



Równoległobok i jego własności

- Wprowadzenie
- Przeczytaj
- Aplet
- Sprawdź się
- Dla nauczyciela



Równoległobok i jego własności

Źródło: dostępny w internecie: pxhere.com, domena publiczna.

W bieżącym materiale przekonamy się jak dużo ciekawych problemów można rozwiązać dostrzegając własności czworokąta, którego przeciwległe boki są równoległe.

Przedstawimy i udowodnimy kilka warunków równoważnych, które opisują równoległobok. Ważną grupą problemów, które można rozwiązać wykorzystując własności równoległoboku są te, w których w założeniach lub tezie występuje środek odcinka.

Materiał ten opierał się będzie głównie na wiadomościach ze szkoły podstawowej, co nie znaczy, że przedstawione przykłady i ćwiczenia będą łatwe.

Twoje cele

- Określisz warunki równoważne opisujące równoległobok.
- Wykorzystasz równoległobok do uzasadnienia własności środkowej w trójkącie prostokątnym.
- Zastosujesz własność równoległoboku do wyznaczania najkrótszej drogi.
- Zastosujesz własności równoległoboku do rozwiązywania zadań z geometrii płaskiej.

Przeczytaj

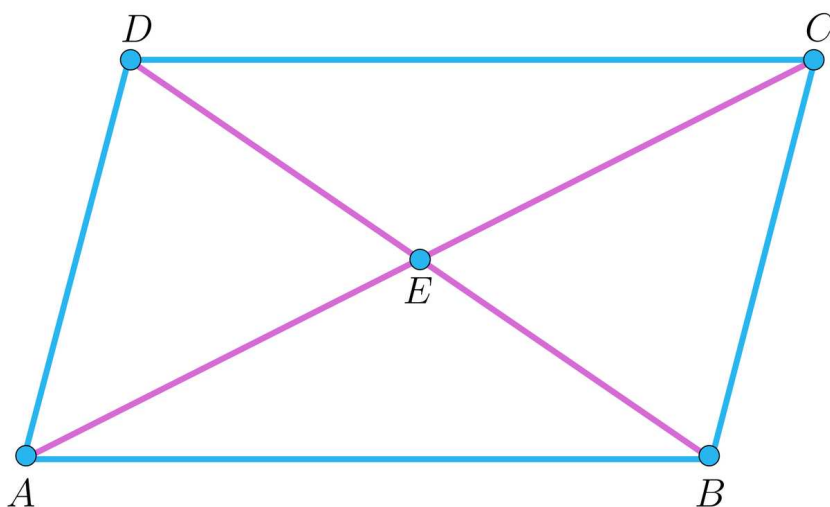
Zacznijmy od definicji:

Definicja: równoległobok

Czworokąt, którego przeciwległe boki są równoległe, nazywany **równoległobokiem**.

Twierdzenie: o równoległoboku

Niech $ABCD$ będzie czworokątem wypukłym oraz niech E będzie punktem przecięcia przekątnych AC i BD .



Wówczas następujące warunki są równoważne:

1. proste AB i CD są równoległe oraz proste BC i DA są równoległe;
2. $|AB| = |CD|$ oraz $|BC| = |DA|$;
3. $|AB| = |CD|$ oraz proste AB i CD są równoległe;
4. $|AE| = |EC|$ oraz $|BE| = |ED|$.

Zanim pokażemy równoważność powyższych warunków zastanówmy się, czy musimy udowadniać równoważności każdej pary.

Zauważmy, że jeżeli udowodnimy ciąg **implikacji**:

$$1 \Rightarrow 2 \Rightarrow 3 \Rightarrow 4 \Rightarrow 1,$$

to tym samym udowodnimy równoważność każdych dwóch powyższych warunków.

Sprawdźmy wynikającą równoważność na przykładzie warunków 2 i 4.

Ciąg implikacji $2 \Rightarrow 3 \Rightarrow 4$ pociąga za sobą prawdziwość implikacji $2 \Rightarrow 4$. Natomiast ciąg implikacji $4 \Rightarrow 1 \Rightarrow 2$ pociąga prawdziwość implikacji $4 \Rightarrow 2$.

Łącząc $2 \Rightarrow 4$, $4 \Rightarrow 2$ otrzymujemy równoważność warunków $2 \Leftrightarrow 4$.

Analogicznie można pokazać, że przytoczony na początku ciąg implikacji pociąga równoważność każdej innej pary warunków.

Teraz możemy przejść do **dowodu twierdzenia o równoległoboku**:

(1) \Rightarrow (2):

Ponieważ AB oraz CD są równoległe więc $|\sphericalangle BAC| = |\sphericalangle DCA|$. Analogicznie, proste BC i DA są równoległe, więc $|\sphericalangle BCA| = |\sphericalangle DAC|$. Stąd wniosek, że trójkąty ABC i CDA są przystające (cecha kąt-bok-kąt), skąd otrzymujemy tezę $|AB| = |CD|$ oraz $|BC| = |DA|$.

(2) \Rightarrow (3):

Z równości $|AB| = |CD|$ oraz $|BC| = |DA|$ wynika, że trójkąty ABC i CDA są przystające (cecha bok-bok-bok). Wobec tego $|\sphericalangle BAC| = |\sphericalangle DCA|$ i w konsekwencji proste AB i CD są równoległe.

(3) \Rightarrow (4):

Ponieważ proste AB oraz CD są równoległe, więc $|\sphericalangle EAB| = |\sphericalangle ECD|$ oraz $|\sphericalangle EBA| = |\sphericalangle EDC|$. Te dwie równości, wraz z równością $|AB| = |CD|$ dowodzą, że trójkąty ABE i CDE są przystające (cecha kąt-bok-kąt). Stąd wnioskujemy $|AE| = |EC|$ oraz $|BE| = |ED|$.

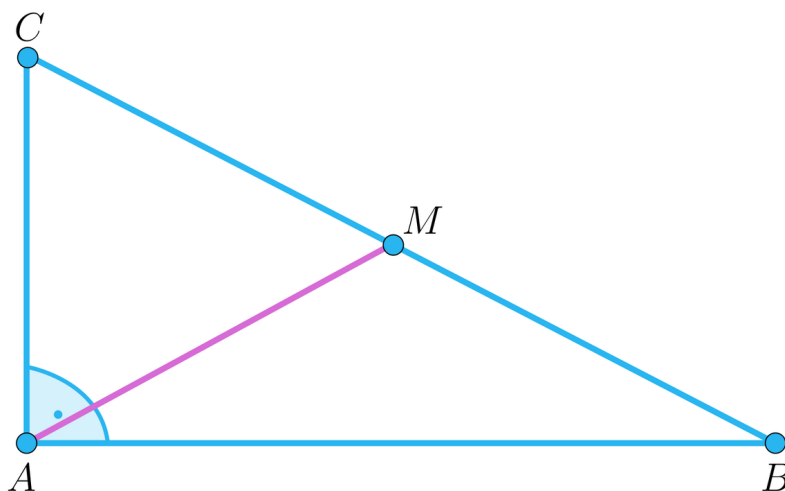
(4) \Rightarrow (1):

Z równości $|AE| = |EC|$, $|BE| = |ED|$ wynika, że trójkąty ABE i CDE są przystające (cecha bok-kąt-bok). Wobec tego $|\sphericalangle EAB| = |\sphericalangle ECD|$, skąd wynika, że proste AB i CD są równoległe. Analogicznie dowodzimy, że proste BC i DA są równoległe.

Wykorzystamy teraz równoważność powyższych warunków w rozwiązaniu kilku ciekawych problemów:

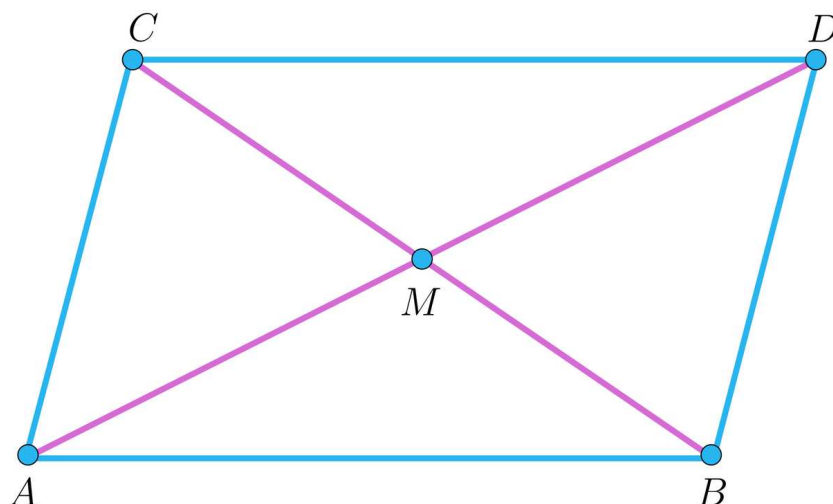
Przykład 1

Punkt M jest środkiem boku BC trójkąta ABC . Wówczas $|\sphericalangle BAC| = 90^\circ$ wtedy i tylko wtedy, gdy $|AM| = \frac{1}{2}|BC|$.



Rozwiązanie

Oznaczmy przez D punkt symetryczny do punktu A względem punktu M . Wówczas czworokąt $ABDC$ jest równoległobokiem:

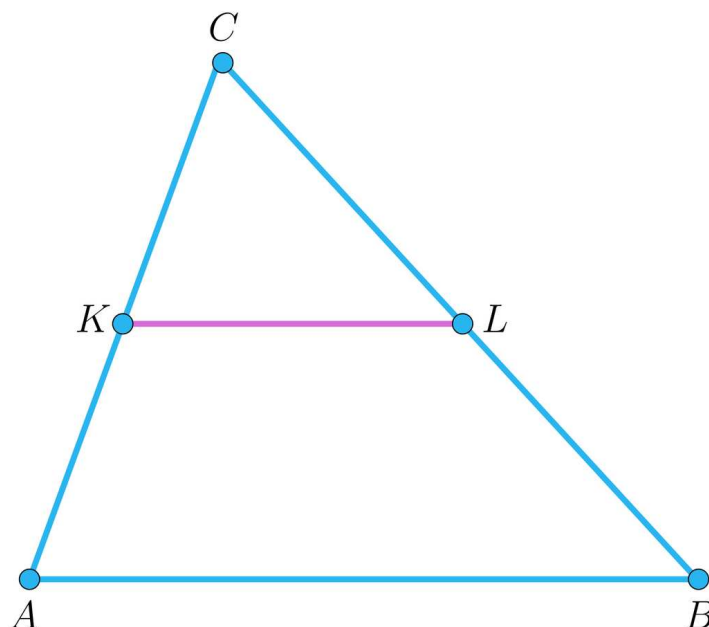


Zauważmy, że jeżeli $|\sphericalangle BAC| = 90^\circ$ to również $|\sphericalangle ACD| = 90^\circ$. Wtedy trójkąty BAC i CDA są przystające, stąd $|AM| = \frac{1}{2}|AD| = \frac{1}{2}|BC|$.

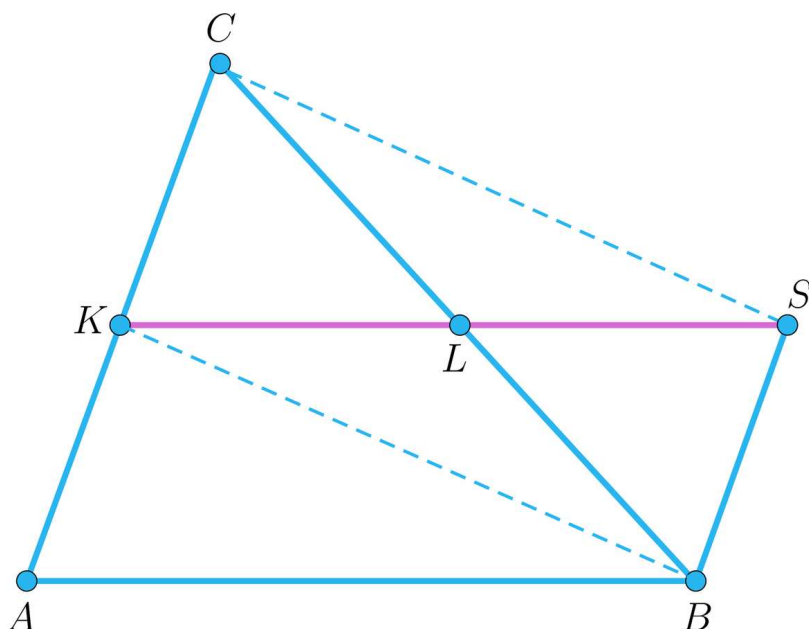
Odwrotnie: jeżeli $|AM| = \frac{1}{2}|BC|$ to $|AD| = |BC|$ i trójkąty BAC i DCA są przystające, stąd wniosek, że kąty BAC i DCA są równe. Ponadto suma ich miar jest równa 180° , więc miara każdego z nich musi być równa 90° .

Przykład 2

Punkty K i L są środkami boków AC i BC trójkąta ABC . Wówczas proste KL i AB są równoległe oraz $|KL| = \frac{1}{2}|AB|$



Rozwiązanie



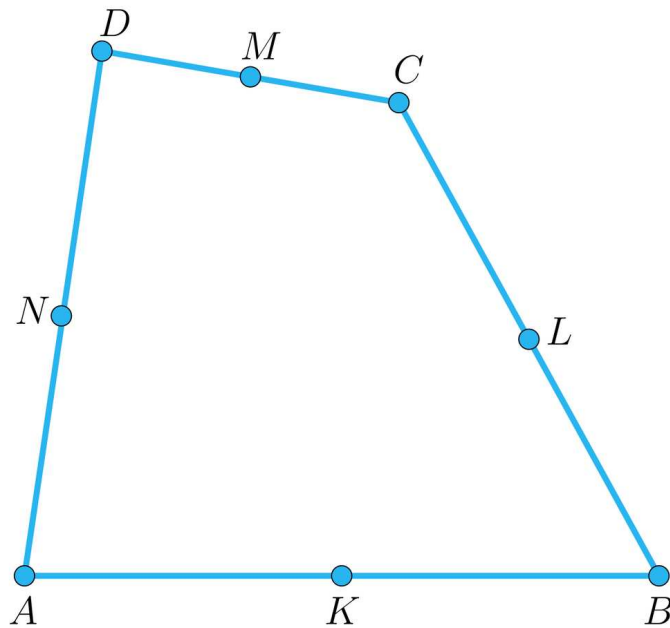
Niech S będzie obrazem symetrycznym punktu K względem punktu L . Wówczas czworokąt $KBCS$ jest równoległobokiem, wobec tego odcinki KC i BS są równoległe i mają równą długość. Z założeń $|AK| = |KC|$, więc czworokąt $ABSK$ jest równoległobokiem, zatem proste KL i AB są równoległe, oraz $|KL| = \frac{1}{2}|KS| = \frac{1}{2}|AB|$.

Powyższe twierdzenie nazywane jest twierdzeniem o [linii środkowej w trójkącie](#)

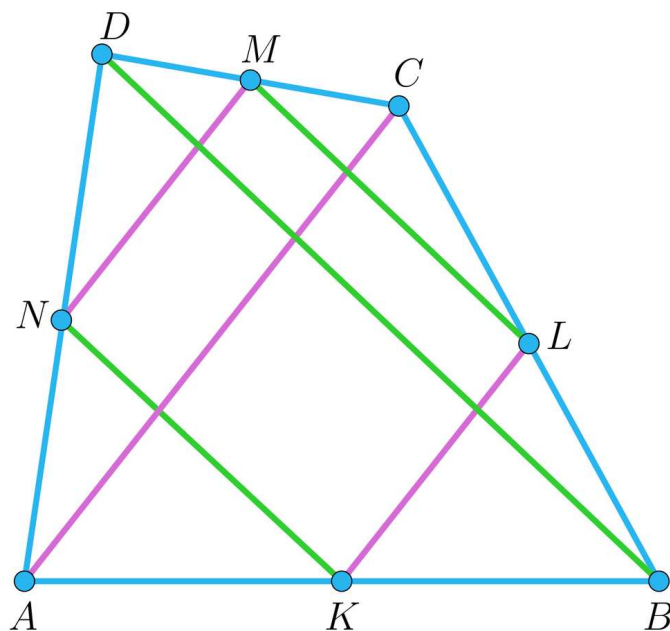
Wykorzystamy teraz powyższy przykład do charakterystyki czworokąta, którego wierzchołkami są środki boków dowolnego czworokąta $ABCD$.

Przykład 3

Punkty K, L, M, N są odpowiednio środkami boków AB, BC, CD, DA czworokąta $ABCD$ (rysunek). Pokażemy, że $KLMN$ to równoległobok.



Rozwiązanie



Wystarczy, że wykorzystamy tezę poprzedniego przykładu analizując trójkąty ABC i ACD . Otrzymamy, że odcinki KL i NM są równoległe do AC oraz równe połowie tego odcinka, więc czworokąt (na podstawie własności 3) jest równoległobokiem.

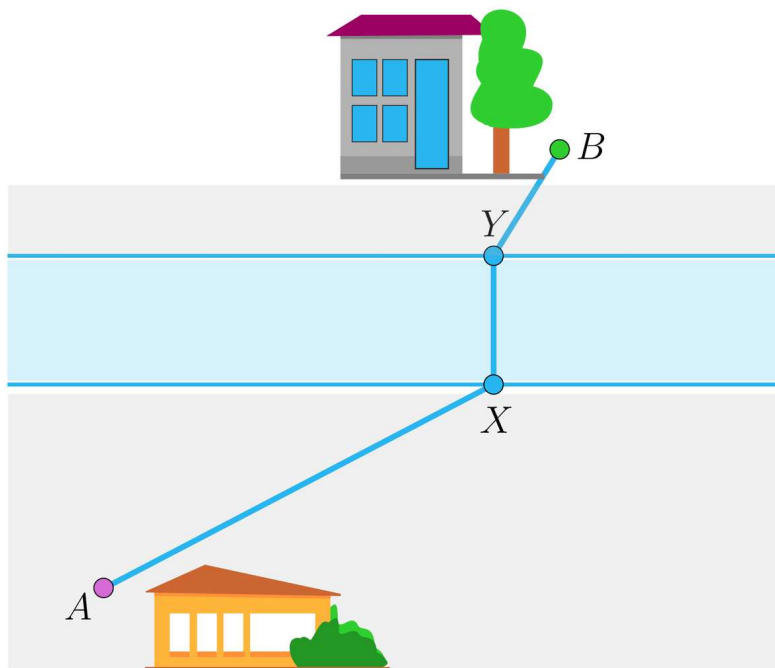
Podobnie, odcinki ML i NK są równoległe do odcinka DB oraz równe połowie tego odcinka, więc czworokąt $KLMN$ jest równoległobokiem.

Spójrzmy, jak możemy wykorzystać równoległobok w zadaniach optymalizacyjnych.

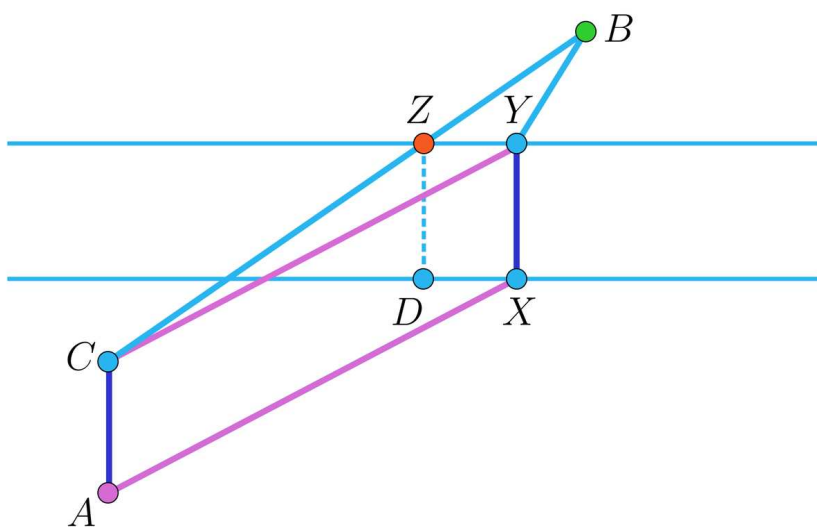
Przykład 4

Po dwóch stronach rzeki o równoległych brzegach znajdują się dwa domki położone w punktach A i B (rysunek). W którym miejscu należy wybudować most XY ,

prostopadły do brzegów rzeki, aby droga łącząca oba domki i biegnąca przez most była najkrótsza?



Rozwiązanie



Zastanowimy się, kiedy łamana $AXYB$ jest najkrótsza. Zauważmy, że brzegi rzeki są równoległe, więc jej szerokość, a więc długość mostu jest zawsze taka sama.

Możemy zatem pominąć długość mostu XY . Nasze zadanie polega więc na znalezieniu takiego miejsca przy brzegu rzeki, żeby suma długości odcinków $AX + YB$ była najmniejsza z możliwych.

Wyznamy taki punkt C , aby czworokąt $AXYC$ był równoległobokiem. Wtedy

$$|AX| + |YB| = |CY| + |YB| \geq |CB|$$

Ostatnia nierówność wynika z nierówności trójkąta.

Równość zachodzi, jeżeli punkt Y leży na odcinku CB .

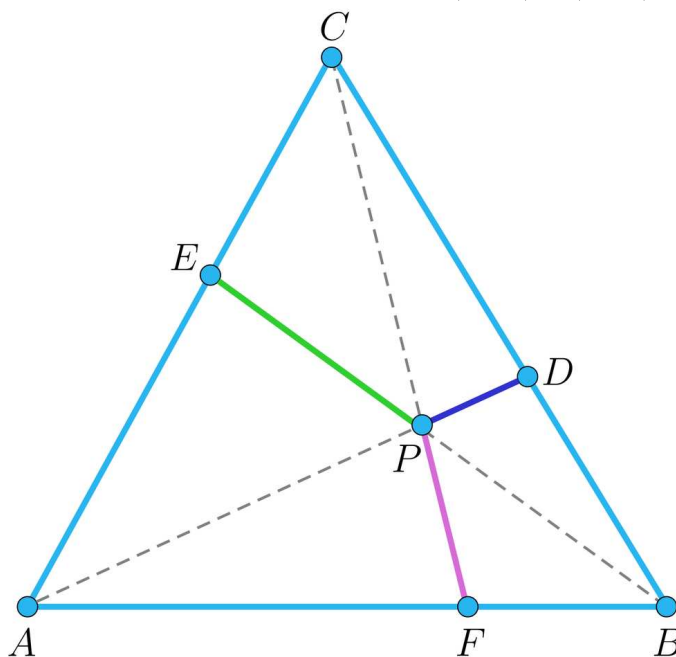
Zatem szukanym punktem na brzegu rzeki jest punkt przecięcia prostej CB z „górnym” brzegiem rzeki – punkt Z .

W tym miejscu należy wybudować most.

Przykład 5

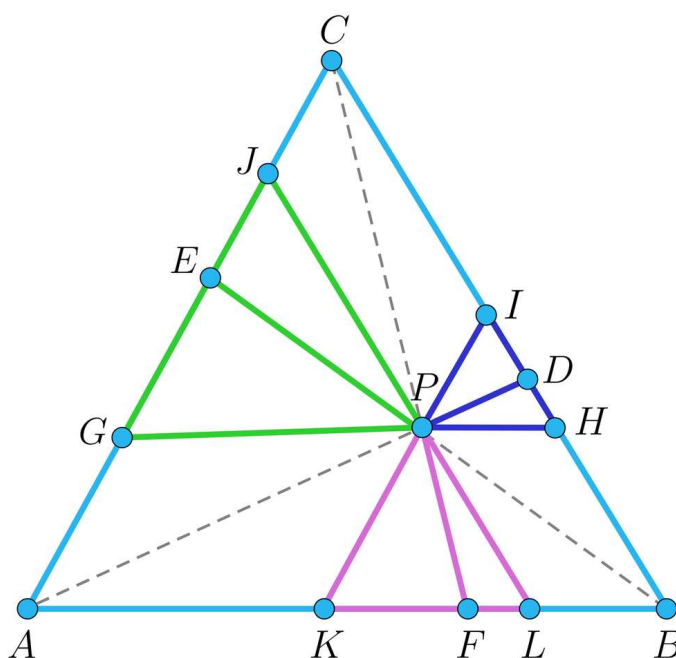
Punkt P leży wewnątrz trójkąta równobocznego ABC o boku długości 1. Proste AP , BP , CP przecinają odcinki BC , CA , AB odpowiednio w punktach D , E , F (rysunek).

Zastanówmy się jakie jest ograniczenie górne sumy: $|PD| + |PE| + |PF|$



Rozwiązanie

Prowadzimy proste równoległe do boków trójkąta przechodzące przez punkt P :



Analizując dokładnie powyższy rysunek zwrócimy uwagę na najważniejsze aspekty rozwiązania:

- powstają trzy równoległoboki: $AKPG$, $LBHP$, $JPIC$ i trzy trójkąty równoboczne: KLP , PHI , GPJ .
- odcinek leżący wewnątrz trójkąta równobocznego jest krótszy od jego boku.

Na podstawie powyższych obserwacji otrzymujemy:

$$|PD| + |PE| + |PF| < |PH| + |PG| + |KL| = |AK| + |KL| + |LB| = |AB|.$$

Zatem ograniczenie górne naszej sumy jest równe $|AB| = 1$.

Słownik

linia środkowa w trójkącie

odcinek łączący środki pewnych dwóch boków trójkąta

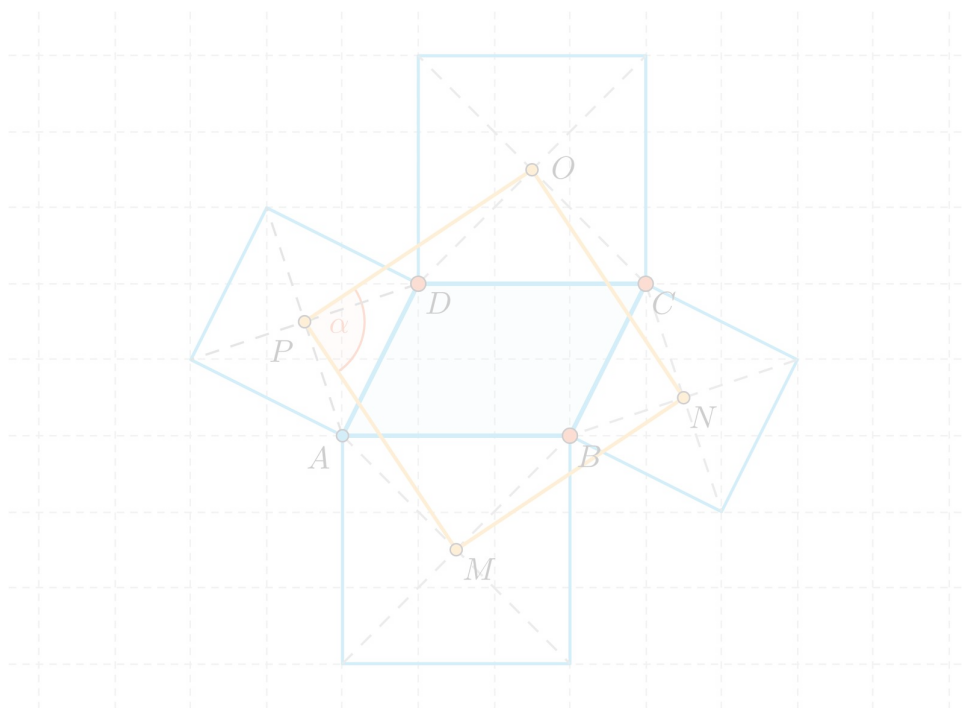
implikacja

zdanie „jeżeli p , to q ”, co zapisujemy $p \Rightarrow q$

Aplet

Polecenie 1

Na każdym boku równoległoboku zbudowano kwadrat. Środki symetrii kwadratów są wierzchołkami pewnego czworokąta. Poruszaj wierzchołkami równoległoboku i obserwuj zachodzące zmiany. Zauważ, że powstały czworokąt jest zawsze kwadratem.



Zasób interaktywny dostępny pod adresem <https://zpe.gov.pl/a/DpJ9vr8PD>

Polecenie 2

W równoległoboku $ABCD$ o bokach 6 i 12 połączono środek S boku AB ($|AB| = 12$) z wierzchołkami C i D . Wykaż, że kąt DSC jest kątem prostym.

Sprawdź się

Pokaż ćwiczenia:   

Ćwiczenie 1



Ćwiczenie 2



Ćwiczenie 3



Ćwiczenie 4



Punkt E jest takim punktem na boku AB równoległoboku $ABCD$, że $\frac{|AE|}{|EB|} = \frac{1}{2}$

Prosta DE przecina przekątną AC w punkcie F . Pole równoległoboku $ABCD$ jest równe 60. Oblicz pole trójkąta AEF .

Ćwiczenie 5



Ćwiczenie 6



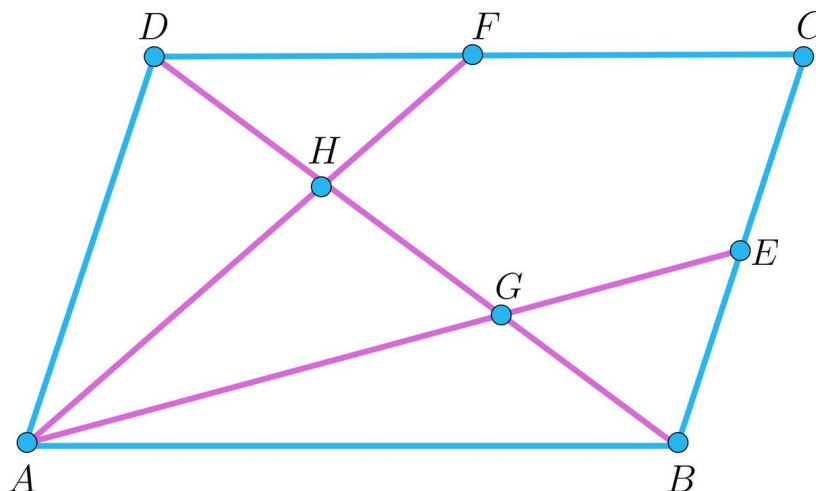
Udowodnij, że w równoległoboku $ABCD$ suma kwadratów długości boków jest równa sumie kwadratów długości przekątnych:

$$|AB|^2 + |BC|^2 + |CD|^2 + |DA|^2 = |AC|^2 + |BD|^2$$

Ćwiczenie 7



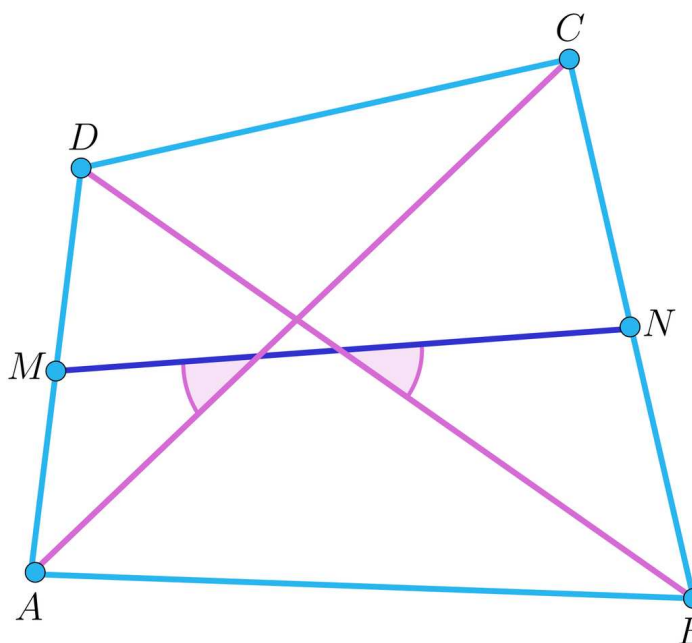
W równoległoboku $ABCD$ punkt E jest środkiem boku BC , natomiast punkt F środkiem boku CD . Odcinki AE i AF przecinają przekątną BD odpowiednio w punktach G i H .



Ćwiczenie 8



W czworokącie wypukłym $ABCD$ przekątne AC i BD są równej długości (rysunek). Punkty M i N są odpowiednio środkami boków AD i BC . Wykaż, że prosta MN tworzy równe kąty z przekątnymi AC i BD .



Dla nauczyciela

Autor: Paweł Dziuba

Przedmiot: Matematyka

Temat: Równoległobok i jego własności

Grupa docelowa:

Szkoła ponadpodstawowa, liceum ogólnokształcące, technikum, zakres rozszerzony

Podstawa programowa:

VIII. Planimetria.

Zakres podstawowy. Uczeń:

- 1) wyznacza promienie i średnice okręgów, długości cięciw okręgów oraz odcinków stycznych, w tym z wykorzystaniem twierdzenia Pitagorasa;
- 2) rozpoznaje trójkąty ostrokątne, prostokątne i rozwartokątne przy danych długościach boków (m.in. stosuje twierdzenie odwrotne do twierdzenia Pitagorasa i twierdzenie cosinusów); stosuje twierdzenie: w trójkącie naprzeciw większego kąta wewnętrznego leży dłuższy bok;
- 8) korzysta z cech podobieństwa trójkątów;
- 12) przeprowadza dowody geometryczne.

Kształtowane kompetencje kluczowe:

- kompetencje w zakresie rozumienia i tworzenia informacji;
- kompetencje matematyczne oraz kompetencje w zakresie nauk przyrodniczych, technologii i inżynierii
- kompetencje cyfrowe
- kompetencje osobiste, społeczne i w zakresie umiejętności uczenia się

Cele operacyjne:

Uczeń:

- opisuje własności równoległoboku;
- wykorzystując równoległobok pokazuje własności środkowej w trójkącie prostokątnym;
- stosuje własność równoległoboku do wyznaczania najkrótszej drogi;

- wykorzystuje własności równoległoboku do rozwiązywania zadań z geometrii płaskiej.

Strategie nauczania:

- konstruktywizm;
- konektywizm.

Metody i techniki nauczania:

- dyskusja;
- metoda kota i myszy.

Formy pracy:

- praca indywidualna;
- praca w parach;
- praca w grupach;
- praca całego zespołu klasowego.

Środki dydaktyczne:

- komputery z głośnikami, słuchawkami i dostępem do internetu;
- zasoby multimedialne zawarte w e-materiale;
- tablica interaktywna/tablica, pisak/kreda.

Przebieg lekcji

Faza wstępna:

1. Nauczyciel wprowadza uczniów w temat lekcji, omawia cele lekcji.
2. Uczniowie wspólnie ustalają kryteria sukcesu.

Faza realizacyjna:

1. Uczniowie w parach zapoznają się z treścią sekcji „Przeczytaj”, a następnie metodą kota i mysz rozwiązują ćwiczenia interaktywne w sekcji „Sprawdź się”. Mysz stara się jak najlepiej rozwiązać zadania, a kot sprawdza ich poprawność. Po 2 nieudanych próbach kot „łapie mysz”, która odpada z gry. Aby gra toczyła się dalej – role uczniów odwracają się i mysz staje się kotem – procedura się powtarza.
2. Nauczyciel prosi uczniów, aby zapoznali się z treścią materiału w sekcji „Symulacja interaktywna”. Następnie na forum klasy wspólnie wyjaśniają ewentualne wątpliwości.

Faza podsumowująca:

1. Nauczyciel omawia przebieg zajęć, wskazuje mocne i słabe strony pracy uczniów, udzielając im tym samym informacji zwrotnej.
2. Wybrany uczeń podsumowuje zajęcia, zwracając uwagę na nabyte umiejętności.

Praca domowa:

Uczniowie opracowują FAQ (minimum 3 pytania i odpowiedzi prezentujące przykład i rozwiązanie) do tematu lekcji („Równoległobok i jego własności”).

Materiały pomocnicze:

- [Równoległobok i jego własności](#)

Wskazówki metodyczne:

Analiza problemowa symulacji interaktywnej oraz wykonanie poleceń z nią związanych może być wykorzystana podczas realizacji lekcji o kątach w czworokącie.