Wzory redukcyjne dla kątów $\frac{3\pi}{2} + \alpha$

Wzory redukcyjne dla kątów $\frac{3\pi}{2} + \alpha$

Źródło: dostępny w internecie: https://pixabay.com/pl/photos/sygnalizatory-kolor%C3%B3w-instalacja-3929771/.

Począwszy od wieku XV rozpoczyna się proces uniezależniania się trygonometrii od astronomii i jej przekształcanie w samodzielną dyscyplinę matematyczną.

Funkcje trygonometryczne do europejskiej matematyki wprowadził oprócz Mikołaja Kopernika m.in.: francuski matematyk i astronom Francois Viete (1540 – 1603), który sformułował znane Ci wzory, pozwalające rozwiązywać równania kwadratowe (tzw. „wzory Viete'a”).

W tym materiale wyprowadzimy wzory redukcyjne dla kątów $\frac{3\pi}{2} + \alpha$, wykorzystując definicje oraz związki między funkcjami trygonometrycznymi tego samego kąta.

Twoje cele

- Poznasz wzory redukcyjne dla kątów $\frac{3\pi}{2} + \alpha$.
- Zastosujesz definicje funkcji: sinus, cosinus i tangens oraz zależności między funkcjami trygonometrycznymi do wyprowadzenia wzorów.
- Wykorzystasz poznane wzory redukcyjne do rozwiązywania zadań.

Przeczytaj

Już wiesz, że między funkcjami trygonometrycznymi różnych kątów zachodzą pewne związki, na przykład

$$\sin(\alpha - \beta) = \sin\alpha\cos\beta - \cos\alpha\sin\beta$$

Poznałeś wzory redukcyjne dla kątów:

- $\frac{3\pi}{2} - \alpha$,
- $\frac{\pi}{2} + \alpha$,
- $\frac{\pi}{2} - \alpha$.

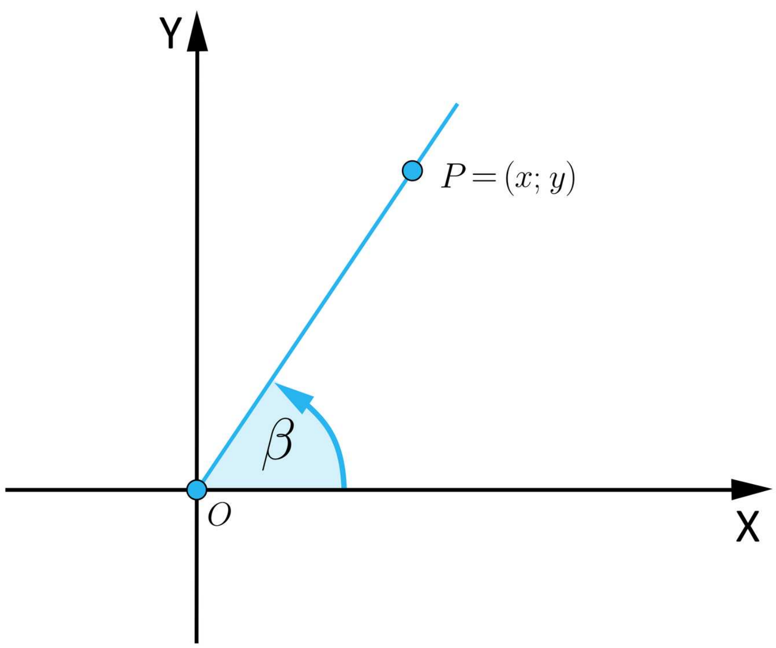
Posłużymy się nimi w tym materiale.

Funkcje trygonometryczne

Przypomnijmy najpierw definicje funkcji trygonometrycznych.

Definicja: Funkcje trygonometryczne

Niech $P = (x;\ y)$ jest dowolnym punktem leżącym na końcowym ramieniu kąta skierowanego β.



Przy oznaczeniach jak na rysunku mamy:

$$|OP| = r = \sqrt{x^2 + y^2},$$

$$\sin \beta = \tfrac{y}{r},$$

$$\cos \beta = \tfrac{x}{r},$$

$$\operatorname{tg} \beta = \tfrac{y}{x},\ x \neq 0,$$

$$\tfrac{1}{\operatorname{tg} \beta} = \tfrac{x}{y},\ y \neq 0.$$

Twierdzenie: Wzory redukcyjne dla kąta $\frac{3\pi}{2} + \alpha$:

Dla dowolnego kąta α zachodzą następujące związki: $\sin\left(\frac{3\pi}{2} + \alpha\right) = -\cos\alpha$,

$\cos\left(\frac{3\pi}{2} + \alpha\right) = -\sin\alpha$,

$\operatorname{tg}\left(\frac{3\pi}{2} + \alpha\right) = -\frac{1}{\operatorname{tg}\alpha}$, o ile funkcja odwrotna do tangens α istnieje,

Dowód

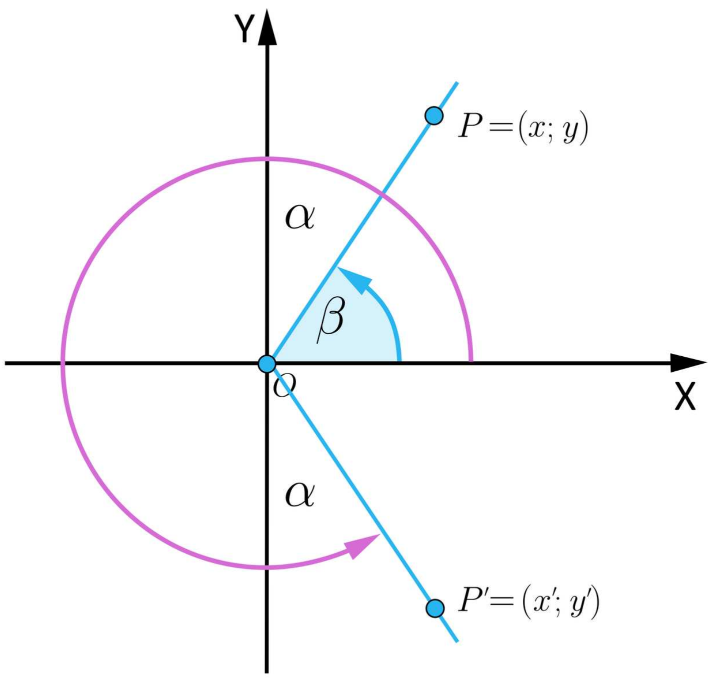
Wykorzystamy definicje funkcji trygonometrycznych oraz wzory dla kątów $\frac{\pi}{2} - \alpha$:

$\sin\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) = \cos\alpha$,

$\cos\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) = \sin\alpha$,

$\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) = \frac{1}{\operatorname{tg}\alpha}$, o ile funkcja odwrotna do tangens α istnieje,

Rozważmy kąty: $\left(\frac{3\pi}{2} + \alpha\right)$ i $\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right)$. Oznaczmy kąt $\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right)$ przez β.



Zauważmy, że punkty $P(x,\ y)$ i $P'(x',\ y')$ są symetryczne względem osi X.

Zatem

$x' = x$ a $y' = -y$.

Stąd

$\sin\left(\frac{3\pi}{2} + \alpha\right) = \frac{y'}{r} = \frac{-y}{r} = -\sin\beta = -\sin\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) = -\cos\alpha.$

Tak więc

$\cos\left(\frac{3\pi}{2} + \alpha\right) = \frac{x'}{r} = \frac{x}{r} = \cos\beta = \cos\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) = \sin\alpha.$

Tym samym

$\operatorname{tg}\left(\frac{3\pi}{2} + \alpha\right) = \frac{y'}{x'} = \frac{-y}{x} = -\operatorname{tg}\beta = -\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) = -\frac{1}{\operatorname{tg}\alpha}.$

Udowodniliśmy tym samym sformułowane wcześniej twierdzenie.

Związki między funkcjami trygonometrycznymi tego samego kąta

Stosując poznany wcześniej związek między funkcjami trygonometrycznymi tego samego kąta, czyli

$\operatorname{tg}\alpha = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha},$

możemy wzór

$\operatorname{tg}\left(\frac{3\pi}{2} + \alpha\right)$

udowodnić następująco:

$\operatorname{tg}\left(\frac{3\pi}{2} + \alpha\right) = \frac{\sin\left(\frac{3\pi}{2}+\alpha\right)}{\cos\left(\frac{3\pi}{2}+\alpha\right)} = \frac{-\cos\alpha}{\sin\alpha} = -\frac{1}{\operatorname{tg}\alpha},$

$\frac{1}{\operatorname{tg}\left(\frac{3\pi}{2}+\alpha\right)} = \frac{1}{\operatorname{tg}\left(\frac{3\pi}{2}+\alpha\right)} = \frac{1}{-\frac{1}{\operatorname{tg}\alpha}} = -\operatorname{tg}\alpha.$

Można też dowodzić tego twierdzenia w następujący sposób.

$\sin\left(\frac{3\pi}{2} + \alpha\right) = \sin\left(2\pi - \frac{\pi}{2} + \alpha\right) = \sin\left(2\pi - \left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right)\right) = -\sin\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) = -\cos\alpha$

$\cos\left(\frac{3\pi}{2} + \alpha\right) = \cos\left(2\pi - \frac{\pi}{2} + \alpha\right) = \cos\left(2\pi - \left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right)\right) = \cos\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) = \sin\alpha$

$\operatorname{tg}\left(\frac{3\pi}{2} + \alpha\right) = \operatorname{tg}\left(2\pi - \frac{\pi}{2} + \alpha\right) = \operatorname{tg}\left(2\pi - \left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right)\right) = -\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) = -\frac{1}{\operatorname{tg}\alpha}$

Wykorzystaliśmy tu wzory redukcyjne:

$\sin(2\pi - \alpha) = -\sin\alpha,$

$cos(2\pi - \alpha) = cos\alpha,$

$\operatorname{tg}(2\pi - \alpha) = -\operatorname{tg}\alpha$, o ile tangens α istnieje,

oraz

$\sin\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) = \cos\alpha,$

$\cos\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) = \sin\alpha,$

$\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) = \frac{1}{\operatorname{tg}\alpha}$, o ile funkcja odwrotna do tangens α istnieje.

Przykład 1

Wyznaczymy wartości funkcji trygonometrycznych dla kąta $\frac{5\pi}{3}$.

Wykorzystamy wyprowadzone powyżej wzory.

I sposób

Korzystając ze wzorów redukcyjnych dla kątów $\frac{3\pi}{2} + \alpha$, otrzymujemy

$\sin\frac{5\pi}{3} = \sin\frac{10\pi}{6} = \sin\frac{9\pi+\pi}{6} = \sin\left(\frac{9\pi}{6} + \frac{\pi}{6}\right) = \sin\left(\frac{3\pi}{2} + \frac{\pi}{6}\right) = -\cos\frac{\pi}{6} = \frac{-\sqrt{3}}{2},$

$\cos\frac{5\pi}{3} = \cos\frac{10\pi}{6} = \cos\frac{9\pi+\pi}{6} = \cos\left(\frac{9\pi}{6} + \frac{\pi}{6}\right) = \cos\left(\frac{3\pi}{2} + \frac{\pi}{6}\right) = \sin\frac{\pi}{6} = \frac{1}{2},$

$\operatorname{tg}\frac{5\pi}{3} = \operatorname{tg}\left(\frac{3\pi}{2} + \frac{\pi}{6}\right) = -\frac{1}{\operatorname{tg}\frac{\pi}{6}} = -\frac{1}{\frac{\sqrt{3}}{3}} = -\frac{3}{\sqrt{3}} \cdot \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{3}} = -\sqrt{3}.$

II sposób

Możemy również wykorzystać wzory redukcyjne dla kątów $2\pi - \alpha$.

$\sin\frac{5\pi}{3} = \sin\frac{6\pi-\pi}{3} = \sin\left(2\pi - \frac{\pi}{3}\right) = -\sin\frac{\pi}{3} = \frac{-\sqrt{3}}{2}$

$\cos\frac{5\pi}{3} = \cos\frac{6\pi-\pi}{3} = \cos\left(2\pi - \frac{\pi}{3}\right) = \cos\frac{\pi}{3} = \frac{1}{2}$

$\operatorname{tg}\frac{5\pi}{3} = \operatorname{tg}\left(2\pi - \frac{\pi}{3}\right) = -\operatorname{tg}\frac{\pi}{3} = -\sqrt{3}$

Przykład 2

Doprowadzimy do najprostszej postaci wyrażenie:

$\cos\alpha\sqrt{1 + \frac{1}{\operatorname{tg}^2\left(\frac{3\pi}{2} + \alpha\right)}}.$

Pierwsza równość wynika ze wzoru $\frac{1}{\operatorname{tg}\left(\frac{3\pi}{2}+\alpha\right)} = -\operatorname{tg}\alpha$ oraz z faktu, że podnosząc liczbę ujemną do kwadratu otrzymujemy liczbę dodatnią:

$$\cos\alpha\sqrt{1+\frac{1}{\operatorname{tg}^2\left(\frac{3\pi}{2}+\alpha\right)}} = \cos\alpha\sqrt{1+\operatorname{tg}^2\alpha}$$

Korzystając ze wzoru $\operatorname{tg}\alpha = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}$ otrzymujemy równość

$$\cos\alpha\sqrt{1+\operatorname{tg}^2\alpha} = \cos\alpha\sqrt{1+\frac{\sin^2\alpha}{\cos^2\alpha}}.$$

Następnie sprowadzamy ułamki do wspólnego mianownika

$$\cos\alpha\sqrt{1+\frac{\sin^2\alpha}{\cos^2\alpha}} = \cos\alpha\sqrt{\frac{\cos^2\alpha}{\cos^2\alpha}+\frac{\sin^2\alpha}{\cos^2\alpha}} = \cos\alpha\sqrt{\frac{\cos^2\alpha+\sin^2\alpha}{\cos^2\alpha}}$$

Korzystając z jedynki trygonometrycznej $\sin^2\alpha+\cos^2\alpha = 1$ mamy:

$$\cos\alpha\sqrt{\frac{\cos^2\alpha+\sin^2\alpha}{\cos^2\alpha}} = \cos\alpha\frac{1}{\sqrt{\cos^2\alpha}}$$

Ponieważ $\sqrt{x^2} = |x|$, więc $\frac{1}{\sqrt{\cos^2\alpha}} = \frac{1}{|\cos\alpha|}$.

Zatem

$$\cos\alpha\frac{1}{\sqrt{\cos^2\alpha}} = \cos\alpha\frac{1}{|\cos\alpha|} = \frac{\cos\alpha}{|\cos\alpha|} = \begin{cases} \frac{\cos\alpha}{\cos\alpha} & \text{dla } \cos\alpha > 0 \\ \frac{\cos\alpha}{-\cos\alpha} & \text{dla } \cos\alpha < 0 \end{cases} =$$

$$= \begin{cases} 1 & \text{dla } \cos\alpha > 0 \\ -1 & \text{dla } \cos\alpha < 0 \end{cases}, \text{ zał. } \cos\alpha \neq 0.$$

Przykład 3

Obliczymy wartość wyrażenia

$$\frac{\sin\frac{11\pi}{6}}{\cos\frac{7\pi}{4}+1}.$$

I sposób

Korzystając ze wzorów redukcyjnych dla kątów $\frac{3\pi}{2}+\alpha$, otrzymujemy:

$$\frac{\sin\frac{11\pi}{6}}{\cos\frac{7\pi}{4}+1} = \frac{\sin\frac{9\pi+2\pi}{6}}{\cos\frac{6\pi+\pi}{4}+1} = \frac{\sin\left(\frac{9\pi}{6}+\frac{2\pi}{6}\right)}{\cos\left(\frac{6\pi}{4}+\frac{\pi}{4}\right)+1} = \frac{\sin\left(\frac{3\pi}{2}+\frac{\pi}{3}\right)}{\cos\left(\frac{3\pi}{2}+\frac{\pi}{4}\right)+1} = \frac{-\cos\frac{\pi}{3}}{\sin\frac{\pi}{4}+1} =$$

$$= \frac{\frac{-1}{2}}{\frac{\sqrt{2}}{2}+1} = \frac{\frac{-1}{2}}{\frac{\sqrt{2}}{2}+\frac{2}{2}} = \frac{\frac{-1}{2}}{\frac{\sqrt{2}+2}{2}} = \frac{-1}{\sqrt{2}+2} = \frac{-\left(2-\sqrt{2}\right)}{\left(2+\sqrt{2}\right)\left(2-\sqrt{2}\right)} = \frac{-2+\sqrt{2}}{4-2} = \frac{-2+\sqrt{2}}{2}$$

Usunęliśmy niewymierność z mianownika, rozszerzając ułamek $\frac{-1}{\sqrt{2}+2} = \frac{-\left(2-\sqrt{2}\right)}{\left(2+\sqrt{2}\right)\left(2-\sqrt{2}\right)}$.

Następnie skorzystaliśmy ze wzoru skróconego mnożenia.

$(a+b)(a-b)=a^2-b^2$

$\left(2+\sqrt{2}\right)\left(2-\sqrt{2}\right)=2^2-\left(\sqrt{2}\right)^2=4-2=2$

II sposób

Korzystające ze wzorów redukcyjnych dla kątów $2\pi-\alpha$, otrzymujemy:

$\frac{\sin\frac{11\pi}{6}}{\cos\frac{7\pi}{4}+1}=\frac{\sin\frac{12\pi-\pi}{6}}{\cos\frac{8\pi-\pi}{4}+1}=\frac{\sin\left(\frac{12\pi}{6}-\frac{\pi}{6}\right)}{\cos\left(\frac{8\pi}{4}-\frac{\pi}{4}\right)+1}=\frac{\sin\left(2\pi-\frac{\pi}{6}\right)}{\cos\left(2\pi-\frac{\pi}{4}\right)+1}=\frac{-\sin\frac{\pi}{6}}{\cos\frac{\pi}{4}+1}=$

$=\frac{\frac{-1}{2}}{\frac{\sqrt{2}}{2}+1}=\frac{-2+\sqrt{2}}{2}$

Przykład 4

Wykarzemy tożsamość trygonometryczną

$\cos^2\left(\frac{3}{2}\pi+\alpha\right)=(1+\cos\alpha)\left(1+\sin\left(\frac{3}{2}\pi+\alpha\right)\right)$

Przekształćmy lewą stronę tożsamości: $L=\cos^2\left(\frac{3}{2}\pi+\alpha\right)=\sin^2\alpha$

Prawa strona tożsamości to:
$P=(1+\cos\alpha)\left(1+\sin\left(\frac{3}{2}\pi+\alpha\right)\right)=(1+\cos\alpha)(1-\cos\alpha)=1-\cos^2\alpha=\sin^2\alpha$

Zatem $L=P$.

Słownik

wzory redukcyjne

wzory pozwalające wyrazić wartości funkcji trygonometrycznych dowolnego kąta α za pomocą wartości funkcji kąta ostrego

kąt skierowany

para uporządkowanych półprostych o wspólnym początku, z których pierwszą nazywamy ramieniem początkowym, a drugą ramieniem końcowym kąta skierowanego

Animacja

Polecenie 1

Zapoznaj się z metodą wyprowadzenia wzorów redukcyjnych dla kątów $\frac{3\pi}{2} + \alpha$ zaprezentowaną w animacji. Wykorzystaj wyprowadzone wzory w zadaniach. Swoje rozwiązania porównaj z odpowiedziami.

Film dostępny pod adresem https://zpe.gov.pl/a/D8ieN01gI

Film nawiązujący do treści materiału dotyczącej wzorów redukcyjnych dla kątów $\frac{3\pi}{2} + \alpha$.

Polecenie 2

Wykorzystując wzory redukcyjne dla kątów $\left(\frac{3\pi}{2} + \alpha\right)$, oblicz wartość wyrażenia: $\frac{\operatorname{tg}\frac{10\pi}{6} \cdot \operatorname{tg}\frac{11\pi}{6}}{\sin\frac{7\pi}{4} \cdot \cos\frac{7\pi}{4}}$.

Polecenie 3

Uprość wyrażenie: $\cos^2\left(\frac{3\pi}{2} + \alpha\right) \cdot \sin\left(\frac{3\pi}{2} + \alpha\right) + \sin^3\left(\frac{3\pi}{2} + \alpha\right)$.

Sprawdź się

Pokaż ćwiczenia:

Ćwiczenie 1

Zaznacz wszystkie poprawne odpowiedzi.
Wiemy, że $\text{tg}\ \alpha = \frac{8}{15}$ oraz $\alpha \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$. Prawdą jest, że:

- $\text{tg}\left(\frac{3\pi}{2} + \alpha\right) = \frac{15}{8}$
- $\text{tg}\left(\frac{3\pi}{2} + \alpha\right) = \frac{8}{15}$
- $\cos\left(\frac{3\pi}{2} + \alpha\right) = \frac{8}{17}$
- $\sin\left(\frac{3\pi}{2} + \alpha\right) = -\frac{15}{17}$

Ćwiczenie 2

O kącie ostrym α wiadomo, że $\cos \alpha = \frac{1}{2}$. Dopasuj wyrażenie do odpowiadającej mu wartości liczbowej:

$\sin\left(\frac{3\pi}{2} + \alpha\right) =$	$-\frac{1}{2}$
$\cos\left(\frac{3\pi}{2} + \alpha\right) =$	$-\sqrt{3}$
$\text{tg}\left(\frac{3\pi}{2} + \alpha\right) =$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$
$\frac{1}{\text{tg}\left(\frac{3\pi}{2} + \alpha\right)} =$	$-\frac{\sqrt{3}}{3}$

Ćwiczenie 3

Przeciągnij poprawną odpowiedź.

Wartość $\sin \frac{7\pi}{4}$ wynosi ______.

$\frac{\sqrt{2}}{2}$ | $-\frac{\sqrt{2}}{2}$ | $-\frac{1}{2}$ | $-\frac{\sqrt{3}}{2}$

Ćwiczenie 4

Zaznacz wszystkie poprawne odpowiedzi.
Dla kąta $\beta = \frac{10\pi}{6}$ prawdą jest, że:

- [ ] $\cos \beta = \frac{1}{2}$
- [ ] $\operatorname{tg} \beta = -\sqrt{3}$
- [ ] $\frac{1}{\operatorname{tg}\beta} = -\frac{\sqrt{3}}{3}$
- [ ] $\sin \beta = -\frac{1}{2}$

Ćwiczenie 5

Oceń prawdziwość poniższych zdań.

Wartość wyrażenia $\sin \frac{11\pi}{3}$ wynosi $\left(-\frac{1}{2}\right)$.

- Fałsz
- Prawda

Wartość wyrażenia $\cos \frac{11\pi}{3}$ wynosi $\frac{1}{2}$.

- Fałsz
- Prawda

Wartość wyrażenia $\operatorname{tg} \frac{11\pi}{3}$ wynosi $\left(-\sqrt{3}\right)$.

- Fałsz
- Prawda

Ćwiczenie 6

Wiemy, że $\frac{1}{\operatorname{tg}\left(\frac{3\pi}{2}+\alpha\right)} = -1\frac{1}{3}$ oraz $\alpha \in \left(0,\ \frac{\pi}{2}\right)$. Wybierz zdania prawdziwe:

- [ ] Wartość wyrażenia $\operatorname{tg}\left(\frac{3\pi}{2}+\alpha\right)+\cos\alpha$ wynosi $-0,15$.
- [ ] Wartość wyrażenia $\operatorname{tg}\alpha\cdot\cos\left(\frac{3\pi}{2}+\alpha\right)$ wynosi $-\frac{16}{15}$.
- [ ] Wartość wyrażenia $\cos\left(\frac{3\pi}{2}+\alpha\right)-\sin\alpha$ wynosi 0.
- [ ] Wartość wyrażenia $\cos\left(\frac{3\pi}{2}+\alpha\right)-\sin\alpha$ wynosi $1,6$.

Ćwiczenie 7

Wskaż równości prawdziwe dla dowolnego kąta α

- [ ] $\sin^2\left(\frac{3}{2}\pi+\alpha\right)+\cos^2\left(\frac{3}{2}\pi+\alpha\right)=1$
- [ ] $\sin^2\alpha+\sin^2\left(\frac{3}{2}\pi+\alpha\right)=1$
- [ ] $\sin^2\left(\frac{3}{2}\pi+\alpha\right)+\cos^2\alpha=1$
- [ ] $\cos^2\alpha+\cos^2\left(\frac{3}{2}\pi+\alpha\right)=1$

Ćwiczenie 8

Oblicz wartość wyrażenia $(\cos 315^\circ + \sin 300^\circ)(\cos 330^\circ - \sin 315^\circ)$

- $\frac{5+2\sqrt{6}}{4}$
- $\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}$
- $-\frac{1}{4}$
- $\frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}$

Dla nauczyciela

Autor: Katarzyna Podfigurna

Przedmiot: Matematyka

Temat: Wzory redukcyjne dla kątów $\frac{3\pi}{2} + \alpha$

Grupa docelowa:

III etap edukacyjny, liceum, technikum, zakres rozszerzony

Podstawa programowa:

VII. Trygonometria.

Zakres podstawowy: Uczeń:

1) wykorzystuje definicje funkcji: sinus, cosinus i tangens dla kątów od 0° do 180°, w szczególności wyznacza wartości funkcji trygonometrycznych 30°, 45°, 60°;

4) korzysta ze wzorów $\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1$, $\operatorname{tg} \alpha = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha}$.

Zakres rozszerzony. Uczeń spełnia wymagania określone dla zakresu podstawowego, a ponadto:

1) stosuje miarę łukową, zamienia miarę łukową na stopniową i odwrotnie;

4) stosuje wzory redukcyjne dla funkcji trygonometrycznych.

II. Wyrażenia algebraiczne.

Zakres podstawowy: Uczeń:

1) stosuje wzory skróconego mnożenia na: $(a+b)^2$, $(a-b)^2$, a^2-b^2, $(a+b)^3$, $(a-b)^3$, a^3-b^3, a^n-b^n.

Kształtowane kompetencje kluczowe:

- kompetencje w zakresie rozumienia i tworzenia informacji
- kompetencje matematyczne oraz kompetencje w zakresie nauk przyrodniczych, technologii i inżynierii
- kompetencje cyfrowe
- kompetencje osobiste, społeczne i w zakresie umiejętności uczenia się

Cele operacyjne:

Uczeń:

- poznaje różne sposoby dowodzenia wzorów redukcyjnych dla kątów $\frac{3\pi}{2} + \alpha$
- stosuje związki między funkcjami trygonometrycznymi tego samego kąta
- wykorzystuje poznane definicje i wzory do dowodzenia wzorów redukcyjnych
- analizuje metody dowodzenia wzorów redukcyjnych
- dokonuje wyboru najefektywniejszej metody prowadzącej do rozwiązania problemu

Strategie nauczania:

- konstruktywizm
- konektywizm

Metody i techniki nauczania:

- wykład informacyjny
- burza mózgów
- pokaz multimedialny
- rozwiązywanie zadań pod kontrolą nauczyciela

Formy pracy:

- praca indywidualna
- praca w grupach
- praca całego zespołu

Środki dydaktyczne:

- komputery z dostępem do Internetu
- rzutnik multimedialny
- e-podręcznik

Przebieg lekcji

Faza wstępna:

1. Uczniowie przypominają definicje funkcji trygonometrycznych (zapisują je na tablicy).
2. Uczniowie podają związki między funkcjami trygonometrycznymi (zapisują je na tablicy).
3. Nauczyciel podaje temat i cele zajęć.

Faza realizacyjna:

1. Nauczyciel dzieli uczniów na 3–osobowe grupy.
2. Każda z grup otrzymuje zadanie polegające na analizie materiału zawartego w sekcji „PRZECZYTAJ”.

3. Uczniowie w grupach analizują dowody wzorów redukcyjnych dla kątów $\frac{3\pi}{2} + \alpha$ oraz przykłady zawarte w sekcji „PRZECZYTAJ”.
4. Nauczyciel kontroluje pracę uczniów udzielając im wskazówek.
5. Po dyskusji zapisują udowodnione wzory i wnioski końcowe na tablicy.
6. Uczniowie oglądają animację i omawiają ją wraz z nauczycielem.
7. Uczniowie rozwiązują ćwiczenia interaktywne wskazane przez nauczyciela.
8. Wybrani uczniowie prezentują rozwiązania ćwiczeń interaktywnych wskazanych przez nauczyciela.
9. Uczniowie określają co było dla nich trudne lub niezrozumiałe a nauczyciel udziela wyjaśnień.

Faza podsumowująca:

1. Wybrani uczniowie prezentują rozwiązania ćwiczeń interaktywnych wskazanych przez nauczyciela. Uczniowie określają co było dla nich trudne lub niezrozumiałe a nauczyciel udziela wyjaśnień.
2. Nauczyciel omawia przebieg zajęć, wskazuje mocne i słabe strony pracy uczniów, ocenia aktywność uczniów.

Praca domowa:

Zadaniem uczniów jest wykonanie ćwiczeń interaktywnych, które nie zostały rozwiązane na lekcji.

Materiały pomocnicze:

Sinus, cosinus i tangens kąta ostrego

Wskazówki metodyczne:

Uczniowie mogą przeanalizować materiały zawarte w sekcji „PRZECZYTAJ” jako pracę własną przed lekcją. Umożliwi im to wystąpienie na zajęciach w roli ekspertów.