



Twierdzenie o rozkładzie wielomianu, twierdzenie o reszcie

- [Wprowadzenie](#)
- [Przeczytaj](#)
- [Animacja](#)
- [Sprawdź się](#)
- [Dla nauczyciela](#)



Twierdzenie o rozkładzie wielomianu, twierdzenie o reszcie

Źródło: dostępny w internecie: pixabay.com, domena publiczna.

Z rozkładem na czynniki spotkaliśmy się już przy funkcji kwadratowej – przy zapisywaniu wzoru funkcji kwadratowej w postaci iloczynowej. Wiemy, że taki zapis nie zawsze jest możliwy – znamy funkcje kwadratowe, których do postaci iloczynowej rozłożyć się nie da (gdy nie mają pierwiastków), a w każdym razie jest to niemożliwe, jeśli posługujemy się liczbami rzeczywistymi.

Nieco inaczej byłoby, gdyby dopuścić liczby zespolone, ale pojęcie to przekracza zakres podstawy programowej.

Twoje cele

- Poznasz twierdzenie o reszcie i jego dowód.
- Zapoznasz się z podstawowymi własnościami rozkładu wielomianu na czynniki.

Przeczytaj

Przypomnijmy twierdzenie o [dzieleniu wielomianów z resztą](#). W niektórych podręcznikach nosi ono nazwę twierdzenia o rozkładzie wielomianu.

Twierdzenie: Dzielenie wielomianów z resztą

Dla każdego wielomianu $W(x)$ i niezerowego wielomianu $P(x)$ istnieją wielomiany $Q(x)$ i $R(x)$ takie, że $W(x) = P(x) \cdot Q(x) + R(x)$, przy czym wielomian $R(x)$ nazywany **resztą z dzielenia** jest stopnia mniejszego niż stopień wielomianu $P(x)$ lub jest wielomianem zerowym.

Bezpośrednio z tego wynika kolejne bardzo często stosowane w rozwiązaniach niektórych zadań [twierdzenie o reszcie](#).

Twierdzenie: o reszcie

Reszta z dzielenia wielomianu $W(x)$ przez dwumian postaci $x - a$ wynosi $W(a)$ (czyli jest stałą równą wartości wielomianu $W(x)$ dla argumentu a).

Twierdzenie o reszcie bardzo łatwo udowodnić korzystając z twierdzenia o dzieleniu wielomianów z resztą. Wiadomo, że reszta z dzielenia $W(x)$ przez wielomian pierwszego stopnia jest stałą, oznaczmy ją jako R .

Zgodnie z twierdzeniem o dzieleniu z resztą możemy zapisać, że

$$W(x) = (x - a) \cdot Q(x) + R,$$

czyli

$$W(a) = (a - a) \cdot Q(a) + R = R,$$

a to właśnie chcieliśmy wykazać.

Przykład 1

Wyznamy resztę z dzielenia wielomianu $W(x) = x^4 - 3x^3 + 4x^2 - 17x + 15$.

Możemy wykonać pisemne dzielenie wielomianów, ale dużo prościej będzie skorzystać z twierdzenia o reszcie. Szukana reszta wynosi:

$$W(3) = 3^4 - 3 \cdot 3^3 + 4 \cdot 3^2 - 17 \cdot 3 + 15 = 0,$$

czyli wielomian $W(x)$ jest podzielny przez dwumian $x - 3$.

Przykład 2

Ustalmy, jaka jest reszta z dzielenia wielomianu $W(x) = 3x^7 - 5x^4 + 4x^3 + 9x - 11$ przez dwumian $x + 1$.

Korzystając z twierdzenia o reszcie wiemy, że reszta ta wynosi $W(-1) = -32$.

Wielomian definiujemy jako sumę jednomianów. Ale w wielu sytuacjach wygodniejsze jest przedstawienie wielomianu w postaci iloczynu - czyli rozłożenie wielomianu na czynniki.

Definicja: Wielomian rozkładalny

Wielomian rozkładalny to wielomian stopnia dodatniego, który można przedstawić w postaci iloczynu co najmniej dwóch wielomianów stopnia dodatniego. Wielomian, który nie spełnia tych warunków, to **wielomian nierozkładalny**.

Z tej definicji wynika, że nierozkładalne są na pewno wszystkie wielomiany stopnia pierwszego oraz nierozkładalne wielomiany stopnia drugiego (czyli takie, dla których wyróżnik Δ przyjmuje wartości ujemne).

Okazuje się, że są to jedyne **wielomiany nierozkładalne**.

Twierdzenie: Twierdzenie o rozkładzie wielomianu na czynniki

- Jedyne wielomiany nierozkładalne stopnia dodatniego o współczynnikach rzeczywistych to wszystkie wielomiany pierwszego stopnia oraz wielomiany drugiego stopnia z ujemnym wyróżnikiem Δ .
- Każdy wielomian stopnia większego od 2 można zapisać w postaci iloczynu wielomianów nierozkładalnych i niezerowej stałej.
- Zapis w postaci iloczynu jest jednoznaczny z dokładnością do przemnożenia czynników przez stałą niezerową.

Wyjaśnijmy, jak rozumieć zapis o jednoznaczności rozkładu.

Przykład 3

Rozważmy wielomian $W(x) = 2x^3 + 12x^2 + 22x + 12$.

Można go rozłożyć do postaci iloczynu wielomianów nierozkładalnych.

- $W(x) = 2(x + 2)(x + 3)(x + 1)$
- $W(x) = (2x + 4)(x + 3)(x + 1)$
- $W(x) = (x + 2)(x + 3)(2x + 2)$
- $W(x) = (3x + 6)\left(\frac{1}{3}x + 1\right)(2x + 2)$

Odpowiednie wielomiany pierwszego stopnia w każdym z tych czterech przykładowych zapisów można uzyskać stosując tylko mnożenie przez stałą. Na przykład czynnik $(2x + 2)$ w trzecim podpunkcie to $2(x + 1)$ z pierwszego podpunktu, a $\left(\frac{1}{3}x + 1\right)$ można uzyskać jako $\frac{1}{3}(x + 3)$.

Przykład 4

Wielomian

$$W(x) = 3x^4 + 5x^3 + 7x^2 + 3x - 2$$

można rozłożyć do postaci

$$W(x) = (3x - 1)(x + 1)(x^2 + x + 2)$$

i czynnik $(x^2 + x + 2)$ jest już nierozkładalny, ($\Delta = -7$).

Na koniec odnotujmy zastosowanie twierdzenia o reszcie.

Przykład 5

Rozważmy wielomian $W(x) = x^4 + 2x^3 + ax^2 + bx + 1$. Wyznamy współczynniki a i b wiedząc, że reszta z dzielenia wielomianu W przez dwumian $(x - 1)$ wynosi 7 a reszta z dzielenia wielomianu W przez dwumian $(x + 1)$ wynosi 1.

Z Twierdzenia o reszcie wiemy, że $W(1) = 7$ oraz $W(-1) = 1$. Budujemy więc układ równań

$$\begin{cases} 1^4 + 2 \cdot 1^3 + a \cdot 1^2 + b \cdot 1 + 1 = 7 \\ (-1)^4 + 2 \cdot (-1)^3 + a \cdot (-1)^2 + b \cdot (-1) + 1 = 1 \end{cases}$$

który po uproszczeniu przyjmuje postać:

$$\begin{cases} a + b + 4 = 7 \\ a - b = 1. \end{cases}$$

Dodając równania stronami otrzymujemy, że $2a = 4$, więc $a = 2$. Wstawiając uzyskaną wielkość do drugiego równania mamy, że $2 - b = 1$, więc $b = 1$.

Słownik

dzielenie wielomianów z resztą

dla każdego wielomianu $W(x)$ i niezerowego wielomianu $P(x)$ istnieją wielomiany $Q(x)$ i $R(x)$ takie, że $W(x) = P(x) \cdot Q(x) + R(x)$, przy czym wielomian $R(x)$ nazywany **resztą z dzielenia** jest stopnia mniejszego niż stopień wielomianu $P(x)$ lub jest wielomianem zerowym

twierdzenie o reszcie

reszta z dzielenia wielomianu $W(x)$ przez dwumian postaci $x - a$ wynosi $W(a)$ (czyli jest stałą równą wartości wielomianu $W(x)$ dla argumentu a)

wielomian rozkładalny

wielomian stopnia dodatniego, który można przedstawić w postaci iloczynu co najmniej dwóch wielomianów stopnia dodatniego

wielomian nierozkładalny

jednomian stopnia zero lub wielomian stopnia dodatniego, którego nie można przedstawić w postaci iloczynu co najmniej dwóch wielomianów stopnia dodatniego

Animacja

Polecenie 1

Zapoznaj się z animacją poświęconą dzieleniu wielomianu $W(x)$ przez dwumian pierwszego stopnia postaci $x - a$.

Film dostępny pod adresem <https://zpe.gov.pl/a/DB2cfK02i>

Film nawiązujący do treści materiału dotyczącej twierdzenia o rozkładzie wielomianu oraz twierdzenia o reszcie. Opowiada Piotr Kryszkiewicz.

Polecenie 2

Korzystając z twierdzenia o reszcie, wyznacz resztę z dzielenia wielomianu $W(x)$ przez podany dwumian $P(x)$.

a. $W(x) = x^3 - x^2 - 13x - 1$, $P(x) = x - 3$

b. $W(x) = x^6 - 2x^5 + x - 6$, $P(x) = x - 2$

c. $W(x) = x^6 + x^5 - x^4 + x^2 - 7x - 7$, $P(x) = x + 1$

Polecenie 3

Wyznacz wyraz wolny następujących wielomianów:

a. $W(x) = (x - 1)(x + 3)(x + 5) + 3$,

b. $W(x) = 2(x - 2)(x + 1) - 8$,

c. $W(x) = -2(x - 3)^3 - 20$.

Sprawdź się

Pokaż ćwiczenia:   

Ćwiczenie 1



Ćwiczenie 2



Ćwiczenie 3



Ćwiczenie 4



Ćwiczenie 5



Ćwiczenie 6



Ćwiczenie 7



Ćwiczenie 8



Dla nauczyciela

Autor: Michał Niedźwiedź

Przedmiot: Matematyka

Temat: Twierdzenie o rozkładzie wielomianu, twierdzenie o reszcie

Grupa docelowa:

III etap edukacyjny, liceum ogólnokształcące, technikum, zakres rozszerzony

Podstawa programowa:

II. Wyrażenia algebraiczne.

Zakres podstawowy. Uczeń:

6) dzieli wielomian jednej zmiennej $W(x)$ przez dwumian postaci $x - a$;

Kształtowane kompetencje kluczowe:

- kompetencje w zakresie rozumienia i tworzenia informacji;
- kompetencje matematyczne oraz kompetencje w zakresie nauk przyrodniczych, technologii i inżynierii;
- kompetencje cyfrowe;
- kompetencje osobiste, społeczne i w zakresie umiejętności uczenia się.

Cele operacyjne:

Uczeń:

- dowodzi twierdzenia o reszcie dzielenia,
- wykorzystuje własności rozkładu wielomianu na czynniki.

Strategie nauczania:

- konstruktywizm

Metody i techniki nauczania:

- drzewo pomysłów
- krokodyl

Formy pracy:

- praca indywidualna

- praca w grupach
- praca całego zespołu klasowego

Środki dydaktyczne:

- komputery z głośnikami, słuchawkami i dostępem do internetu
- zasoby multimedialne zawarte w e-materiale
- tablica interaktywna/tablica, pisak/kreda

Przebieg lekcji

Przed lekcją:

Nauczyciel prosi uczniów, aby w domu przypomnieli sobie sposoby wykonywania działań na wyrażeniach algebraicznych.

Faza wstępna:

1. Nauczyciel podaje temat i cele zajęć.
2. Uczniowie ustalają kryteria sukcesu.

Faza realizacyjna:

1. Uczniowie w grupach zapoznają się z przykładami wyznaczania reszty z dzielenia wielomianu przez dwumian lub iloraz dwumianów z sekcji „Przeczytaj”. Ich zadaniem jest najpierw rozwiązanie danego zadania, a dopiero następnie porównanie jego rozwiązania.
2. Grupy tworzą drzewa rozwiązań, na których umieszczają przykłady obliczenia reszty z dzielenia wielomianów.
3. Po prezentacji prac grup powstaje jedno, wspólne dla całej klasy, drzewo pomysłów.
4. Teraz uczniowie w grupach zapoznają się z animacją i ewentualnie dopisują na plakacie pozyskane informacje.
5. Uczniowie indywidualnie wykonują zaproponowane ćwiczenia interaktywne, metodą krokodyla. Krokodylem jest nauczyciel, który „drzemie na brzegu rzeki” i tylko „ożywia się” w przypadku, gdy uczeń nie może sobie poradzić z zadaniem.

Faza podsumowująca:

1. Nauczyciel prosi wybranych uczniów o przedstawienie najważniejszych elementów, jakie były omawiane w trakcie lekcji – uczniowie mogą korzystać z wytworzonych plakatów.
2. Liderzy grup omawiają wyniki prac uczestników, uczniowie wzajemnie oceniają swoją pracę.
3. Nauczyciel omawia przebieg zajęć, wskazuje mocne i słabe strony pracy uczniów.

Praca domowa:

Nauczyciel poleca uczniom wykonać te ćwiczenia interaktywne, które nie zostały wykonane podczas lekcji.

Materiały pomocnicze:

[Wielomiany](#)

Wskazówki metodyczne:

Przedstawione przykłady w animacji mogą posłużyć do samodzielnej analizy jako praca domowa uczniów.