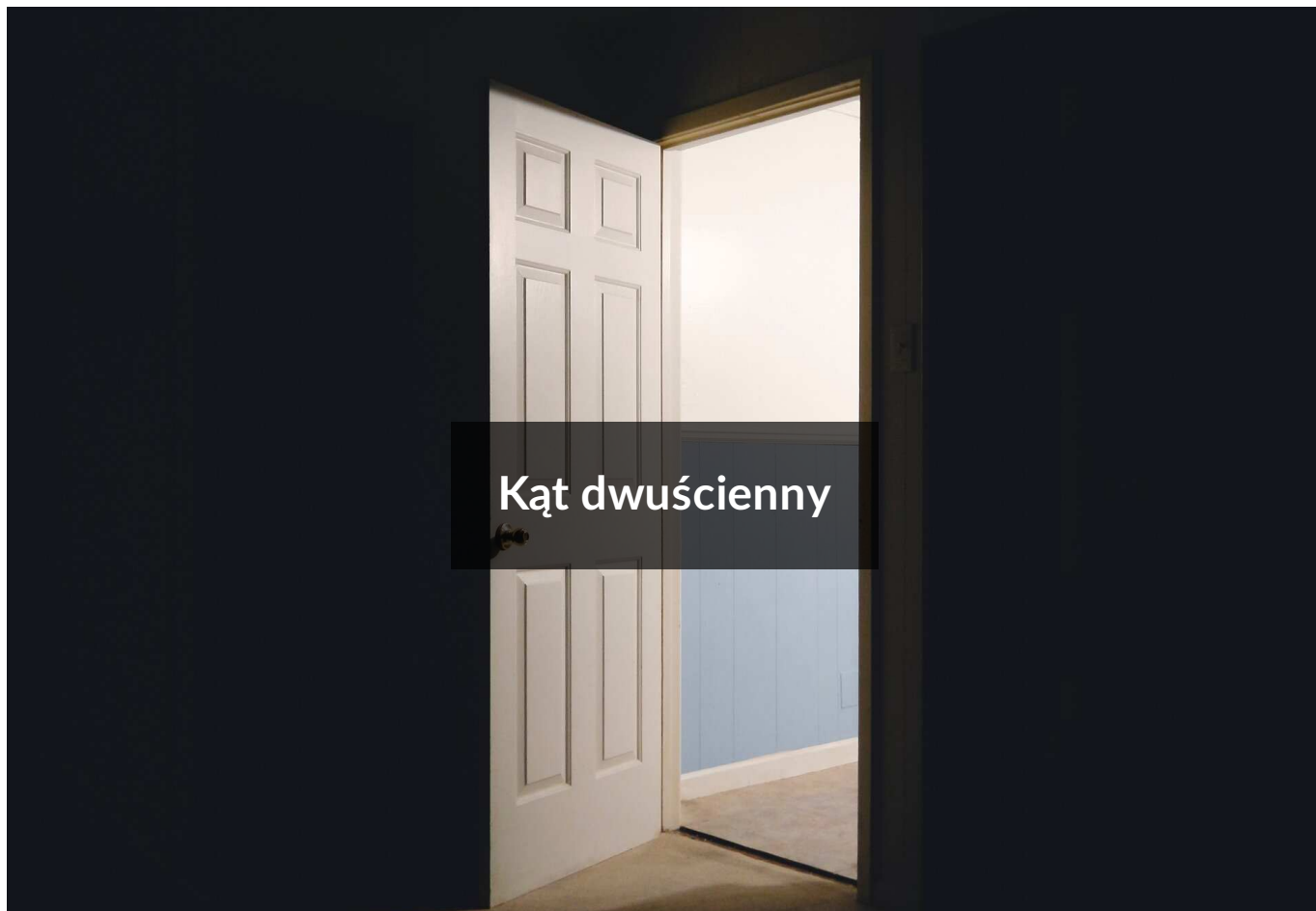




Kąt dwuścienny

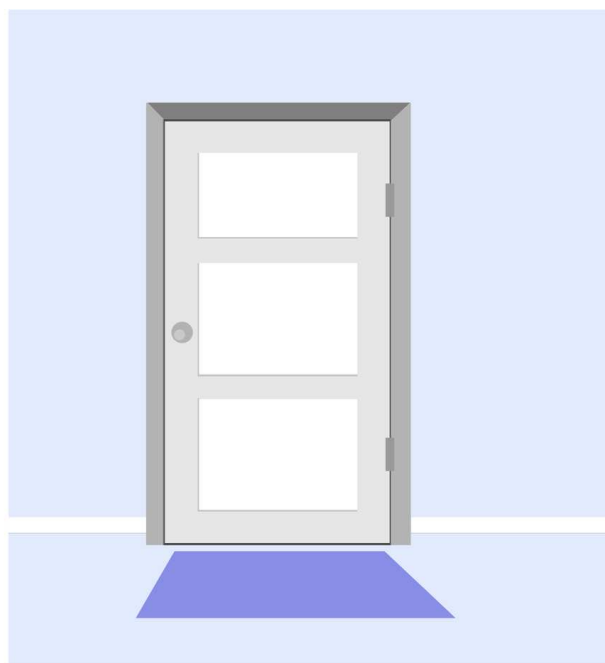
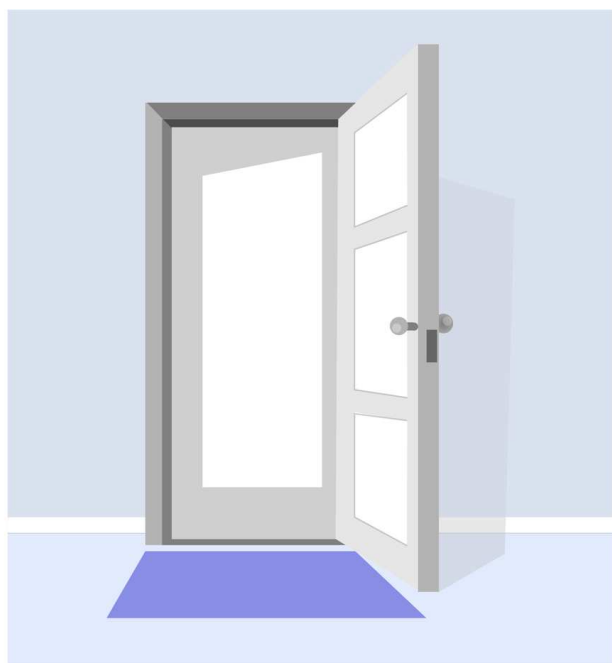
- Wprowadzenie
- Przeczytaj
- Aplet
- Sprawdź się
- Dla nauczyciela



Kąt dwuścienny

Źródło: Matthew T. Rader, dostępny w internecie: <https://unsplash.com/>, domena publiczna.

Podczas wykonywania prostej czynności otwierania drzwi, nie zastanawiamy się jaki kąt utworzy skrzydło drzwi i ich ościeżnica.



Okazuje się, że tego rodzaju kąt można zdefiniować jako kąt dwuścienny. W materiale wprowadzimy definicję kąta dwuściennego oraz wskażemy występowanie tych kątów w bryłach geometrycznych. Opierając się na wiedzy teoretycznej oraz omówionych przykładach, rozwiążemy ćwiczenia interaktywne.

Twoje cele

- Określisz definicję kąta dwuściennego.
- Rozpoznasz kąty dwuścienne w bryłach geometrycznych.
- Zastosujesz zdobytą wiedzę do rozwiązywania problemów matematycznych.

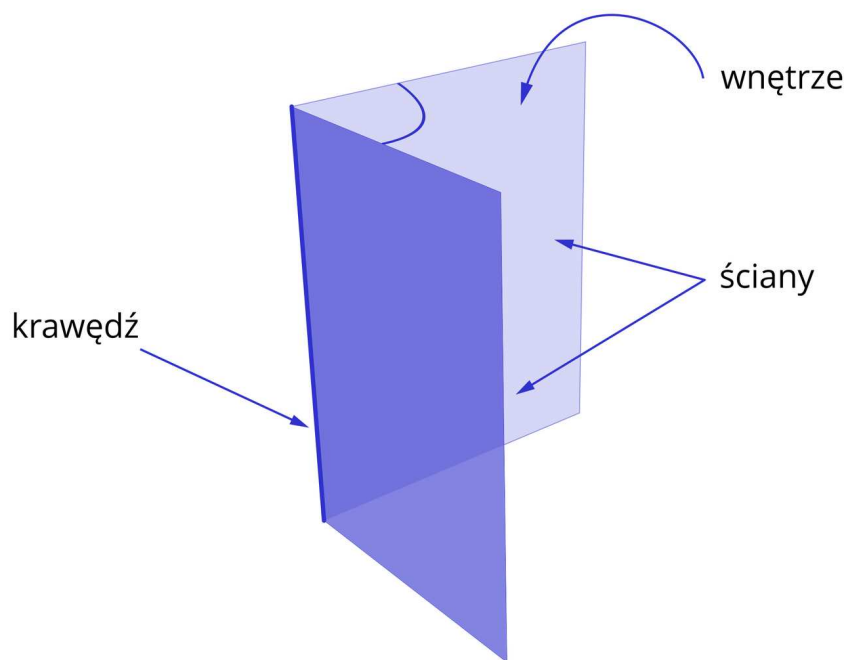
Przeczytaj

Wprowadźmy definicję kąta dwuściennego.

Definicja: Kąt dwuścienny

Dane są dwie półpłaszczyzny o wspólnej krawędzi, które dzielą przestrzeń na dwie części.

Kątem dwuściennym nazywamy sumę dwóch półpłaszczyzn o wspólnej krawędzi i jednego z dwóch obszarów, które te półpłaszczyzny wycinają z przestrzeni.



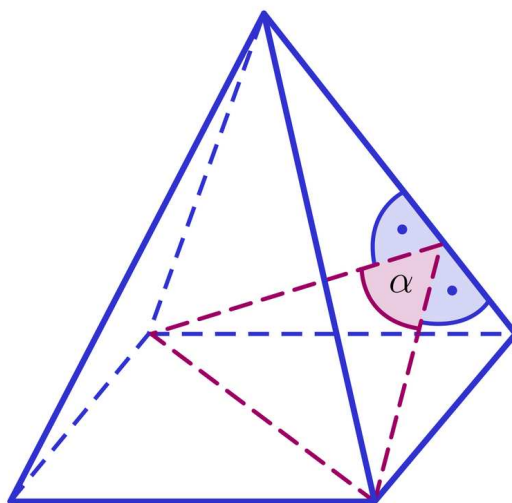
Wspólną krawędź półpłaszczyzn nazywamy **krawędzią kąta dwuściennego**, a półpłaszczyzny – **ścianami kąta dwuściennego**.

Wyróżnia się szczególne rodzaje kąta dwuściennego:

- kąt dwuścienny zerowy – kąt, którego ściany pokrywają się, a wnętrze jest puste,
- kąt dwuścienny półpełny – kąt, którego ściany uzupełniają się do jednej płaszczyzny,
- kąt dwuścienny pełny – kąt, którego ściany pokrywają się, a wnętrze wypełnia całą przestrzeń.

Przykład 1

Na poniższym rysunku **ostrosłupa** czworokątnego zaznaczono pewien kąt dwuścienny. Opiszemy etapy wyznaczania tego kąta.

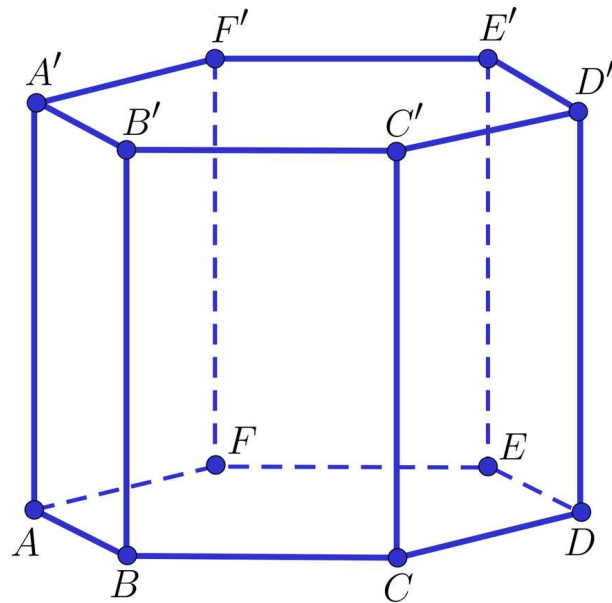


Rozwiązanie:

1. Wyznaczamy krawędź wspólną sąsiednich ścian bocznych – jest to krawędź boczna ostrosłupa.
2. Na wybranych ścianach bocznych wykreślamy odcinki, które są prostopadłe do wyróżnionej krawędzi bocznej.
3. Narysowane odcinki są wysokościami trójkątów będących ścianami bocznymi ostrosłupa.
4. Kąt pomiędzy narysowanymi odcinkami jest kątem dwuściennym.

Przykład 2

Na rysunku przedstawiono graniastosłup prawidłowy sześciokątny $ABCDEF A' B' C' D' E' F'$.



Wyznamy krawędź oraz ściany kąta dwuściennego, będącego kątem między sąsiednimi ścianami bocznymi w tym graniastolupie.

Rozwiązanie:

Zauważmy, że istnieje dokładnie 12 takich kątów.

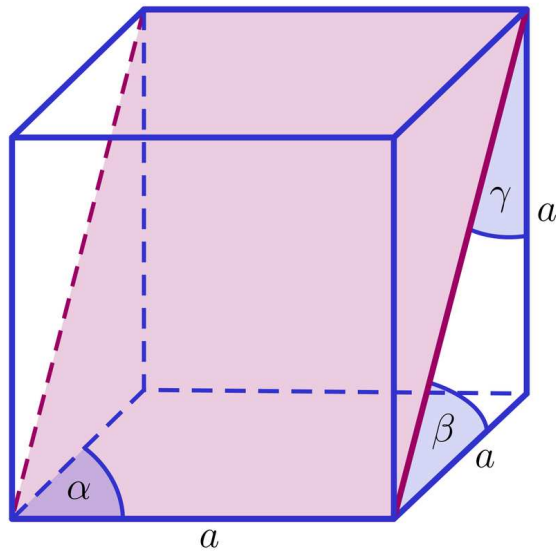
Jednym z nich jest kąt, w którym:

- krawędź to odcinek CC' ,
- ściany to półpłaszczyzny $BCC'B'$ oraz $CDD'C'$.

Pozostałe krawędzie oraz ściany kątów dwuściennych podaje się analogicznie.

Przykład 3

Na rysunku przedstawiono sześciian o krawędzi a z zaznaczoną płaszczyzną π przechodzącą przez przekątne przeciwległych ścian bocznych. Opiszemy zaznaczone kąty α, β, γ z rysunku.



Rozwiązanie:

Na rysunku zaznaczono poniższe kąty dwuścienne:

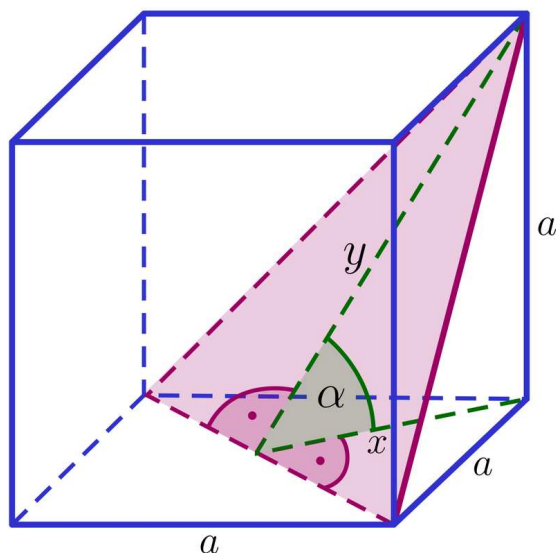
α – kąt pomiędzy sąsiednimi ścianami bocznymi sześcianu,

β – kąt nachylenia płaszczyzny π do płaszczyzny podstawy sześcianu,

γ – kąt nachylenia płaszczyzny π do ściany bocznej sześcianu.

Przykład 4

Na rysunku zaznaczono kąt dwuścienny pomiędzy płaszczyzną przechodzącą przez przekątną podstawy sześcianu i jeden z wierzchołków górnej podstawy, a płaszczyzną podstawy tego sześcianu. Wyznamy długości odcinków x oraz y , które są zawarte w ramionach tego kąta, wiedząc o tym, że kraweź prostopadłościanu ma długość a .

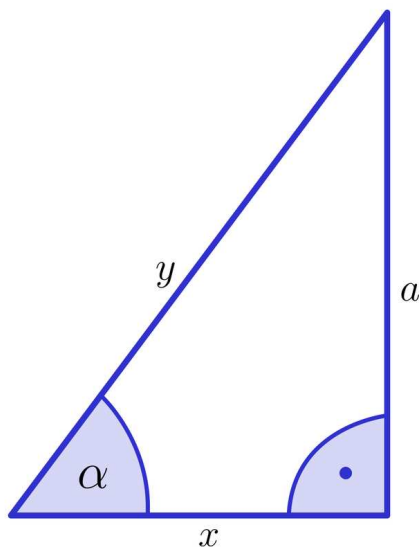


Rozwiązanie:

Zauważmy, że odcinek x jest równy połowie długości przekątnej podstawy sześcianu, zatem:

$$x = \frac{a\sqrt{2}}{2}$$

Długość odcinka y możemy wyznaczyć z twierdzenia Pitagorasa, korzystając z trójkąta prostokątnego, jak na poniższym rysunku.



Zatem:

$$x^2 + a^2 = y^2$$

$$\left(\frac{a\sqrt{2}}{2}\right)^2 + a^2 = y^2$$

$$\frac{a^2}{2} + a^2 = y^2$$

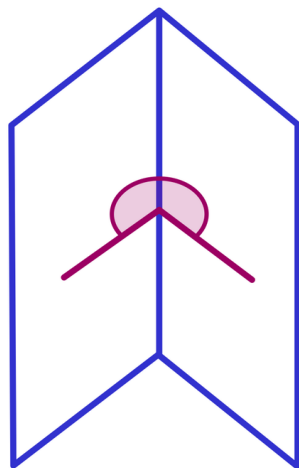
$$y^2 = \frac{3a^2}{2}$$

$$y = \frac{a\sqrt{6}}{2}$$

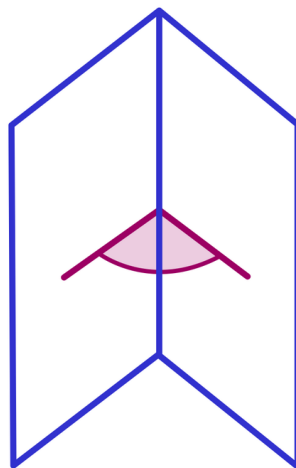
Ciekawostka

Istnieją również kąty wielościenne. Kąt wielościenne jest częścią przestrzeni, domkniętą skończoną liczbą kątów płaskich, które mają wspólny wierzchołek i każde dwa następnego kąty mają wspólne ramię.

Podobnie, jak w przypadku kątów płaskich, w kątach dwuściennych wyróżnia się kąty wypukłe i wklęsłe. Oba rodzaje tych kątów przedstawiono na poniższych rysunkach.



kąt dwuścienny
wklęsły



kąt dwuścienny
wypukły

Słownik

prostopadłościan

równoległościan, w którym dowolne dwie ściany mające wspólną krawędź są prostopadłe

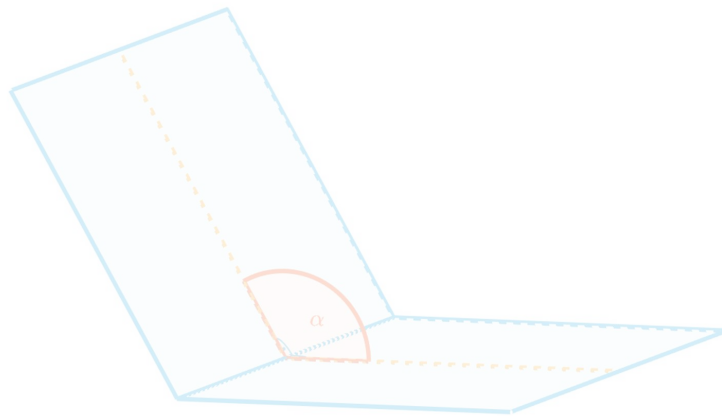
ostrosłup

wielościąg, którego podstawą jest dowolny wielokąt, a ściany boczne trójkątami o wspólnym wierzchołku

Aplet

Polecenie 1




Uruchom aplet, a następnie wykonaj poniższe polecenie.



Zasób interaktywny dostępny pod adresem <https://zpe.gov.pl/a/DOo5pXXHC>

Polecenie 2

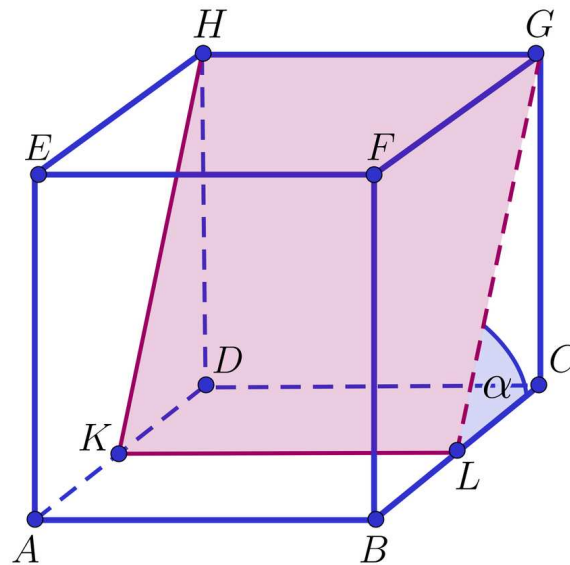
Sprawdź się

Pokaż ćwiczenia:   

Ćwiczenie 1



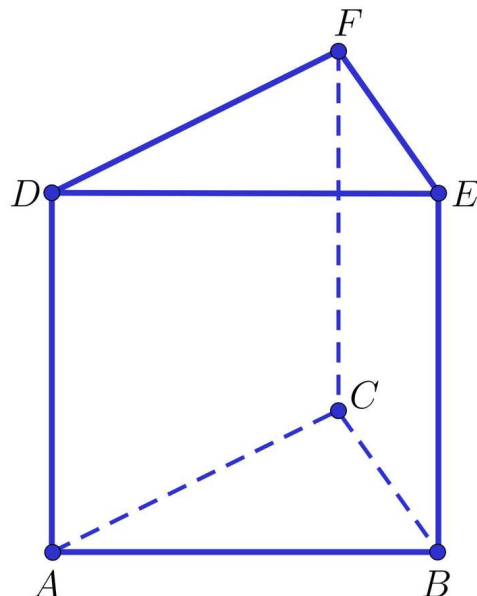
Na rysunku przedstawiono sześcian $ABCDEFGH$ oraz zaznaczono kąt dwuścienny α .



Ćwiczenie 2



Na rysunku przedstawiono graniastosłup trójkątny $ABCDEF$.



Ćwiczenie 3



Ćwiczenie 4



Ćwiczenie 5



Ćwiczenie 6



Narysuj sześcian $ABCDEFGH$ i zaznacz:

- a. kąt pomiędzy płaszczyzną ABK , gdzie K jest środkiem krawędzi GH , a płaszczyzną podstawy $ABCD$ tego sześcianu,
- b. kąt pomiędzy płaszczyzną ABH , a płaszczyzną podstawy $ABCD$ tego sześcianu.

Ćwiczenie 7



Ćwiczenie 8



Dla nauczyciela

Autor: Tomasz Wójtowicz

Przedmiot: Matematyka

Temat: Kąt dwuścienny

Grupa docelowa:

Szkoła ponadpodstawowa, liceum ogólnokształcące, technikum, zakres rozszerzony

Podstawa programowa:

Treści nauczania – wymagania szczegółowe:

X. Stereometria. Zakres podstawowy. Uczeń:

2) posługuje się pojęciem kąta między prostą a płaszczyzną oraz pojęciem kąta dwuściennego między półpłaszczyznami;

Kształtowane kompetencje kluczowe:

- kompetencje cyfrowe;
- kompetencje osobiste, społeczne i w zakresie umiejętności uczenia się;
- kompetencje matematyczne oraz kompetencje w zakresie nauk przyrodniczych, technologii i inżynierii.

Cele operacyjne:

Uczeń:

- definiuje kąt dwuścienny;
- wykorzystuje zdobytą wiedzę do rozwiązywania problemów matematycznych.

Strategie nauczania:

- konstruktywizm;
- konektywizm.

Metody i techniki nauczania:

- dyskusja;
- liga zadaniowa;
- metoda kota i myszy;
- objaśnienie nowej wiedzy.

Formy pracy:

- praca indywidualna;
- praca w grupach;
- praca całego zespołu klasowego.

Środki dydaktyczne:

- komputery z głośnikami, słuchawkami i dostępem do internetu;
- zasoby multimedialne zawarte w e-materiale;
- tablica interaktywna/tablica, pisak/kreda.

Przebieg lekcji

Faza wstępna:

1. Wskazanie przez nauczyciela tematu: „Kąt dwuścienny” i celów zajęć, przejście do wspólnego ustalenia kryteriów sukcesu.
2. Uczniowie metodą burzy mózgów przypominają poznane pojęcia związane z tematem lekcji.

Faza realizacyjna:

1. Uczniowie indywidualnie zapoznają się z treścią w sekcji „Przeczytaj” i zapisują w zeszytach minimum dwa pytania. Następnie nauczyciel dzieli uczniów na dwie grupy. Grupy na przemian zadają przygotowane wcześniej pytania grupie przeciwnej, która udziela odpowiedzi. Nauczyciel uzupełnia wyjaśnienia.
2. Uczniowie zapoznają się indywidualnie z treścią sekcji „Aplet”. Zapisują ewentualne pytania dotyczące napotkanych trudności, po czym następuje dyskusja, w trakcie której nauczyciel wyjaśnia niezrozumiałe elementy z materiału.
3. Uczniowie wykonują pierwsze dwa ćwiczenia interaktywne z sekcji „Sprawdź się”. Wyniki pracy omawiane są na forum klasy i komentowane przez nauczyciela.
4. Kolejny etap to liga zadaniowa - uczniowie wykonują w grupach na czas ćwiczenia 3-5 z sekcji „Sprawdź się”, a następnie omawiają je na forum klasy.
5. Uczniowie wykonują ćwiczenia nr 6-8 z sekcji „Sprawdź się” metodą kot i mysz rozwiązują ćwiczenia interaktywne w sekcji „Sprawdź się”. Mysz stara się jak najlepiej rozwiązać zadania, a kot sprawdza ich poprawność. Po dwóch nieudanych próbach kot „łapie mysz”, która odpada z gry. Aby gra toczyła się dalej - role uczniów odwracają się i mysz staje się kotem - procedura się powtarza.

Faza podsumowująca:

1. Omówienie ewentualnych problemów z rozwiązaniem ćwiczeń z sekcji „Sprawdź się”.
2. Wybrany uczeń podsumowuje zajęcia, zwracając uwagę na nabyte umiejętności, odnosząc się do wyświetlonych na tablicy interaktywnej celów z sekcji „Wprowadzenie”.

Praca domowa:

1. Zadanie dla kolegi/koleżanki. Uczniowie dobierają się w pary i opracowują zadania analogiczne do ćwiczeń 7 i 8 z sekcji „Sprawdź się”. Następnie przesyłają je do siebie mailem, rozwiązują i na następnej lekcji porównują wyniki.

Materiały pomocnicze:

[Kąt między prostymi a płaszczyznami w graniastosłupach](#)

Wskazówki metodyczne:

- Materiał w sekcji „Aplet” można wykorzystać jako materiał służący powtórzeniu wiadomości dotyczących kąta dwuściennego.