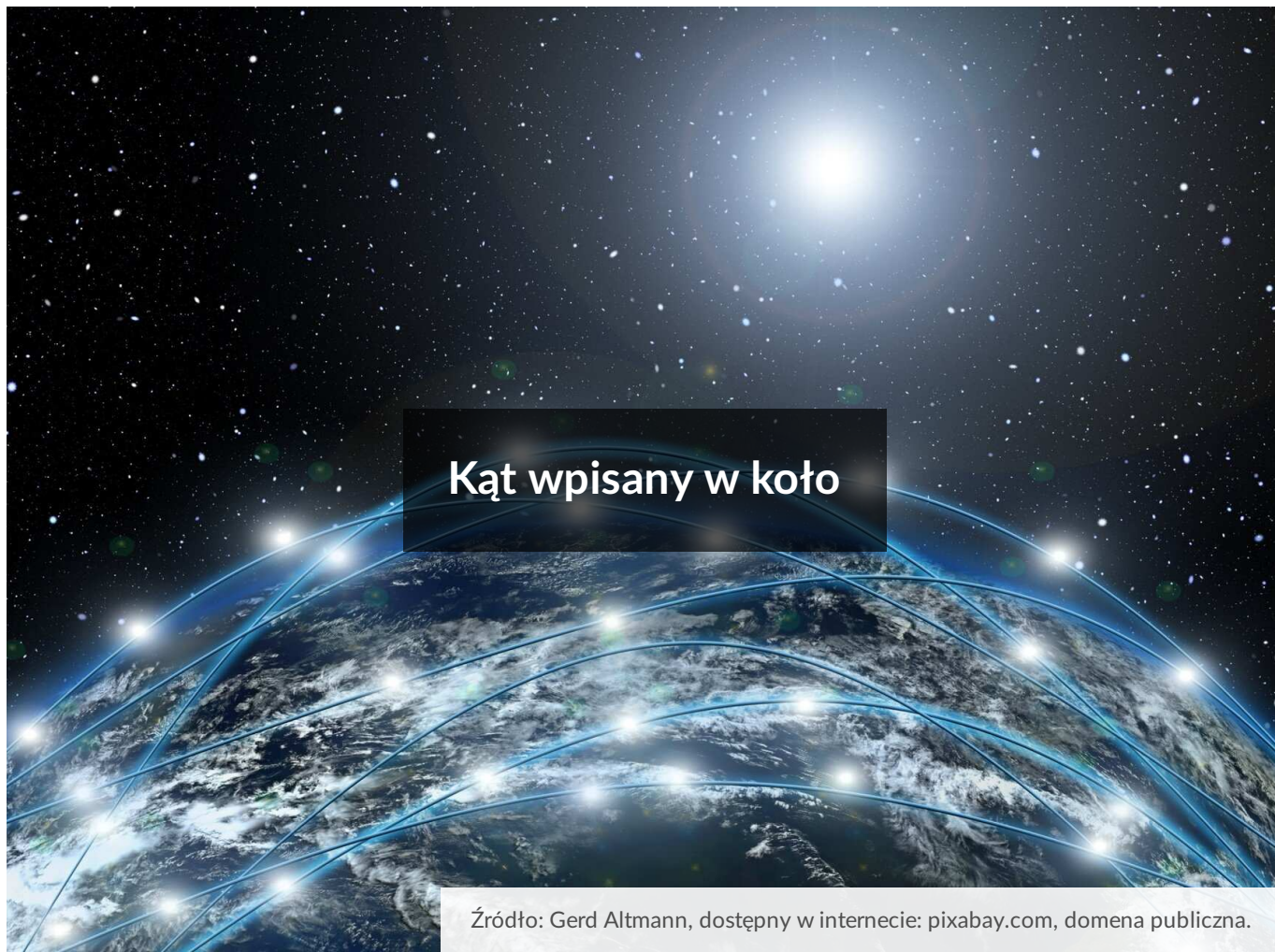




## Kąt wpisany w koło

- [Wprowadzenie](#)
- [Przeczytaj](#)
- [Galeria zdjęć interaktywnych](#)
- [Sprawdź się](#)
- [Dla nauczyciela](#)

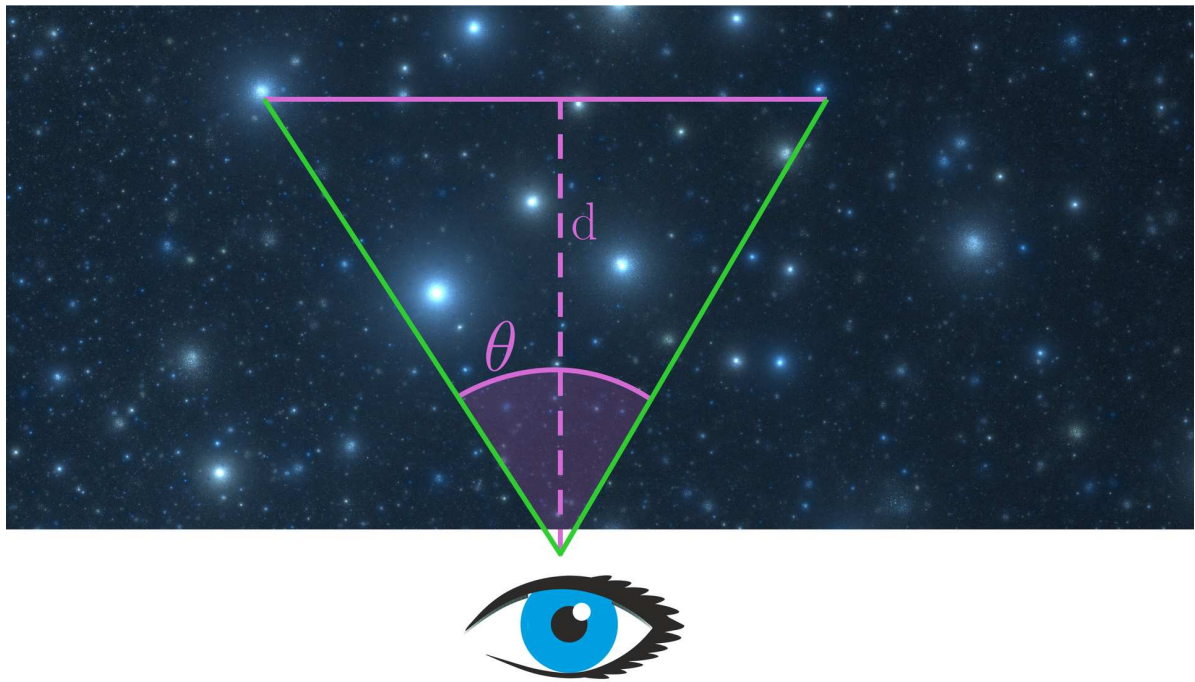


## Kąt wpisany w koło

Źródło: Gerd Altmann, dostępny w internecie: pixabay.com, domena publiczna.

## Odległość kątowa w astronomii

Ze względu na fakt, że gwiazdy, planety i inne obiekty astronomiczne znajdują się na sferze, to odległości pomiędzy nimi wygodnie opisywać za pomocą kątów. Odległość kątowa  $\theta$  pomiędzy dwoma obiektami to kąt, którego ramionami są promienie „wychodzące z oka obserwatora” i przechodzące przez te obiekty. Miarą takiej odległości są stopnie i jego części: minuty i sekundy. Odległość kątowa służy nie tylko do mierzenia odległości między obiektami, ale także do charakteryzowania pojedynczego obiektu – w szczególności rozmiar kątowy Księżyca wynosi od  $33'28''$  (gdy ten znajduje się najbliżej Ziemi) do  $29'55''$  (gdy jego odległość od Ziemi jest największa).



Rozmiar kątowy

Źródło: FelixMittermeier, dostępny w internecie: [www.pixabay.com](http://www.pixabay.com), domena publiczna.

Z pewnością kulisty obiekt można obserwować z różnych punktów przestrzeni i widzieć go pod tym samym kątem. Okazuje się, że także obiekty o charakterze liniowym można widzieć pod tym samym kątem, patrząc na nie z różnych stron.

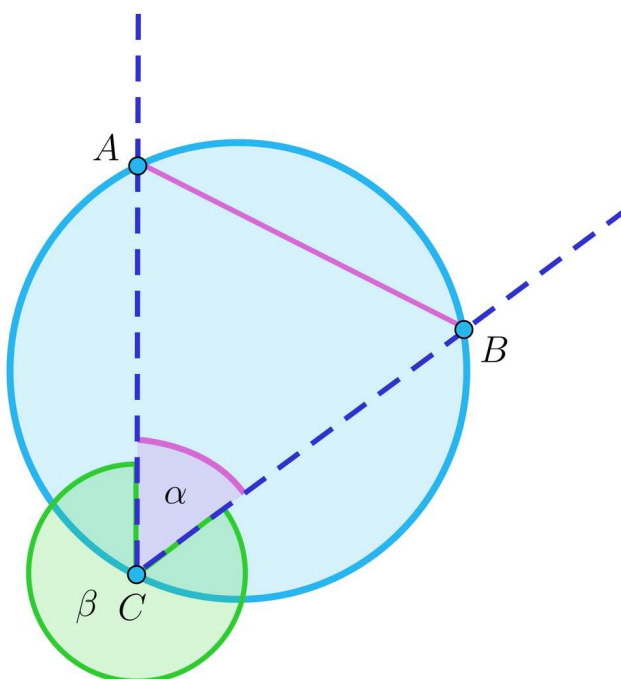
### Twoje cele

- Poznasz pojęcie kąta wpisanego w koło.
- Będziesz wyznaczać kąty wpisane w okręgu oparte na łuku i rozpięte na cięciwie.
- Poznasz twierdzenie o mierze kąta wpisanego opartego na półokręgu.
- Zastosujesz poznane zależności w sytuacjach typowych i problemowych.

# Przeczytaj

## Definicja: Kąt wpisany w koło

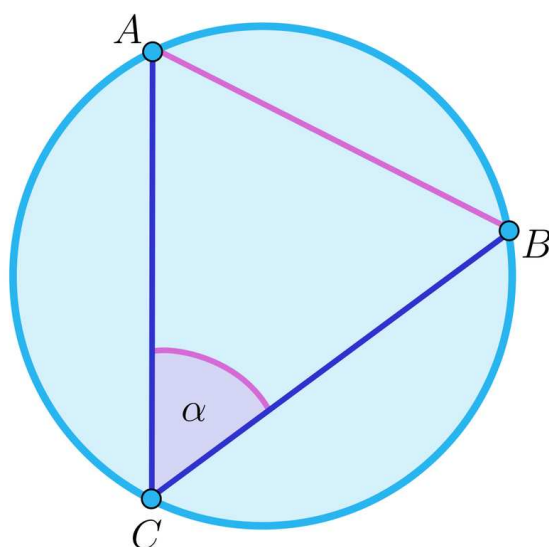
Kątem wpisanym w koło nazywamy kąt wypukły, którego ramionami są proste zawierające cięciwy tego koła, a wierzchołek należy do brzegu koła.



Kąt wpisany

Na powyższym rysunku, dwie półproste:  $CA$  i  $CB$ , zaznaczone liniami przerywanymi, są ramionami dwóch kątów o wierzchołku w punkcie  $C$ : kąta wypukłego  $\alpha$  oraz kąta wklęsłego  $\beta$ . Tylko kąt  $\alpha$  jest kątem wpisanym w **koło**, bo zgodnie z definicją musi to być kąt wypukły.

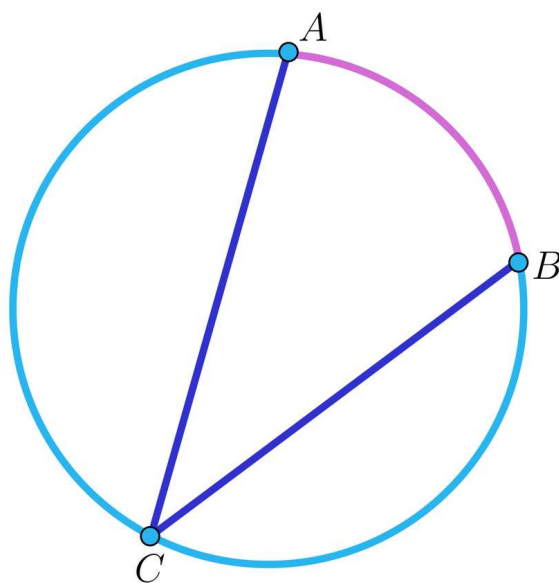
Ilustrując zagadnienie kątów wpisanych, będziemy zwykle zaznaczać jedynie promienie danego koła, zawarte w odpowiednich półprostych tak, jak na poniższym rysunku.



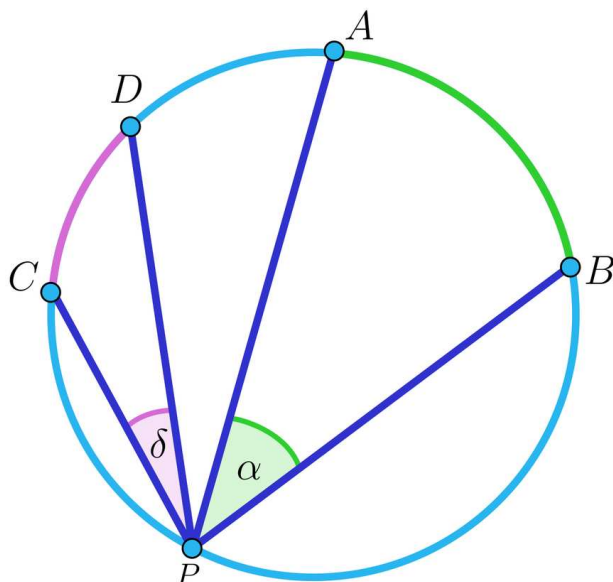
W praktyce szkolnej spotykamy się z zamiennym stosowaniem pojęć: kąt wpisany w koło i kąt wpisany w okrąg, dlatego przyjmujemy również kolejną definicję.

**Definicja: Kąt wpisany w okrąg**

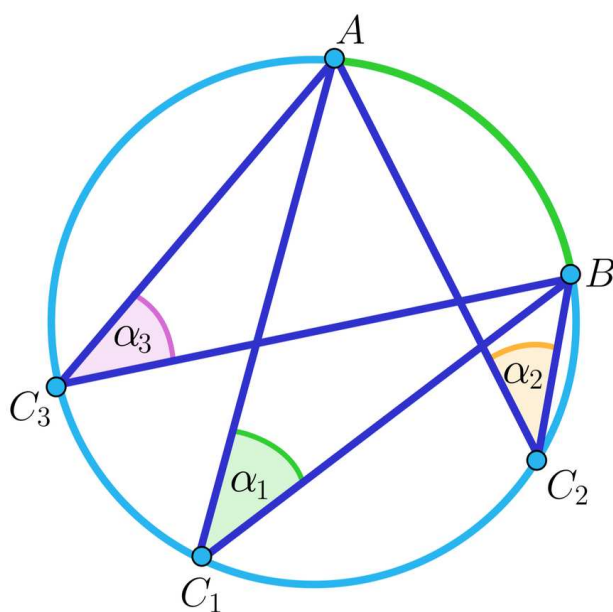
Rozważmy okrąg o środku  $O$  i punkty  $A, B$  leżące na tym okręgu. Kątem wpisanym opartym na łuku  $AB$  nazywamy kąt wypukły  $ACB$ , którego ramiona zawierają **cięciwy okręgu**  $CA$  i  $CB$ .



Zauważmy, że każdy kąt wpisany danego okręgu w sposób jednoznaczny wyznacza łuk, na którym jest on oparty.



Z kolei istnieje nieskończenie wiele kątów wpisanych opartych na danym łuku.



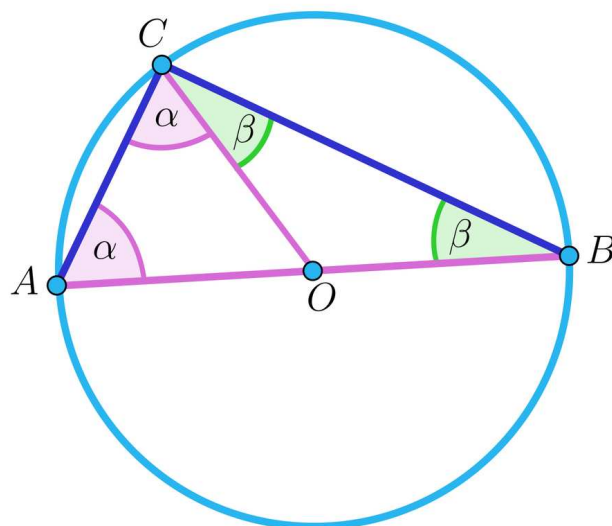
### Przykład 1

Dany jest okrąg o środku w punkcie  $O$ .

Rozważmy dowolny kąt wpisany oparty na półokręgu  $AB$  i poprowadźmy promień  $OC$  tego okręgu.

Wówczas trójkąty  $AOC$  i  $BOC$  są równoramienne.

Oznaczmy:  $\sphericalangle OAC = \alpha$  oraz  $\sphericalangle OBC = \beta$ .



Wtedy:  $\sphericalangle AOC = 180^\circ - 2\alpha$  oraz  $\sphericalangle BOC = 180^\circ - 2\beta$ .

Ale kąty  $AOC$  i  $BOC$  są kątami przyległymi, zatem  $(180^\circ - 2\alpha) + (180^\circ - 2\beta) = 180^\circ$ .

Stąd  $2\alpha + 2\beta = 180^\circ$ , czyli  $\alpha + \beta = 90^\circ$ .

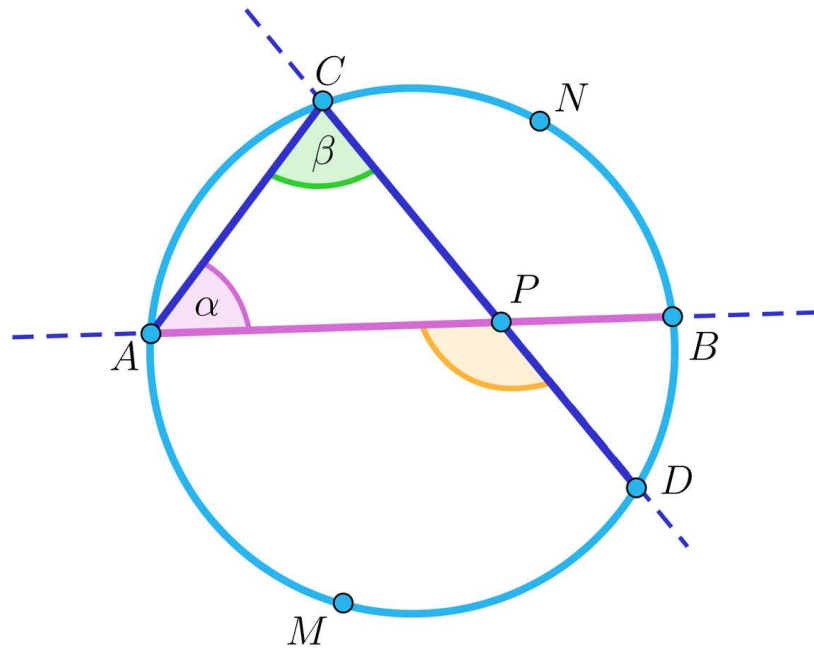
Ale to oznacza, że każdy kąt wpisany w **okrąg** i oparty na jego średnicy jest kątem prostym, a w konsekwencji, że przeciwprostokątna dowolnego trójkąta prostokątnego jest średnicą okręgu opisanego na tym trójkącie.

### Ważne!

Niekiedy zamiast mówić, że kąt jest oparty na łuku, będziemy mówić, że jest na tym łuku rozpięty. W przypadku kąta opartego na półokręgu, często będziemy spotykać się ze stwierdzeniem, że kąt jest rozpięty na średnicy okręgu. Rzadziej pojawia się określenie, że kąt wpisany jest rozpięty na cięciwie, której końcami są końce odpowiedniego **łuku okręgu**.

Podana w Przykładzie 1 zależność jest szczególnym przypadkiem związku, jaki wiąże kąty wpisane i kąty środkowe oparte na tym samym łuku, co będzie tematem materiału: „Zależność między kątami w kole”.

Rozważmy teraz dowolny **okrąg** i dwie przecinające się sieczne. Zbadamy związek między tymi siecznymi i utworzonymi przez nie kątami wpisanymi. Rozważmy najpierw przypadek, gdy sieczne przecinają się „wewnątrz” okręgu, tak, jak na poniższym rysunku.



### Twierdzenie: O kącie między siecznymi 1

Kąt  $APD$ , jaki tworzą sieczne, przecinające się w punkcie  $P$ , leżącym „wewnątrz” okręgu, jest równy sumie dwóch kątów wpisanych opartych na łukach, z których jeden (łuk  $\widehat{AMD}$ ) zawarty jest między ramionami kąta, a drugi (łuk  $\widehat{BNC}$ ) jest zawarty między przedłużeniami ramion tego kąta.

#### Dowód

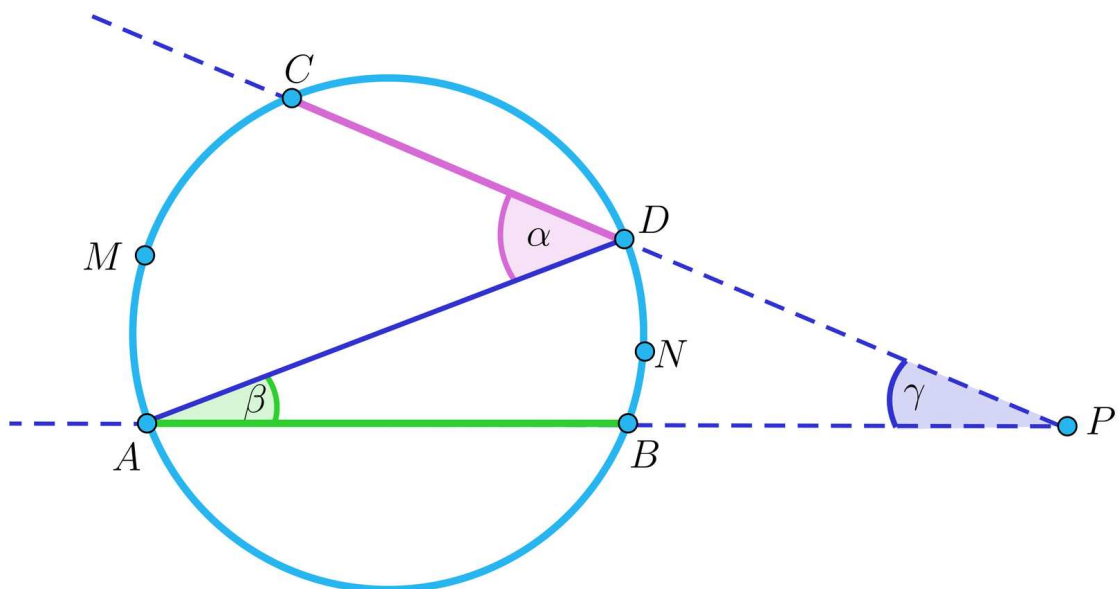
Dowód tego twierdzenia jest natychmiastową konsekwencją twierdzenia o kącie zewnętrznym trójkąta.

### Twierdzenie: O kącie między siecznymi 2

Kąt  $APD$ , jaki tworzą sieczne, przecinające się w punkcie  $P$ , leżącym na zewnątrz okręgu, jest równy odpowiedniej różnicy dwóch kątów wpisanych opartych na łukach zawartych między ramionami kąta.

#### Dowód

Popatrzmy na rysunek.



Ponieważ  $|\sphericalangle ADP| = 180^\circ - \alpha$  oraz  $\gamma = 180^\circ - \beta - |\sphericalangle ADP|$ , więc  $\gamma = 180^\circ - \beta - (180^\circ - \alpha) = \alpha - \beta$ .

## Słownik

### okrąg

okręgiem o środku  $O$  i promieniu  $r$  nazywamy zbiór wszystkich punktów płaszczyzny odległych od punktu  $O$  o dany odcinek  $r$

### koło

kołem o środku  $O$  i promieniu  $r$  nazywamy zbiór wszystkich punktów płaszczyzny, których odległość od punktu  $O$  jest nie większa niż  $r$

### łuk okręgu

łukiem okręgu nazywamy każdą z dwóch części, na które dzielą okrąg dwa różne punkty leżące na tym okręgu, wraz z tymi punktami

### cięciwa okręgu

cięciwą okręgu nazywamy odcinek, którego końce są różnymi punktami leżącymi na tym okręgu

# Galeria zdjęć interaktywnych

## Polecenie 1

Kąty w okręgu, w szczególności kąty wpisane, są przedmiotem zainteresowania optyki i astronomii. Zapoznaj się z przedstawionymi informacjami i dołączonymi komentarzami lektora, a następnie wykonaj polecenia.

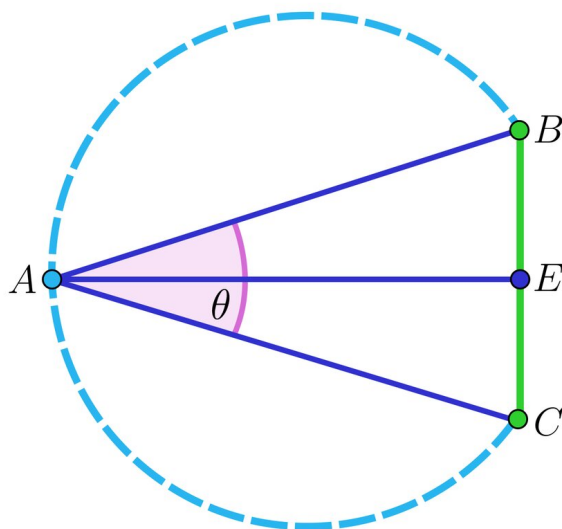
Źródło: Pixabay.com, danielarealpeg, dostępny w internecie: [www.pixabay.com](http://www.pixabay.com), domena publiczna.

## Polecenie 2

Przyjmując, że średnia odległość od środka Księżyca od środka Ziemi jest równa 384400 km, a rozmiar kątowy Księżyca jest równy  $30'$ , wyznacz średnicę Księżyca.

## Polecenie 3

Długość odcinka  $BC$  jest równa 6, a odległość obserwatora  $A$  od środka odcinka  $BC$  jest równa 10. Wyznacz rozmiar kątowy  $\theta$  odcinka  $BC$  dla obserwatora w punkcie  $A$  i wyznacz promień łuku, który jest miejscem geometrycznym, z którego odcinek  $BC$  widać pod kątem  $\theta$  (rysunek).



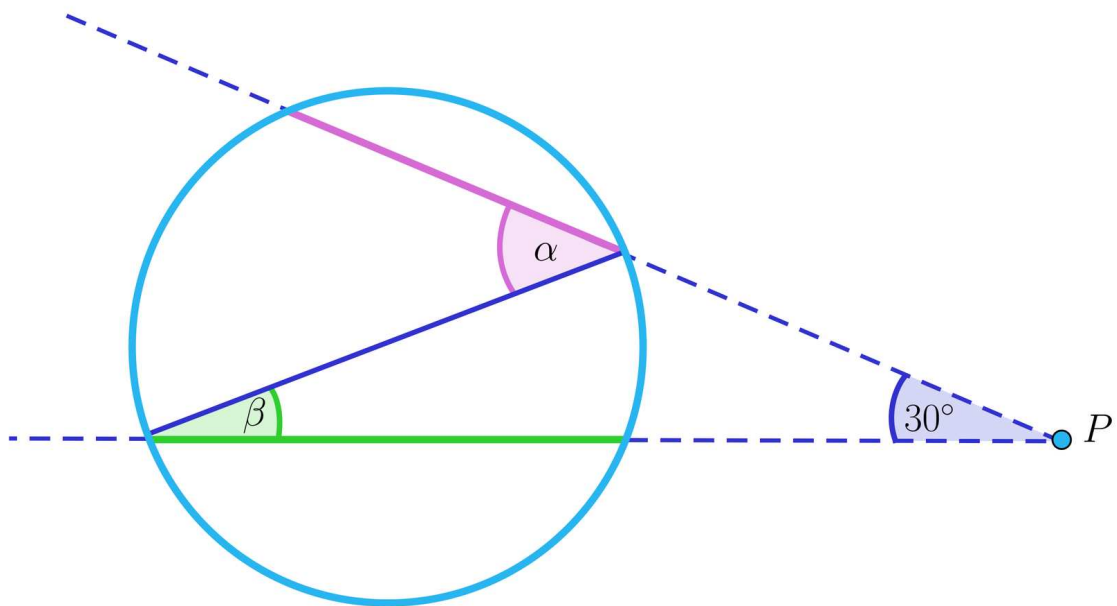
# Sprawdź się

Pokaż ćwiczenia:   

## Ćwiczenie 1



Kąt, jaki tworzą sieczne, przecinające się w punkcie  $P$  leżącym na zewnątrz okręgu, ma miarę równą  $30^\circ$  (patrz rysunek).

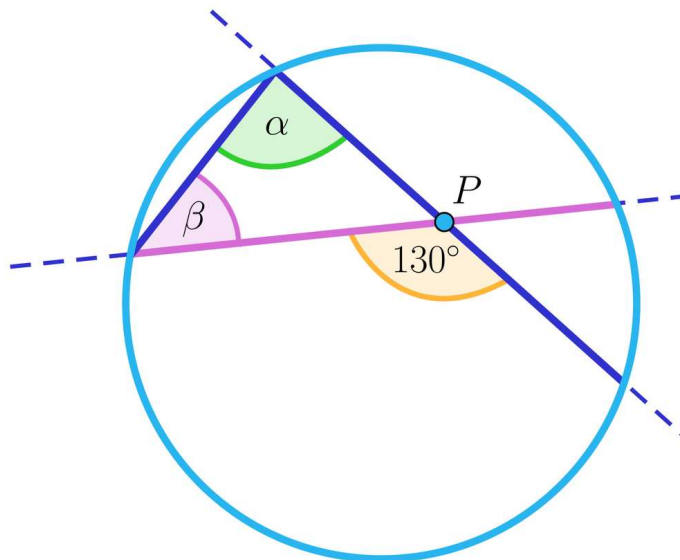


Oblicz miarę kątów  $\alpha$ ,  $\beta$ , jeśli  $\alpha + \beta = 70^\circ$ .

## Ćwiczenie 2



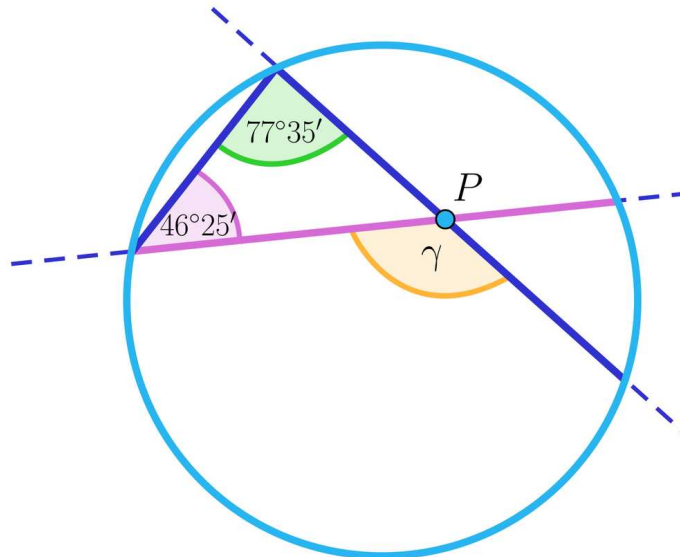
Zaznaczony na rysunku kąt, jaki tworzą sieczne, przecinające się w punkcie  $P$  leżącym wewnątrz okręgu, ma miarę równą  $130^\circ$  (patrz rysunek).



Oblicz miarę kątów  $\alpha$ ,  $\beta$ , jeśli  $\alpha - \beta = 42^\circ$ .

### Ćwiczenie 3

Korzystając z danych przedstawionych na poniższym rysunku, wyznacz miarę kąta  $\gamma$ , jaki tworzą sieczne, przecinające się w punkcie  $P$ , leżącym wewnątrz okręgu.



Zaznacz poprawną odpowiedź.

☐  $31\frac{1}{10}^\circ$

☐  $31^\circ 10'$

☐  $123\frac{60}{100}^\circ$

☐  $124^\circ$

### Ćwiczenie 4

### Ćwiczenie 5



Jedna z cięciw zawartych w ramionach kąta wpisanego w okrąg i opartego na półokręgu ma długość równą promieniowi tego okręgu. Oblicz miarę kąta wpisanego, jaki tworzy ta cięciwa ze średnicą, na której rozpięty jest półokrąg.

## Ćwiczenie 6

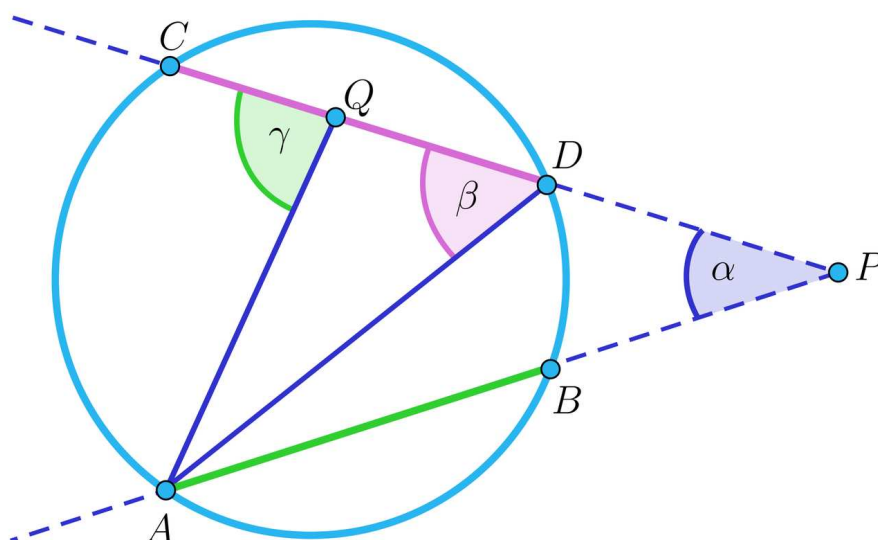


Dany jest okrąg o promieniu  $r$ . Różnica długości cięciw tworzących kąt wpisany oparty na półokręgu ma długość równą  $\frac{14}{13}r$ . Wyznacz stosunek długości obu cięciw.

## Ćwiczenie 7



Kąt, jaki tworzą dwie sieczne, przecinające się w punkcie  $P$ , leżącym na zewnątrz okręgu, ma miarę równą  $\alpha$ . Sieczne te wyznaczają cięciwy  $AB$  i  $CD$ , jak na rysunku. Punkt  $Q$  leży wewnątrz okręgu, na cięciwie  $CD$ . Oznaczmy  $|\angle AQC| = \gamma$ ,  $|\angle ADC| = \beta$ .

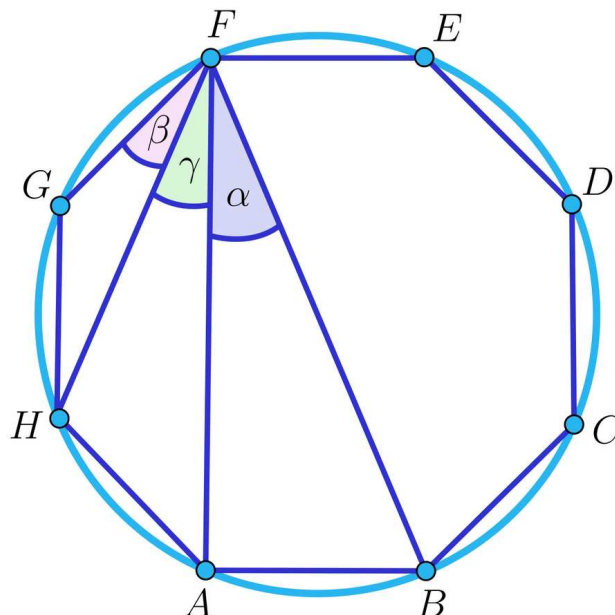


Wykaż, że zachodzi nierówność  $\alpha < \beta < \gamma$ .

## Ćwiczenie 8



Z jednego z wierzchołków ośmiokąta foremnego poprowadzono trzy przekątne, które są jednocześnie cięciwami okręgu opisanego na tym ośmiokącie, jak na rysunku.



Korzystając tylko z zależności poznanych na lekcji (nie stosując twierdzenia o związku między kątem wpisanym i środkowym) uzasadnić, że kąty  $\alpha$ ,  $\beta$  i  $\gamma$  mają równe miary. Ułóż w kolejności etapy dowodu.

**Dowód:**

Odcinek  $BF$  jest osią symetrii ośmiokąta i dwusieczną kąta wewnętrznego  $ABC$ , dlatego miara kąta  $ABF$  jest równa  $\frac{1}{2} \cdot 135^\circ$ .

Wyznamy w kolejności miary kątów  $\alpha$ ,  $\beta$  i  $\gamma$ .

Stąd  $\alpha = 90^\circ - |\angle ABF| = 22,5^\circ$ .

Stąd  $\beta = \frac{180^\circ - 135^\circ}{2} = 22,5^\circ$ .

Zatem kąt  $BAF$  jest kątem prostym.

Dlatego kąt wewnętrzny ośmiokąta foremnego ma miarę  $135^\circ$ .

Pozostaje zauważyć, że trójkąty  $ABF$  i  $FGB$  są przystającymi trójkątami prostokątnymi. ◆

Trójkąt  $FGH$  jest równoramienny, a kąt  $FGH$  jest kątem wewnętrznym ośmiokąta. Zatem  $2\beta + 135^\circ = 180^\circ$ . ◆

Ponadto, odcinek  $BF$  jest średnicą okręgu, na której rozpięty jest kąt wpisany  $BAF$ . ◆

Miarę kąta wewnętrznego wielokąta foremnego opisuje wzór:  $\frac{n-2}{n} \cdot 180^\circ$ . ◆

Zatem  $\alpha + \beta + \gamma = 90^\circ - \alpha$ , czyli  $\gamma = 90^\circ - \beta - 2\alpha$ . ◆

Stąd  $\gamma = 90^\circ - 22,5^\circ - 2 \cdot 22,5^\circ = 90^\circ - 67,5^\circ = 22,5^\circ$ . ◆

Warto zauważyć, ze względu na symetrię ośmiokąta, że wszystkie kąty wpisane, oparte na krótszych łukach wyznaczonych przez kolejne boki ośmiokąta, mają równe miary. ◆

# Dla nauczyciela

---

**Autor:** Jacek Człapiński

**Przedmiot:** Matematyka

**Temat: Kąt wpisany w koło**

**Grupa docelowa:**

III etap edukacyjny, liceum, technikum, zakres rozszerzony

**Podstawa programowa:**

VIII. Planimetria. Zakres podstawowy.

1) wyznacza promienie i średnice okręgów, długości cięciw okręgów oraz odcinków stycznych;

5) stosuje własności kątów wpisanych i środkowych;

12) przeprowadza dowody geometryczne.

**Kształtowane kompetencje kluczowe:**

- kompetencje w zakresie rozumienia i tworzenia informacji
- kompetencje matematyczne oraz kompetencje w zakresie nauk przyrodniczych, technologii i inżynierii
- kompetencje cyfrowe
- kompetencje osobiste, społeczne i w zakresie umiejętności uczenia się

**Cele operacyjne:**

Uczeń:

- rozpoznaje kąty wpisane
- dostrzega odpowiedniość między pojęciami kąta wpisanego w okrąg i w kole
- wskazuje kąty wpisane oparte na danym łuku i łuk, na którym oparty jest dany kąt wpisany
- wyznacza miary kątów między siecznymi okręgu, znając odpowiednie kąty wpisane
- wyznacza miary kątów opartych na półokręgu
- przeprowadza dowody geometryczne

**Strategie nauczania:**

- konstruktywizm

### **Metody i techniki nauczania:**

- dyskusja
- rozmowa nauczająca z wykorzystaniem ćwiczeń interaktywnych

### **Formy pracy:**

- praca indywidualna
- praca w grupach
- praca całego zespołu klasowego

### **Środki dydaktyczne:**

- komputery z dostępem do Internetu w takiej liczbie, żeby każda para uczniów miała do dyspozycji komputer; lekcję tę można przeprowadzić, mając do dyspozycji jeden komputer z rzutnikiem multimedialnym

### **Przebieg lekcji**

#### **Faza wstępna:**

1. Nauczyciel zadaje pytanie dotyczące stosowania pojęcia odległości kątowej – definiuje pojęcie i podaje przykłady jej zastosowania w astronomii. Formułuje problem związany z istnieniem różnych punktów obserwacji, z których widać obiekt pod tym samym kątem.
2. Nauczyciel podaje temat i cele zajęć, uczniowie ustalają kryteria sukcesu.

#### **Faza realizacyjna:**

1. Nauczyciel prosi uczniów o przypomnienie pojęć koła i okręgu oraz ich środków, promieni i cięciw.
2. Nauczyciel podaje definicję kąta wpisanego w kole i prosi, by zgłosił się uczeń, który zaznaczy taki kąt na rysunku – prowadzi dyskusję w taki sposób, by wskazać, że odpowiednie półproste są ramionami dwóch kątów, z których tylko jeden jest wypukły.
3. Następnie nauczyciel wyjaśnia, że w praktyce zaznaczając odpowiednie kąty w kole i okręgu ograniczamy się do rysowania cięciw, rezygnując z półprostych.
4. Nauczyciel podaje definicję kąta wpisanego w okręgu i prosi uczniów o porównanie obu definicji.
5. Nauczyciel wskazuje, że można mówić o kącie wpisanym w okręgu w kontekście określonego łuku i cięciwy – uczniowie wskazują na zalety i wady każdego sposobu.
6. Uczniowie badają kąty wpisane oparte na półokręgu, także w kontekście okręgu opisanego na trójkącie prostokątnym.

7. Uczniowie badają zależności między kątami utworzonymi przez przecinające się sieczne, a miarami odpowiednich kątów wpisanych.
8. Nauczyciel zachęca do przejrzenia galerii zdjęć interaktywnych dotyczącej rozmiaru kątowego obiektów.
9. Uczniowie wykonują zaproponowane ćwiczenia interaktywne, wykorzystując umiejętności z różnych działów matematyki.

#### **Faza podsumowująca:**

- Nauczyciel prosi wybranych uczniów o przedstawienie najważniejszych elementów, jakie były omawiane w trakcie lekcji.

#### **Praca domowa:**

Nauczyciel poleca, aby uczniowie wykonali w domu ćwiczenia interaktywne, które nie zostały wykonane w czasie zajęć.

#### **Materiały pomocnicze:**

[Kąt środkowy, kąt wpisany](#)

#### **Wskazówki metodyczne:**

Galerię zdjęć interaktywnych można zastosować w ramach powtórzenia przed sprawdzianem. Można wykorzystać omawiając zależność między kątem wpisanym i środkowym w okręgu.