



Nierówności wymierne z parametrem

- [Wprowadzenie](#)
- [Przeczytaj](#)
- [Animacja](#)
- [Sprawdź się](#)
- [Dla nauczyciela](#)



Nierówności wymierne z parametrem

Źródło: [Johannes Plenio on Unsplash](#), domena publiczna.

Wyrażenia wymierne wymagają zawsze określenia założeń, które gwarantują, że w mianowniku takiego wyrażenia nie pojawi się wartość zero. Czy zastanowiło Cię dlaczego z zerem w matematyce wiążą się liczne kłopoty i kto odkrył zero? Wbrew powszechnym przekonaniom, że zero jest używane w matematyce tak samo długo, jak inne liczby, warto wiedzieć, że zarówno cywilizacja grecka, jak i rzymska nie używały symbolu zera. Początkowo w systemie pozycyjnym w miejscach, w których występował brak określonej cyfry na danej pozycji, zostawiano puste miejsca. Jednak prowadziło to do licznych nieporozumień i niejednoznacznych sytuacji.

W systemie babilońskim (ok. III w p. n. e.) puste miejsca zaczęto wypełniać dwoma małymi trójkącikami. Z kolei Majowie używali zera w swoim skomplikowanym kalendarzu. Jednak zero, którego używamy współcześnie, zostało wynalezione w Indiach i rozpowszechnione przez matematyków arabskich. W siódmym wieku naszej ery hinduski matematyk Brahmagupta ustalił zasady arytmetyczne dotyczące działań zawierających zero, jednak nie rozstrzygnął problemu dzielenia przez zero.

Twoje cele

- Rozwiążesz nierówności wymierne.

- Rozważysz różne zbiory rozwiązań nierówności wymiernych w zależności od wartości parametru.
- Powiążesz pojęcia algebraiczne z ich reprezentacją geometryczną.
- Powiążesz umiejętność rozwiązywania nierówności wymiernej z innymi umiejętnościami matematycznymi takimi, jak szkicowanie wykresów funkcji i korzystanie z ich własności.

Przeczytaj

Parametrami nazywamy litery, które w zadaniu oznaczają liczby dane. Parametry zwykle oznacza się początkowymi lub środkowymi literami alfabetu. Rola parametru sprowadza się do tego, że w zależności od jego wartości dana nierówność spełnia, bądź nie, zadane warunki dotyczące zbioru jej rozwiązań lub innych własności.

Definicja: nierówność wymierna

Nierównością wymierną nazywamy nierówność postaci: $\frac{W(x)}{V(x)} > 0$ lub $\frac{W(x)}{V(x)} < 0$, lub $\frac{W(x)}{V(x)} \geq 0$, lub $\frac{W(x)}{V(x)} \leq 0$, gdzie $W(x)$ i $V(x)$ są wielomianami i $V(x)$ nie jest wielomianem zerowym.

Każdej nierówności wymiernej możemy przyporządkować równoważną jej (w danej dziedzinie) odpowiednią nierówność wielomianową:

- $\frac{W(x)}{V(x)} > 0 \Leftrightarrow W(x) \cdot V(x) > 0$
- $\frac{W(x)}{V(x)} < 0 \Leftrightarrow W(x) \cdot V(x) < 0$
- $\frac{W(x)}{V(x)} \geq 0 \Leftrightarrow W(x) \cdot V(x) \geq 0$
- $\frac{W(x)}{V(x)} \leq 0 \Leftrightarrow W(x) \cdot V(x) \leq 0$

Przykład 1

Pokażemy, dla jakich wartości parametru m nierówność $\frac{2m}{x^2+3} < 3$ jest prawdziwa dla wszystkich liczb rzeczywistych.

Rozwiązanie:

$$\frac{2m}{x^2+3} < 3$$

Określamy dziedzinę nierówności: $x \in \mathbb{R}$.

Ponieważ mianownik jest stale dodatni, mnożymy nierówność obustronnie przez ten mianownik otrzymując:

$$2m < 3(x^2 + 3)$$

Po wykonaniu przekształceń równoważnych oraz uporządkowaniu otrzymujemy nierówność kwadratową:

$$3x^2 - 2m + 9 > 0$$

Ponieważ współczynnik a jest dodatni, więc aby ta nierówność była prawdziwa dla wszystkich liczb rzeczywistych, jej wykres musi być położony ponad osią X . Zatem spełniony musi być warunek:

$$\Delta < 0$$

$$\Delta = -4 \cdot 3 \cdot (-2m + 9) = 24m - 108$$

$$24m - 108 < 0 \Leftrightarrow 24m < 108 \Leftrightarrow m < 4\frac{1}{2}$$

Odpowiedź:

Dana nierówność jest prawdziwa dla wszystkich liczb rzeczywistych dla $m \in (-\infty, 4\frac{1}{2})$.

Przykład 2

Pokażemy, dla jakich wartości parametru a nierówność $\frac{x^3+x^2-x-1}{x-a} < 0$ nie ma rozwiązań całkowitych dodatnich.

Ustalmy dziedzinę nierówności: $x \in \mathbb{R} \setminus \{a\}$.

Danej nierówności przyporządkujemy równoważną jej nierówność wielomianową:

$$(x^3 + x^2 - x - 1)(x - a) < 0$$

Wielomian stopnia trzeciego rozłożmy na czynniki liniowe drogą grupowania wyrazów:

$$[x^2(x + 1) - (x + 1)](x - a) < 0$$

$$(x + 1)(x^2 - 1)(x - a) < 0$$

$$(x + 1)(x + 1)(x - 1)(x - a) < 0$$

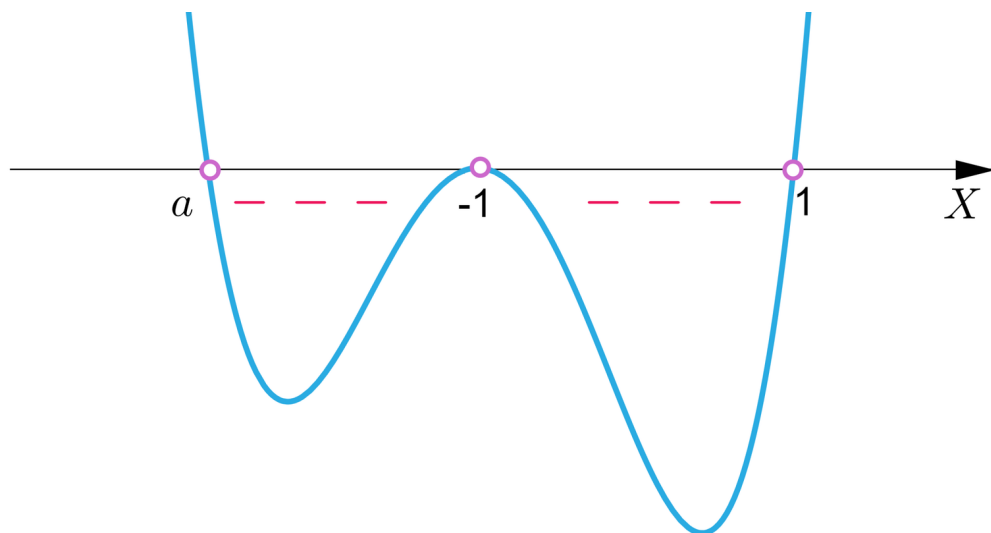
$$(x + 1)^2(x - 1)(x - a) < 0$$

Miejscami zerowymi (pierwiastkami) otrzymanego wielomianu są liczby: $x = -1$, $x = 1$, $x = a$.

Zauważmy ponadto, że $x = -1$ jest **pierwiastkiem podwójnym**.

Aby przedstawić ilustrację graficzną nierówności i ustalić jej rozwiązania, należy rozważyć 5 przypadków:

1. $a < -1$, wtedy rozwiązaniem nierówności są liczby rzeczywiste $x \in (a, -1) \cup (-1, 1)$, a więc nie ma w zbiorze rozwiązań liczb całkowitych dodatnich.



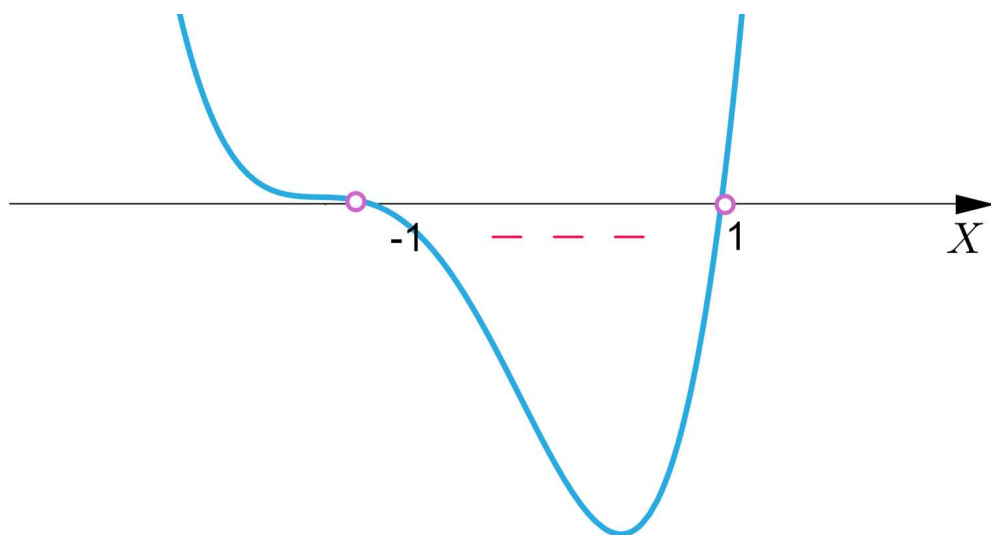
2. $a = -1$, wtedy nierówność przyjmuje postać:

$$(x + 1)^2(x - 1)(x - a) < 0$$

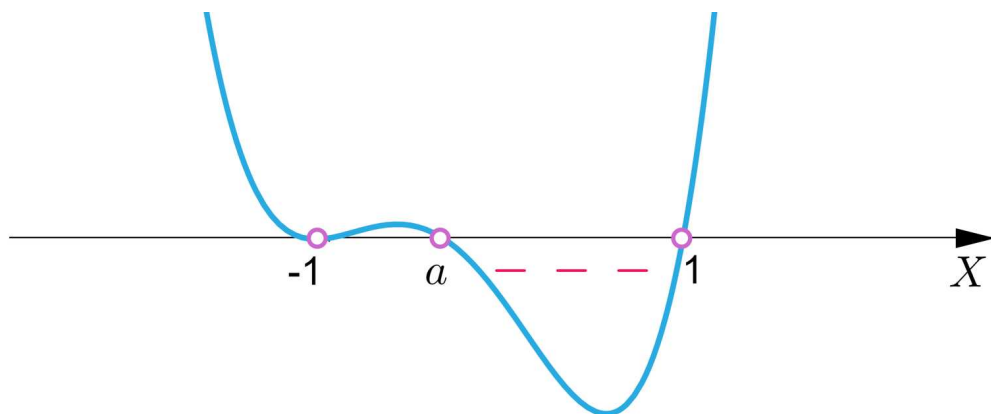
$$(x + 1)^2(x - 1)(x + 1) < 0$$

$$(x + 1)^3(x - 1) < 0$$

Zauważmy, że $x = -1$ jest **pierwiastkiem trzykrotnym wielomianu**. Zatem rozwiązaniem nierówności są liczby rzeczywiste $x \in (-1, 1)$, a więc nie ma w zbiorze rozwiązań liczb całkowitych dodatnich.



3. $a \in (-1, 1)$, wtedy rozwiązaniem nierówności są liczby rzeczywiste $x \in (a, 1)$, a więc nie ma w zbiorze rozwiązań liczb całkowitych dodatnich.



4. $a = 1$, wtedy nierówność przyjmuje postać:

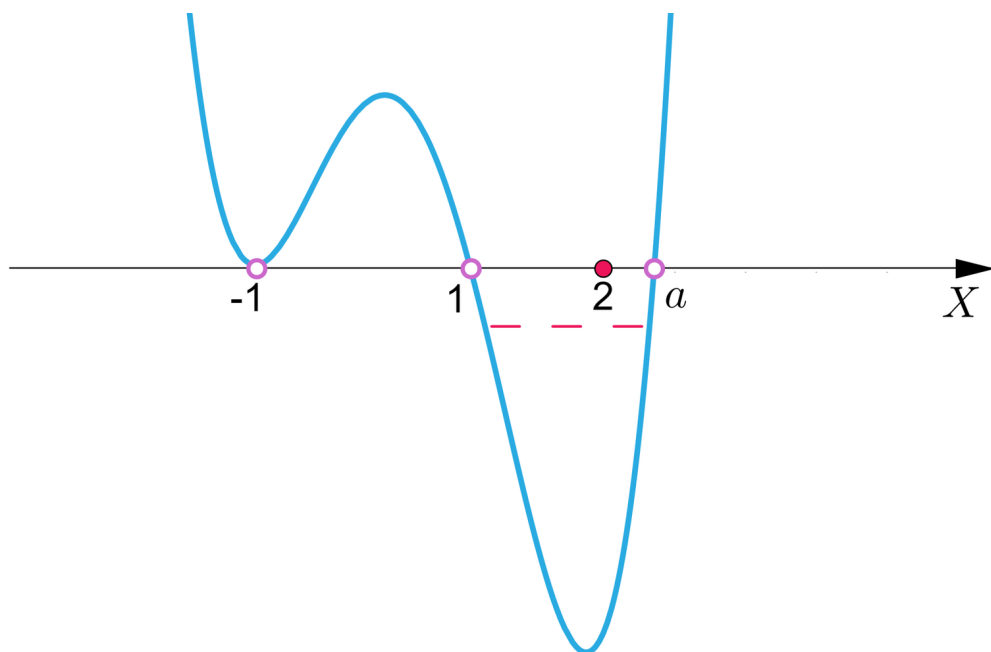
$$(x + 1)^2(x - 1)(x - a) < 0$$

$$(x + 1)^2(x - 1)(x - 1) < 0$$

$$(x + 1)^2(x - 1)^2 < 0$$

Zauważmy, że oba pierwiastki $x = -1$ oraz $x = 1$ są podwójne, zatem nierówność jest sprzeczna: $x \in \emptyset$, a więc nie ma w zbiorze rozwiązań liczb całkowitych dodatnich.

5. $a > 1$, wtedy rozwiązaniem nierówności są liczby rzeczywiste $x \in (1, a)$, a więc o ile $a \leq 2$, to nie ma w zbiorze rozwiązań liczb całkowitych dodatnich, ale jeśli $a > 2$ (jak na poniższym rysunku), to zbiór rozwiązań zawiera co najmniej jedną liczbę całkowitą dodatnią.



Odpowiedź:

Nierówność $\frac{x^3+x^2-x-1}{x-a} < 0$ nie ma rozwiązań całkowitych dodatnich dla $a \in (-\infty, 2\rangle$.

Przykład 3

Pokażemy, dla jakich wartości parametru b wykresy funkcji $f(x) = \frac{b}{x}$, gdzie $x \neq 0$, $b \neq 0$ oraz $g(x) = (b - 1)x$ nie mają punktów wspólnych.

Zauważmy, że wykresem funkcji $f(x) = \frac{b}{x}$ jest hiperbola położona w

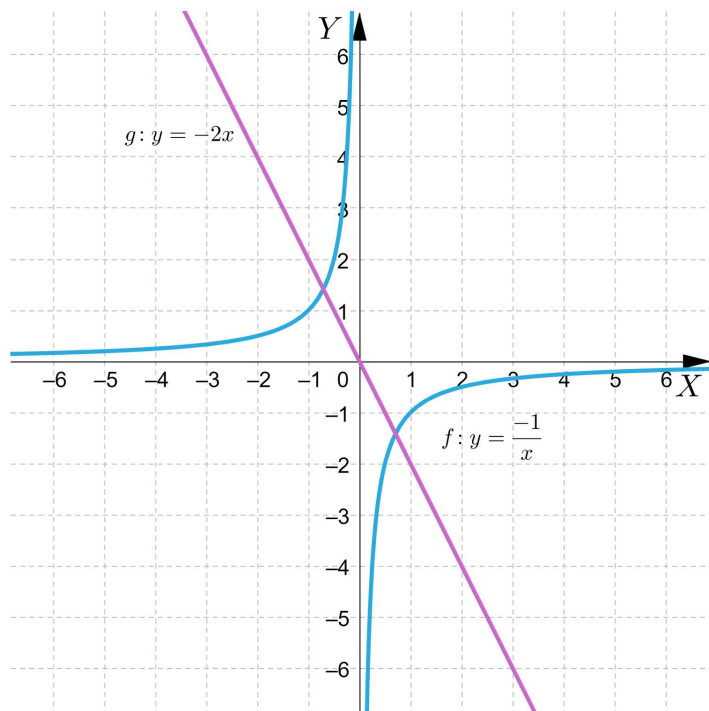
- I i III ćwiartce układu współrzędnych, jeśli $b > 0$ lub
- w II i IV ćwiartce układu współrzędnych, jeśli $b < 0$,

zaś wykresem funkcji $g(x) = (b - 1)x$ jest prosta przechodząca przez początek układu współrzędnych oraz

- I i III ćwiartkę układu współrzędnych, jeśli $b > 1$ lub
- II i IV ćwiartkę układu współrzędnych, jeśli $b < 1$.

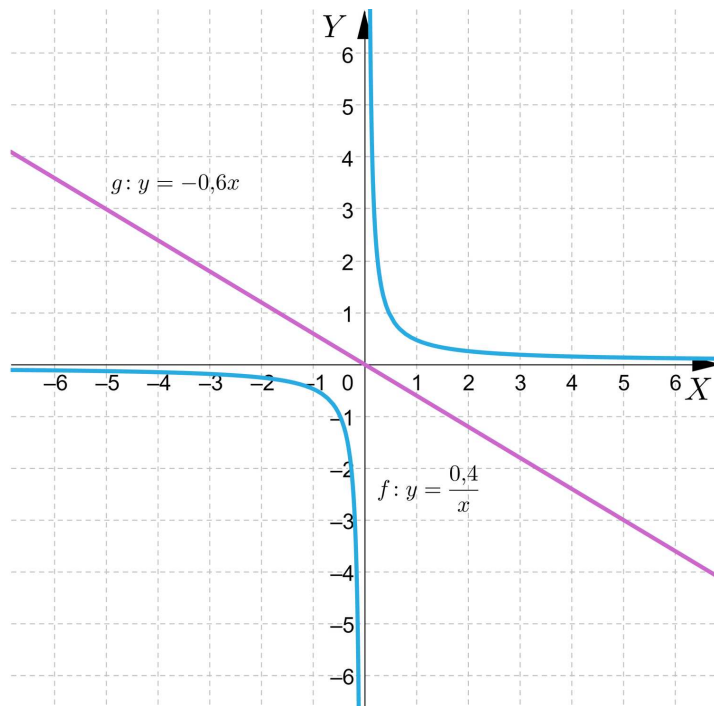
Aby ustalić kiedy prosta nie będzie miała punktów wspólnych z hiperbolą, rozważymy następujące przypadki uwzględniające różne położenia prostej i hiperboli:

- $b < 0$ i $b < 1 \Leftrightarrow b \in (-\infty, 0)$, np.



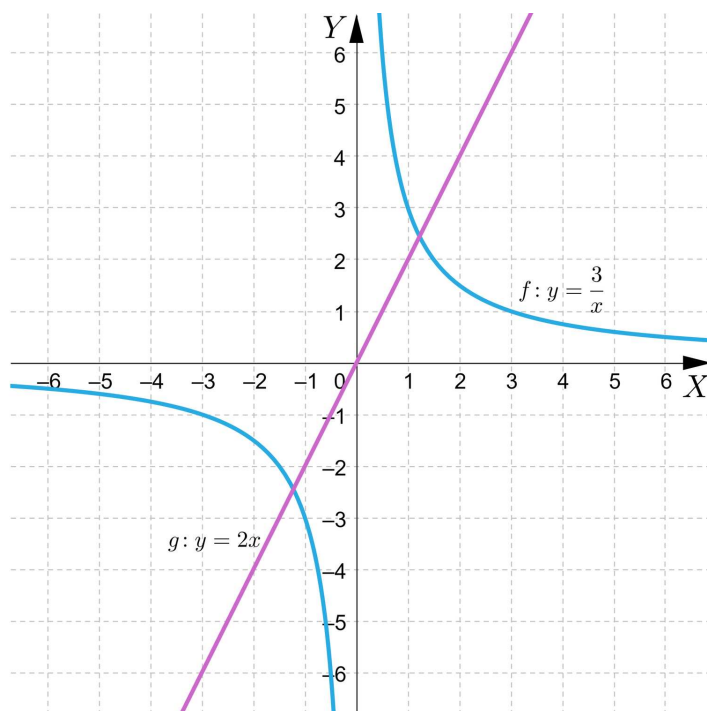
Grafika pokazuje, że w takim przypadku wykresy funkcji mają zawsze dwa punkty wspólne, ponieważ „zajmują” te same ćwiartki układu współrzędnych.

- $b < 0$ i $b > 1 \Leftrightarrow b \in \emptyset$.
- $b > 0$ i $b < 1 \Leftrightarrow b \in (0, 1)$, np.



W tym przypadku wykresy funkcji przebiegają przez różne ćwiartki układu współrzędnych, a zatem nie mają punktów wspólnych.

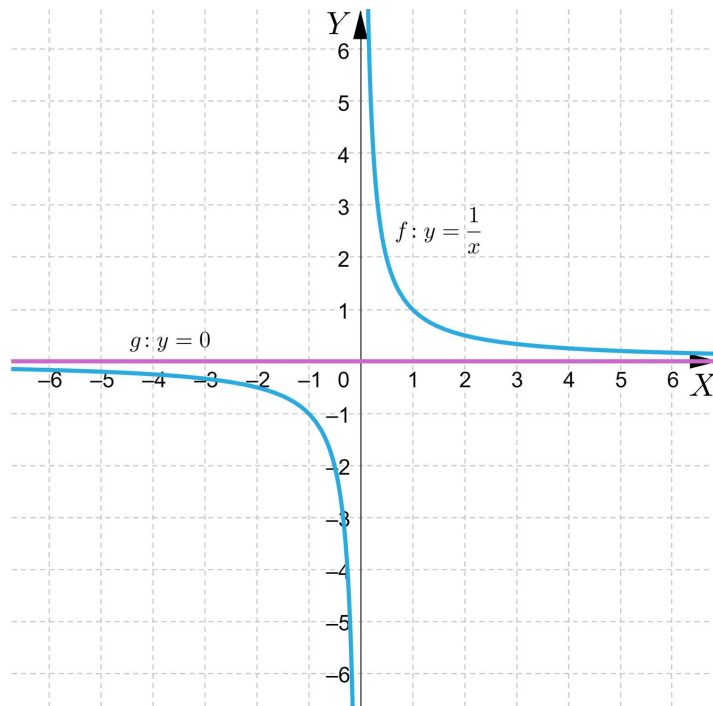
- $b > 0$ i $b > 1 \Leftrightarrow b \in (1, \infty)$, np.



W tym przypadku wykresy funkcji mają zawsze dwa punkty wspólne, ponieważ „zajmują” te same ćwiartki układu współrzędnych.

Pozostaje rozważyć przypadek szczególny, tj.

- $b = 1 \Rightarrow f(x) = \frac{1}{x}$ oraz $g(x) = 0$, wykresy funkcji nie mają punktów wspólnych.



Odpowiedź:

Wykresy funkcji $f(x) = \frac{b}{x}$, gdzie $x \neq 0$, $b \neq 0$ oraz $g(x) = (b-1)x$ nie mają punktów wspólnych dla $b \in (0, 1)$.

Przykład 4

Dana jest funkcja wymierna $f(x) = \frac{kx+k^2-2}{x-k}$, gdzie $x \neq k$, $k \neq 0$. Pokażemy, dla jakich wartości parametru k funkcja ta jest funkcją przedziałami malejącą, posiadającą ujemne miejsce zerowe.

Wykonamy przekształcenie wzoru funkcji do postaci kanonicznej:

$$f(x) = \frac{kx+k^2-2}{x-k} = \frac{k(x-k)+2k^2-2}{x-k} = k + \frac{2k^2-2}{x-k}$$

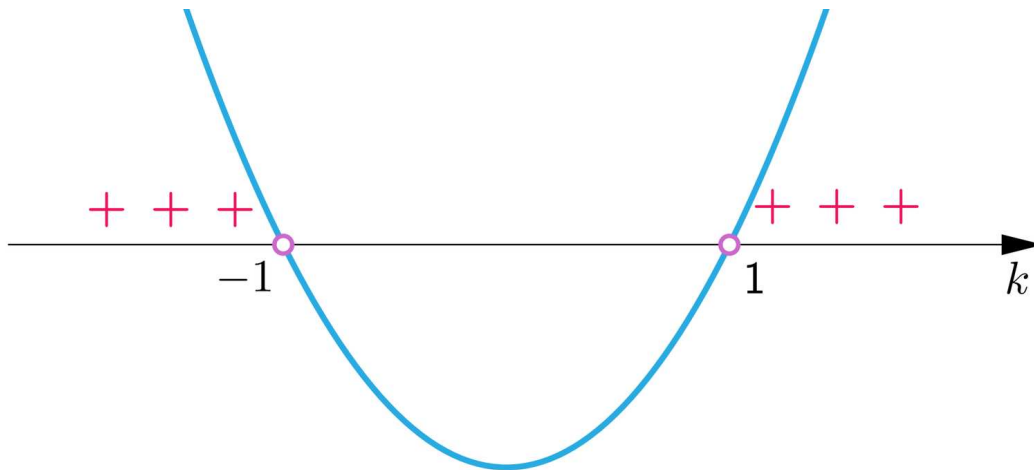
Aby funkcja ta była przedziałami malejąca, musi spełniać warunek:

$$2k^2 - 2 > 0$$

$$k^2 - 1 > 0$$

Stąd

$$(k-1)(k+1) > 0$$



Zatem dla $k \in (-\infty, -1) \cup (1, \infty)$ badana funkcja jest przedziałami malejąca.

Zbadamy teraz dla jakich wartości parametru k funkcja $y = f(x)$ posiada ujemne miejsce zerowe:

$$f(x) = 0 \Leftrightarrow \frac{kx+k^2-2}{x-k} = 0 \Leftrightarrow kx + k^2 - 2 = 0$$

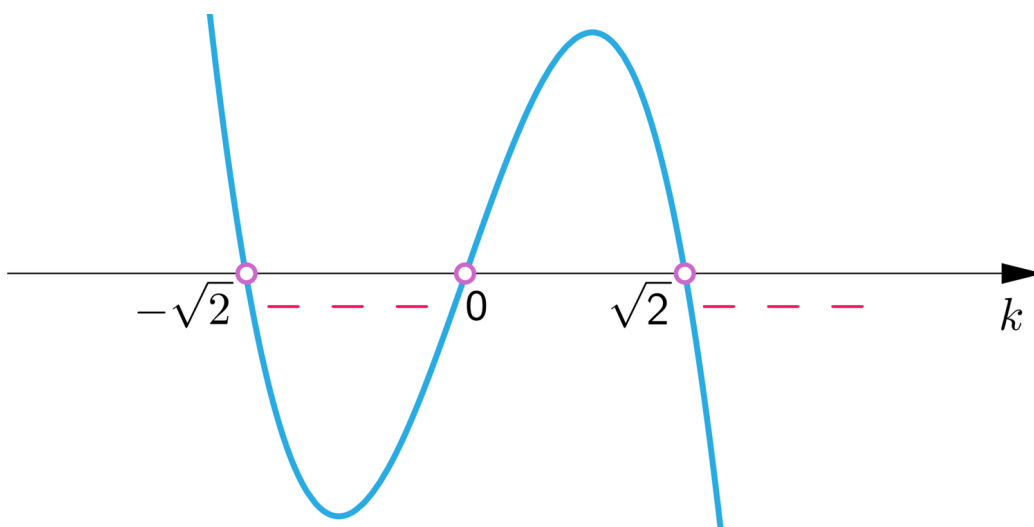
$$kx = 2 - k^2 \mid : k \neq 0$$

$$x = \frac{2-k^2}{k}$$

$$\frac{2-k^2}{k} < 0$$

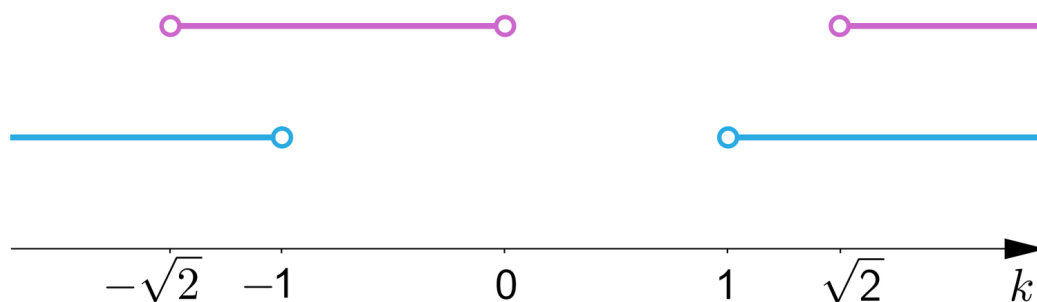
$$k(2 - k^2) < 0$$

$$k(\sqrt{2} - k)(\sqrt{2} + k) < 0$$



Zatem dla $k \in (-\sqrt{2}, 0) \cup (\sqrt{2}, \infty)$ badana funkcja ma ujemne miejsce zerowe.

Pozostaje ustalenie, dla jakich wartości parametru k spełnione są oba warunki:



Odpowiedź:

funkcja $f(x) = \frac{kx+k^2-2}{x-k}$, gdzie $x \neq k$ jest funkcją malejącą posiadającą ujemne miejsce zerowe dla $k \in (-\sqrt{2}, -1) \cup (\sqrt{2}, \infty)$.

Słownik

dziedzina

dziedziną nierówności wymiernej $\frac{W(x)}{V(x)} > 0$ lub $\frac{W(x)}{V(x)} < 0$, lub $\frac{W(x)}{V(x)} \geq 0$, lub $\frac{W(x)}{V(x)} \leq 0$ jest zbiór wszystkich liczb rzeczywistych z wyłączeniem pierwiastków wielomianu $V(x)$

pierwiastek podwójny wielomianu

liczbę p nazywamy pierwiastkiem podwójnym (lub dwukrotnym) wielomianu $W(x)$ wtedy, gdy wielomian ten można przedstawić w postaci $W(x) = (x - p)^2 \cdot Q(x)$, gdzie $Q(p) \neq 0$

pierwiastek k -krotny wielomianu

liczbę p nazywamy pierwiastkiem k -krotnym wielomianu $W(x)$ wtedy, gdy wielomian ten można przedstawić w postaci $W(x) = (x - p)^k \cdot Q(x)$, gdzie $Q(p) \neq 0$

Animacja

Polecenie 1

Zapoznaj się z animacją i wysłuchaj uważnie rozwiązań nierówności w niej przedstawionych. Po obejrzeniu animacji wykonaj polecenia 1 i 2. Postaraj się rozwiązać zaproponowane nierówności samodzielnie, a następnie przeprowadź samokontrolę za pomocą załączonych rozwiązań.

Film dostępny pod adresem <https://zpe.gov.pl/a/D15QBilpb>

Film nawiązujący do treści materiału dotyczącej nierówności wymiernych z parametrem.

Polecenie 2

Dla jakich wartości parametru k funkcja $f(x) = \frac{4-2x}{3x+k}$ przyjmuje wartości ujemne dla argumentów ze zbioru $(-\infty, -1) \cup (2, \infty)$?

Polecenie 3

Dla jakich wartości parametru a wartości funkcji $f(x) = \frac{2}{x}$ są mniejsze od wartości funkcji $g(x) = -2x + a$ dla argumentów $x \in (-\infty, 0) \cup (\frac{1}{2}, 2)$?

Sprawdź się

Pokaż ćwiczenia:   

Ćwiczenie 1



Zaznacz prawidłową odpowiedź. Zbiorem rozwiązań nierówności $\frac{2m}{3-x} > 1$ jest przedział $(3, 7)$ dla m równego:

☐ -1

☐ -2

☐ 0

☐ -3

Ćwiczenie 2



Ćwiczenie 3



Dla jakich wartości parametru p nierówność $\frac{px^2+x+p}{x^2+3x+5} > 0$ jest spełniona dla wszystkich liczb rzeczywistych?

Ćwiczenie 4



Dla jakich wartości parametru m funkcja $f(x) = \frac{m-2}{m^2+2m}x^2 + (m-2)x - \frac{m}{m+3}$ osiąga wartość najmniejszą dla $x = \frac{1}{2}$?

Ćwiczenie 5



Dla jakich wartości parametru a funkcja $f(x) = \frac{x^2 - 4ax + a^2}{x}$ jest malejąca dla $x \in (-3, 0)$ oraz $x \in (0, 3)$? Zaznacz poprawną odpowiedź spośród podanych.

☐ Dla $a \in \emptyset$

☐ Dla $a \in \{-3, 3\}$

☐ Tylko dla $a = -3$

☐ Tylko dla $a = 3$

Ćwiczenie 6



Dane jest wyrażenie wymierne $W = \frac{2x^2 + 3mx + 5}{x^2 - 2x + 4}$. Zaznacz wszystkie poprawne odpowiedzi wśród podanych:

☐ Rozwiązaniem nierówności $\frac{2x^2 + 3mx + 5}{x^2 - 2x + 4} \leq 1$ jest zbiór jednoelementowy dla $m \in \{-\frac{4}{3}, 0\}$

☐ Wszystkie odpowiedzi są poprawne

☐ Rozwiązaniem nierówności $\frac{2x^2 + 3mx + 5}{x^2 - 2x + 4} \geq 1$ jest zbiór liczb rzeczywistych dla $m \in (-\infty, -\frac{4}{3}) \cup \langle 0, \infty)$

☐ Dziedziną wyrażenia jest zbiór liczb rzeczywistych

Ćwiczenie 7



Dla jakich wartości parametru m , dziedziną funkcji $f(x) = \sqrt{\frac{mx+2}{x^2-1}}$ jest suma przedziałów: $(-\infty, -1) \cup \langle -\frac{2}{m}, 1)$?

Ćwiczenie 8



Dla jakich wartości parametru k funkcja $f(x) = \frac{k+2}{k}x - 1$ ma mniejsze miejsce zerowe niż funkcja $g(x) = \frac{2k-1}{k+1}x + 3$?

Dla nauczyciela

Autor: Karolina Nowak

Przedmiot: Matematyka

Temat: Nierówności wymierne z parametrem

Grupa docelowa: III etap edukacyjny, liceum ogólnokształcące, technikum, zakres rozszerzony

Podstawa programowa:

III. Równania i nierówności.

Zakres podstawowy. Uczeń:

7) rozwiązuje równania wymierne postaci $\frac{V(x)}{W(x)} = 0$, gdzie wielomiany $V(x)$ i $W(x)$ są zapisane w postaci iloczynowej.

Zakres rozszerzony. Uczeń spełnia wymagania określone dla zakresu podstawowego, a ponadto:

1) rozwiązuje nierówności wielomianowe typu: $W(x) > 0$, $W(x) \geq 0$, $W(x) < 0$, $W(x) \leq 0$ dla wielomianów doprowadzonych do postaci iloczynowej lub takich, które dają się doprowadzić do postaci iloczynowej metodą wyłączania wspólnego czynnika przed nawias lub metodą grupowania;

2) rozwiązuje równania i nierówności wymierne nie trudniejsze niż

$$\frac{x+1}{x(x-1)} + \frac{1}{x+1} \geq \frac{2x}{(x-1)(x+1)};$$

Kształtowane kompetencje kluczowe:

- kompetencje w zakresie rozumienia i tworzenia informacji,
- kompetencje cyfrowe,
- kompetencje osobiste, społeczne i w zakresie umiejętności uczenia się,
- kompetencje matematyczne.

Cele operacyjne:

Uczeń:

- rozwiązuje nierówność kwadratową, wymierną,
- przekształca wyrażenia wymierne,
- stosuje własności funkcji,

- oblicza pochodną ilorazu funkcji,
- dokonuje analizy informacji i wyciąga wnioski,
- czyta ze zrozumieniem, łączy fakty, dostrzega zależności,
- argumentuje i uzasadnia swoje działania,
- integruje wiadomości i umiejętności z różnych działów matematyki.

Strategie nauczania:

- konstruktywizm,
- konektywizm.

Metody i techniki nauczania:

- odwrócona klasa,
- dyskusja,
- obserwacja.

Formy pracy:

- praca indywidualna,
- praca w parach/małych grupach,
- praca zespołowa.

Środki dydaktyczne:

- komputery z głośnikami, słuchawkami i dostępem do Internetu,
- zasoby multimedialne zawarte w e-materiale,
- tablica interaktywna/tablica, pisak/kreda,
- monitor interaktywny,
- tablet graficzny.

Przebieg lekcji

Przed lekcją:

1. Uczniowie zapoznają się z treściami zapisanymi w sekcji „Wprowadzenie” oraz „Przeczytaj”.

Faza wstępna:

1. Nauczyciel prosi wybraną osobę o odczytanie tematu lekcji tj. „Nierówności wymierne z parametrem” oraz określa cele i kryteria sukcesu w języku ucznia.
2. Nauczyciel inicjuje rozmowę z uczniami na temat rozwiązywania równań liniowych i kwadratowych z parametrem. Metodą burzy mózgów uczniowie podają różne skojarzenia ze słowem „parametr”. Nauczyciel tworzy za pomocą aplikacji internetowej chmurę wyrazów zawierającą te skojarzenia.

3. Nauczyciel zadaje pytania kontrolne dotyczące przykładów z sekcji „Przeczytaj”, aby uzyskać informację o stopniu zrozumienia przez uczniów opisanych przykładów.

Faza realizacyjna:

1. Wszyscy uczniowie oglądają animację przedstawiającą przykłady rozwiązań nierówności wymiernych z parametrem.
2. Uczniowie w parach rozwiązują ostatnie zadanie zaprezentowane w animacji, a następnie analizują swoje rozwiązania porównując je z rozwiązaniem kontrolnym. Sporządzają listę pytań, które są prezentowane na forum klasy. Wymieniają się spostrzeżeniami, odpowiadają na pytania.
3. Uczniowie pracują w zespołach realizując Polecenie 1 (3 zespoły) oraz Polecenie 2 (3 zespoły). Po wykonaniu zadania zespoły, które rozwiązywały ten sam problem wymieniają się rozwiązaniami i sprawdzają poprawność wykonania zadania.
4. Nauczyciel kontroluje pracę zespołów, koryguje błędy i wyjaśnia ew. wątpliwości.
5. Przedstawiciele dwóch zespołów prezentują rozwiązanie problemów przedstawionych w Poleceniu 1 oraz w Poleceniu 2 na forum klasy. Najlepiej jednocześnie z wykorzystaniem dwóch tablic.
6. Uczniowie indywidualnie lub w parach przystępują do wykonania ćwiczeń 1 – 4 oraz 6 zamieszczonych w sekcji „Sprawdź się”.

Faza podsumowująca:

1. Uczniowie zgłaszają ewentualne problemy z rozwiązaniem ćwiczeń z sekcji „Sprawdź się” i wspólnie je omawiają.
2. Nauczyciel ponownie odczytuje temat lekcji: „Nierówności wymierne z parametrem” i inicjuje krótką rozmowę na temat kryteriów sukcesu. Czego się uczniowie nauczyli? Jaką wcześniejszą wiedzę i umiejętności wykorzystali na lekcji? Co było dla nich (lub nadal jest) trudne bądź niezrozumiałe?
3. Jeśli nauczyciel widzi taką potrzebę może zastosować na podsumowanie sygnalizację świetlną: uczniowie indywidualnie przypisują poszczególnym umiejętnościom określonym w kryteriach sukcesu kolory: zielony – wszystko zrozumiałe, żółty – zrozumiałe częściowo i czerwony – niezrozumiałe.

Praca domowa:

1. Uczniowie wykonują ćwiczenie 5.
2. Zadania dla chętnych – ćwiczenia 7 oraz 8.

Materiały pomocnicze:

- [Rozwiązywanie nierówności wielomianowych - wykorzystanie wzorów skróconego mnożenia](#)
- [Dyskusja liczby rozwiązań równania kwadratowego zupełnego z parametrem](#)

Wskazówki metodyczne:

- Zadania przedstawione w animacji uczniowie mogą wykonać jako pracę domową, porównując swoje rozwiązanie z tym z zaprezentowanym w animacji. Nauczyciel może również wykorzystać animację podczas realizacji tematu "Zbiór rozwiązań nierówności wymiernej".
- Szczególną uwagę warto zwrócić na zadanie zamieszczone w Poleceniu 2 i pokazać inny niż przedstawiony tutaj, sposób rozwiązania zadania, np. poprzez zastosowanie postaci iloczynowej funkcji kwadratowej.
- Po obejrzeniu animacji należy nawiązać do konieczności wnikliwego rozpatrywania wszystkich wartości badanego parametru oraz do konfrontowania otrzymanego wyniku z dziedziną.
- Jeśli nauczyciel uzna za stosowne, może zmienić kolejność w poszczególnych fazach lekcji: zlecić uczniom obejrzenie animacji przed lekcją oraz wykonanie poleceń 1 i 2. W fazie realizacyjnej natomiast przeprowadzić grupową analizę przykładów z sekcji „Przeczytaj”.