystość funkcji trygonometrycznych do przekształcania wyrażeń trygonometrycznych.

Strategie nauczania:

- konstruktywizm;
- konektywizm.

Metody i techniki nauczania:

- odwrócona klasa;

- rozmowa nauczająca w oparciu o treści zawarte w sekcji „Aplet „ i ćwiczenia interaktywne;
- dyskusja.

Formy pracy:

- praca indywidualna;
- praca w parach;
- praca w grupach;
- praca całego zespołu klasowego.

Środki dydaktyczne:

- komputery z głośnikami, słuchawkami i dostępem do internetu;
- zasoby multimedialne zawarte w e-materiale;
- tablica interaktywna/tablica, pisak/kreda.

Przebieg lekcji

Przed lekcją:

1. Uczniowie zapoznają się z treściami zapisanymi w sekcji „Przeczytaj”.

Faza wstępna:

1. Nauczyciel określa temat lekcji – „Parzystość i nieparzystość funkcji trygonometrycznych” i prosi uczniów o sformułowanie celów i kryteriów sukcesu.
2. Nauczyciel prosi wybranego ucznia lub uczniów o przedstawienie sytuacji problemowej związanej z tematem lekcji.

Faza realizacyjna:

1. Uczniowie zapoznają się indywidualnie z treścią sekcji „Aplet „. Zapisują ewentualne pytania dotyczące napotkanych trudności, po czym następuje dyskusja, w trakcie której nauczyciel wyjaśnia niezrozumiałe elementy z materiału.
2. Uczniowie wykonują wspólnie ćwiczenia nr 1-2 z sekcji „Sprawdź się”. Nauczyciel sprawdza poprawność wykonanych ćwiczeń, omawiając je wraz z uczniami.
3. W następnym kroku uczniowie wykonują w grupach ćwiczenia numer 3, 4 i 5. Następnie wybrana grupa prezentuje swoje rozwiązania. Nauczyciel w razie potrzeby uzupełnia informacje.
4. Ćwiczenia numer 6, 7 i 8 uczniowie wykonują indywidualnie, a następnie omawia je nauczyciel.

Faza podsumowująca:

1. Omówienie ewentualnych problemów z rozwiązaniem ćwiczeń z sekcji „Sprawdź się”.

2. Nauczyciel przypomina temat zajęć: „Parzystość i nieparzystość funkcji trygonometrycznych” i podsumowuje przebieg zajęć. Wskazuje mocne i słabe strony pracy uczniów.

Praca domowa:

1. Uczniowie opracowują FAQ (minimum 3 pytania i odpowiedzi prezentujące przykład i rozwiązanie) do tematu lekcji („Parzystość i nieparzystość funkcji trygonometrycznych”).

Materiały pomocnicze:

- [Wykresy i własności funkcji trygonometrycznych](#)

Wskazówki metodyczne:

- Medium w sekcji „Aplet „ można wykorzystać jako materiał służący powtórzeniu materiału w temacie „Parzystość i nieparzystość funkcji trygonometrycznych”.