Iloczyn i suma przedziałów liczbowych

Źródło: Alexander Stein, dostępny w internecie: pixabay.com, domena publiczna.

Na przedziałach, podobnie jak na innych zbiorach, możemy wykonywać działania. Najbardziej elementarne z nich to suma, iloczyn, różnica i dopełnienie. W tej lekcji omówimy dokładnie własności sumy i iloczynu przedziałów. Zastanowimy się, czy w wyniku tych działań zawsze otrzymamy przedziały. Przedziały i działania na nich są bardzo przydatne w matematyce – przy ich użyciu możemy podać odpowiedzi do wielu zadań, w szczególności tych związanych z rozwiązywaniem nierówności.

Twoje cele

- Wyznaczysz iloczyn przedziałów ograniczonych.
- Wyznaczysz sumę przedziałów ograniczonych.

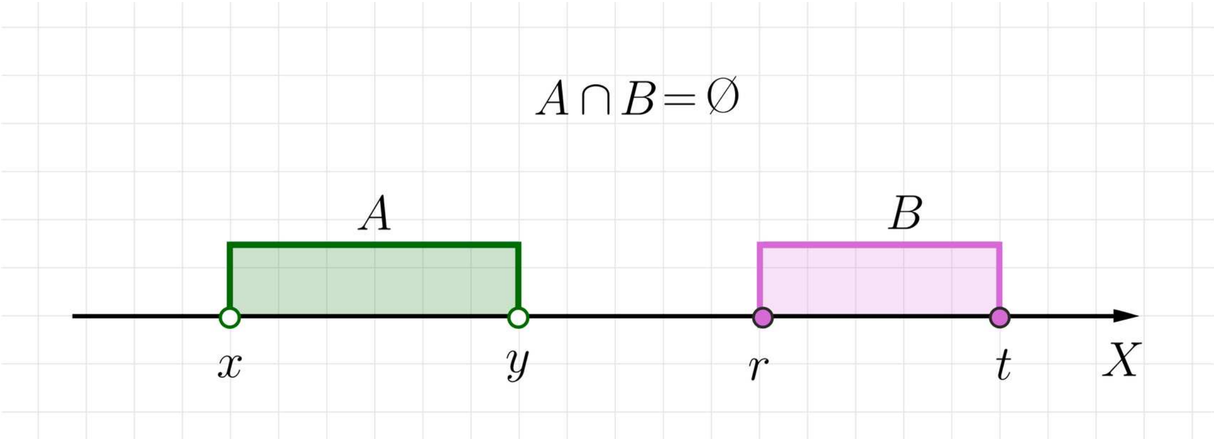
Przeczytaj

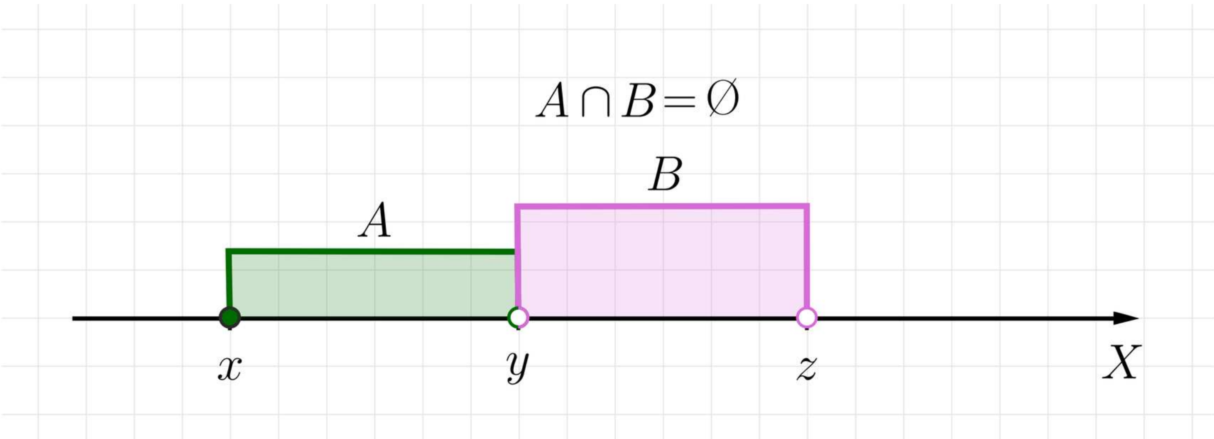
Definicja: Iloczyn przedziałów

Iloczynem przedziałów liczbowych A i B nazywamy zbiór, który zawiera tylko i wyłącznie liczby należące i do przedziału A, i do przedziału B. Iloczyn przedziałów A i B oznaczamy jako $A \cap B$ i nazywamy inaczej **częścią wspólną**.

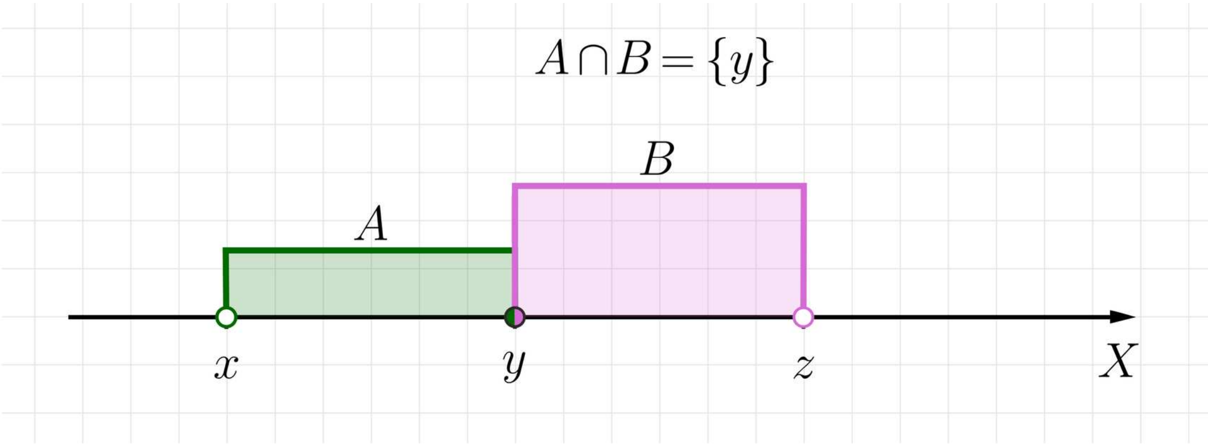
Poniżej przedstawiamy kilka różnych położeń dwóch przedziałów względem siebie i ich części wspólne:

1. Jeśli przedziały A i B nie mają żadnych wspólnych elementów, nazywamy je rozłącznymi. Zapiszemy wówczas, że ich iloczynem jest zbiór pusty: $A \cap B = \emptyset$

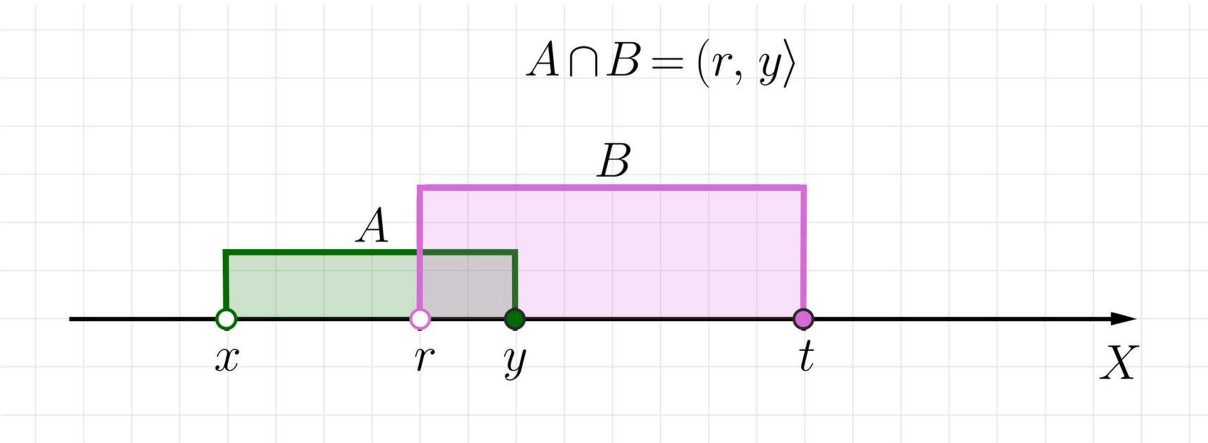




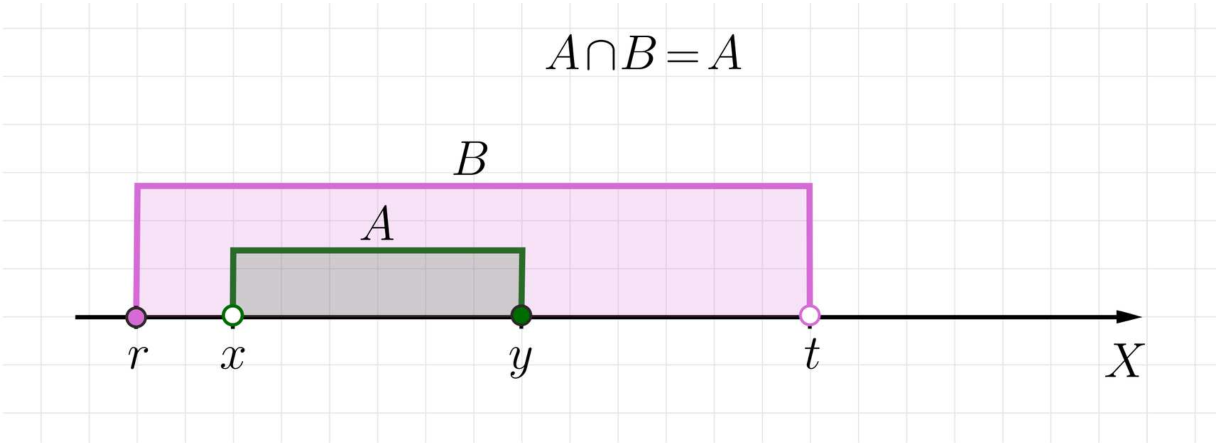
2. Iloczyn dwóch przedziałów może być zbiorem jednoelementowym - przedziały mogą mieć wspólny koniec. Na ilustracji poniżej mamy $A \cap B = \{y\}$.



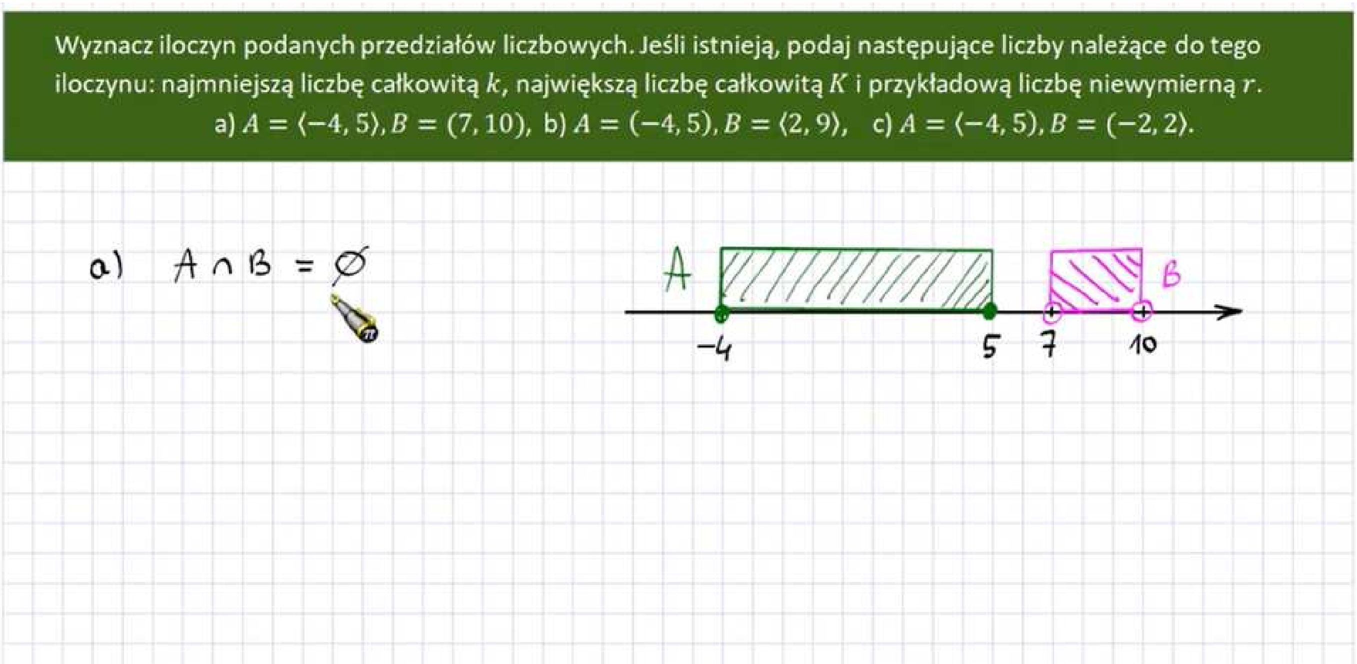
3. Iloczynem przedziałów może być przedział, do którego (zgodnie z definicją) należą tylko i wyłącznie liczby należące do każdego z rozważanych przedziałów:



Jeśli iloczyn dwóch przedziałów jest równy jednemu z nich, to mówimy, że jeden przedział zawiera się w drugim, co oznaczamy symbolem $\subset$. Na rysunku poniżej zilustrowano sytuację, w której przedział A zawiera się w przedziale B:
$A \cap B = A \Leftrightarrow A \subset B$. Dzieje się tak, jeśli każda liczba należąca do przedziału A należy do przedziału B (jednocześnie zwróćmy uwagę, że element przedziału B może nie być elementem przedziału A).



Zapoznaj się z filmem samouczkiem, w którym omówione są przykłady wyznaczania części wspólnej dwóch przedziałów:



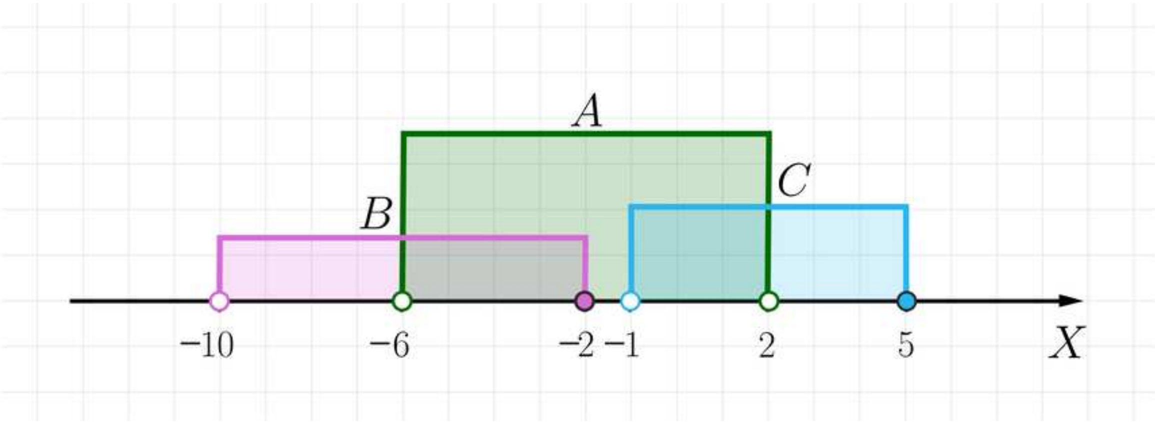
Film dostępny pod adresem /preview/resource/R1RfFI7llj3wm

Film nawiązujący do treści materiału dotyczącej iloczynu przedziałów liczbowych.

Przykład 1

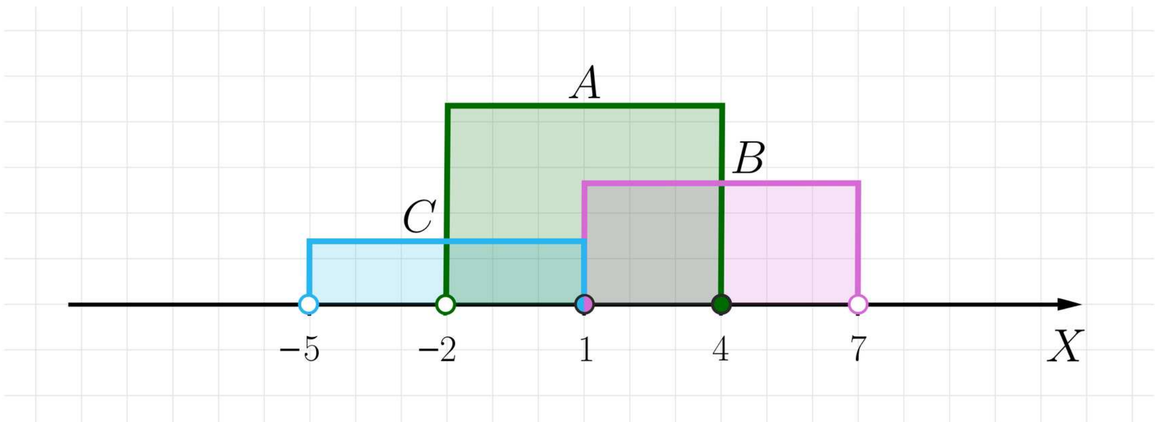
Dla podanych przedziałów A, B, C wyznaczymy ich iloczyn $A \cap B \cap C$.

a) $A = (-6; 2), B = (-10; -2\rangle, C = (-1; 5\rangle$
Aby rozwiązać zadanie, zilustrujemy przedziały na osi liczbowej.



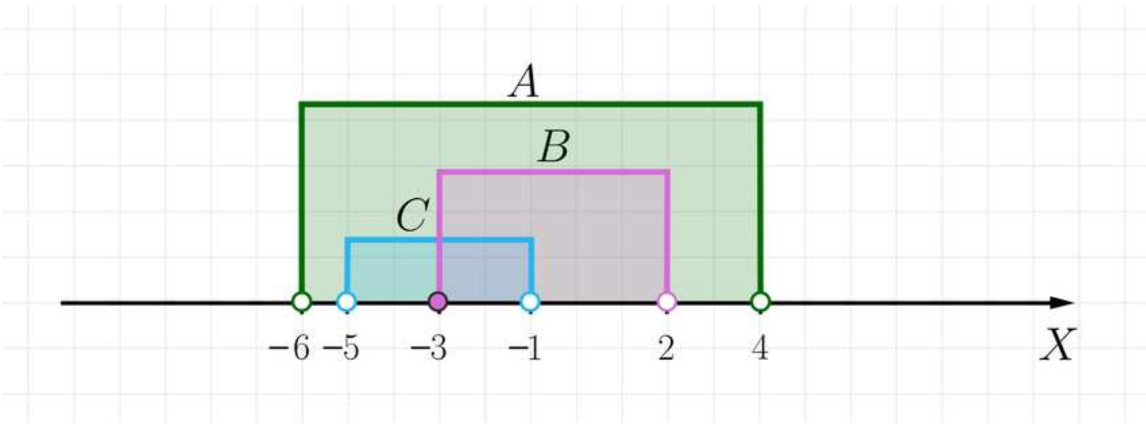
Łatwo zauważyć, że nie istnieje liczba należąca do wszystkich przedziałów, co oznacza, że ich część wspólna jest zbiorem pustym, co zapisujemy $A \cap B \cap C = \emptyset$
.

b) $A = (-2; 4\rangle$, $B = \langle 1; 7)$, $C = (-5; 1\rangle$
Ponownie ilustrujemy przedziały na osi liczbowej.



Z ilustracji odczytujemy, że jedyną liczbą należącą do wszystkich przedziałów jest 1. Zatem $A \cap B \cap C = \{1\}$.

c) $A = (-6; 4)$, $B = \langle -3; 2)$,$C = (-5; -1)$



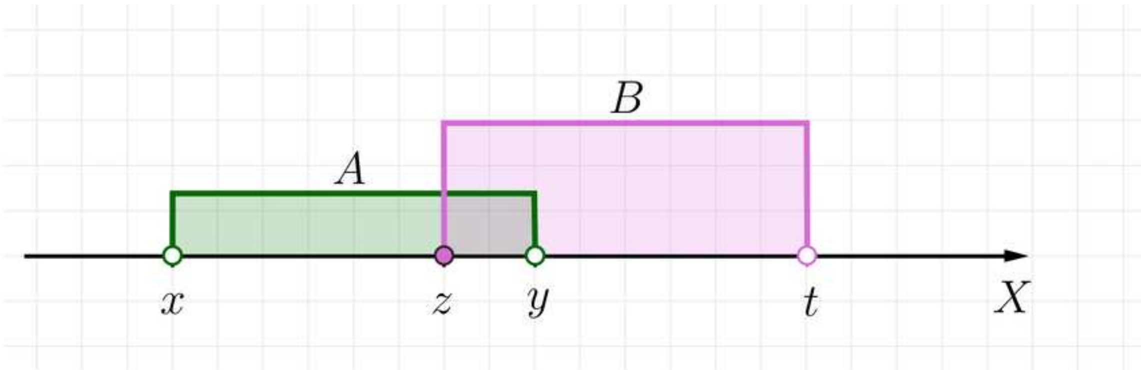
Z rysunku możemy odczytać, że częścią wspólną wszystkich trzech przedziałów jest zbiór liczb większych lub równych (-3) i jednocześnie mniejszych od (-1). Zatem $A \cap B \cap C = \langle -3; -1)$.

Definicja: Suma przedziałów

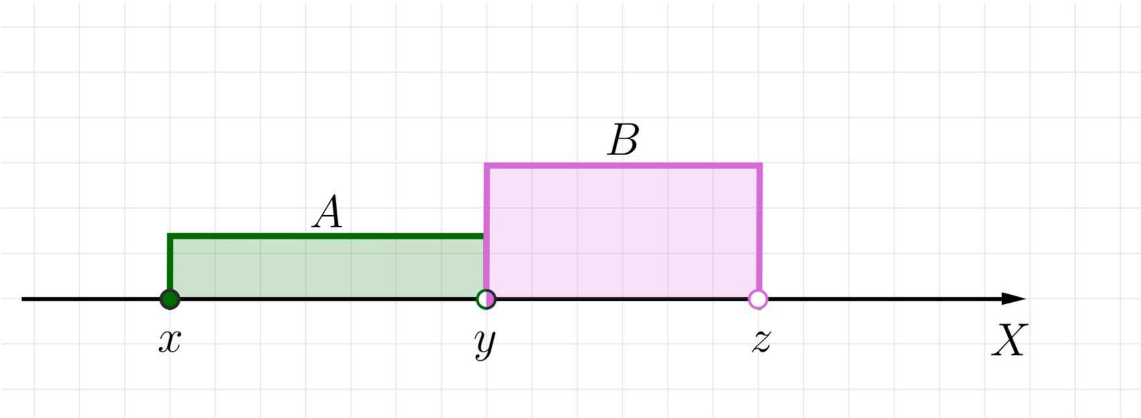
Sumą przedziałów A i B nazywamy taki zbiór, do którego należą tylko i wyłącznie liczby, które należą do co najmniej jednego z przedziałów A lub B. Sumę przedziałów A i B oznaczmy używając symbolu $\cup$: $A \cup B$.

Poniżej przedstawiamy kilka możliwych położeń względem siebie dwóch przedziałów na osi liczbowej. W każdym przypadku wyznaczymy ich sumy.

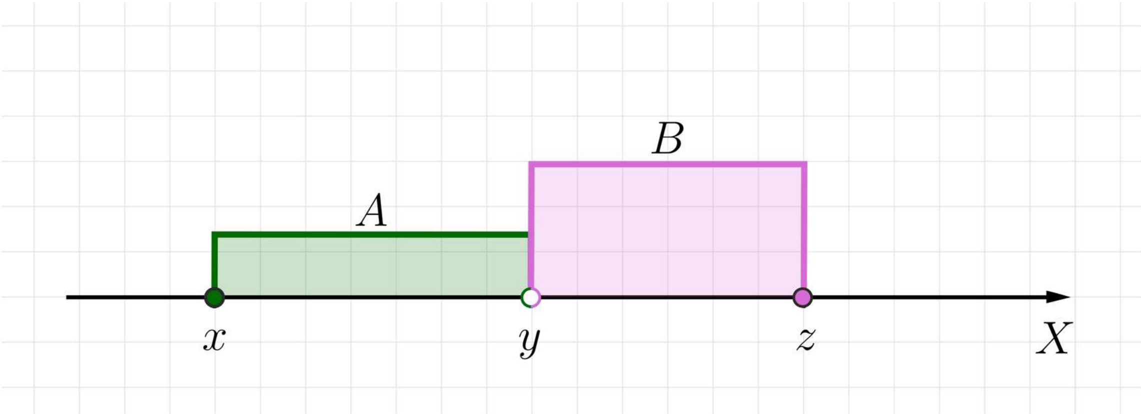
1. Dla przedziałów A i B położonych jak poniżej, ich suma jest równa $A \cup B = (x; t)$.



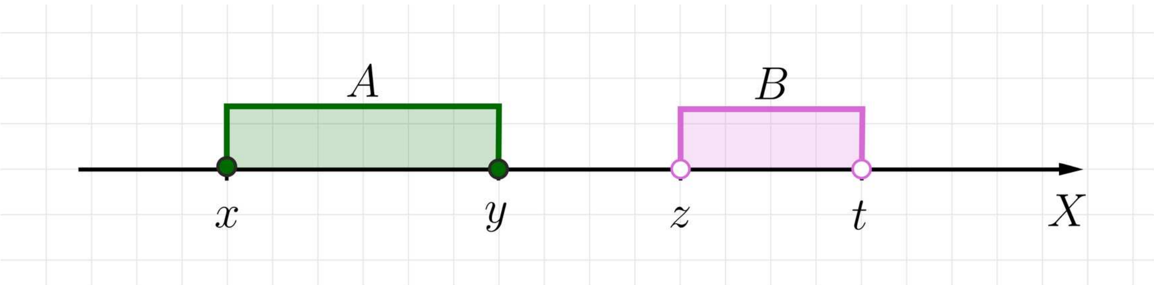
2. W drugim przypadku rozważamy przedziały, które mają jeden wspólny koniec. Wówczas suma zbiorów to $A \cup B = (x; z)$. Zwróćmy uwagę, że liczba y należy do przedziału B, więc należy również do sumy.



3. Rozważmy teraz przypadek, który subtelnie, acz istotnie różni się od poprzedniego. Tym razem rozważane przedziały również mają wspólny koniec y, ale nie należy on do żadnego z przedziałów A, B. Zatem nie należy też do sumy. Możemy zapisać $A \cup B = \langle x; y) \cup (y; z\rangle$ lub użyć symbolu $\setminus$ oznaczającego odejmowanie zbiorów. Równoważnie możemy zapisać $A \cup B = \langle x; z\rangle \setminus \{y\}$, co interpretujemy jako przedział z wyłączoną jedną liczbą - liczbą y.



4. W ostatnim rozważanym przypadku sumę przedziałów również możemy zapisać na dwa sposoby. Pierwszy z nich to $A \cup B = \langle x; y\rangle \cup (z; t)$. Drugi sposób ponownie wykorzystuje symbol różnicy zbiorów $A \cup B = \langle x; t) \setminus (y; z\rangle$. Zapis ten akcentuje fakt, że z przedziału $\langle x; t)$ "wyjmujemy" przedział $(y; z\rangle$.

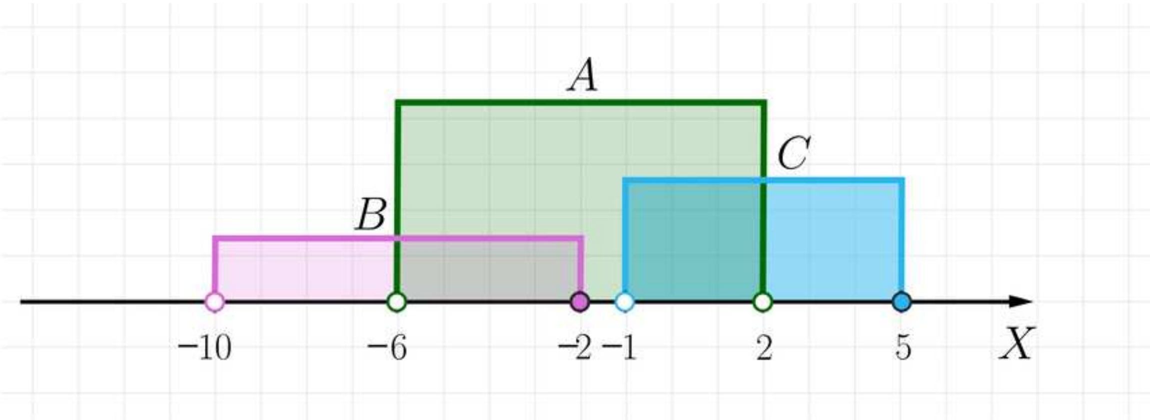


Przykład 2

Wyznaczymy sumy dla trójek przedziałów z przykładu 1.

a) $A = (-6; 2)$, $B = (-10; -2\rangle$, $C = (-1; 5\rangle$.

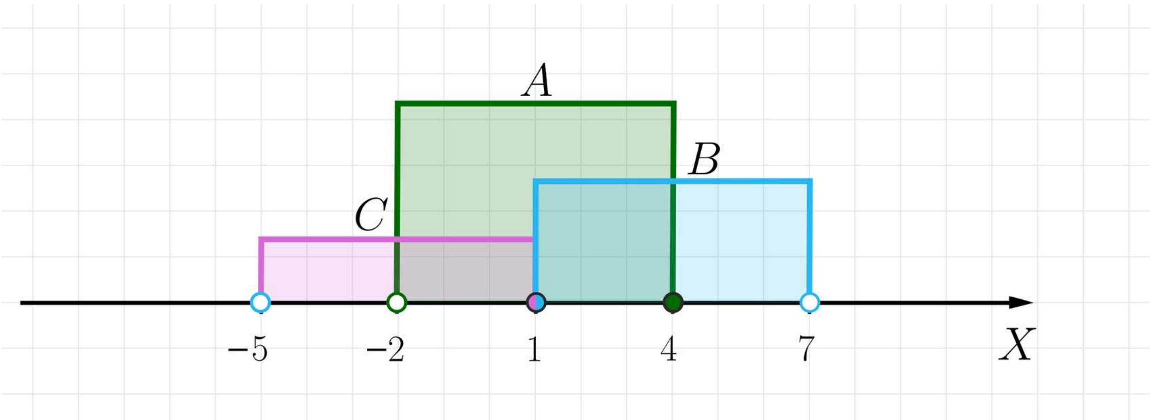
Ponownie będziemy posługiwać się interpretacją przedziałów na osi liczbowej.



Przypomnijmy, że liczba należy do sumy przedziałów dokładnie wtedy, gdy należy przynajmniej do jednego z nich. Zatem $A \cup B \cup C = (-10; 5\rangle$.

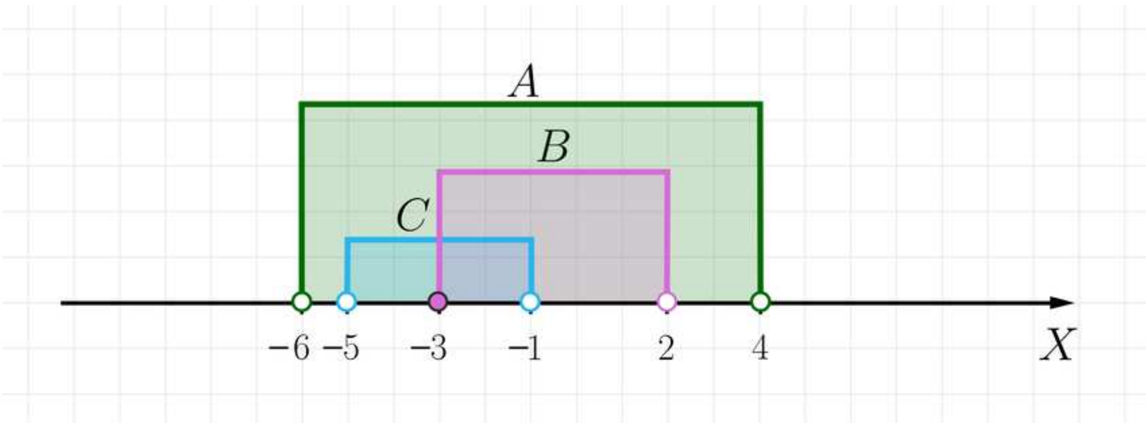
b) $A = (-2; 4\rangle$, $B = \langle 1; 7)$, $C = (-5; 1\rangle$.

Ponownie ilustrujemy przedziały na osi liczbowej.



Z ilustracji odczytujemy, że $A \cup B \cup C = (-5; 7)$.

c) $A = (-6; 4)$, $B = \langle -3; 2)$,$C = (-5; -1)$



Z rysunku możemy odczytać, że $A \cup B \cup C = (-6; 4)$. Zauważmy, że suma przedziałów A, B, C jest równa przedziałowi A. Dzieje się tak dlatego, że przedziały B i C są zawarte w przedziale A, czyli $B \subset A$ oraz $C \subset A$.

Przykład 3

Wyznacz wszystkie wartości parametru m, dla których iloczyn przedziałów $(-2; 2m-1)$ oraz $(m+3; 10)$ jest zbiorem niepustym.

Do rozwiązania zadania możesz użyć apletu. Używając suwaka, zmieniaj wartości parametru m i obserwuj położenie przedziałów na osi liczbowej.

Zasób interaktywny dostępny pod adresem https://zpe.gov.pl/a/D1GOpLMSj

Zadanie można też rozwiązać algebraicznie. Najpierw zapiszemy warunki, dzięki którym żaden z przedziałów nie będzie zbiorem pustym:
$2m - 1 > -2$ oraz $m + 3 < 10$.

Aby te warunki rozwiązać, do obu stron pierwszej nierówności dodamy 1 i podzielimy przez 2:

$2m-1>-2$

$2m-1+1>-2+1$

$2m>-1$

$\frac{2m}{2}>\frac{-1}{2}$

$m>-\frac{1}{2}$.

Ponadto od obu stron drugiej nierówności odejmujemy 3:

$m+3<10$

$m+3-3<10-3$

$m<7$.

Z obu nierówności wynika, że m należy do przedziału $\left(-\frac{1}{2};7\right)$. Dla m z tego przedziału żaden z rozważanych przedziałów nie jest pusty. Teraz zapiszemy warunek gwarantujący, że iloczyn przedziałów nie jest pusty:
$2m-1>m+3$

Aby go rozwiązać, do obu stron nierówności dodajemy liczbę 1, a następnie odejmujemy m:

$2m-1+1>m+3+1$

$2m>m+4$

$2m-m>m+4-m$

$m > 4.$

Zatem mamy dwa warunki do uwzględnienia: $m \in \left(-\frac{1}{2}; 7\right)$ oraz $m > 4.$ Rozwiązaniem zadania jest przedział $(4; 7)$.

Słownik

iloczyn zbiorów A i B

zbiór, do którego należą tylko i wyłącznie elementy należące jednocześnie do zbioru A i do zbioru B; iloczyn zbiorów A, B oznaczamy $A \cap B$

suma zbiorów A i B

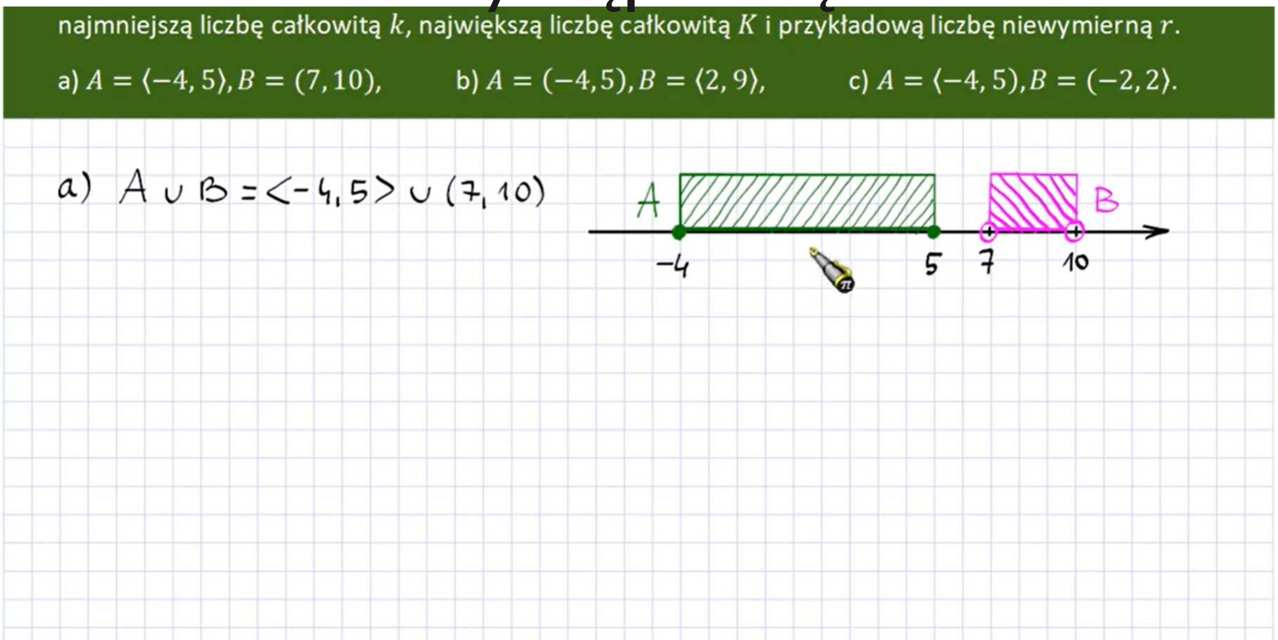
zbiór, do którego należą tylko i wyłącznie elementy należące przynajmniej do jednego ze zbiorów A lub B; sumę zbiorów A, B oznaczamy $A \cup B$

Animacja

Polecenie 1

Przeanalizuj przykłady zawarte w animacji.

Wystąpił błąd



Film dostępny pod adresem /preview/resource/REyAvOgtgSaLi

Film nawiązujący do treści materiału dotyczącej sumy przedziałów liczbowych.

Polecenie 2

Rozwiąż test. Wskaż wszystkie poprawne odpowiedzi.

Sprawdź się

Pokaż ćwiczenia:

Ćwiczenie 1

Ćwiczenie 2

Ćwiczenie 3

Dane są przedziały $A = (-5; 3\rangle$, $B = \langle -7; -3)$, $C = (1; 5\rangle$. Rozwiąż test składający się z czterech pytań jednokrotnego wyboru.

Ćwiczenie 4

Dane są przedziały $A = \langle -2; 3)$, $B = (-3; 5\rangle$, $C = (-5; 2\rangle$. Wyznacz zbiory:

a) $(A \cup B) \cap C$

b) $(A \cap B) \cup C$

c) $A \cup (B \cap C)$

d) $A \cap (B \cup C)$

Ćwiczenie 5

Niech $\mathbb{N}$ oznacza zbiór liczb naturalnych, $\mathbb{N}_+$ - zbiór liczb naturalnych dodatnich (bez zera), $\mathbb{Z}$ - zbiór liczb całkowitych, $\mathbb{Z}_-$ - zbiór liczb całkowitych ujemnych. Wyznacz elementy zbiorów:

a) $\langle -10; 10) \cap \mathbb{N}$

b) $(-4; 2\rangle \cap \mathbb{Z}$

c) $\langle -3; 4\rangle \cap \mathbb{N}_+$

d) $(-10; 5) \cap \mathbb{Z}_-$

Ćwiczenie 6

Wyznacz takie wartości parametru m, dla których przedziały $A = (-5; 2m + 1)$ i $B = (4m - 3; 15)$ są zbiorami niepustymi i jednocześnie rozłącznymi.

Ćwiczenie 7

Dane są przedziały A, B, C. W każdym przypadku wyznacz i porównaj zbiory $A \cup (B \cap C)$ i $(A \cup B) \cap (A \cup C)$ oraz $A \cap (B \cup C)$ i $(A \cap B) \cup (A \cap C)$.

a) $A = (-5; 6\rangle$, $B = (-2; 8)$, $C = \langle -1; 7\rangle$

b) $A = \langle -4; 4)$, $B = (5; 7)$, $C = \langle 0; 6\rangle$

Na podstawie przykładów postaw hipotezę dotyczącą własności sumy i iloczynu zbiorów.

Ćwiczenie 8

Dla nauczyciela

Autor: Sebastian Guz

Przedmiot: Matematyka

Temat: Iloczyn i suma przedziałów liczbowych

Grupa docelowa:

III etap edukacyjny, liceum ogólnokształcące, technikum, zakres rozszerzony

Podstawa programowa:

I. Liczby rzeczywiste. Zakres podstawowy. Uczeń:

6. posługuje się pojęciem przedziału liczbowego, zaznacza przedziały na osi liczbowej;

Kształtowane kompetencje kluczowe:

- kompetencje cyfrowe;
- kompetencje osobiste, społeczne i w zakresie umiejętności uczenia się;
- kompetencje matematyczne oraz kompetencje w zakresie nauk przyrodniczych, technologii i inżynierii.

Cele operacyjne:

Uczeń:

- wyznacza iloczyn przedziałów ograniczonych,

- wyznacza sumę przedziałów ograniczonych.

Strategie nauczania:

- konstruktywizm;
- konektywizm.

Metody i techniki nauczania:

- odwrócona klasa;
- dyskusja;
- opowiadanie.

Formy pracy:

- praca indywidualna;
- praca w parach;
- praca w grupach;
- praca całego zespołu klasowego.

Środki dydaktyczne:

- komputery z głośnikami, słuchawkami i dostępem do internetu;
- zasoby multimedialne zawarte w e-materiale;
- tablica interaktywna/tablica, pisak/kreda.

Przebieg lekcji

Przed lekcją:

1. Uczniowie zapoznają się z treściami zapisanymi w sekcji „Przeczytaj”.

Faza wstępna:

1. Nauczyciel prezentuje temat: „Iloczyn i suma przedziałów liczbowych” oraz cele zajęć, omawiając lub ustalając razem z uczniami kryteria sukcesu.
2. Nauczyciel prosi uczniów, aby zgłaszali swoje propozycje pytań do wspomnianego tematu. Jedna osoba może zapisywać je na tablicy. Gdy uczniowie wyczerpią pomysły, a pozostały jakieś ważne kwestie do poruszenia, nauczyciel je dopowiada.

Faza realizacyjna:

1. Nauczyciel czyta polecenie nr 1 w sekcji „Animacja” - „Przeanalizuj przykłady zawarte w animacji.” - prosi uczniów, aby zapoznali się z materiałem. Uczniowie zapisują ewentualne wątpliwości i niezrozumiałe aspekty, które zostały w nim przedstawione - nauczyciel tłumaczy je na forum klasy.
2. Prowadzący zapowiada uczniom, że w kolejnym kroku będą rozwiązywać ćwiczenia nr 1 i 2 z sekcji „Sprawdź się”. Każdy z uczniów robi to samodzielnie. Po ustalonym czasie wybrani uczniowie przedstawiają rozwiązania. Nauczyciel w razie potrzeby koryguje odpowiedzi, dopowiada istotne informacje, udziela uczniom informacji zwrotnej.
3. Nauczyciel dzieli klasę na 4-osobowe grupy. Uczniowie rozwiązują ćwiczenia 3-5 na czas (od łatwiejszego do trudniejszych). Grupa, która poprawnie rozwiąże ćwiczenia jako pierwsza, wygrywa, a nauczyciel może nagrodzić uczniów ocenami za aktywność. Rozwiązania są prezentowane na forum klasy i omawiane krok po kroku.
4. Uczniowie indywidualnie wykonują ćwiczenia nr 6-8, ale następnie konsultują swoje rozwiązania z innym uczniem i zapisują na kartce problemy, które mieli podczas ich wykonywania.

Faza podsumowująca:

1. Omówienie ewentualnych problemów z rozwiązaniem ćwiczeń z sekcji „Sprawdź się”.

Praca domowa:

1. Zadanie dla kolegi/koleżanki. Uczniowie dobierają się w pary i opracowują zadania analogiczne do ćwiczeń 7 i 8 z sekcji „Sprawdź się”. Następnie przesyłają je do siebie mailem, rozwiązują i na następnej lekcji porównują wyniki.

Materiały pomocnicze:

Przedziały liczbowe. Przedziały jako zbiory

Wskazówki metodyczne:

- Medium w sekcji „Animacja” można wykorzystać na lekcji jako podsumowanie i utrwalenie wiedzy w temacie „Iloczyn i suma przedziałów liczbowych”.