

# Określenie warunków, przy których równanie ma żadaną własność

- [Wprowadzenie](#)
- [Przeczytaj](#)
- [Animacja](#)
- [Sprawdź się](#)
- [Dla nauczyciela](#)



## Określenie warunków, przy których równanie ma żadaną własność

Źródło: Artem Beliaikin, dostępny w internecie: [www.unsplash.com](https://www.unsplash.com).

Potrafisz już przeprowadzać analizę równania liniowego z jednym parametrem lub większą liczbą parametrów. Parametry w matematyce najczęściej oznaczają się początkowymi literami alfabetu  $a$ ,  $b$  lub literami  $m$ ,  $n$ ,  $p$ ,  $s$ . Końcowe litery alfabetu często używane są jako zmienne, choć nie jest to regułą. Dlatego w poleceniu zadania często pojawia się informacja, która litera jest zmienną, a która parametrem.

Twoim zadaniem będzie określanie warunków, dla których równanie ma żadaną własność, np. rozwiązanie jest konkretną liczbą lub dowolną liczbą naturalną. Rozwiązanie równania może też być np. nie większe od zadanej wartości.

Nauczysz się również podawać przykład równania z parametrem, które spełnia określony warunek, np. dla danej wartości parametru jest sprzeczne lub tożsamościowe.

### Twoje cele

- Określisz warunki, dla których rozwiązanie równania ma żadaną własność.
- Znajdziesz wszystkie takie wartości rzeczywiste parametrów, aby dana liczba była rozwiązaniem równania.
- Podasz przykład równania liniowego z parametrem spełniającego dany warunek.

# Przeczytaj

## Przykład 1

Dla jakiej wartości parametru  $p$  rozwiązanie równania  $xp + 6p - 2 = 3x + p^2 + 7$  jest nie większe od  $\frac{3}{4}$ ?

Najpierw zajmijmy się uporządkowaniem równania.

$$xp + 6p - 2 = 3x + p^2 + 7$$

$$xp - 3x = p^2 - 6p + 9$$

$$x(p - 3) = p^2 - 6p + 9$$

Prawą stronę równania, możemy zapisać w postaci wzoru skróconego mnożenia na kwadrat różnicy dwóch wyrażeń.

$$x(p - 3) = (p - 3)^2$$

Aby równanie miało jedno rozwiązanie musi być spełniony warunek:  $p \neq 3$ .

Wtedy rozwiązanie możemy zapisać w postaci:

$$x = \frac{(p-3)^2}{p-3}$$

Po skróceniu rozwiązanie równania przyjmuje postać  $x = p - 3$ .

Rozwiązanie równania ma być nie większe od liczby  $\frac{3}{4}$ .

Warunek zapiszemy w postaci nierówności  $p - 3 \leq \frac{3}{4}$ .

Czyli  $p \leq 3\frac{3}{4}$ .

## Przykład 2

Określmy, dla jakich wartości parametru  $a$  rozwiązaniem równania  $ax = 4 - x$  jest liczba naturalna.

$$ax = 4 - x$$

$$ax + x = 4$$

$$x(a + 1) = 4$$

Aby równanie miało rozwiązanie  $a \neq -1$ .

Wtedy:

$$x = \frac{4}{a+1}$$

Aby rozwiązanie  $x$  było liczbą naturalną:

$$a + 1 = 1 \text{ lub } a + 1 = 2 \text{ lub } a + 1 = 4$$

Czyli  $a = 0$  lub  $a = 1$  lub  $a = 3$ .

Zatem  $a \in \{0, 1, 3\}$ .

### Przykład 3

Określmy warunek, dla którego rozwiązaniem równania  $3x + 2 \cdot |k + 4| = 1$  z niewiadomą  $x$  i parametrem  $k$  jest liczba 3.

Podstawimy w miejsce  $x$  liczbę 3.

$$9 + 2 \cdot |k + 4| = 1$$

$$2 \cdot |k + 4| = -8$$

$$|k + 4| = -4$$

Otrzymane równanie jest sprzeczne dla dowolnego  $k$ , ponieważ wartość bezwzględna liczby jest zawsze liczbą nieujemną. Zatem nie ma takiej wartości parametru  $k$ , dla której rozwiązaniem równania będzie liczba 3.

## Słownik

**rozwiązanie równania**

liczba, która spełnia dane równanie

# Animacja

---

## Polecenie 1

Zapoznaj się z animacją i zapoznaj się ze sposobami określania warunków, przy których równanie ma żadaną własność.

Film dostępny pod adresem <https://zpe.gov.pl/a/Dv91q8DEq>

Film nawiązujący do treści lekcji dotyczącej określania warunków dla równań.

---

## Polecenie 2

Podaj przykład takiego równania liniowego postaci  $ax = b$  z niewiadomą  $x$  i parametrem  $m$ , aby dla  $m = -6$  równanie było sprzeczne, dla  $m = 0$  miało nieskończenie wiele rozwiązań, a dla  $m \neq -6$  i  $m \neq 0$  miało jedno rozwiązanie.

## Polecenie 3

Dla jakich wartości parametru  $m$  równanie  $(m + 1)(m + 6) \cdot x = m \cdot (m + 6)$  będzie tożsamościowe, a dla jakich będzie miało jedno rozwiązanie?

# Sprawdź się

Pokaż ćwiczenia:   

## Ćwiczenie 1



Dane jest równanie  $x + 3mx = 5$  z parametrem  $m$ . Oceń prawdziwość zdań.

| Pytania                                                                                            | Prawda                | Fałsz                 |
|----------------------------------------------------------------------------------------------------|-----------------------|-----------------------|
| Dla $m = 0$ równanie jest sprzeczne.                                                               | <input type="radio"/> | <input type="radio"/> |
| Dla $m = -2$ rozwiązaniem równania jest liczba $-1$ .                                              | <input type="radio"/> | <input type="radio"/> |
| Dla $m = \sqrt{2}$ rozwiązaniem równania jest liczba<br>$x = -\frac{5 \cdot (1 - 3\sqrt{2})}{17}.$ | <input type="radio"/> | <input type="radio"/> |
| Dla $m = -\frac{1}{3}$ równanie ma nieskończenie wiele rozwiązań.                                  | <input type="radio"/> | <input type="radio"/> |

## Ćwiczenie 2



Dokończ zdanie.

Równanie  $x - 2a = b - 3$  dla dowolnych wartości  $a$  i  $b$  .

jest tożsamościowe

ma jedno rozwiązanie

jest sprzeczne

### Ćwiczenie 3



Zaznacz taki warunek, dla którego rozwiązaniem równania  $(3x - 3)p^2 = 2x$  z niewiadomą  $x$  jest liczba  $-2$ .

☐  $p = \frac{4}{9}$

☐  $p = 1$

☐  $p = \frac{2}{3}$  lub  $p = -\frac{2}{3}$

☐  $p \in \mathbb{R}$

### Ćwiczenie 4



Zosia kupiła  $a$  paczek ciastek w cenie  $x$  zł za jedno opakowanie, a Kasia  $b$  paczek tych samych ciastek. Ile kosztowała jedna paczka ciastek, jeżeli Zosia zapłaciła  $c$  zł więcej, niż Kasia?

☐  $x = \frac{b-a}{c}$

☐  $x = \frac{c}{a-b}$

☐  $x = \frac{c}{b-a}$

☐  $x = \frac{a-b}{c}$

## Ćwiczenie 5



Dla jakich wartości parametru  $t$  rozwiązaniem równania  $xt = 6 - 2x$  jest liczba naturalna. Zaznacz wszystkie poprawne odpowiedzi.

☐  $t = -4$

☐  $t = -1$

☐  $t = -5$

☐  $t = 0$

☐  $t = -3$

☐  $t = 4$

☐  $t = -8$

☐  $t = 1$

## Ćwiczenie 6



Równanie  $\sqrt{x^2 - 6x + 9} - 1 = 3k - 2$  z niewiadomą  $x$  i parametrem  $k$  jest sprzeczne dla

.

☐  $k \in \mathbb{R}$

☐  $k < \frac{1}{3}$

☐  $k = -\frac{1}{3}$

☐  $k \leq -\frac{1}{3}$



### Ćwiczenie 7



Podaj przykład równania liniowego z niewiadomą  $y$  i parametrem  $a$ , aby dla  $a = -5$  równanie było sprzeczne, dla  $a = 2$  miało nieskończenie wiele rozwiązań, a dla  $a \neq -5$  i  $a \neq 2$  miało jedno rozwiązanie.

### Ćwiczenie 8



Wykaż, że równanie  $kx - 2x + 1 = 3k - 5$  z niewiadomą  $x$  ma co najmniej jedno rozwiązanie dla dowolnej wartości parametru  $k$ .

# Dla nauczyciela

---

**Autor:** Jolanta Schilling

**Przedmiot:** Matematyka

**Temat:** Określenie warunków, przy których równanie ma żadaną własność

**Grupa docelowa:**

III etap edukacyjny, liceum, technikum, zakres rozszerzony

**Podstawa programowa:**

III. Równania i nierówności. Zakres rozszerzony.

Uczeń:

5) analizuje równania i nierówności liniowe z parametrami oraz równania i nierówności kwadratowe z parametrami, w szczególności wyznacza liczbę rozwiązań w zależności od parametrów, podaje warunki, przy których rozwiązania mają żadaną własność, i wyznacza rozwiązania w zależności od parametrów.

**Kształtowane kompetencje kluczowe:**

- kompetencje w zakresie rozumienia i tworzenia informacji
- kompetencje matematyczne oraz kompetencje w zakresie nauk przyrodniczych, technologii i inżynierii
- kompetencje cyfrowe
- kompetencje osobiste, społeczne i w zakresie umiejętności uczenia się

**Cele operacyjne:**

Uczeń:

- określa warunki, dla których rozwiązanie równania ma żadaną własność
- znajduje takie wartości parametrów, dla których dana liczba jest rozwiązaniem równania
- podaje przykład równania liniowego z parametrem spełniającego dany warunek
- dobiera model matematyczny do określonej sytuacji

**Strategie nauczania:**

- konstruktywizm

## **Metody i techniki nauczania:**

- konkurs zadaniowy
- dyskusja
- rozmowa nauczająca z wykorzystaniem ćwiczeń interaktywnych i animacji

## **Formy pracy:**

- praca indywidualna
- praca w grupach
- praca całego zespołu klasowego

## **Środki dydaktyczne:**

- komputery z głośnikami i dostępem do Internetu, słuchawki
- zasoby multimedialne zawarte w e-materiale
- tablica interaktywna/tablica, pisak/kreda

## **Przebieg lekcji**

### **Faza wstępna:**

1. Nauczyciel podaje temat i cele zajęć oraz wspólnie z uczniami ustala kryteria sukcesu.
2. Wybrani wcześniej przez nauczyciela uczniowie podają przykłady analizy równania liniowego z jednym parametrem lub dwoma parametrami.

### **Faza realizacyjna:**

1. Uczniowie oglądają animację i omawiają ją wraz z nauczycielem.
2. Uczniowie w grupach 4 osobowych uczestniczą w konkursie zadaniowym, polegającym na rozwiązywaniu na czas ćwiczeń interaktywnych 1 – 6. Najszybsza grupa, która poprawnie rozwiązała wszystkie zadania wygrywa konkurs i jest nagrodzona przez nauczyciela stopniem bardzo dobry.
3. Uczniowie wraz z nauczycielem omawiają zadania konkursowe i wspólnie rozwiązują zadania 7, 8 w sekcji „Sprawdź się”.

### **Faza podsumowująca:**

1. Jako podsumowanie nauczyciel zadaje uczniom pytania dotyczące określenia warunków, przy których równanie ma żadaną własność.
2. Nauczyciel omawia przebieg zajęć, wskazuje mocne i słabe strony pracy uczniów, udzielając im tym samym informacji zwrotnej.

### **Praca domowa:**

Dla chętnych – przygotowanie metody rozwiązania równań liniowych z dwoma parametrami i z wartością bezwzględną.

**Materiały pomocnicze:**

- [Rozwiązywanie równań](#)
- [Liczba rozwiązań równania liniowego](#)

**Wskazówki metodyczne:**

Animacja może być wykorzystana przez chętnych uczniów do samodzielnego przygotowania samouczka dotyczącego określania warunków, dla których równanie z parametrami jest sprzeczne lub tożsamościowe.