# Równanie okręgu, do którego należą dane punkty

# Równanie okręgu, do którego należą dane punkty

Źródło: Juan Cruz Mountford, dostępny w internecie: www.unsplash.com.

Umowną datą powstania geometrii analitycznej jest rok $1637$, w którym ukazało się dzieło Kartezjusza „Geometrie”. Kartezjusz wprowadził w nim układ współrzędnych.

Do czego można wykorzystać tę naukę i wiedzę?

Wyobraź sobie, że do Twojego domu właśnie dostarczono pizzę, na którą czeka dwoje Twoich przyjaciół. Chcesz, żeby wszyscy zjedli po równo, musisz zatem podzielić placek na 3 kawałki. Robisz zatem małe nacięcia na zewnętrznej krawędzi pizzy i tym samym zaznaczasz punkty na okręgu… Stąd już „rzut beretem” do tematu głównego, a mianowicie – równania okręgu, do którego należą dane punkty. I tym właśnie zajmiemy się w tym materiale.

**Twoje cele**

- Konstrukcyjnie wyznaczysz środek okręgu i jego promień, na podstawie danych trzech punktów.
- Analitycznie wyznaczysz równanie okręgu, gdy dane są współrzędne trzech punktów.
- Zastosujesz poznane wzory do wyznaczenia współrzędnych środka okręgu i jego promienia.

# Przeczytaj

Okręgiem o środku $O$ i promieniu $r$ nazywamy zbiór wszystkich punktów $P$ płaszczyzny, których odległość od punktu $O$ jest równa $r$.

Punkt $P$ leży na okręgu o środku w punkcie $O = (a, b)$ i promieniu $r$ wtedy i tylko wtedy, gdy zachodzi $|OP| = r$.

Możemy powyższy warunek zapisać następująco $\sqrt{(x-a)^2 + (y-b)^2} = r$, co prowadzi do równości $(x-a)^2 + (y-b)^2 = r^2$ przedstawiającej okrąg o środku w punkcie $(a,\ b)$ i promieniu $r$.

**Przykład 1**

Sprawdzimy, czy punkty $A = (3, 0)$ i $B = (2, 1)$ należą do okręgu $x^2 + y^2 = 9$.

**Rozwiązanie**

Dany punkt należy do okręgu, gdy jego współrzędne spełniają równanie tego okręgu.

Sprawdzamy, czy współrzędne punktu $A = (3, 0)$ spełniają równanie okręgu $x^2 + y^2 = 9$.

Punkt $A$ należy do okręgu, bo $3^2 + 0^2 = 9$.

Sprawdzamy, czy współrzędne punktu $B = (2, 1)$ spełniają równanie okręgu $x^2 + y^2 = 9$.

Punkt $B$ nie należy do okręgu, bo $2^2 + 1^2 = 5 \neq 9$.

**Przykład 2**

Wyznaczymy wartości parametru $p$, dla których punkt $P = (p, 2)$ należy do okręgu $x^2 + (y+1)^2 = 25$.

**Rozwiązanie**

Podstawiamy współrzędne punktu $P$ do równania okręgu:

$p^2 + (2+1)^2 = 25$

$p^2 = 16$

Zatem:

$p = 4$ lub $p = -4$.

Dla $p=-4$ i $p=4$, punkt $P$ należy do okręgu $x^2+(y+1)^2=25$.

**Przykład 3**

Wyznaczymy równanie okręgu, do którego należą punkty
$A=(2,3), B=(-1,4), C=(-1,-5)$.

**Rozwiązanie**

Aby wyznaczyć równanie okręgu, musimy wyznaczyć jego środek $O=(a,b)$ i promień $r$. Punkty $A,\ B,\ C$, leżą na okręgu, czyli ich współrzędne spełniają równanie okręgu. Podstawmy zatem współrzędne tych punktów do równania $(x-a)^2+(y-b)^2=r^2$

Otrzymujemy układ trzech równań z trzema niewiadomymi:

$$\begin{cases}(2-a)^2+(3-b)^2=r^2\\(-1-a)^2+\left(4-b^2\right)=r^2\\(-1-a)^2+(-5-b)^2=r^2\end{cases}$$

$$\begin{cases}4-4a+a^2+9-6b+b^2=r^2\\1+2a+a^2+16-8b+b^2=r^2\\1+2a+a^2+25+10b+b^2=r^2\end{cases}$$

Od pierwszego równania odejmujemy drugie:

$4-1-4a-2a+9-16-6b+8b=0$,

następnie od drugiego odejmujemy trzecie:

$1-1+2a-2a+16-25-8b-10b=0$.

Po redukcji otrzymujemy układ:

$$\begin{cases}-6a+2b-4=0\\-18b-9=0,\end{cases}$$

$-18b=9$, stąd $b=-\frac{1}{2}$.

Obliczamy $a$ podstawiając $b=-\frac{1}{2}$ do równania $-6\ a+2b-4=0$:

$-6a+2\cdot\left(-\frac{1}{2}\right)-4=0, -6a-1-4=0, -6a=5$, stąd $a=-\frac{5}{6}$.

Środkiem okręgu jest punkt $O=\left(-\frac{5}{6},-\frac{1}{2}\right)$.

Długość promienia jest równa odległości środka okręgu od dowolnego punktu na okręgu, czyli np. od punktu $A=(2;\ 3)$. Ze wzoru na odległość dwóch punktów:

> $r = |OA| = \sqrt{\left(2 - \left(-\frac{5}{6}\right)\right)^2 + \left(3 - \left(-\frac{1}{2}\right)\right)^2} = \sqrt{\frac{289}{36} + \frac{79}{4}} = \sqrt{\frac{730}{36}} = \sqrt{\frac{365}{18}}$
>
> Równanie okręgu: $\left(x + \frac{5}{6}\right)^2 + \left(y + \frac{1}{2}\right)^2 = \frac{365}{18}$.

> **Ważne!**
>
> Jeżeli mamy trzy niewspółliniowe punkty $ABC$, to możemy przez te punkty poprowadzić okrąg, którego środek leży na przecięciu symetralnych odcinków $AB$ i $BC$.

Uzasadnienie.

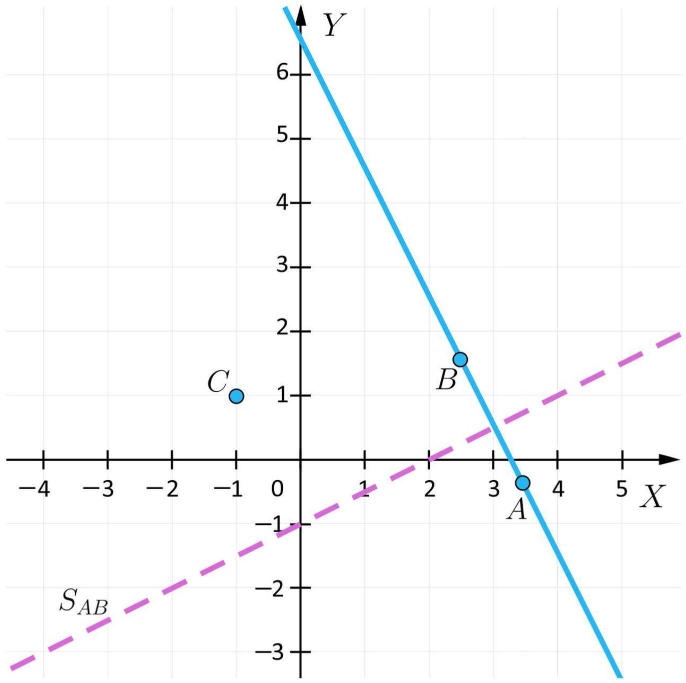
Niech punkt $D$ będzie punktem przecięcia symetralnych odcinków $AB$ i $BC$. Punkt $D$ leży na symetralnej odcinka $AB$, więc $|AD| = |BD|$. Punkt $D$ leży również na symetralnej odcinka $BC$, więc $|BD| = |CD|$. Stąd wynika, że $|AD| = |CD|$. Wobec tego, punkt $D$ jest jednakowo oddalony od każdego z punktów $A, B, C$, czyli $|AD| = |BD| = |CD| = r$.

Opiszemy teraz działania, jakie musimy wykonać, aby wyznaczyć równanie okręgu, do którego należą trzy punkty.

I. Piszemy równanie symetralnej $S_{AB}$ odcinka $AB$ – symetralna $S_{AB}$ jest prostopadła do odcinka $AB$ i przechodzi przez jego środek o współrzędnych $\left(\frac{x_A+x_B}{2}, \frac{y_A+y_B}{2}\right)$.

1. Obliczamy współczynnik kierunkowy prostej $AB$. Współczynnik kierunkowy prostej przechodzącej przez punkty $A = (x_A, y_A)$ i $B = (x_B, y_B)$ obliczymy podstawiając współrzędne punktów $A$ i $B$ do równania prostej $y = ax + b$
   $\begin{cases} y_B = a_{AB}x_B + b \\ y_A = a_{AB}x_A + b. \end{cases}$
   Odejmując od górnego równania dolne, otrzymujemy
   $y_B - y_A = a_{AB}x_B - a_{AB}x_A = a_{AB}(x_B - x_A)$, czyli $a_{AB} = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A}$.
2. Współczynnik kierunkowy symetralnej $S_{AB}$ wyliczamy z warunku prostopadłości prostych $a_{S_{AB}} = -\frac{1}{a_{AB}}$.
3. Mając dany współczynnik kierunkowy symetralnej $S_{AB}$ i punkt $\left(\frac{x_A+x_B}{2}, \frac{y_A+y_B}{2}\right)$, który należy do tej symetralnej, możemy napisać jej równanie.

Powyższe czynności przedstawia rysunek:




Przedstawiona powyżej metoda służy do wyznaczenia równania okręgu opisanego na trójkącie $ABC$.

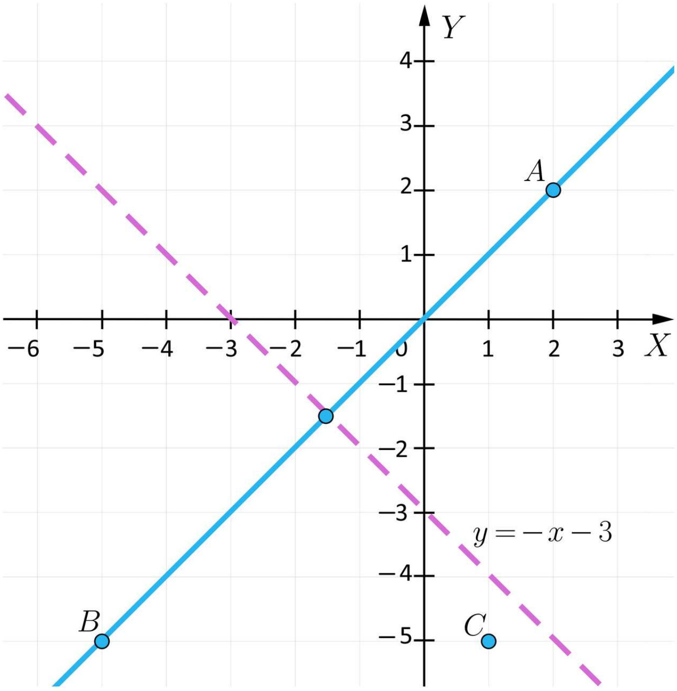
**Przykład 4**

Napiszemy równanie okręgu przechodzącego przez punkty
$A = (2, 2), B = (-5, -5), C = (1, -5)$.

**Rozwiązanie**

Zastosujemy przedstawioną powyżej metodę.

1. Równanie symetralnej $S_{AB}$ odcinka $AB$.
   Symetralna $S_{AB}$ jest prostopadła do odcinka $AB$ i przechodzi przez jego środek o współrzędnych $\left(\frac{x_A+x_B}{2}, \frac{y_A+y_B}{2}\right)$.
   Podstawiając współrzędne $A = (2, 2)$ i $B = (-5, -5)$ otrzymujemy współrzędne środka odcinka $AB: \left(\frac{-3}{2}, \frac{-3}{2}\right)$. Obliczamy współczynnik kierunkowy prostej $AB$ ze wzoru $a_{AB} = \frac{y_B-y_A}{x_B-x_A}$.
   Dla $A = (2, 2),\ B = (-5, -5)$ współczynnik kierunkowy wynosi $a_{AB} = \frac{(-5)-2}{(-5)-2} = 1$.
   Ponieważ symetralna $S_{AB}$ jest prostopadła do prostej $AB$, więc korzystając z warunku prostopadłości prostych $a_{S_{AB}} = -\frac{1}{a_{AB}}$ otrzymujemy $a_{S_{AB}} = -\frac{1}{1} = -1$.
   Równanie symetralnej $S_{AB}$ odcinka $AB: y = -x + b$.
   Ponieważ symetralna przechodzi przez punkt $\left(\frac{-3}{2}, \frac{-3}{2}\right)$, to podstawiając jego współrzędne do wzoru $y = -x + b$, otrzymamy $b$: $-\frac{3}{2} = -\left(-\frac{3}{2}\right) + b$, czyli $b = -3$.
   $S_{AB} : y = -x - 3$.



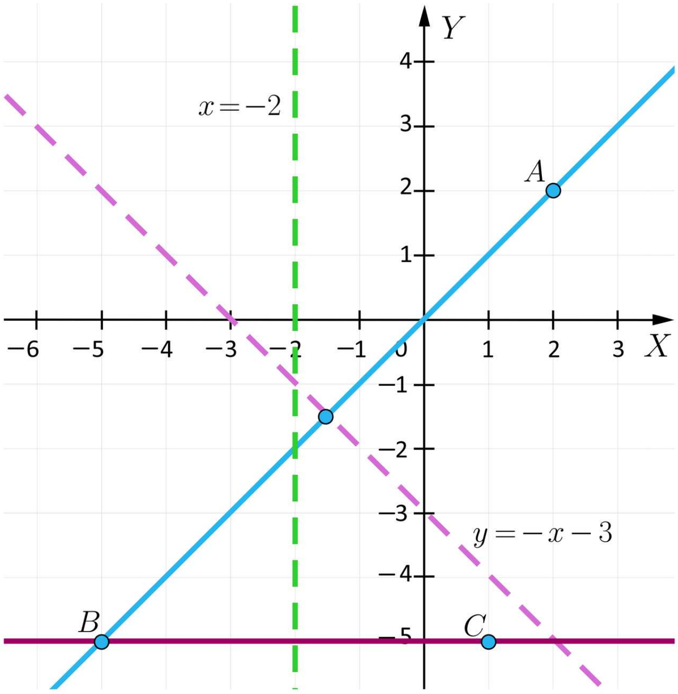

Analogicznie wyznaczamy równanie symetralnej $S_{BC}$ odcinka $BC$.

Symetralna $S_{BC}$ jest prostopadła do odcinka $BC$ i przechodzi przez jego środek o współrzędnych $\left(\frac{x_B+x_C}{2}, \frac{y_B+y_C}{2}\right)$. Ponieważ $B = (-5, -5),\ C = (1, -5)$, to współrzędne środka odcinka $BC$ wynoszą $(-2, -5)$.

Obliczamy współczynnik kierunkowy prostej $BC$ ze wzoru $a_{BC} = \frac{y_C - y_B}{x_C - x_B}$ i otrzymujemy $a_{BC} = \frac{(-5)-(-5)}{1-(-5)} = 0$.

Prosta $BC$ jest równoległa do osi $X$, stąd jej symetralna będzie równoległa do osi $Y$, a ponieważ przechodzi przez punkt $(-2, -5)$, stąd jej równanie to:

$S_{BC}$: $x = -2$.




Środek okręgu leży na przecięciu symetralnych $S_{AB}$: $y = -x - 3$ i $S_{BC}$: $x = -2$.

Rozwiązujemy układ równań:

$$\begin{cases} y = -x - 3 \\ x = -2 \end{cases}$$

stąd $y = -(-2) - 3 = -1$.

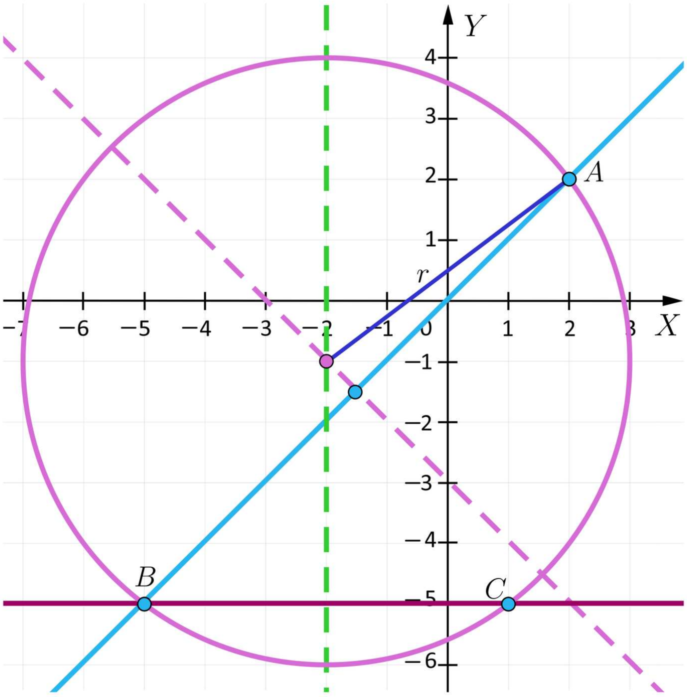
Środek okręgu: $O = (-2, -1)$.

Długość promienia okręgu wyliczamy ze wzoru na odległość dwóch punktów: $d = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$. Ponieważ $r = |OA|$, to podstawiając do powyższego wzoru $A = (2, 2)$ i $O = (-2, -1)$ otrzymujemy:

$$r = \sqrt{(x_A - x_O)^2 + (y_A - y_O)^2} =$$
$$= \sqrt{(2 - (-2))^2 + (2 - (-1))^2} = \sqrt{(4)^2 + (3)^2} = \sqrt{25} = 5$$

Równanie okręgu ma postać: $(x + 2)^2 + (y + 1)^2 = 25$.

Ostateczny wynik naszych działań przedstawia rysunek:




## Słownik

**okrąg o środku O i promieniu r**

zbiór wszystkich punktów $P$ płaszczyzny, których odległość od punktu $O$ jest równa $r$

**symetralna odcinka**

zbiór wszystkich punktów płaszczyzny równoodległych od końców tego odcinka

# Animacja

**Polecenie 1**

Zapoznaj się z animacją prezentującą równanie okręgu, do którego należą dane punkty, a następnie rozwiąż zadania i porównaj z odpowiedziami.

# Wystąpił błąd

Film nawiązujący do treści materiału dotyczącego równania okręgu, do którego należą dane punkty.

---

**Polecenie 2**

Wyznacz równanie okręgu przechodzącego przez punkty $A=(1,0),\ B=(0,2)$ i $C=(1,4)$.

**Polecenie 3**

Okrąg przechodzi przez punkty $A=(-4,0),\ B=(0,4)$ i $C=(4,0)$. Wyznacz współrzędne środka i długość promienia tego okręgu.

# Sprawdź się

Pokaż ćwiczenia:

## Ćwiczenie 1

Dokończ zdanie, wybierając poprawną odpowiedź.
Punkt $P = (-3, k)$ należy do okręgu o równaniu $(x+2)^2 + y^2 = 25$, gdy:

- $k = 24$ lub $k = -24$
- $k = 2\sqrt{6}$ lub $k = -2\sqrt{6}$
- $k = 5$ lub $k = -5$
- $k = \sqrt{26}$ lub $k = -\sqrt{26}$

## Ćwiczenie 2

Dobierz w pary punkt i równanie okręgu tak, aby wybrany punkt należał do danego okręgu.

| | |
|---|---|
| $(x+5)^2 + (y-7)^2 = 8$ | $D = (3,\ 7)$ |
| $(x+5)^2 + (y-7)^2 = 64$ | $C = (3,\ -5)$ |
| $(x-5)^2 + (y+7)^2 = 8$ | $A = (-3,\ 9)$ |
| $(x-5)^2 + (y+7)^2 = 64$ | $B = (5,\ -15)$ |

## Ćwiczenie 3

Wybierz równania okręgów, do których należy punkt $K = (-1, 6)$. Zaznacz poprawne odpowiedzi.

- ☐ $(x+2)^2 + (y+1)^2 = 50$
- ☐ $(x-4)^2 + (y+2)^2 = 89$
- ☐ $(x+3)^2 + (y-2)^2 = 6$
- ☐ $(x-1)^2 + (y-3)^2 = 13$

## Ćwiczenie 4

Do okręgu należą punkty $A = (-5, 0),\ B = (-1, 4),\ C = (3, 0)$. W puste miejsce wpisz odpowiednie liczby całkowite.

1. Środkiem tego okręgu jest punkt $S =$( ______ , ______ ).
2. Promień tego okręgu ma długość ______ .
3. Okrąg ten można opisać równaniem $(x+$ ______ $)^2+(y+$ ______ $)^2=$ ______ .

## Ćwiczenie 5

Dany jest okrąg opisany równaniem $(x-a)^2 + (y-b)^2 = r^2$, który przechodzi przez punkty $A = (-3, -7)$, $B = (-3, 3)$, $C = (2, -2)$.
Oceń, czy poniższe odpowiedzi są prawdziwe, czy fałszywe. Zaznacz wszystkie odpowiedzi prawdziwe.

- ☐ $r = 25$
- ☐ $a = 3$
- ☐ $b = -2$
- ☐ Okrąg ten można także opisać równaniem $(x+3)^2 + (y+2)^2 = 25$

## Ćwiczenie 6

Punkty $A = (-1, -4)$, $B = (-1, -2)$, $C = (3, 2)$ leżą na pewnym okręgu. Oceń prawdziwość poniższych zdań. Przy każdym zdaniu w tabeli zaznacz „Prawda” albo „Fałsz”.

| | Prawda | Fałsz |
|---|---|---|
| Środkiem tego okręgu jest punkt $S = (-4, -3)$. | ○ | ○ |
| Promień tego okręgu ma długość $\sqrt{26}$. | ○ | ○ |
| Okrąg ten można opisać równaniem $(x-4)^2 + (y+3)^2 = 26$. | ○ | ○ |

## Ćwiczenie 7

Dany jest okrąg opisany równaniem $(x-a)^2+(y-b)^2=r^2$. Na okręgu tym leżą punkty $A=(-2,\ 1)$, $B=(2,\ \ -1)$, $C=(4,\ 3)$.
Oceń, czy poniższe zdania są prawdziwe, czy fałszywe. Zaznacz wszystkie zdania prawdziwe.

- [ ] Okrąg ten można opisać równaniem $(x-1)^2+(y-2)^2=10$.
- [ ] Środkiem tego okręgu jest punkt $S=(-1,-2)$.
- [ ] Środek tego okręgu leży na prostej $y=2,5-\frac{1}{2}x$.
- [ ] Środek tego okręgu leży na prostej $y=2\ x$.

## Ćwiczenie 8

Dany jest okrąg, który przechodzi przez punkty $A=(-6,-11)$, $B=(4,\ 13)$, $C=(11,-4)$.
Oceń, czy poniższe zdania są prawdziwe, czy fałszywe. Zaznacz zdanie prawdziwe.

- ○ Środek tego okręgu leży na prostej $y=-\frac{17}{7}x-8$.
- ○ Środek tego okręgu leży na prostej $y=\frac{7}{17}x+1$.
- ○ Okrąg ten można opisać równaniem $(x+1)^2+(y-1)^2=13$.
- ○ Środkiem tego okręgu jest punkt $S=(-1,1)$.

# Dla nauczyciela

**Autor:** Katarzyna Podfigurna

**Przedmiot:** Matematyka

**Temat:** Równanie okręgu, do którego należą dane punkty

**Grupa docelowa:** III etap edukacyjny, liceum, technikum, zakres rozszerzony

**Podstawa programowa:**

Zakres podstawowy.

VIII. Planimetria. Uczeń:

1. wyznacza promienie i średnice okręgów, długości cięciw okręgów oraz odcinków stycznych, w tym z wykorzystaniem twierdzenia Pitagorasa.

IX. Geometria analityczna na płaszczyźnie kartezjańskiej. Uczeń:

1. rozpoznaje wzajemne położenie prostych na płaszczyźnie na podstawie ich równań, w tym znajduje wspólny punkt dwóch prostych, jeśli taki istnieje,
2. posługuje się równaniami prostych na płaszczyźnie, w postaci kierunkowej i ogólnej, w tym wyznacza równanie prostej o zadanych własnościach (takich jak na przykład przechodzenie przez dwa dane punkty, znany współczynnik kierunkowy, równoległość lub prostopadłość do innej prostej, styczność do okręgu,
3. oblicza odległość dwóch punktów w układzie współrzędnych,
4. posługuje się równaniem okręgu $(x-a)^2+(x-b)^2=r^2$.

**Kształtowane kompetencje kluczowe:**

- kompetencje w zakresie rozumienia i tworzenia informacji,
- kompetencje matematyczne oraz kompetencje w zakresie nauk przyrodniczych, technologii i inżynierii,
- kompetencje cyfrowe,
- kompetencje osobiste, społeczne i w zakresie umiejętności uczenia się.

**Cele operacyjne:**

Uczeń:

- rysuje okrąg o danym równaniu,
- sprawdza analitycznie czy dany punkt należy do okręgu,
- znajduje współrzędne środka okręgu i jego promień,

- oblicza odległość między punktami o danych współrzędnych,
- rysuje prostą o danym równaniu,
- wyznacza równanie prostej spełniającej dane warunki,
- wykonuje konstrukcję symetralnej odcinka,
- planuje czynności mające doprowadzić do wyznaczenia środka okręgu i jego promienia,
- kształci umiejętność stosowania metod geometrii analitycznej,
- z zaangażowaniem rozwiązuje zadania posługując się poznanymi twierdzeniami i definicjami,
- analizuje zadania oraz dokonuje wyboru najefektywniejszej metody prowadzącej do ich rozwiązania.

**Strategie nauczania:**

- konstruktywizm,
- konektywizm.

**Metody i techniki nauczania:**

- pogadanka z wykorzystaniem animacji i ćwiczeń interaktywnych,
- pokaz multimedialny,
- rozwiązywanie zadań pod kontrolą nauczyciela.

**Formy pracy:**

- praca indywidualna,
- praca w grupach,
- praca całego zespołu.

**Środki dydaktyczne:**

- komputery z dostępem do internetu,
- tablica interaktywna/rzutnik multimedialny,
- e-podręcznik.

Nauczyciel na poprzednich zajęciach prosi uczniów o przyniesienie przyrządów geometrycznych – cyrkli, linijek oraz arkuszy papieru.

**Przebieg lekcji**

**Faza wprowadzająca:**

- uczniowie przypominają równanie okręgu,
- nauczyciel podaje temat i cele zajęć.

**Faza realizacyjna:**

- nauczyciel prezentuje animację,
- metodą „burzy mózgów” uczniowie odpowiadają na pytanie nauczyciela: Jak znaleźć równanie okręgu mając dane współrzędne trzech punktów, które należą do okręgu?”,
- chętny uczeń rozwiązuje zadanie do samodzielnego rozwiązania z animacji,
- na tablicy nauczyciel zapisuje kroki konstrukcji środka okręgu gdy dane są trzy punkty niewspółliniowe - informuje, że jest to metoda wyznaczenia środka okręgu opisanego na trójkącie,
- uczniowie na arkuszach wykonują zadaną konstrukcję, nauczyciel kontroluje pracę uczniów, zwracając uwagę na staranność i poprawność wykonywanych rysunków,
- po 5 minutach uczniowie łączą się w grupy czteroosobowe i opracowują schemat analitycznego otrzymania współrzędnych środka okręgu – mogą w tym celu skorzystać z tekstu zawartego w sekcji Przeczytaj,
- przedstawiciel jednej z grup prezentuje schemat na forum klasy,
- nauczyciel prosi uczniów aby tą metodą rozwiązać wskazane ćwiczenia interaktywne,
- nauczyciel kontroluje pracę uczniów, udziela im wskazówek, wyjaśnia wątpliwości.

**Faza podsumowująca:**

- wskazani uczniowie prezentują rozwiązania ćwiczeń interaktywnych,
- uczniowie formułują wnioski do zapamiętania – podają algorytmy wyznaczania środka okręgu i jego promienia,
- uczniowie określają co było dla nich trudne lub niezrozumiałe a nauczyciel udziela wyjaśnień,
- nauczyciel omawia przebieg zajęć, wskazuje mocne i słabe strony pracy uczniów, ocenia aktywność uczniów.

**Praca domowa:**

- Zadaniem uczniów jest rozwiązanie ćwiczeń interaktywnych, które nie zostały rozwiązane na lekcji.

**Materiały pomocnicze:**

- Okrąg i koło
- Okrąg
- Symetralna odcinka. Symetralne boków trójkąta
- Środek odcinka

**Wskazówki metodyczne:**

- Uczniowie mogą przeanalizować treść animacji jako pracę własną przed lekcją.