




Zastosowanie funkcji trygonometrycznych podwojonego kąta do dowodzenia tożsamości

- [Wprowadzenie](#)
- [Przeczytaj](#)
- [Gra edukacyjna](#)
- [Sprawdź się](#)
- [Dla nauczyciela](#)



Zastosowanie funkcji trygonometrycznych podwojonego kąta do dowodzenia tożsamości

Źródło: Klara Acel, dostępny w internecie: <https://pixabay.com/>.

W matematyce tożsamością jest każda równość, dwóch wyrażeń, która zachodzi dla każdej wartości zmiennych w niej występujących. Tożsamość trygonometryczna to równość, w której występują funkcje trygonometryczne. Aby rozstrzygnąć, czy tożsamość jest prawdziwa, musisz doprowadzić jedną lub obie jej strony do takiej samej postaci. W tym materiale będziemy doskonalić umiejętność zastosowania funkcji trygonometrycznych podwojonego kąta do dowodzenia tożsamości trygonometrycznych. Będziemy także sprawdzać, kiedy równości nie są tożsamościami.

Twoje cele

- Zastosujesz wzory na sinus, cosinus, tangens podwojonego kąta do dowodzenia tożsamości.
- Zastosujesz wzory na sinus, cosinus, tangens podwojonego kąta do dowodzenia, że równość nie jest tożsamością.

Przeczytaj

W tym materiale przedstawimy kilka typów tożsamości trygonometrycznych. W poniższych przykładach będziemy przekształcać jedną ze stron równości, zwykle tę bardziej skomplikowaną, tak długo, aż otrzymamy drugą stronę równania.

Przykład 1

Udowodnimy, że równość:

$$\frac{1+\sin 2x}{\sin x+\cos x} = \sin x + \cos x$$

jest tożsamością.

Rozwiązanie

Najpierw zapiszmy założenia: $\sin x + \cos x \neq 0$.

Zastosujemy wzór na [sinus podwojonego argumentu](#) oraz jedynekę trygonometryczną do przekształcenia lewej strony nierówności:

$$\frac{1+\sin 2x}{\sin x+\cos x} = \frac{\sin^2 x+2\sin x\cdot\cos x+\cos^2 x}{\sin x+\cos x}$$

Wykorzystujemy wzór skróconego mnożenia na sumę kwadratów i po skróceniu otrzymujemy prawą stronę równości:

$$\frac{\sin^2 x+2\sin x\cdot\cos x+\cos^2 x}{\sin x+\cos x} = \frac{(\sin x+\cos x)^2}{\sin x+\cos x} = \sin x + \cos x.$$

Przykład 2

Udowodnimy, że równość:

$$\frac{1-2\sin\frac{x}{2}-\cos x}{1+2\sin\frac{x}{2}-\cos x} = -\operatorname{tg}^2\left(\frac{\pi}{4}-\frac{x}{4}\right)$$

jest tożsamością.

Rozwiązanie

Zapisujemy założenia: $1 + 2\sin\frac{x}{2} - \cos x \neq 0$, $\cos\left(\frac{\pi}{4} - \frac{x}{4}\right) \neq 0$.

Zastosujemy wzór na [cosinus podwojonego argumentu](#) $\cos x = 1 - 2\sin^2\frac{x}{2}$ do przekształcenia lewej strony nierówności:

$$\frac{1-2\sin\frac{x}{2}-\cos x}{1+2\sin\frac{x}{2}-\cos x} = \frac{2\sin^2\frac{x}{2}-2\sin\frac{x}{2}}{2\sin^2\frac{x}{2}+2\sin\frac{x}{2}}$$

Wyłączamy przed nawias wspólny czynnik w liczniku i mianowniku i skracamy go:

$$\frac{2 \sin^2 \frac{x}{2} - 2 \sin \frac{x}{2}}{2 \sin^2 \frac{x}{2} + 2 \sin \frac{x}{2}} = \frac{2 \sin \frac{x}{2} (\sin \frac{x}{2} - 1)}{2 \sin \frac{x}{2} (\sin \frac{x}{2} + 1)} = \frac{\sin \frac{x}{2} - 1}{\sin \frac{x}{2} + 1}$$

Korzystamy ze wzorów redukcyjnych.

$$\frac{\sin \frac{x}{2} - 1}{\sin \frac{x}{2} + 1} = \frac{\cos(\frac{\pi}{2} - \frac{x}{2}) - 1}{\cos(\frac{\pi}{2} - \frac{x}{2}) + 1}$$

Następnie $\cos(\frac{\pi}{2} - \frac{x}{2})$ traktujemy jak cosinus podwojonego argumentu i korzystamy ze wzoru na [cosinus podwojonego kąta](#):

$$\frac{\cos(\frac{\pi}{2} - \frac{x}{2}) - 1}{\cos(\frac{\pi}{2} - \frac{x}{2}) + 1} = \frac{-2 \sin^2(\frac{\pi}{4} - \frac{x}{4})}{2 \cos^2(\frac{\pi}{4} - \frac{x}{4})}$$

Na końcu korzystamy z tożsamości $\operatorname{tg} x = \frac{\sin x}{\cos x}$:

$$\frac{-2 \sin^2(\frac{\pi}{4} - \frac{x}{4})}{2 \cos^2(\frac{\pi}{4} - \frac{x}{4})} = \frac{-2 \sin^2(\frac{\pi}{4} - \frac{x}{4})}{2 \cos^2(\frac{\pi}{4} - \frac{x}{4})} = -\operatorname{tg}^2(\frac{\pi}{4} - \frac{x}{4}).$$

Wykazaliśmy, że równość jest tożsamością.

Przykład 3

Wykażemy, że równość:

$$\frac{1 + 2 \sin x \cdot \cos x - \cos 4x}{\cos x(1 + 4 \sin x \cdot \cos x)} = 2 \sin x$$

jest tożsamością.

Rozwiązanie

Zapiszmy założenie: $\cos x(1 + 4 \sin x \cdot \cos x) \neq 0$.

Przekształcamy lewą stronę równości z wykorzystaniem wzorów na sinus oraz cosinus podwojonego kąta: $\cos 4x = 1 - 2 \sin^2 2x$ oraz $\sin 2x = 2 \sin x \cos x$. Wówczas otrzymujemy:

$$\frac{1 + 2 \sin x \cdot \cos x - \cos 4x}{\cos x(1 + 4 \sin x \cdot \cos x)} = \frac{2 \sin^2 2x + \sin 2x}{\cos x(1 + 2 \sin 2x)}$$

Po wyłączeniu przed nawias odpowiednich wyrażeń w liczniku i mianowniku, dokonujemy skrócenia. Ponownie wykorzystujemy wzór na [sinus podwojonego kąta](#) i otrzymujemy:

$$\frac{2 \sin^2 2x + \sin 2x}{\cos x(1 + 2 \sin 2x)} = \frac{\sin 2x(2 \sin 2x + 1)}{\cos x(1 + 2 \sin 2x)} = \frac{2 \sin x \cdot \cos x}{\cos x} = 2 \sin x.$$

Wykazaliśmy, że równość jest tożsamością.

Przykład 4

Wykażemy, że równość:

$$\cos x(1 - 2 \cos^2 x)(\operatorname{tg} x - \operatorname{tg} 2x) = \sin x$$

jest tożsamością.

Rozwiązanie

Zapiszmy założenia: $\cos x \neq 0$, $\cos 2x \neq 0$.

Korzystamy z tożsamości $\operatorname{tg} x = \frac{\sin x}{\cos x}$ i przekształcamy lewą stronę równości:

$$\cos x(1 - 2 \cos^2 x)(\operatorname{tg} x - \operatorname{tg} 2x) = \cos x(1 - 2 \cos^2 x) \left(\frac{\sin x}{\cos x} - \frac{\sin 2x}{\cos 2x} \right)$$

Wyrażenie w ostatnim nawiasie sprowadzamy do wspólnego mianownika oraz korzystamy ze wzoru na cosinus podwojonego kąta $1 - 2 \cos^2 x = -\cos 2x$ i otrzymujemy:

$$\cos x(1 - 2 \cos^2 x) \left(\frac{\sin x}{\cos x} - \frac{\sin 2x}{\cos 2x} \right) = -\cos x \cdot \cos 2x \cdot \frac{\sin x \cdot \cos 2x - \cos x \cdot \sin 2x}{\cos x \cdot \cos 2x}$$

Korzystamy ze wzoru na $\sin(x - 2x)$ i po skróceniu otrzymujemy prawą stronę równości:

$$-\cos x \cdot \cos 2x \cdot \frac{\sin x \cdot \cos 2x - \cos x \cdot \sin 2x}{\cos x \cdot \cos 2x} = \frac{-\cos x \cdot \cos 2x \cdot (-\sin x)}{\cos x \cdot \cos 2x} = \sin x.$$

Wykazaliśmy, że równość jest tożsamością.

Słownik

sinus podwojonego kąta

tożsamość trygonometryczna: $\sin 2x = 2 \sin x \cos x$ prawdziwa dla każdej liczby rzeczywistej x

cosinus podwojonego kąta

tożsamość trygonometryczna: $\cos 2x = \cos^2 x - \sin^2 x$ prawdziwa dla każdej liczby rzeczywistej x

Gra edukacyjna

Polecenie 1

Zagraj w grę edukacyjną. Dopasuj klocki tak, aby lewa część kostki i prawa strona tej kostki były odpowiednio prawą i lewą stroną wyrażenia.

ZYCIA 3 POZIOM 1 PUNKTY 0

$$\frac{2 \sin x - \sin 2x}{2 \sin x + \sin 2x} =$$

$\text{tg}^2 \frac{x}{2}$ $\cos^4 x$ $\cos 2x(\sin x + \cos x)$ $\text{tg} \frac{x}{2}$

Zasób interaktywny dostępny pod adresem <https://zpe.gov.pl/a/DVS66EDH0>

Polecenie 2

Sprawdź, czy równanie

$$\frac{\frac{1}{\text{tg } x} - \frac{2}{\text{tg } 2x}}{2 \sin \frac{x}{2} \cdot \cos \frac{x}{2}} = \frac{1}{\cos x}$$

jest tożsamością.

Sprawdź się

Pokaż ćwiczenia:   

Ćwiczenie 1



Wstaw takie wyrażenie, aby otrzymać tożsamość.

$$\frac{(\cos x - \sin x)^2}{\cos^2 x - \sin^2 x} = \boxed{}$$

$\frac{1}{\sin 2x} + \operatorname{tg} 2x$

$\frac{1}{\sin 2x} - \operatorname{tg} 2x$

$\frac{1}{\cos 2x} + \operatorname{tg} 2x$

$\frac{1}{\cos 2x} - \operatorname{tg} 2x$

Ćwiczenie 2



Co należy wstawić po prawej stronie równości w miejsce litery P , aby otrzymać tożsamość:
 $\sin 8x \operatorname{tg} 4x + \cos 8x = P$

 2 1 -1 -2

Ćwiczenie 3



Połącz w pary podane wyrażenia tak, aby pojawiły się równości, które są tożsamościami.

$\cos^6 x - \sin^6 x$

$1 - \frac{1}{2}\sin^2 2x$

$\cos^4 x - \sin^4 x$

$\cos 2x \left(1 - \frac{1}{4}\sin^2 2x\right)$

$\cos^6 x + \sin^6 x$

$1 - \frac{3}{4}\sin^2 2x$

$\cos^4 x + \sin^4 x$

$\cos 2x$

Ćwiczenie 4



Wskaż tożsamości.

$\operatorname{tg} x + \frac{1}{\operatorname{tg} x} = \frac{1}{\sin \frac{x}{2} \cos \frac{x}{2}}$

$\operatorname{tg} x + \frac{1}{\operatorname{tg} x} = \frac{2}{\sin 2x}$

$\operatorname{tg} x + \frac{1}{\operatorname{tg} x} = \frac{2}{\cos 2x}$

$\operatorname{tg} x + \frac{1}{\operatorname{tg} x} = \frac{1}{2 \sin \frac{x}{2} \cos \frac{x}{2} \cos x}$

Ćwiczenie 5



Po prawej stronie równości wstaw takie wyrażenie, aby otrzymać tożsamość.

$$\frac{\sin x + \sin 2x}{1 + \cos x + \cos 2x} = \boxed{\phantom{\frac{1}{\operatorname{tg} x}}}$$

 $\cos x$ $\sin x$ $\operatorname{tg} x$ $\frac{1}{\operatorname{tg} x}$

Ćwiczenie 6



Co należy wstawić po prawej stronie równości w miejsce litery P , aby otrzymać tożsamość:

$$\sqrt{1 + \sin 2x} = P?$$

$\sin x + \cos x$

$|\sin x + \cos x|$

$\sin x - \cos x$

$|\sin x - \cos x|$

Ćwiczenie 7



Sprawdź, czy równość:

$$\frac{1-8\sin^2 x \cdot \cos^2 x}{\cos^2 2x - \sin^2 2x} = 1$$

jest tożsamością.

Ćwiczenie 8



Udowodnij, że równość:

$$\frac{1-2\cos\frac{x}{2}+\cos x}{1+2\cos\frac{x}{2}+\cos x} = -\operatorname{tg}^2\frac{x}{4}$$

jest tożsamością.

Dla nauczyciela

Autor: Jacek Dymel

Przedmiot: Matematyka

Temat: Zastosowanie funkcji trygonometrycznych podwojonego kąta do dowodzenia tożsamości

Grupa docelowa:

Szkoła ponadpodstawowa, liceum ogólnokształcące, technikum, zakres rozszerzony

Podstawa programowa:

Treści nauczania – wymagania szczegółowe:

VII. Trygonometria. Zakres podstawowy. Uczeń:

Zakres rozszerzony 5) korzysta z wzorów na sinus, cosinus i tangens sumy i różnicy kątów, a także na funkcje trygonometryczne kątów podwojonych;

Kształtowane kompetencje kluczowe:

- kompetencje obywatelskie;
- kompetencje cyfrowe;
- kompetencje osobiste, społeczne i w zakresie umiejętności uczenia się;
- kompetencje matematyczne oraz kompetencje w zakresie nauk przyrodniczych, technologii i inżynierii.

Cele operacyjne:

Uczeń:

- zastosuje wzory na sinus, cosinus, tangens podwojonego kąta do dowodzenia tożsamości;
- zastosuje wzory na sinus, cosinus, tangens podwojonego kąta do dowodzenia, że równość nie jest tożsamością.

Strategie nauczania:

- konstruktywizm;
- konektywizm.

Metody i techniki nauczania:

- odwrócona klasa;
- dyskusja;

- quiz.

Formy pracy:

- praca indywidualna;
- praca w parach;
- praca w grupach;
- praca całego zespołu klasowego.

Środki dydaktyczne:

- komputery z głośnikami, słuchawkami i dostępem do internetu;
- zasoby multimedialne zawarte w e-materiale;
- tablica interaktywna/tablica, pisak/kreda.

Przebieg lekcji

Przed lekcją:

1. Uczniowie zapoznają się z treściami zapisanymi w sekcji „Przeczytaj”.

Faza wstępna:

1. Nauczyciel prosi wybraną osobę o odczytanie tematu lekcji tj. „Zastosowanie funkcji trygonometrycznych podwójonego kąta do dowodzenia tożsamości”, a następnie określa cele i kryteria sukcesu.

Faza realizacyjna:

1. Nauczyciel czyta polecenie numer 1 - „Zagraj w grę edukacyjną. Dopasuj klocki tak, aby lewa część kostki i prawa strona tej kostki były odpowiednio prawą i lewą stroną wyrażenia” z sekcji „Gra edukacyjna”. Uczniowie zapoznają się z treścią materiału, następnie na forum klasy wspólnie wyjaśniają ewentualne wątpliwości.
2. Uczniowie wykonują pierwsze dwa ćwiczenia interaktywne z sekcji „Sprawdź się”. Wyniki pracy omawiane są na forum i komentowane przez nauczyciela.
3. Kolejny etap to liga zadaniowa - uczniowie wykonują w grupach na czas ćwiczenia 3-5 z sekcji „Sprawdź się”, a następnie omawiają je na forum.
4. Ćwiczenia numer 6, 7 i 8 uczniowie wykonują indywidualnie, a następnie omawia je nauczyciel.

Faza podsumowująca:

1. Omówienie ewentualnych problemów z rozwiązaniem ćwiczeń z sekcji „Sprawdź się”.

Praca domowa:

1. Uczniowie wykonują ćwiczenia interaktywne, które nie zostały dokończony na zajęciach.

Materiały pomocnicze:

- [Rozwiązywanie równań z funkcjami trygonometrycznymi](#)

Wskazówki metodyczne:

- Medium w sekcji „Gra edukacyjna” można wykorzystać jako materiał służący powtórzeniu materiału w temacie „Zastosowanie funkcji trygonometrycznych podwojonego kąta do dowodzenia tożsamości”.