Dzielenie wyrażeń wymiernych

Dzielenie wyrażeń wymiernych

Źródło: dostępny w internecie: pixabay.com, domena publiczna.

Jeżeli mamy jakąś liczbę podzielić przez ułamek zwykły, możemy pomnożyć ją przez jego odwrotność. Ułamki algebraiczne możemy dzielić na tej samej zasadzie.

Dzielenie możemy zapisać za pomocą znaku dwukropka. Często używa się też zapisu z pomocą kreski ułamkowej – dzielenie dwóch wyrażeń wymiernych może mieć wtedy postać ułamka piętrowego.

Aby opanować materiał z bieżącej lekcji, potrzebnych będzie kilka umiejętności:

- rozkład wielomianów na czynniki;
- skracanie i rozszerzanie ułamków algebraicznych;
- mnożenie ułamków algebraicznych.

Twoje cele

- Wykonasz dzielenie wyrażeń wymiernych, zastępując je mnożeniem przez odwrotność.
- Uprościsz ułamki piętrowe różnymi metodami.
- Sformułujesz warunki, przy których wykonanie podanych działań jest możliwe (określisz założenia).

Przeczytaj

Reguła: Dzielenie wyrażeń wymiernych

Aby wykonać dzielenie wyrażeń wymiernych $\frac{F(x)}{P(x)} : \frac{G(x)}{Q(x)}$, wykonujemy opisane poniżej kroki.

1. Zapisujemy je w postaci mnożenia przez odwrotność dzielnika.
$\frac{F(x)}{P(x)} : \frac{G(x)}{Q(x)} = \frac{F(x)}{P(x)} \cdot \frac{Q(x)}{G(x)}$

2. Wykonujemy mnożenie.

3. Podajemy założenia wynikające z zakazu dzielenia przez 0.
$\begin{cases} P(x) \neq 0 \\ Q(x) \neq 0 \\ G(x) \neq 0 \end{cases}$

Przykład 1

Obliczmy $\frac{1}{x-3} : \frac{x-2}{x-4}$.

- Zapiszmy działanie w postaci iloczynu.
$\frac{1}{x-3} : \frac{x-2}{x-4} =$
$= \frac{1}{x-3} \cdot \frac{x-4}{x-2} =$
$= \frac{x-4}{(x-2)(x-3)}$

- Założenia: $\begin{cases} x-2 \neq 0 \\ x-4 \neq 0 \text{, czyli } x \in \mathbb{R} \setminus \{2; 3; 4\}. \\ x-3 \neq 0 \end{cases}$

Przykład 2

Obliczmy $\frac{2x+14}{x^2+3x-28} : 6$.

- Zamieńmy dzielenie na mnożenie przez odwrotność i sprowadźmy wielomiany do postaci iloczynowej.

- $\frac{2x+14}{x^2+3x-28} : 6 =$
  $= \frac{2(x+7)}{(x+7)(x-4)} \cdot \frac{1}{2\cdot 3} =$
  $= \frac{\cancel{2}\,\cancel{(x+7)}}{\cancel{(x+7)}\,(x-4)} \cdot \frac{1}{\cancel{2}\cdot 3} =$
  $= \frac{1}{3(x-4)}$

- $x \in \mathbb{R} \setminus \{-7; 4\}$

Przykład 3

Obliczmy $\frac{x^2-6x+9}{3x-9} : \frac{x^2+2x-15}{6x^2-150}$.

- Zamieńmy dzielenie na mnożenie przez odwrotność i sprowadźmy wielomiany do postaci iloczynowej. Pamiętajmy o skracaniu.

- $\frac{x^2-6x+9}{3x-9} : \frac{x^2+2x-15}{6x^2-150} =$
  $= \frac{x^2-6x+9}{3x-9} \cdot \frac{6x^2-150}{x^2+2x-15} =$
  $= \frac{(x-3)^2}{3(x-3)} \cdot \frac{2\cdot 3(x-5)(x+5)}{(x-3)(x+5)} =$
  $= \frac{\cancel{(x-3)}\,\cancel{^2}}{\cancel{3}\,\cancel{(x-3)}} \cdot \frac{2\cdot \cancel{3}\,(x-5)\,\cancel{(x+5)}}{\cancel{(x-3)}\,\cancel{(x+5)}} = 2(x-5)$

- Nie zapomnijmy, by wyznaczając dziedzinę, uwzględnić istnienie zarówno drugiego ułamka, jak i jego odwrotności.
  $x \in \mathbb{R} \setminus \{-5; 3; 5\}$

Przykład 4

Obliczmy $\frac{\frac{x^3+27}{x-3}}{\frac{x^2-3x+9}{x^2-9}}$.

- Ten przykład rozwiążemy dwiema metodami.

Przykład 5

Obliczmy $\frac{2}{x^2-4x+4} : \frac{2x+4}{3x^2-12}$.

- Zacznijmy od zapisania dzielenia jako mnożenia przez odwrotność i zapisania wielomianów w postaci iloczynowej.

- $\frac{2}{x^2-4x+4} : \frac{2x+4}{3x^2-12} =$
  $= \frac{2}{x^2-4x+4} \cdot \frac{3x^2-12}{2x+4} =$
  $= \frac{2}{(x-2)^2} \cdot \frac{3(x-2)(x+2)}{2(x+2)} =$
  $= \frac{\cancel{2}}{(x-2)^{\cancel{2}}} \cdot \frac{3\cancel{(x-2)}\cancel{(x+2)}}{\cancel{2}\cancel{(x+2)}} =$
  $= \frac{3}{x-2}$

- $x \in \mathbb{R} \setminus \{-2; 2\}$

Przykład 6

Obliczmy $\frac{15x^4-30x^3-120x+240}{12-12x^2} : \frac{5x^2+10x+20}{6x-6}$.

- Zacznijmy od zapisania dzielenia jako mnożenia przez odwrotność i zapisania wielomianów w postaci iloczynowej. Nie zapomnijmy o wyłączeniu znaku „$-$” w mianowniku pierwszego ułamka.

- $\frac{15x^4-30x^3-120x+240}{12-12x^2} : \frac{5x^2+10x+20}{6x-6} =$
  $= \frac{15x^4-30x^3-120x+240}{12-12x^2} \cdot \frac{6x-6}{5x^2+10x+20} =$

$$= \frac{15(x-2)^2(x^2+2x+4)}{-12(x-1)(x+1)} \cdot \frac{6(x-1)}{5(x^2+2x+4)} =$$

$$= \frac{3 \cdot \cancel{5}\,(x-2)^2\,\cancel{(x^2+2x+4)}}{-2 \cdot \cancel{6}\,\cancel{(x-1)}\,(x+1)} \cdot \frac{\cancel{6}\,\cancel{(x-1)}}{\cancel{5}\,\cancel{(x^2+2x+4)}} =$$

$$= -\frac{3(x-2)^2}{2(x+1)}$$

- $x \in \mathbb{R} \setminus \{-1; 1\}$

Słownik

wyrażenie wymierne

zmiennej rzeczywistej x to wyrażenie algebraiczne postaci $\frac{P(x)}{Q(x)}$, w którym $P(x)$ i $Q(x)$ są wielomianami zmiennej x, przy czym $Q(x)$ nie jest wielomianem zerowym

dziedzina wyrażenia wymiernego

wszystkie liczby rzeczywiste, dla których to wyrażenie ma sens liczbowy

Gra edukacyjna

Polecenie 1

Zagraj w grę, a następnie wykonaj polecenia.

Polecenie 2

Oblicz $\frac{x^2}{x-2} : \frac{x^2+2x}{4-x^2}$.

Pamiętaj o skracaniu.

Określ dziedzinę.

Polecenie 3

Oblicz $\frac{3x+13}{3x^2+19x+26} : \frac{x+7}{x^2+2x}$.

Pamiętaj o skracaniu.

Określ dziedzinę.

Polecenie 4

Oblicz $\frac{1-9x^2}{x^4+2x^2+1} : \frac{18x^3+12x^2+2x}{x^4-1}$.

Pamiętaj o skracaniu.

Określ dziedzinę.

Sprawdź się

Pokaż ćwiczenia:

Ćwiczenie 1

Ćwiczenie 2

Ćwiczenie 3

Ćwiczenie 4

Ćwiczenie 5

Ćwiczenie 6

Ćwiczenie 7

Ćwiczenie 8

Ćwiczenie 9

Ćwiczenie 10

Ćwiczenie 11

Ćwiczenie 12

Dla nauczyciela

Autor: Michał Niedźwiedź

Przedmiot: Matematyka

Temat: Dzielenie wyrażeń wymiernych

Grupa docelowa:

III etap edukacyjny, liceum ogólnokształcące, technikum, zakres rozszerzony

Podstawa programowa:

Podstawa programowa:

II. Wyrażenia algebraiczne.

7) mnoży i dzieli wyrażenia wymierne;

8) dodaje i odejmuje wyrażenia wymierne, w przypadkach nie trudniejszych niż: $\frac{1}{x+1} - \frac{1}{x}$, $\frac{1}{x} + \frac{1}{x^2} + \frac{1}{x^3}$, $\frac{x+1}{x+2} + \frac{x-1}{x+1}$;

Kształtowane kompetencje kluczowe:

- kompetencje w zakresie rozumienia i tworzenia informacji;
- kompetencje matematyczne oraz kompetencje w zakresie nauk przyrodniczych, technologii i inżynierii;
- kompetencje cyfrowe;
- kompetencje osobiste, społeczne i w zakresie umiejętności uczenia się.

Cele operacyjne:

Uczeń:

- wykonuje dzielenie wyrażeń wymiernych, zastępując je mnożeniem przez odwrotność.
- uproszcza ułamki piętrowe,
- formułuje warunki, przy których dzielenie wyrażeń wymiernych jest możliwe.

Strategie nauczania:

- konstruktywizm;
- konektywizm.

Metody i techniki nauczania:

- dyskusja;
- metoda tekstu przewodniego;
- metoda krokodyla.

Formy pracy:

- praca indywidualna;
- praca w parach;
- praca w grupach;
- praca całego zespołu klasowego.

Środki dydaktyczne:

- komputery z głośnikami, słuchawkami i dostępem do internetu;
- zasoby multimedialne zawarte w e-materiale;
- tablica interaktywna/tablica, pisak/kreda.

Przebieg lekcji

Faza wstępna:

1. Nauczyciel podaje temat i cele zajęć i wspólnie z uczniami ustala kryteria sukcesu.
2. Uczniowie przypominają sposoby dzielenia ułamków zwykłych.

Faza realizacyjna:

1. Nauczyciel dzieli uczniów na 4-osobowe grupy. Uczniowie w grupach zapoznają się z informacjami w sekcji „Przeczytaj". Analizują przedstawione przykłady i notują pytania. Następnie przedstawiają pytania na forum klasy. Odpowiadają na nie uczniowie z innych grup. Nauczyciel wyjaśnia ewentualne wątpliwości.
2. Uczniowie indywidualnie wykonują zaproponowane ćwiczenia interaktywne, metodą krokodyla. Krokodylem jest nauczyciel, który „czeka nieruchomo na brzegu rzeki" i „ożywia się" tylko w przypadku, gdy uczeń nie może sobie poradzić z zadaniem.

Faza podsumowująca:

1. Uczniowie w parach grają w grę edukacyjną.
2. Nauczyciel omawia przebieg zajęć, wskazuje mocne i słabe strony pracy uczniów, udzielając im tym samym informacji zwrotne.

Praca domowa:

Uczniowie rozwiązują polecenia w sekcji „Gra edukacyjna".

Materiały pomocnicze:

Wyrażenia wymierne

Wskazówki metodyczne:

Gra edukacyjna może posłużyć powtórzeniu materiału przed kartkówką.