



Praktyczna kombinatoryka

- [Wprowadzenie](#)
- [Przeczytaj](#)
- [Film edukacyjny](#)
- [Sprawdź się](#)
- [Dla nauczyciela](#)



Praktyczna kombinatoryka

Źródło: MissMushroom, dostępny w internecie: <https://unsplash.com/>.

Czy jadąc windą z kilkoma osobami zdarzyło ci się zastanawiać na ile sposobów mogą wysiąść na różnych piętrach te osoby? A może znajomi, którzy przyszli do ciebie na imieniny i siadali przy okrągłym stole, zadali ci pytanie – na ile sposobów mogą to zrobić?

Po zapoznaniu się z tym materiałem, na pewno bez problemu odpowiesz na podobne pytania.

Aby rozwiązać zaproponowane tu zadania, potrzebna jest znajomość elementarnych wzorów kombinatorycznych.

Warto też poznać wzór na liczbę permutacji z powtórzeniami, który jest nieobowiązkowy, ale przydatny.



Rycerze Okrągłego Stołu i święty Graal. Malunek z XV w.

Źródło: dostępny w internecie: commons.wikimedia.org, domena publiczna.

- Wykorzystasz aparat kombinatoryczny do zliczania obiektów osadzonych w kontekście realistycznym.
- Stworzysz model matematyczny problemu z kontekstem realistycznym.

Przeczytaj

Chcąc określić ile jest możliwych wyników w danym doświadczeniu z kontekstem realistycznym, można skorzystać ze wzorów kombinatorycznych, które przypominamy poniżej.

Wzory kombinatoryczne

Opis wzoru	Wzór
Liczba permutacji zbioru n -elementowego.	$P_n = n!$
Liczba k -elementowych wariacji bez powtórzeń zbioru n -elementowego.	$V_n^k = \frac{n!}{(n-k)!}$
Liczba k -elementowych wariacji z powtórzeniami zbioru n -elementowego.	$W_n^k = n^k$
Liczba k -elementowych kombinacji zbioru n -elementowego.	$C_n^k = \binom{n}{k}$

W pierwszym przykładzie rozważymy różne sytuacje związane z tworzeniem wyrazów z danych liter.

Będzie nam jeszcze potrzebna znajomość wzoru na permutację z powtórzeniami.

Definicja: Permutacja z powtórzeniami

Permutacją z powtórzeniami zbioru n -elementowego, nazywamy każdy ciąg n -wyrazowy utworzony z elementów tego zbioru, wśród których pewne elementy powtarzają się odpowiednio $n_1, n_2, \dots, n_k$ razy.

Liczba elementów permutacji z powtórzeniami wyraża się wzorem:

$$P_n^{n_1, n_2, \dots, n_k} = \frac{n!}{n_1! \cdot n_2! \cdot \dots \cdot n_k!}$$

Przykład 1

Obliczmy, ile wyrazów (mających sens lub nie) można utworzyć ze wszystkich liter słowa:

- a. *LITERA*
- b. *LITERAT*
- c. *APARATURA*

Rozwiązanie:

- Wszystkie możliwe ustawienia liter $\{L, I, T, E, R, A\}$ można zapisać w postaci sześćelementowych ciągów. Pierwszy element (literę) można wybrać na 6 sposobów, drugi na 5 sposobów, itd. Korzystając z reguły mnożenia, możemy utworzyć: $6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 6! = 720$ wyrazów.
- W wyrazie *LITERAT* występują dwie litery *T*. Litery *T* możemy zamienić miejscami na $2!$ sposoby, a utworzony wyraz nie ulegnie zmianie. Z liter wyrazu *LITERAT* można więc utworzyć $\frac{6!}{2!} = \frac{720}{2} = 360$ wyrazów.
- W wyrazie *APARATURA* są 4 litery *A* i 2 litery *R*. Korzystamy ze wzoru na liczbę permutacji z powtórzeniami. $\frac{9!}{4! \cdot 2!} = \frac{9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5}{2} = 7560$

Odpowiedź:

Ze wszystkich liter słowa *LITERA* można utworzyć 720 wyrazów, z liter słowa *LITERAT* można utworzyć 360 wyrazów, a z liter słowa *APARATURA* aż 7560 wyrazów.

Przykład 2

Sprawdzian z matematyki składający się z 5 zadań pisało łącznie 100 uczniów z klas trzecich. Każde zadanie zostało rozwiązane przez przynajmniej 60 uczniów. Wykażemy, że można wskazać takich dwóch uczniów, że każde zadanie zostało rozwiązane przynajmniej przez jednego z nich.

Rozwiązanie:

Dla każdego z dwóch uczniów rozpatrzmy najpierw zbiór zadań, których żaden nie rozwiązał. Tych zbiorów jest

$$\binom{100}{2} = \frac{100 \cdot 99}{2} = 4950$$

Wykażemy, że przynajmniej jeden z nich jest pusty.

Dla każdego zadania istnieje co najwyżej $100 - 60 = 40$ uczniów, którzy go nie rozwiązyali.

Każde zadanie należy do co najwyżej

$$\binom{40}{2} = \frac{40 \cdot 39}{2} = 780 \text{ spośród wyznaczonych zbiorów.}$$

Niepustych zbiorów jest co najwyżej

$$5 \cdot 780 = 3900$$

Ponieważ

$$3900 < 4950,$$

zatem istnieje para uczniów, dla której zbiór zadań, których żaden z dwójki tych uczniów nie rozwiązał, jest pusty.

Przykład 3

Zapoznaj się z animacją, pokazującą przykłady wykorzystania kombinacji do zliczania obiektów osadzonych w kontekście realistycznym.

Film dostępny pod adresem <https://zpe.gov.pl/a/D15cG6tfl>

Film nawiązujący do treści materiału dotyczącej wykorzystania kombinacji do zliczania obiektów.

W poniższym przykładzie jeszcze inny przykład zastosowania kombinacji – pamiętaj, że kombinacje wykorzystujemy w takich przypadkach, gdy kolejność losowania nie ma znaczenia.

Przykład 4

W partii n wyprodukowanych śrub w jest wykonanych wadliwie. Obliczmy, ile jest możliwości, że wśród m wylosowanych śrub, dokładnie d okaże się wadliwych.

Wylosować dokładnie d śrub wadliwych, z ogólnej liczby w śrub wadliwych, można na

$\binom{w}{d}$ sposobów.

Pozostałe wylosowane śruby mają być dobre. Tych $m - d$ śrub należy wylosować z $n - w$ śrub dobrych.

Można to zrobić na

$\binom{n - w}{m - d}$ sposobów.

Wszystkich możliwości jest zatem

$$\binom{w}{d} \cdot \binom{n - w}{m - d}$$

Odpowiedź:

Jest $\binom{w}{d} \cdot \binom{n - w}{m - d}$ możliwości wylosowania śrub wadliwych.

Poniżej klasyczny przykład problemów z kontekstem realistycznym, zapisanych językiem kombinatoryki.

Przykład 5

Obliczmy, na ile sposobów można rozmieścić w n rozróżnialnych szufladach k :

- nierozróżnialnych szalików, jeżeli każda szuflada może zawierać co najwyżej jeden szalik,
- rozróżnialnych szalików, jeżeli nie ma ograniczenia na liczbę szalików, które mogą się zmieścić w jednej szufladzie,
- rozróżnialnych szalików, jeżeli każda szuflada może zawierać co najwyżej jeden szalik.

Rozwiązanie:

- Zauważmy, że $n \geq k$. Szaliki są nierozróżnialne, więc liczba wszystkich sposobów wyboru jest równa liczbie kombinacji k -elementowych ze zbioru n -elementowego, czyli $\binom{n}{k}$.
- Każdy z k szalików można umieścić w jednej z n szuflad. Zatem dla pierwszego szalika jest n możliwości, dla drugiego szalika jest n możliwości,
...
dla k -tego szalika jest n możliwości. Wszystkich możliwości jest więc:
 $n \cdot n \cdot \dots \cdot n = n^k$.
- W tym przypadku $n \geq k$. Dla pierwszego szalika jest n możliwości wyboru szuflady, dla drugiego szalika jest $(n - 1)$ możliwości wyboru szuflady,
...
dla k -tego szalika jest $(n - k + 1)$ możliwości wyboru szuflady. Wszystkich możliwości jest więc: $n \cdot (n - 1) \cdot (n - 2) \cdot \dots \cdot (n - k + 1) = \frac{n!}{(n-k)!}$.

Słownik

permutacja z powtórzeniami

permutacją z powtórzeniami zbioru n -elementowego, nazywamy każdy ciąg n -wyrazowy utworzony z elementów tego zbioru, wśród których pewne elementy powtarzają się odpowiednio $n_1, n_2, \dots, n_k$ razy; liczba elementów permutacji z powtórzeniami wyraża się wzorem:

$$P_n^{n_1, n_2, \dots, n_k} = \frac{n!}{n_1! \cdot n_2! \cdot \dots \cdot n_k!}$$

Film edukacyjny

Polecenie 1

Zapoznaj się z filmem edukacyjnym pokazującym przykłady wykorzystania wariacji z powtórzeniami w rozwiązywaniu zadań z kontekstem realistycznym. Spróbuj najpierw samodzielnie rozwiązać zapisane tam problemy, a następnie porównaj z zamieszczonymi w filmie edukacyjnym.

Film dostępny pod adresem <https://zpe.gov.pl/a/DfwPXwot4>

Film nawiązujący do treści lekcji dotyczącej kombinatoryki w praktyce.

Polecenie 2

Uczeń wypełnia test składający się z 10 pytań. Do każdego zadania są cztery odpowiedzi do wyboru: A , B , C , D . Oblicz, na ile sposobów uczeń może wypełnić test.

Sprawdź się

Pokaż ćwiczenia:   

Ćwiczenie 1



Ile różnych wyrazów sześcioliterowych (mających sens lub nie) rozpoczynających się od litery p można utworzyć z liter m, n, o, p, r, s ? Zaznacz poprawną odpowiedź.

☐ $6! - 5!$

☐ $6!$

☐ $6! \cdot 5!$

☐ $5!$

Ćwiczenie 2



Z Kalinowa do Grochowa prowadzi 7 dróg. Iloma sposobami możesz dojść z Kalinowa do Grochowa i z powrotem, jeśli nie będziesz wracać tą samą drogą? Zaznacz poprawną odpowiedź.

☐ $5 \cdot 6 \cdot 7$

☐ $6 \cdot 7$

☐ 2^6

☐ 6^2

Ćwiczenie 3



Uzupełnij zdanie, wpisując odpowiednią liczbę.

W akwarium pływa 20 rybek, w tym 3 złote. Wyławiamy (bez zwracania) 5 rybek. Sposobów wyłowienia jednej złotej rybki (i czterech w innych kolorach) jest .

Ćwiczenie 4



Rozmieszczamy 9 kul ponumerowanych liczbami od 1 do 9 w trzech pudłach: A , B , C . Połącz w pary opis sposobu rozmieszczenia i liczbę tych sposobów.

W pudle A jest kula nr 1.

$$9 \cdot 2^8$$

W pudle C jest dokładnie jedna kula.

$$2^9 + 9 \cdot 2^8$$

W pudle A jest co najwyżej jedna kula.

$$1 \cdot 3^8$$

Pudło B jest puste.

$$2^9$$

W pudle B jest przynajmniej jedna kula.

$$3^9 - 2^9$$

Ćwiczenie 5



Uzupełnij zdanie, przeciągając odpowiednią liczbę.

Uczeń wypełnia test składający się z 10 pytań. Aby odpowiedzieć na dane pytanie, uczeń musi wybrać i zaznaczyć jedną z odpowiedzi: A , B , C lub D . Sposobów takiego wypełnienia testu przez ucznia, aby odpowiedzi na dowolne dwa kolejne pytania były różne jest .

$$9^3$$

$$3 \cdot 9^4$$

$$4 \cdot 3^9$$

$$3^9$$

Ćwiczenie 6



Ze skrzyni w której jest 10 klejnotów: 6 szmaragdów i 4 perły, wyciągamy 3 klejnoty. Zaznacz, które zdanie jest prawdziwe, a które fałszywe.

Zdanie	Prawda	Fałsz
Same perły można wyciągnąć na 4 sposoby.	☐	☐
Dokładnie jedną perłę można wyciągnąć na 60 sposobów.	☐	☐
Co najmniej dwie perły można wyciągnąć na 18 sposobów.	☐	☐
Same szmaragdy można wyciągnąć na 24 sposoby.	☐	☐

Ćwiczenie 7



Przy okrągłym stole stoi $2n$ krzesel. Przy stole ma usiąść n kobiet i n mężczyzn. Oblicz, na ile sposobów mogą to zrobić, jeżeli osoby tej samej płci nie mogą siedzieć obok siebie.

Ćwiczenie 8



Każdy z 50 przyjaciół wysłał sms z życzeniami świątecznymi do pewnych 25 pozostałych (nikt nie wysłał dwóch smsów do tej samej osoby).

Wykaż, że istnieją dwaj tacy chłopcy K i M , że chłopiec K wysłał sms do M i M wysłał sms do K .

Dla nauczyciela

Autor: Justyna Cybulska

Przedmiot: Matematyka

Temat: Praktyczna kombinatoryka

Grupa docelowa:

III etap edukacyjny, liceum, technikum, zakres rozszerzony

Podstawa programowa:

XI. Kombinatoryka. Zakres podstawowy.

Uczeń:

1) zlicza obiekty w prostych sytuacjach kombinatorycznych.

Zakres rozszerzony. Uczeń spełnia wymagania określone dla zakresu podstawowego, a ponadto:

1) oblicza liczbę możliwych sytuacji, spełniających określone kryteria, z wykorzystaniem reguły mnożenia i dodawania (także łącznie) oraz wzorów na liczbę: permutacji, kombinacji i wariacji, również w przypadkach wymagających rozważenia złożonego modelu zliczania elementów.

Kształtowane kompetencje kluczowe:

- kompetencje w zakresie rozumienia i tworzenia informacji;
- kompetencje matematyczne oraz kompetencje w zakresie nauk przyrodniczych, technologii i inżynierii;
- kompetencje cyfrowe;
- kompetencje osobiste, społeczne i w zakresie umiejętności uczenia się.

Cele operacyjne:

Uczeń:

- wykorzystuje aparat kombinatoryczny do zliczania obiektów osadzonych w kontekście realistycznym;
- tworzy model matematyczny problemu z kontekstem realistycznym;
- wykorzystuje zintegrowaną wiedzę rozwiązując problemy kombinatoryczne.

Strategie nauczania:

- konstruktywizm.

Metody i techniki nauczania:

- mini-test;
- drama;
- kosz i walizka.

Formy pracy:

- praca w grupach;
- praca całego zespołu klasowego.

Środki dydaktyczne:

- komputery z dostępem do internetu w takiej liczbie, żeby każdy uczeń miał do dyspozycji komputer.

Przebieg lekcji**Faza wstępna:**

1. Uczniowie wypełniają mini-test, którego celem jest powtórzenie wzorów kombinatorycznych.
2. Test może być wcześniej przygotowany przez ucznia wyznaczonego przez nauczyciela lub przez nauczyciela.
3. Po rozwiązaniu testu, każdy uczeń dokonuje samooceny – sprawdzając poprawność udzielonych odpowiedzi.
4. Nauczyciel podaje temat i cele zajęć, uczniowie ustalają kryteria sukcesu.

Faza realizacyjna:

1. Uczniowie pracują w 6 grupach. Grupa 1 zapoznaje się z Przykładem 1 z sekcji „Przeczytaj”, grupa 2 z Przykładem 2, grupa 3 z Przykładem 3, grupa 4 z Przykładem 4, grupa 5 z Przykładem 5, grupa 6 z przykładami z sekcji „Film edukacyjny”.
2. Zadaniem każdej grupy jest przygotowanie w formie krótkiej dramy zadania podobnego typu i zaprezentowanie pozostałym osobom, w taki sposób, aby łatwo mogły je rozwiązać.
3. W ten sposób wszystkie zadania zawarte w sekcji „Przeczytaj” i sekcji „Film edukacyjny” powinny zostać omówione i wspólnie przeanalizowane.
4. Rola nauczyciela sprowadza się do ewentualnych korekt w przedstawianych problemach.
5. Zakończeniem tej części zajęć jest indywidualne rozwiązanie przez uczniów ćwiczeń interaktywnych 1 – 3 z sekcji „Sprawdź się”.

Faza podsumowująca:

1. Wskazany przez nauczyciela uczeń przedstawia krótko najważniejsze elementy zajęć, poznane wiadomości, ukształtowane umiejętności.
2. Nauczyciel omawia przebieg zajęć, wskazuje mocne i słabe strony pracy uczniów, ocenia pracę grup.

Uczniowie dokonują ewaluacji zajęć metodą kosza i walizki – wskazując interesujące momenty zajęć, przydatne wiadomości i ewentualnie swoje „potknięcia” czy momenty zajęć mało interesujące.

Praca domowa:

Uczniowie rozwiązują ćwiczenia interaktywne 4 – 8 z sekcji „Sprawdź się”.

Materiały pomocnicze:

Liczba wszystkich k -elementowych wariacji z powtórzeniami zbioru n -elementowego

Wskazówki metodyczne:

Film edukacyjny może być wykorzystany do pracy na zajęciach dotyczących wariacji z powtórzeniami.