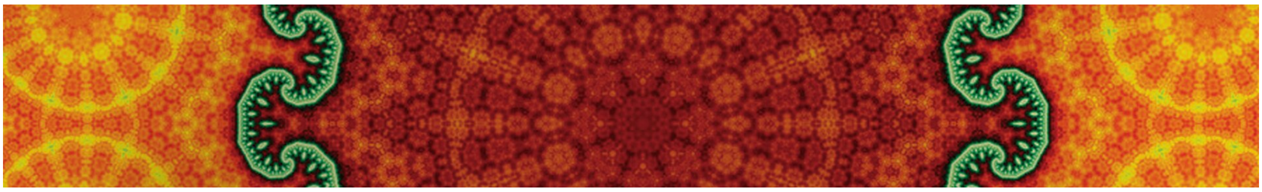


Pole koła

Materiał składa się z sekcji: "

Koło", "

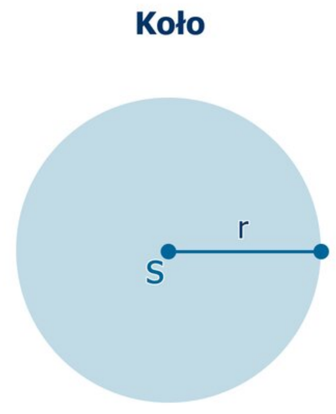
Pole koła", "

Obliczanie pola koła".

Materiał zawiera 9 ilustracji (fotografii, obrazów, rysunków), 1 film, 40 ćwiczeń, w tym 25 interaktywnych.

Pole koła

Koło



Film dostępny na portalu epodreczniki.pl

Animacja

Definicja: Koło

Kołem o środku w punkcie S
i promieniu r nazywamy zbiór tych punktów płaszczyzny, których odległość od punktu S
jest mniejsza bądź równa r
.

$K(S, r)$
– koło o środku w punkcie S
i promieniu r

Pole koła

Ważne!

Pole koła o promieniu r
jest równe iloczynowi liczby π
i kwadratu promienia .

$$P = \pi r^2$$

Obliczanie pola koła

Przykład 1

Oblicz pole koła o promieniu $4\ \text{dm}$
.
Do wzoru na pole koła wstawiamy $r = 4$
.

$$P = \pi \cdot 4^2 = 16\pi$$

Pole koła jest równe $16\pi\ \text{dm}^2$
.

Przykład 2

Obwód małego znaku zakazu wynosi $60\pi\ \text{cm}$
. Oblicz, ile cm^2
blachy potrzeba na jego wykonanie.

Obliczymy najpierw promień koła, w kształcie którego jest znak – korzystamy ze wzoru na obwód koła.

$$L = 2\pi r$$

$$60\pi = 2\pi r / : 2\pi$$

$$r = 30\ \text{cm}$$

Korzystamy ze wzoru na pole koła.

$$P = \pi r^2$$

$$P = \pi \cdot 30^2$$

$$P = 900\pi\ \text{cm}^2$$

Przyjmijmy $\pi \approx 3{,}14$
, wtedy

$$P \approx 900 \cdot 3{,}14 = 2826$$

Na wykonanie małego znaku zakazu potrzeba około $2826\ \text{cm}^2$
blachy.

Przykład 3

Przykład 3

Pole powierzchni jednego okrągłego konfetti jest równe 4π
mm^2
. Ile takich konfetti można wyciąć z kwadratowej kartki papieru o boku długości $1{,}2\ \mathrm{cm}$
?
Obliczamy najpierw średnicę d
koła, w kształcie którego jest konfetti.

$$4\pi = \pi r^2$$

$$r^2 = 4$$

$$r = 2$$

bo $r > 0$

$$d = 2r$$

$$d = 4\ \mathrm{mm}$$

Ponieważ $1{,}2\ \mathrm{cm}\ =\ 12\ \mathrm{mm}$
, zatem w kwadracie o boku $12\ \mathrm{mm}$
zmieści się 9
kół o średnicy $4\ \mathrm{mm}$
każde.
Z kwadratowej kartki można wyciąć 9
konfetti.

Przykład 4

Hipokrates z Chios badał własności figur, zwanych obecnie księżycami Hipokratesa. Księżyce Hipokratesa to figury w kształcie księżyców, związane z wielokątami i okręgami.
Rozważmy trójkąt prostokątny ABC
. Budujemy okręgi, których średnicami są boki trójkąta ABC
.

Źródło: Zespół autorski Politechniki Łódzkiej, licencja: CC BY NC 3.0.

Figury ograniczone łukami okręgu opartego na przeciwprostokątnej oraz półokręgami opartymi na przyprostokątnych to księżyce Hipokratesa.

Ćwiczenie 1
Oznacz a, b
przyprostokątne trójkąta ABC
, c
– przeciwprostokątną. Oblicz pole trójkąta. Oblicz sumę pól księżyców Hipokratesa. Co zauważasz?

Przykład 5

Salinon (po grecku solniczka) to figura ograniczona 4
półkolami swoim kształtem przypominająca solniczkę. Opisywał ją już Archimedes.

Źródło: Zespół autorski Politechniki Łódzkiej, licencja: CC BY NC 3.0.

Rozważ salinon oparty na średnicy AB
. Niech FG
będzie odcinkiem prostopadłym do tej średnicy i przechodzącym przez jej środek. Punkty F

i G
niech leżą na półkolach ograniczających salinon.
Wykaż, że pole salinonu jest równe polu koła, którego średnicą jest odcinek FG
.
Odpowiedź
Niech

$$|GF| = 2R$$

$$|CE| = r$$

Wtedy

$$|AE| = 2R - r$$

$$|AC| = 2R - 2r$$

Suma pół półkoli opartych na średnicach AD
i EB
jest równa

$$\pi(R - r)^2$$

Pole salinonu jest równe

$$\frac{\pi(2R-r)^2}{2} + \frac{\pi r^2}{2} - \pi(R - r)^2 =$$

$$\frac{\pi\left(4R^2-4Rr+r^2\right)}{2} + \frac{\pi r^2}{2} - \pi\left(R^2 - 2Rr + r^2\right)$$

$$= \pi\left(2R^2 - 2Rr + \frac{r^2}{2} + \frac{r^2}{2} - R^2 + 2Rr - r^2\right) = \pi R^2$$

Ćwiczenie 2
Niech AB
będzie średnicą koła o środku w punkcie S
. Punkt C
niech leży na odcinku AB
, natomiast punkt P
niech leży na okręgu o średnicy AB
.

Wykaż, że pole arbelosa jest równe polu koła $K(S,\ |SB|)$
.

Przykład 6

Na trójkącie prostokątnym opisano koło o polu $2{,}25\pi$
. Oblicz sumę kwadratów długości przyprostokątnych tego trójkąta.

Wiemy już, że środek koła opisanego na trójkącie prostokątnym jest zarazem środkiem przeciwprostokątnej tego trójkąta.
Oznaczmy przez r
promień tego koła, natomiast przez a, b
– przyprostokątne trójkąta wpisanego w to koło.
Pole koła jest równe $2{,}25\pi$
. Stąd

$$\pi r^2 = 2{,}25\pi \ / : \pi$$

$$r^2 = 2{,}25$$

$$r = \sqrt{2{,}25} = 1{,}5$$

bo $r > 0$

Długość przeciwprostokątnej trójkąta prostokątnego wpisanego w koło jest równa $2r$
, czyli 3
.
Rozważany trójkąt jest prostokątny, możemy więc skorzystać z twierdzenia Pitagorasa, zapisując związek między długościami jego boków.

$$a^2 + b^2 = c^2$$

$$a^2 + b^2 = 3^2$$

$$a^2 + b^2 = 9$$

Wynika z tego, że suma kwadratów długości przyprostokątnych trójkąta jest równa 9
.

Ćwiczenie 3

Pole koła o obwodzie $2{,}6\pi$
jest równe

- 6.76π
- $3{,}38\pi$
- $1{,}3\pi$
- $1{,}69\pi$

Ćwiczenie 4

Obwód koła o polu $\frac{49}{81}\pi$
jest równy

- $1\frac{5}{9}\pi$
- $\frac{7}{9}\pi$
- $1\frac{17}{81}\pi$
- $\frac{7}{9}\pi^2$

Ćwiczenie 5

Promień mniejszego z kół na rysunku jest równy 11 cm, a większego 17 cm.

Źródło: Zespół autorski Politechniki Łódzkiej, licencja: CC BY 3.0.

Pole pierścienia kołowego wyznaczonego przez te koła jest równe

- 121π
- 289
- 168π
- 410π

Ćwiczenie 6

Średnica pokrywki od garnka jest równa 30 cm. Ile blachy użyto na jej wykonanie?

- około 2826 cm^2
- około $706{,}5\text{ cm}^2$
- około 900 cm^2
- około 225 cm^2

Ćwiczenie 7

Zapisz, jak zmieni się pole koła, gdy jego średnicę

a. zwiększymy dwukrotnie
b. zmniejszymy sześciokrotnie
c. zwiększymy o 40%
d. zmniejszymy o 20%

Ćwiczenie 8

Przyjmij, że pole zielonego kwadratu jest równe 1.

Źródło: Zespół autorski Politechniki Łódzkiej, licencja: CC BY 3.0.

Rozstrzygnij, czy podane zdanie jest prawdziwe, czy fałszywe.

- Pole koła jest większe od 29.
- Obwód koła jest mniejszy od 18.
- Pole kola jest mniejsze od 28.
- Obwód kola jest większy od 20.

Ćwiczenie 9
W kwadrat o boku długości 10 cm
wpisano koło K
. Na tym kwadracie opisano też koło K_1
. Stosunek pola koła K_1
do pola koła K
jest równy

- $4:1$
- $2:1$
- $\pi:2$
- $16:1$

Ćwiczenie 10
Pole powierzchni okrągłego klombu jest równe 1 a
. Przybliżona długość promienia koła, w kształcie którego jest klomb, jest równa

- 6m
- 3m
- 32 m
- 10 m

Ćwiczenie 11
Punkt B
jest środkiem koła. Punkt A
nie należy do tego kola. Prosta przechodząca przez punkt A
jest styczna do koła w punkcie C
. Wiadomo, że $|AB| = 10 \text{ cm}$
i $|AC| = 8 \text{ cm}$
. Oblicz pole koła.

Ćwiczenie 12
Odległość środków dwóch kół stycznych zewnętrznie jest równa 10 cm
. Gdyby koła te były styczne wewnętrznie, to odległość ich środków wynosiłaby 8 cm
. Oblicz pola tych kół.

Ćwiczenie 13
Odległość środków dwóch kół stycznych zewnętrznie jest równa 10 cm
. Promienie kół pozostają w stosunku $4:1$
. Oblicz pola tych kół.

Ćwiczenie 14
Oblicz obwód kwadratu, którego pole jest równe polu koła o średnicy 18
.

Ćwiczenie 15
Oblicz stosunek obwodu koła o polu 16π
do obwodu koła o polu 169π
.

Ćwiczenie 16

Promień koła o polu $30\ \mathrm{cm}^2$
jest równy r
. Promień koła o obwodzie $30\ \mathrm{cm}$
jest równy R
.
Wskaż nierówność prawdziwą.

- $R > \mathrm{r}$
- $R < r$
- $\frac{r}{R} > 2$

Ćwiczenie 17

Koło i kwadrat mają równe pola. Oblicz stosunek obwodu koła do obwodu kwadratu.

Ćwiczenie 18

Punkt $P(-1,3)$
leży na okręgu o środku $\mathrm{S} = (0,5)$
. Oblicz pole koła ograniczonego tym okręgiem.

Ćwiczenie 19

Rozstrzygnij, czy zdanie jest prawdziwe, czy fałszywe.

- Jeśli dwa koła mają równe pola, to są przystające.
- Jeśli dwa koła są współśrodkowe, to mają równe pola.
- Pole koła wyraża się zawsze liczbą niewymierną.
- Liczba wyrażająca pole koła może być równa liczbie wyrażającej obwód tego koła.

Ćwiczenie 20

Dokończ zdanie.

a. Pole koła jest równe 16π
. Średnica tego koła wynosi ...
b. Obwód koła jest równy π
. Pole tego koła jest równe ...

Ćwiczenie 21

Uzupełnij tabelkę.

Tabela. Dane

Średnica koła	Pole koła	Obwód koła
8		
	π	
		$24\ \pi$

Ćwiczenie 22

Koło oraz romb o przekątnych długości 8 cm
i 6 cm
mają takie same obwody. Pole koła wynosi

- $\frac{\pi}{20}$ cm^2
- $\frac{100}{\pi}$ cm^2
- $\frac{10}{\pi}$ cm^2
- 10π cm^2

Ćwiczenie 23

Uzupełnij tabelkę.

Tabela. Dane

Długość boku trójkąta równobocznego	Promień koła opisanego na tym trójkącie	Pole koła opisanego na tym trójkącie
	$6\sqrt{3}$	
12		
		3π
π		

Ćwiczenie 24

Witraż ma kształt trójkąta równobocznego o boku długości 24 cm
. Pomarańczowa część witraża jest w kształcie koła wpisanego w ten trójkąt. Pozostała część witraża jest niebieska.

Oblicz pole niebieskiej figury.

Ćwiczenie 25

W okrąg wpisano kwadrat i na ty samym okręgu opisano kwadrat. Stosunek pola kwadratu opisanego na okręgu do pola kwadratu wpisanego w ten okrąg

- wyraża się liczbą niewymierną
- jest większy do 4
- jest mniejszy od 4
- jest równy 4

Ćwiczenie 26

Pole koła o środku w punkcie O
jest równe $1{,}69\pi$
. W odległości $0{,}5$
od punktu O
poprowadzono cięciwę.
Zaznacz każde zdanie prawdziwe.

- Długość cięciwy jest równa $1{,}2\pi$.
- Obwód koła jest w przybliżeniu równy $8{,}16$.
- Pole kwadratu, którego jednym z boków jest cięciwa, jest większe od $5{,}5$.

Ćwiczenie 27

Na trójkącie równobocznym o boku długości $\sqrt{3}$
opisano okrąg i w ten trójkąt wpisano okrąg .

Wykaż, że pole pierścienia kołowego wyznaczonego przez te okręgi jest równe $\frac{3}{4}\pi$
.

Ćwiczenie 28

Pole koła opisanego na trójkącie prostokątnym równoramiennym jest równe $\frac{72}{\pi}$
.
Oblicz obwód tego trójkąta.