



Modele kombinatoryczne z rozbijaniem na pary

- [Wprowadzenie](#)
- [Przeczytaj](#)
- [Galeria zdjęć interaktywnych](#)
- [Sprawdź się](#)
- [Dla nauczyciela](#)



Modele kombinatoryczne z rozbijaniem na pary

Źródło: Hermes Rivera, dostępny w internecie: <https://unsplash.com/>.

W tym materiale pokażemy, jak budować modele kombinatoryczne do zadań dotyczących zbiorów, których elementy – na podstawie warunku określonego w treści zadania – dobieramy w pary.

Tego typu zadania mają zastosowanie w zliczaniu liczby podzbiorów spośród ustalonej grupy przedmiotów, które zazwyczaj przechowywane są w parach (np. butów czy rękawiczek).

Będziemy również zajmowali się wynikami losowania kul ze zbioru kul ponumerowanych tak, że da się ustalić warunek, który ma spełniać np. suma numerów każdej z wylosowanych par kul.

Omówimy też zadania, w których zliczanie pewnych podzbiorów zadanego zbioru nie odwołuje się bezpośrednio do elementów tego zbioru dobieranych w pary, ale pomysłowy dobór modelu z wykorzystaniem par elementów może pozwolić na ustalenie odpowiedzi bez rozpatrywania dużej liczby rozłącznych przypadków.

Twoje cele

- Będziesz doskonalić umiejętność obliczania liczby takich podzbiorów danego zbioru liczbowego, które dobierane są na podstawie własności elementów: największego

i najmniejszego.

- Nauczysz się interpretować warunki dotyczące sumy par cyfr występujących w zapisie dziesiętnym liczby naturalnej.
- Umiejętność podziału elementów zbioru na pary pozwoli Ci obliczyć np. ile jest liczb, których pary cyfr spełniają określony warunek.
- Znajomość modelu odwołującego się do rozbijania zbioru na pary pozwoli Ci obliczyć, ile jest wszystkich wyników doświadczenia losowego opisanych podanymi warunkami.

Przeczytaj

Na początek pokażemy przykłady typowych zadań, które odwołują się do elementów zbioru, w czytelny sposób dającego się podzielić na podzbiory dwuelementowe.

Przykład 1

Rozpatrujemy ośmiocyfrowe liczby naturalne o różnych cyfrach wybranych ze zbioru $A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}$. Obliczymy, ile jest wśród nich takich liczb, których zapis spełnia jednocześnie cztery warunki:

1. cyfra 1 jest zapisana przed cyfrą 2,
2. cyfra 3 jest zapisana przed cyfrą 4,
3. cyfra 5 jest zapisana przed cyfrą 6,
4. cyfra 7 jest zapisana przed cyfrą 8.

Rozwiązanie

I sposób:

Liczbę spełniającą warunki zadania będziemy konstruować w czterech etapach, odpowiadających narzuconym warunkom.

W pierwszym etapie wybierzemy dwa miejsca (spośród ośmiu dostępnych w zapisie dziesiętnym danej liczby) dla cyfr 1 oraz 2: możemy to zrobić na $\binom{8}{2} = 28$ sposobów.

Następnie zapisujemy na tych miejscach cyfry 1 oraz 2 tak, aby cyfra 1 była zapisana przed cyfrą 2 – możemy to zrobić na jeden sposób.

W drugim etapie wybierzemy dwa miejsca (spośród sześciu pozostałych w zapisie dziesiętnym danej liczby) dla cyfr 3 oraz 4: możemy to zrobić na $\binom{6}{2} = 15$ sposobów.

Następnie zapisujemy na tych miejscach cyfry 3 oraz 4 tak, aby cyfra 3 była zapisana przed cyfrą 4 – możemy to zrobić na jeden sposób.

W trzecim etapie wybierzemy dwa miejsca (spośród czterech pozostałych w zapisie dziesiętnym danej liczby) dla cyfr 5 oraz 6: możemy to zrobić na $\binom{4}{2} = 6$ sposobów.

Następnie zapisujemy na tych miejscach cyfry 5 oraz 6 tak, aby cyfra 5 była zapisana przed cyfrą 6 – możemy to zrobić na jeden sposób.

W czwartym etapie na ostatnich dwóch miejscach zapisujemy cyfry 7 oraz 8 tak, aby cyfra 7 była zapisana przed cyfrą 8 – możemy to zrobić na jeden sposób.

Korzystając z **reguły mnożenia**, obliczamy, że liczb spełniających warunki zadania jest

$$\binom{8}{2} \cdot \binom{6}{2} \cdot \binom{4}{2} = 28 \cdot 15 \cdot 6 = 2520.$$

II sposób

Ośmiocyfrową liczbę naturalną o różnych cyfrach wybranych ze zbioru

$A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}$ utożsamiamy z permutacją $(a_1, a_2, \dots, a_8)$ zbioru A , skąd dostajemy, że wszystkich rozpatrywanych ośmiocyfrowych liczb naturalnych jest tyle, ile jest wszystkich permutacji zbioru A , czyli $8!$.

Rozważmy dowolną permutację zbioru A . W takim ciągu pewne dwa miejsca zajmują elementy 1 oraz 2 – założmy, że $a_k = 1$ i $a_l = 2$, gdzie $k, l \in \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}$ i $k \neq l$. Zamieniając miejscami elementy 1 i 2 dostaniemy permutację, w której $a_k = 2$ i $a_l = 1$. W dokładnie jednym z dwóch omówionych właśnie przypadków element 1 jest zapisany przed elementem 2.

Zatem – korzystając z **reguły równoliczności** – stwierdzamy, że połowa spośród wszystkich rozpatrywanych liczb spełnia pierwszy warunek: cyfra 1 jest zapisana przed cyfrą 2. Liczb ośmiocyfrowych spełniających pierwszy warunek jest więc $\frac{8!}{2}$.

Rozważmy teraz taką permutację zbioru A , w której element 1 jest zapisany przed elementem 2. W takim ciągu pewne dwa miejsca zajmują elementy 3 oraz 4. Rozumując podobnie jak powyżej otrzymujemy następujący wniosek: jeżeli w tej permutacji zamienimy miejscami elementy 3 i 4, to w jednej z tych dwóch permutacji element 3 jest zapisany przed elementem 4.

Stwierdzamy więc, ponownie korzystając z **reguły równoliczności**, że połowa spośród rozpatrywanych liczb spełniających pierwszy warunek spełnia również drugi warunek: cyfra 3 jest zapisana przed cyfrą 4. Stąd liczb spełniających warunki (1) i (2) jest $\frac{8!}{2 \cdot 2}$.

Rozważamy z kolei taką permutację zbioru A , w której element 1 jest zapisany przed elementem 2 oraz element 3 jest zapisany przed elementem 4.

Kolejny raz rozumujemy podobnie, jak to było zaprezentowane wcześniej i na tej podstawie stwierdzamy, że połowa spośród rozpatrywanych liczb spełniających warunki (1) i (2) spełnia również trzeci warunek: cyfra 5 jest zapisana przed cyfrą 6. Oznacza to, że liczb spełniających warunki (1), (2) oraz (3) jest $\frac{8!}{2 \cdot 2 \cdot 2}$.

Na koniec rozważamy taką permutację zbioru A , w której element 1 jest zapisany przed elementem 2, element 3 jest zapisany przed elementem 4 oraz element 5 jest zapisany przed elementem 6.

Rozumując podobnie, jak to zaprezentowane było powyżej stwierdzamy, że połowa spośród rozpatrywanych liczb spełniających warunki (1), (2) oraz (3) spełnia też czwarty warunek: cyfra 7 jest zapisana przed cyfrą 8.

Podsumowując stwierdzamy, że liczb spełniających wszystkie cztery warunki jest

$$\frac{8!}{2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2} = 2520.$$

Uwaga. Wykorzystując rozwiązanie zadania z powyższego przykładu, zauważymy, że ośmiocyfrowych liczb naturalnych, w których zapisie występują dwie jedynki, dwie trójki, dwie piątki i dwie siódemki (17335157 to przykładowa liczba spełniająca te warunki) jest 2520.

Wystarczy w tym celu zauważyć, że:

1. jeżeli w liczbie spełniającej powyższe warunki zamienimy: drugą jedynkę na dwójkę, drugą trójkę na czwórkę, drugą piątkę na szóstkę oraz drugą siódemkę na ósemkę, to otrzymamy liczbę rozpatrywaną w powyższym przykładzie,
2. jeżeli w liczbie spełniającej warunki podane w przykładzie zamienimy: dwójkę na jedynkę, czwórkę na trójkę, szóstkę na piątkę oraz ósemkę na siódemkę, to otrzymamy liczbę ośmiocyfrową, w której zapisie występują dwie jedynki, dwie trójki, dwie piątki i dwie siódemki.

Takie wzajemnie jednoznaczne przyporządkowanie pokazuje, że liczb w tych dwóch zbiorach jest tyle samo, a więc liczb spełniających podane warunki jest 2520.

Rozumując podobnie, jak w rozwiązaniu sposobem drugim, można pokazać, że:

- ośmioliterowych wyrazów, w których zapisie występują dwie litery 'a', dwie litery 'i', dwie litery 'k' oraz dwie litery 't' ('tikitaka' to przykładowy wyraz spełniający te warunki) jest $\frac{8!}{2! \cdot 2! \cdot 2!} = 2520$,
- siedmiocyfrowych liczb naturalnych, w których zapisie występują dwie jedynki, dwie trójki oraz trzy piątki jest $\frac{7!}{2! \cdot 2! \cdot 3!} = 210$,
- jest $\frac{n!}{n_1! \cdot n_2! \cdot \dots \cdot n_k!}$ n -elementowych permutacji, w których parami różne elementy $a_1, a_2, \dots, a_k$ powtarzają się odpowiednio $n_1, n_2, \dots, n_k$ razy, przy czym $n_1 + n_2 + \dots + n_k = n$.

Uwaga 2. Permutację, w której dopuszczalne są powtórzenia elementów, nazywa się *permutacją z powtórzeniami*.

Przykład 2

Ze zbioru $A = \{1, 2, 3, \dots, 20\}$ dwudziestu początkowych dodatnich liczb całkowitych losujemy 5-elementowy podzbiór. Obliczymy, ile spośród wszystkich wyników takiego losowania spełnia warunek: suma największego i najmniejszego elementu wylosowanego podzbioru jest równa 21.

Rozwiązanie

Zauważmy, że w podanym zbiorze jest 10 par liczb, których suma jest równa 21: 1 i 20, 2 i 19, 3 i 18, 4 i 17, 5 i 16, 6 i 15, 7 i 14, 8 i 13, 9 i 12 oraz 10 i 11.

Dla dwóch ostatnich par liczb warunki zadania nie będą spełnione, wobec tego możliwe są następujące rozłączne przypadki:

1. najmniejszy i największy element to odpowiednio 1 i 20. Wtedy podzbiór spełniający warunki zadania tworzą, wraz z tymi dwoma elementami, trzy elementy wybrane z 18-elementowego zbioru $A \setminus \{1, 20\}$. W tym przypadku możliwych podzbiorów jest tyle, ile jest 3-elementowych kombinacji zbioru 18-elementowego, czyli $\binom{18}{3} = 816$,
2. najmniejszy i największy element to odpowiednio 2 i 19. Wtedy podzbiór spełniający warunki zadania tworzą, wraz z tymi dwoma elementami, trzy elementy wybrane z 16-elementowego zbioru $A \setminus \{1, 2, 19, 20\}$. W tym przypadku możliwych podzbiorów jest tyle, ile jest 3-elementowych kombinacji zbioru 16-elementowego, czyli $\binom{16}{3} = 560$,
3. najmniejszy i największy element to odpowiednio 3 i 18. Wtedy podzbiór spełniający warunki zadania tworzą, wraz z tymi dwoma elementami, trzy elementy wybrane z 14-elementowego zbioru $A \setminus \{1, 2, 3, 18, 19, 20\}$. W tym przypadku możliwych podzbiorów jest tyle, ile jest 3-elementowych kombinacji zbioru 14-elementowego, czyli $\binom{14}{3} = 364$,
4. najmniejszy i największy element to odpowiednio 4 i 17. Wtedy podzbiór spełniający warunki zadania tworzą, wraz z tymi dwoma elementami, trzy elementy wybrane z 12-elementowego zbioru $A \setminus \{1, 2, 3, 4, 17, 18, 19, 20\}$. W tym przypadku możliwych podzbiorów jest tyle, ile jest 3-elementowych kombinacji zbioru 12-elementowego, czyli $\binom{12}{3} = 220$,
5. najmniejszy i największy element to odpowiednio 5 i 16. Wtedy podzbiór spełniający warunki zadania tworzą, wraz z tymi dwoma elementami, trzy elementy wybrane z 10-elementowego zbioru $\{6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 13, 14, 15\}$. W tym przypadku możliwych podzbiorów jest tyle, ile jest 3-elementowych podzbiorów zbioru 10-elementowego, czyli $\binom{10}{3} = 120$,
6. najmniejszy i największy element to odpowiednio 6 i 15. Wtedy podzbiór spełniający warunki zadania tworzą, wraz z tymi dwoma elementami, trzy elementy wybrane z 8-elementowego zbioru $\{7, 8, 9, 10, 11, 12, 13, 14\}$. W tym przypadku możliwych podzbiorów jest tyle, ile jest 3-elementowych kombinacji zbioru 8-elementowego, czyli $\binom{8}{3} = 56$,
7. najmniejszy i największy element to odpowiednio 7 i 14. Wtedy podzbiór spełniający warunki zadania tworzą, wraz z tymi dwoma elementami, trzy elementy wybrane z 6-elementowego zbioru $\{8, 9, 10, 11, 12, 13\}$. W tym przypadku możliwych

podzbiorów jest tyle, ile jest 3-elementowych kombinacji zbioru 6-elementowego, czyli $\binom{6}{3} = 20$,

8. najmniejszy i największy element to odpowiednio 8 i 13. Wtedy podzbiór spełniający warunki zadania tworzą, wraz z tymi dwoma elementami, trzy elementy wybrane z 4-elementowego zbioru $\{9, 10, 11, 12\}$. W tym przypadku możliwych podzbiorów jest tyle, ile jest 3-elementowych kombinacji zbioru 4-elementowego, czyli $\binom{4}{3} = 4$.

Podsumowując, stwierdzamy, że wszystkich wyników losowania, które spełniają podany warunek jest $816 + 560 + 364 + 220 + 120 + 56 + 20 + 4 = 2160$.

Przykład 3

Rozpatrzmy liczby 8-cyfrowe o różnych cyfrach wybranych ze zbioru

$$A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}.$$

Obliczymy, ile jest wśród nich takich liczb, w których równe są następujące cztery sumy:

s_1 – pierwszej i drugiej cyfry,

s_2 – trzeciej i czwartej cyfry,

s_3 – piątej i szóstej cyfry,

s_4 – siódmej i ósmej cyfry.

Rozwiązanie

Ponieważ suma wszystkich cyfr opisanej liczby 8-cyfrowej jest równa

$$1 + 2 + \dots + 8 = \frac{8 \cdot 9}{2} = 36, \text{ więc } s_1 = s_2 = s_3 = s_4 = \frac{36}{4} = 9.$$

Zauważmy, że zbiór A możemy następująco rozbić na cztery dwuelementowe podzbiory tak, żeby suma elementów w każdym podzbiorze była równa 9:

$$A = \{1, 8\} \cup \{2, 7\} \cup \{3, 6\} \cup \{4, 5\}.$$

Dalszą część rozwiązania przedstawimy dwoma sposobami.

I sposób:

Liczbę spełniającą warunki zadania będziemy konstruować w czterech etapach, odpowiadających narzuconym warunkom.

W pierwszym etapie wybierzemy pierwszą cyfrę, co możemy zrobić na 8 sposobów, a następnie dopiszemy do niej drugą, która – ze względu na wybraną pierwszą cyfrę – jest już wyznaczona jednoznacznie.

W drugim etapie spośród niewybranych jeszcze cyfr wybierzemy trzecią cyfrę, co możemy zrobić na 6 sposobów, a następnie dopiszemy do niej czwartą cyfrę, która po wyborze trzeciej cyfry jest wyznaczona jednoznacznie.

W trzecim etapie spośród cyfr niewybranych w dwóch pierwszych etapach wybierzemy piątą cyfrę, co możemy zrobić na 4 sposoby, a następnie dopiszemy do niej szóstą cyfrę, która po wyborze piątej cyfry jest wyznaczona jednoznacznie.

W czwartym etapie pozostaje nam rozmieścić pozostałe dwie cyfry na ostatnich dwóch miejscach, co możemy zrobić na 2 sposoby.

Korzystając z **reguły mnożenia**, obliczamy, że wszystkich liczb spełniających warunki zadania jest $8 \cdot 6 \cdot 4 \cdot 2 = 384$.

II sposób:

Ponieważ:

- sposobów podziału liczb ze zbioru A na cztery sumy s_1, s_2, s_3, s_4 jest tyle, ile jest permutacji zbioru 4-elementowego, czyli $4! = 24$,
- w każdej z tak otrzymanych czterech sum ustalimy kolejność składników na 2 sposoby,

więc liczb spełniających warunki zadania jest $4! \cdot 2^4 = 24 \cdot 16 = 384$.

Przykład 4

W szufladzie znajduje się 10 par rękawiczek, przy czym każde dwie spośród tych par są w różnych kolorach. Losujemy z tej szuflady 7 rękawiczek. Obliczymy, ile jest takich wyników tego losowania, że:

- a. wśród wylosowanych nie będzie żadnej pary rękawiczek,
- b. wśród wylosowanych będzie dokładnie jedna para rękawiczek,
- c. wśród wylosowanych będą dokładnie dwie pary rękawiczek,
- d. wśród wylosowanych będą dokładnie trzy pary rękawiczek.

Rozwiązanie

Dobieramy w pary, zgodnie z kolorem, rękawiczki znajdujące się w szufladzie, a następnie numerujemy te pary od 1 do 10. Każdej z tak ponumerowanych par przypisujemy liczbę l_i (gdzie $i = 1, 2, \dots, 10$) rękawiczek wylosowanych z tej pary.

Ponieważ:

- z każdej pary możemy wylosować co najwyżej 2 rękawiczki, więc $l_i \in \{0, 1, 2\}$, dla $i = 1, 2, \dots, 10$,
- w sumie mamy wylosować 7 rękawiczek, więc
$$l_1 + l_2 + l_3 + l_4 + l_5 + l_6 + l_7 + l_8 + l_9 + l_{10} = 7.$$

Zauważmy następnie, że:

- a. wśród wylosowanych nie będzie żadnej pary rękawiczek wtedy i tylko wtedy, gdy w ciągu $(l_1, l_2, l_3, l_4, l_5, l_6, l_7, l_8, l_9, l_{10})$ żaden element nie będzie równy 2, dokładnie 7 elementów będzie równych 1 (możliwych wyborów jest więc tyle, ile jest 7-elementowych kombinacji zbioru 10-elementowego) i pozostałe 3 elementy będą równe 0. Wszystkich takich ciągów jest zatem $\binom{10}{7} = 120$;
- b. wśród wylosowanych będzie dokładnie jedna para rękawiczek wtedy i tylko wtedy, gdy w ciągu $(l_1, l_2, l_3, l_4, l_5, l_6, l_7, l_8, l_9, l_{10})$ dokładnie 1 element będzie równy 2 (można go wybrać na 10 sposobów), dokładnie 5 elementów będzie równych 1 (możliwych wyborów jest więc tyle, ile jest 5-elementowych kombinacji zbioru 9-elementowego) i pozostałe 4 elementy będą równe 0. Oznacza to, że wszystkich takich ciągów jest $10 \cdot \binom{9}{5} = 10 \cdot 126 = 1260$;
- c. wśród wylosowanych będą dokładnie dwie pary rękawiczek wtedy i tylko wtedy, gdy w ciągu $(l_1, l_2, l_3, l_4, l_5, l_6, l_7, l_8, l_9, l_{10})$ dokładnie 2 elementy będą równe 2 (możliwych wyborów jest więc tyle, ile jest 2-elementowych kombinacji zbioru 10-elementowego), dokładnie 3 elementy będą równe 1 (możliwych wyborów jest więc tyle, ile jest 3-elementowych kombinacji zbioru 8-elementowego) i każdy z pozostałych 5 elementów będzie równy 0. Wobec tego wszystkich takich ciągów jest $\binom{10}{2} \cdot \binom{8}{3} = 45 \cdot 56 = 2520$;
- d. wśród wylosowanych będą dokładnie trzy pary rękawiczek wtedy i tylko wtedy, gdy w ciągu $(l_1, l_2, l_3, l_4, l_5, l_6, l_7, l_8, l_9, l_{10})$ dokładnie 3 elementy będą równe 2 (możliwych wyborów jest więc tyle, ile jest 3-elementowych kombinacji zbioru 10-elementowego), dokładnie 1 element będzie równy 1 (można go wybrać na 7 sposobów) i każdy z pozostałych 6 elementów będzie równy 0. Stąd wszystkich takich ciągów jest $\binom{10}{3} \cdot 7 = 120 \cdot 7 = 840$.

Ponieważ jedną rękawiczkę z ustalonej pary możemy wybrać na dwa sposoby, więc ostatecznie otrzymujemy, że:

- a. jest $\binom{10}{7} \cdot 2^7 = 120 \cdot 128 = 15360$ możliwych wyników losowania takich, że wśród wylosowanych nie będzie żadnej pary rękawiczek,
- b. jest $10 \cdot \binom{9}{5} \cdot 2^5 = 1260 \cdot 32 = 40320$ możliwych wyników losowania takich, że wśród wylosowanych będzie dokładnie jedna para rękawiczek,
- c. jest $\binom{10}{2} \cdot \binom{8}{3} \cdot 2^3 = 2520 \cdot 8 = 20160$ możliwych wyników losowania takich, że wśród wylosowanych będą dokładnie dwie pary rękawiczek,

- d. $\binom{10}{3} \cdot 7 \cdot 2^1 = 840 \cdot 2 = 1680$ możliwych wyników losowania takich, że wśród wylosowanych będą dokładnie trzy pary rękawiczek.

Dla podsumowania zauważmy, że

$$15360 + 40320 + 20160 + 1680 = 77520 = \binom{20}{7}.$$

Przykład 5

Rozpatrzmy zbiór $A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11\}$. Obliczymy, ile jest takich podzbiorów zbioru A , które wśród swoich elementów nie mają pary liczb o sumie równej 12.

Rozwiązanie

Zauważmy, że w podanym zbiorze jest 5 par liczb, których suma jest równa 12: 1 i 11, 2 i 10, 3 i 9, 4 i 8, 5 i 7. Bez pary pozostaje element 6.

Podzbiór spełniający warunki zadania będziemy konstruowali w 6 etapach:

- w I etapie wybierzemy podzbiór zbioru $A_1 = \{1, 11\}$; ze wszystkich czterech podzbiorów tego zbioru nie możemy wybrać jedynie całego zbioru A_1 , a więc pozostają nam 3 możliwości,
- w II etapie wybierzemy podzbiór zbioru $A_2 = \{2, 10\}$; ze wszystkich czterech podzbiorów tego zbioru nie możemy wybrać jedynie całego zbioru A_2 , wobec tego pozostają nam 3 możliwości,
- w III etapie wybierzemy podzbiór zbioru $A_3 = \{3, 9\}$; ze wszystkich czterech podzbiorów tego zbioru nie możemy wybrać jedynie całego zbioru A_3 , co oznacza, że pozostają nam 3 możliwości,
- w IV etapie wybierzemy podzbiór zbioru $A_4 = \{4, 8\}$; ze wszystkich czterech podzbiorów tego zbioru nie możemy wybrać jedynie całego zbioru A_4 , a więc pozostają nam 3 możliwości,
- w V etapie wybierzemy podzbiór zbioru $A_5 = \{5, 7\}$; ze wszystkich czterech podzbiorów tego zbioru nie możemy wybrać jedynie całego zbioru A_5 , zatem pozostają nam 3 możliwości,
- w VI etapie wybierzemy podzbiór zbioru $A_6 = \{6\}$; tym razem możemy wybrać każdy podzbiór tego zbioru, wobec tego mamy 2 możliwości.

Korzystając z [reguły mnożenia](#), obliczamy, że podzbiorów spełniających warunki zadania jest $3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 2 = 2 \cdot 3^5 = 2 \cdot 243 = 486$.

Słownik

k-elementowa kombinacja zbioru n-elementowego

każdy k -elementowy podzbiór zbioru n -elementowego, gdzie $0 \leq k \leq n$, nazywamy k -elementową kombinacją tego zbioru n -elementowego

liczba wszystkich k-elementowych kombinacji zbioru n-elementowego

liczba wszystkich k -elementowych kombinacji zbioru n -elementowego, gdzie $0 \leq k \leq n$, jest równa

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k! \cdot (n-k)!} = \frac{n \cdot (n-1) \cdot \dots \cdot (n-k+1)}{1 \cdot 2 \cdot \dots \cdot k}$$

reguła równoliczności

dwa zbiory A i B są równoliczne (mają tyle samo elementów) jeżeli ich elementy można przyporządkować wzajemnie jednoznacznie, to znaczy: każdemu elementowi zbioru A przyporządkujemy dokładnie jeden element zbioru B oraz każdemu elementowi zbioru B przyporządkujemy dokładnie jeden element zbioru A

reguła mnożenia

liczba wszystkich możliwych wyników doświadczenia polegającego na wykonaniu po kolei n czynności, z których pierwsza może zakończyć się na jeden z k_1 sposobów, druga – na jeden z k_2 sposobów, trzecia – na jeden z k_3 sposobów i tak dalej do n -tej czynności, która może zakończyć się na jeden z k_n sposobów, jest równa

$$k_1 \cdot k_2 \cdot \dots \cdot k_n$$

permutacja zbioru n-elementowego

każdy ciąg utworzony ze wszystkich elementów zbioru n -elementowego

liczba wszystkich permutacji zbioru n-elementowego

liczba wszystkich permutacji zbioru n -elementowego jest równa $P_n = n!$

Galeria zdjęć interaktywnych

Polecenie 1

Zapoznaj się z przedstawioną poniżej galerią zdjęć interaktywnych.

Przeanalizuj zaprezentowane w niej rozumowanie pokazujące, jak ustalić różnicę liczby wszystkich podzbiorów o nieparzystej sumie elementów oraz liczby wszystkich podzbiorów o parzystej sumie elementów, kiedy te podzbiory wybierane są ze zbioru

$$A = \{1, 2, 3, \dots, 2n - 1, 2n\}.$$

Polecenie 2

Korzystając z przykładu omówionego w poleceniu pierwszym, rozwiąż samodzielnie następujące zadanie.

Zbiór $A = \{1, 2, 3, \dots, 2n - 1, 2n, 2n + 1\}$, gdzie $n \geq 8$, jest złożony z $2n + 1$ początkowych dodatnich liczb całkowitych. Rozpatrujemy wszystkie ósmioelementowe podzbiory zbioru A .

Przez x oznaczmy liczbę tych podzbiorów, których suma wszystkich elementów jest parzysta, a przez y oznaczmy liczbę tych podzbiorów, których suma wszystkich elementów jest

nieparzysta. Wykaż, że $x - y = \binom{n}{4}$.

Sprawdź się

Pokaż ćwiczenia:   

Ćwiczenie 1



Oblicz, ile jest siedmiocyfrowych liczb naturalnych o różnych cyfrach wybranych ze zbioru $A = \{1, 2, 3, 4, 5, 7, 9\}$, których zapis spełnia jednocześnie trzy warunki:

cyfra 2 jest zapisana za cyfrą 4,

cyfra 7 jest zapisana przed cyfrą 9,

cyfra 1 jest zapisana za cyfrą 5.

Zakoduj kolejno cyfry setek, dziesiątek i jedności otrzymanego wyniku.

Odpowiedź:

Ćwiczenie 2



Z pudełka, w którym znajduje się 10 kul ponumerowanych liczbami od 1 do 10 losujemy 5 kul. Wynika stąd, że liczba wszystkich możliwości wylosowania w ten sposób takiego zestawu kul, wśród których nie będzie pary kul o sumie numerów wynoszącej 11, jest równa:

☐ $\binom{10}{5} \cdot 2^5$

☐ $10 \cdot 8 \cdot 6 \cdot 4 \cdot 2$

☐ $\frac{10 \cdot 8 \cdot 6 \cdot 4 \cdot 2}{2^5}$

☐ 2^5

Ćwiczenie 3



W pewnym liceum jest 17 klas. Do Rady Szkoły w tym liceum zgłoszono po dwie osoby z każdej klasy.

Na ile sposobów można z tej 34-osobowej Rady wybrać 6 osób do Komisji Kultury, wiedząc, że w jej skład nie mogą wejść dwie osoby z tej samej klasy?

Odpowiedź:

Ćwiczenie 4



Ze zbioru $A = \{1, 2, 3, \dots, 100\}$ stu początkowych dodatnich liczb całkowitych losujemy 10 -elementowy podzbiór.

Oznaczmy przez n liczbę wyników tego losowania, które spełniają warunek: suma największego i najmniejszego elementu wylosowanego podzbioru jest równa 180.

Wówczas:

☐ $n \in (170000, 210000)$

☐ $n \in (140000, 180000)$

☐ $n \in (70000, 120000)$

☐ $n \in (110000, 150000)$

Ćwiczenie 5



Rozpatrzmy liczby 7-cyfrowe o różnych cyfrach wybranych ze zbioru $\{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$. Oznaczmy przez A zbiór tych liczb spośród rozpatrywanych, w których zapisie równe są następujące trzy sumy:

s_1 - pierwszej i ostatniej cyfry,

s_2 - drugiej i szóstej cyfry,

s_3 - trzeciej i piątej cyfry.

Wynika stąd, że:

☐ $|A| < 150$

☐ $|A| = 48$

☐ $|A| > 70$

☐ $|A| = 144$

Ćwiczenie 6



W pudełku znajduje się 15 kul ponumerowanych liczbami od 1 do 15. Z tego pudełka losujemy 7 kul.

Oznaczamy:

A – zbiór wyników tego losowania spełniających warunek: wśród wylosowanych nie będzie żadnej pary kul, których suma numerów jest równa 16,

B – zbiór wyników tego losowania spełniających warunek: wśród wylosowanych będzie dokładnie jedna para kul, których suma numerów jest równa 16,

C – zbiór wyników tego losowania spełniających warunek: wśród wylosowanych będą dokładnie 2 pary kul, których suma numerów jest równa 16,

D – zbiór wyników tego losowania spełniających warunek: wśród wylosowanych będą dokładnie 3 pary kul, których suma numerów jest równa 16.

Dobierz w pary równe liczby.

3024

”|” D ”|”

576

”|” A ”|”

2520

”|” B ”|”

315

”|” C ”|”

Ćwiczenie 7



Zbiór $A = \{1, 2, 3, \dots, 200, 201\}$ jest złożony z 201 kolejnych liczb naturalnych od 1 do 201. Rozpatrujemy wszystkie czteroelementowe podzbiory zbioru A . Przez p oznaczamy liczbę tych podzbiorów, których suma wszystkich elementów jest parzysta, a przez n oznaczamy liczbę tych podzbiorów, których suma wszystkich elementów jest nieparzysta. Wówczas:

☐ $n - p = \binom{101}{2}$

☐ $p > n$

☐ $p - n = \binom{100}{2}$

☐ $n > p$

Ćwiczenie 8



Rozpatrujemy wszystkie podzbiory zbioru $A = \{1, 2, 3, \dots, 13, 14\}$, złożonego z 14 kolejnych liczb naturalnych od 1 do 14.

Oblicz, ile jest takich podzbiorów zbioru A , które wśród swoich elementów nie mają pary liczb o sumie równej 15.

Odpowiedź:

Dla nauczyciela

Autor: Paweł Kwiatkowski

Przedmiot: Matematyka

Temat: Modele kombinatoryczne z rozbijaniem na pary

Grupa docelowa:

Szkoła ponadpodstawowa, liceum ogólnokształcące, technikum, zakres rozszerzony

Podstawa programowa:

XI. Kombinatoryka.

Zakres rozszerzony. Uczeń spełnia wymagania określone dla zakresu podstawowego, a ponadto:

1) oblicza liczbę możliwych sytuacji, spełniających określone kryteria, z wykorzystaniem reguły mnożenia i dodawania (także łącznie) oraz wzorów na liczbę: permutacji, kombinacji i wariacji, również w przypadkach wymagających rozważenia złożonego modelu zliczania elementów;

2) stosuje współczynnik dwumianowy (symbol Newtona) i jego własności przy rozwiązywaniu problemów kombinatorycznych.

Kształtowane kompetencje kluczowe:

- kompetencje cyfrowe;
- kompetencje osobiste, społeczne i w zakresie umiejętności uczenia się;
- kompetencje matematyczne oraz kompetencje w zakresie nauk przyrodniczych, technologii i inżynierii;
- kompetencje w zakresie rozumienia i tworzenia informacji.

Cele operacyjne:

Uczeń:

- oblicza liczby takich podzbiorów danego zbioru liczbowego, które dobierane są na podstawie własności elementów: największego i najmniejszego,
- interpretuje warunki dotyczące sumy par cyfr występujących w zapisie dziesiętnym liczby naturalnej,
- oblicza ile jest liczb, których pary cyfr spełniają określony warunek wykorzystując podział elementów zbioru na pary,

- oblicza ile jest wszystkich wyników doświadczenia losowego opisanych podanymi warunkami wykorzystując znajomość modelu odwołującego się do rozbijania zbioru na pary.

Strategie nauczania:

- konstruktywizm;
- konektywizm.

Metody i techniki nauczania:

- dyskusja;
- metoda tekstu przewodniego;
- liga zadaniowa.

Formy pracy:

- praca indywidualna;
- praca w grupach;
- praca całego zespołu klasowego.

Środki dydaktyczne:

- komputery z głośnikami, słuchawkami i dostępem do internetu;
- zasoby multimedialne zawarte w e-materiale;
- tablica interaktywna/tablica, pisak/kreda.

Przebieg lekcji

Faza wstępna:

1. Nauczyciel określa temat lekcji: „Modele kombinatoryczne z rozbijaniem na pary” oraz cele, wybrana osoba formułuje kryteria sukcesu.

Faza realizacyjna:

1. Uczniowie indywidualnie zapoznają się z treścią w sekcji „Przeczytaj” i „Galeria zdjęć interaktywnych” zapisują w zeszycie minimum dwa pytania. Następnie nauczyciel dzieli uczniów na dwie grupy. Grupy na przemian zadają przygotowane wcześniej pytania grupie przeciwnej, która udziela odpowiedzi. Nauczyciel uzupełnia wyjaśnienia.
2. Nauczyciel dzieli klasę na 4-osobowe grupy. Uczniowie rozwiązują ćwiczenia 1-6 na czas (od łatwiejszego do trudniejszych). Grupa, która poprawnie rozwiąże ćwiczenia jako pierwsza, wygrywa, a nauczyciel może nagrodzić uczniów ocenami za aktywność. Rozwiązania są prezentowane na forum klasy i omawiane krok po kroku.

Faza podsumowująca:

1. Omówienie ewentualnych problemów z rozwiązaniem ćwiczeń z sekcji „Sprawdź się”.
2. Nauczyciel omawia przebieg zajęć, wskazuje mocne i słabe strony pracy uczniów, udzielając im tym samym informacji zwrotnej.
3. Wybrany uczeń podsumowuje zajęcia, zwracając uwagę na nabyte umiejętności.

Praca domowa:

1. Zadanie dla kolegi/koleżanki. Uczniowie dobierają się w pary i opracowują zadania analogiczne do ćwiczeń 7 i 8 z sekcji „Sprawdź się”. Następnie przesyłają je do siebie mailem, rozwiązują i na następnej lekcji porównują wyniki.

Materiały pomocnicze:

- [Reguła mnożenia, reguła dodawania](#)
- [Permutacje, kombinacje, wariacje](#)

Wskazówki metodyczne:

- Galeria zdjęć interaktywnych może zostać wykorzystana na lekcji jako podsumowanie i utrwalenie wiedzy o modelach kombinatorycznych z rozdzielanymi elementami.