



Wykorzystanie funkcji wykładniczych i logarytmicznych w zastosowaniach praktycznych

- [Wprowadzenie](#)
- [Przeczytaj](#)
- [Animacja](#)
- [Sprawdź się](#)
- [Dla nauczyciela](#)



Wykorzystanie funkcji wykładniczych i logarytmicznych w zastosowaniach praktycznych

Źródło: [Harry Strauss z Pixabay](#), domena publiczna.

W reklamach lub podczas rozmów z doradcą finansowym klienci często słyszą o „magii procentu składanego”. Niewielka kwota wpłacona na lokatę na okres 25–30 lat daje ogromne zyski. W tym materiale dowiesz się, czym jest procent składany i na czym polega „ta magia”.

Warto od razu zwrócić uwagę, że rzeczywiście dzięki procentowi składanemu niewielka kwota wpłacona na lokatę długoterminową może z upływem czasu urosnąć do całkiem pokaźnej sumy pieniędzy. Dlaczego więc ludzie, którzy mają lokaty, nie stają się milionerami? Od zysków które uzyskujemy z lokaty, są pobierane opłaty oraz podatki. Te opłaty i podatki zmniejszają zyski klientów.

W tym materiale skoncentrujemy się przede wszystkim na tym, jak funkcjonują lokaty, jakie są różnice między procentem prostym i składanym. Dowiemy się również, w jaki sposób z lokatami związane są funkcje wykładnicza i logarytmiczna.



Twoje cele

- Nauczysz się obliczać zysk z różnego typu lokat.
- Dowiesz się, w jaki sposób wykorzystać wykresy funkcji wykładniczych i logarytmicznych w sytuacjach praktycznych.

Przeczytaj

W pierwszej części materiału będziemy posługiwać się pojęciami związanymi z lokatami zakładanymi w banku. Kwotę, którą wpłacamy na lokatę, nazywamy **kapitałem początkowym**. W czasie trwania lokaty do kapitału początkowego dodawane są **odsetki**, które zależą od oprocentowania lokaty, jej rodzaju i czasu trwania. Gdy likwidujemy lokatę lub upływa jej termin, zgromadzone na lokacie środki nazywamy **kapitałem końcowym**.

Lokatę zakładamy po to, aby nasze oszczędności rosły. Zwracamy wtedy uwagę na to, o ile procent w czasie roku zwiększy się kwota wpłacona na lokatę – o tym informuje nas **roczna stopa procentowa**. W zależności od rodzaju lokaty odsetki mogą być dopisywane raz w roku lub częściej. Ten proces nazywamy kapitalizacją odsetek. Poniższe przykłady i zadania pozwolą lepiej Ci zrozumieć wszystkie te pojęcia.

Przykład 1

W ofercie banku znajdują się trzy rodzaje lokat, na których oprocentowanie kapitału jest równe 5% w stosunku rocznym:

1. lokata 1 – **kapitalizacja odsetek** ma miejsce po roku;
2. lokata 2 – kapitalizacja odsetek ma miejsce co pół roku;
3. lokata 3 – kapitalizacja odsetek ma miejsce co kwartał.

Sprawdźmy, która lokata jest najbardziej korzystna, jeżeli chcemy na nią wpłacić 1000 zł na okres jednego roku.

Rozwiązanie

Lokata 1

Kapitał początkowy jest równy 1000 zł. Po roku klient banku otrzymuje odsetki w wysokości 5% z 1000 zł, czyli:

$$5\% \cdot 1000 = 0,05 \cdot 1000 = 50.$$

Oznacza to, że kapitał końcowy jest równy 1050 zł.

Lokata 2

Kapitał początkowy jest równy 1000 zł. Oprocentowanie roczne jest równe 5%, ale kapitalizacja następuje co pół roku, czyli dwa razy w czasie trwania lokaty.

Po pół roku do kwoty na lokacie zostają dopisane odsetki w wysokości $\frac{1}{2} \cdot 5\%$ z 1000 zł.

$$\frac{1}{2} \cdot 5\% \cdot 1000 = \frac{1}{2} \cdot 0,05 \cdot 1000 = 0,025 \cdot 1000 = 25.$$

Oznacza to, że po pół roku środki zgromadzone na lokacie są równe 1025 zł.

$$1000 + \frac{1}{2} \cdot 5\% \cdot 1000 = 1000(1 + \frac{1}{2} \cdot 0,05) = 1000 \cdot 1,025 = 1025$$

Mija drugie półrocze, pod koniec którego następuje kolejna kapitalizacja odsetek. Klient za ten czas otrzymuje drugą część należnych odsetek w wysokości $\frac{1}{2} \cdot 5\%$ z 1025 zł, ponieważ na początku drugiego półrocza wartość lokaty była równa 1025 zł. Stąd po drugiej kapitalizacji odsetki są równe:

$$\frac{1}{2} \cdot 5\% \cdot 1025 = \frac{1}{2} \cdot 0,05 \cdot 1025 = 0,025 \cdot 1025 = 25,625.$$

Kwota zgromadzona na lokacie jest więc równa $1025 + 25,625 = 1050,625$.

Inaczej możemy to zapisać w postaci:

$$1025 + \frac{1}{2} \cdot 5\% \cdot 1025 = 1025(1 + \frac{1}{2} \cdot 5\%) = 1000(1 + \frac{1}{2} \cdot 5\%)(1 + \frac{1}{2} \cdot 5\%) = 1000(1 + \frac{1}{2} \cdot 5\%)^2.$$

Wartość tego wyrażenia jest równa:

$$1000(1 + \frac{1}{2} \cdot 5\%)^2 = 1000(1 + 2,5\%)^2 = 1000(1 + 0,025)^2 = 1000 \cdot 1,050625 = 1050,625$$

Lokata 3

Kapitał początkowy jest równy 1000 zł. Oprocentowanie roczne jest równe 5%, ale kapitalizacja następuje co kwartał, czyli cztery razy w czasie trwania lokaty.

Po pierwszym kwartale do kwoty na lokacie zostają dopisane odsetki w wysokości $\frac{1}{4} \cdot 5\%$ z 1000 zł.

1012,50 zł.

Oznacza to, że po pół roku środki zgromadzone na lokacie są równe 1012,50 zł.

$$1000 + \frac{1}{4} \cdot 5\% \cdot 1000 = 1000(1 + \frac{1}{4} \cdot 0,05) = 1000 \cdot 1,0125 = 1012,50.$$

Pod koniec drugiego kwartału następuje kolejna kapitalizacja odsetek. Do środków zgromadzonych na lokacie dodawane są odsetki w wysokości $\frac{1}{4} \cdot 5\%$ z 1012,5 zł, ponieważ na początku drugiego kwartału wartość lokaty była równa 1012,5 zł. Stąd po drugiej kapitalizacji odsetki są równe:

$$\frac{1}{4} \cdot 5\% \cdot 1012,5 = \frac{1}{4} \cdot 0,05 \cdot 1012,5 = 0,0125 \cdot 1012,5 = 12,65625 \approx 12,656.$$

Kwota zgromadzona na lokacie jest więc równa $1012,5 + 12,65625 = 1025,15625 \approx 1025,156$.

Inaczej możemy to zapisać w postaci:

$$1012,5 + \frac{1}{4} \cdot 5\% \cdot 1012,5 = 1012,5 \left(1 + \frac{1}{4} \cdot 5\%\right) = 1000 \left(1 + \frac{1}{4} \cdot 5\%\right) \\ \left(1 + \frac{1}{4} \cdot 5\%\right) = 1000 \left(1 + \frac{1}{4} \cdot 5\%\right)^2$$

Wartość tego wyrażenia jest równa:

$$1000 \left(1 + \frac{1}{4} \cdot 5\%\right)^2 = 1000(1 + 1,25\%)^2 = 1000(1 + 0,0125)^2 \approx 1025,156.$$

Po trzecim kwartale do kwoty 1025,156 zł zostaną dopisane odsetki w wysokości $\frac{1}{4} \cdot 5\%$ z kwoty 1025,156 zł.

$$\frac{1}{4} \cdot 5\% \cdot 1025,156 = 12,81445 \approx 12,814.$$

Kwota zgromadzona na lokacie po trzecim kwartale jest więc równa:

$$1025,156 + 12,81445 = 1037,97045 \approx 1037,97$$

Inaczej możemy to zapisać w postaci:

$$1025,156 + \frac{1}{4} \cdot 5\% \cdot 1025,156 = 1025,156 \left(1 + \frac{1}{4} \cdot 0,05\right) = \\ = 1000 \left(1 + \frac{1}{4} \cdot 5\%\right)^2 \left(1 + \frac{1}{4} \cdot 0,05\right) = 1000 \left(1 + \frac{1}{4} \cdot 5\%\right)^3$$

$$1000 \left(1 + \frac{1}{4} \cdot 5\%\right)^3 = 1000(1 + 1,25\%)^3 = 1000(1 + 0,0125)^3 \approx 1037,97.$$

Po czwartym kwartale odsetki są równe:

$$\frac{1}{4} \cdot 5\% \cdot 1037,97 = \frac{1}{4} \cdot 0,05 \cdot 1037,97 = 0,0125 \cdot 1037,97 = 12,974625 \approx 12,975$$

Kwota zgromadzona na lokacie po trzecim kwartale jest więc równa:

$$1037,97 + 12,974625 = 1050,944625 \approx 1050,94$$

Inaczej możemy to zapisać w postaci:

$$1037,97 + \frac{1}{4} \cdot 5\% \cdot 1037,97 = 1037,97 \left(1 + \frac{1}{4} \cdot 0,05\right) = \\ = 1000 \left(1 + \frac{1}{4} \cdot 5\%\right)^3 \left(1 + \frac{1}{4} \cdot 0,05\right) = 1000 \left(1 + \frac{1}{4} \cdot 5\%\right)^4$$

$$1000 \left(1 + \frac{1}{4} \cdot 5\%\right)^4 = 1000(1 + 1,25\%)^4 = 1000(1 + 0,0125)^4 \approx 1050,94.$$

Podsumujmy informacje na temat lokat w tabeli.

	lokata 1	lokata 2	lokata 3
kapitał początkowy	1000 zł	1000 zł	1000 zł
oprocentowanie roczne	5%	5%	5%
liczba kapitalizacji w czasie roku	1	2	4

	lokata 1	lokata 2	lokata 3
kapitał końcowy	1050 zł	1050, 63 zł	1050, 94 zł
wzór na kapitał końcowy	$1000(1 + 5\%)$	$1000\left(1 + \frac{1}{2} \cdot 5\%\right)^2$	$1000\left(1 + \frac{1}{4} \cdot 5\%\right)^4$

Wnioski

- Przy takim samym kapitale początkowym oraz oprocentowaniu rocznym największe zyski (odsetki) uzyska klient, który założy lokatę z większą liczbą kapitalizacji odsetek w czasie trwania lokaty.
- Aby obliczyć kapitał końcowy zgromadzony na lokacie w czasie roku, możemy skorzystać ze wzoru:

$$K_n = K_p \left(1 + \frac{p}{n}\right)^n,$$

gdzie:

K_n – kapitał końcowy,

K_p – kapitał początkowy,

p – oprocentowanie roczne (zapisane w postaci ułamka dziesiętnego),

n – liczba kapitalizacji w czasie roku.

- Oznaczmy $\left(1 + \frac{p}{n}\right)$ jako q , wtedy:

$$K_p \xrightarrow{\cdot q} K_1 \xrightarrow{\cdot q} K_2 \xrightarrow{\cdot q} K_3 \xrightarrow{\cdot q} \dots \xrightarrow{\cdot q} K_n = K_p \cdot q^n$$

- Z otrzymanego wzoru i schematu wynika, że kapitał zgromadzony na lokacie rośnie wykładniczo.

Definicja: procent składany

Procentem składanym nazywamy sposób oprocentowania wkładu pieniężnego K_p (kapitału początkowego). Polega on na tym, że dochód w postaci odsetek jest doliczany do kapitału początkowego po każdym okresie oszczędzania i wraz z tym wkładem początkowym procentuje w następnym okresie oszczędzania.

Przykład 2

Na dwie lokaty w banku wpłacono 10000 zł na okres pięciu lat. Oprocentowanie roczne obu lokat jest takie samo i jest równe 4%. W przypadku pierwszej lokaty kapitalizacja odsetek następuje po każdym roku, natomiast w przypadku drugiej lokaty odsetki zostają obliczone na koniec okresu oszczędzania. Obliczymy wartość kapitału końcowego w przypadku każdej z lokat.

Rozwiązanie

Lokata 1

W przypadku pierwszej lokaty kapitalizacja odsetek następuje po każdym roku oszczędzania.

Po pierwszym roku kwota zgromadzona na lokacie jest równa:

$$10000 + 4\% \cdot 10000 = 10000 \cdot (1 + 0,04) = 10000 \cdot 1,04 = 10400.$$

Po drugim roku kwota lokaty ma wartość:

$$10400 + 4\% \cdot 10400 = 10400 \cdot (1 + 0,04) = 10000 \cdot (1 + 0,04)(1 + 0,04) = 10000 \cdot (1 + 0,04)^2 = 10816.$$

Po trzecim roku oszczędzania kwota lokaty jest równa:

$$10816 + 4\% \cdot 10816 = 10816 \cdot (1 + 0,04) = 10000 \cdot (1 + 0,04)^2(1 + 0,04) = 10000 \cdot (1 + 0,04)^3 = 11248,64.$$

Zauważmy, że po pięciu latach kapitał zgromadzony na lokacie można obliczyć w następujący sposób:

$$10000 \cdot (1 + 0,04)^5 \approx 12166,53.$$

Lokata 2

W przypadku drugiej lokaty odsetki są obliczane pod koniec okresu oszczędzania. Za każdy rok dolicza się kwotę 4% z 10000 zł.

$$10000 + 5 \cdot 4\% \cdot 10000 = 10000 \cdot (1 + 5 \cdot 4\%) = 10000 \cdot (1 + 5 \cdot 0,04) = 12000 \text{ [zł]}.$$

Wnioski

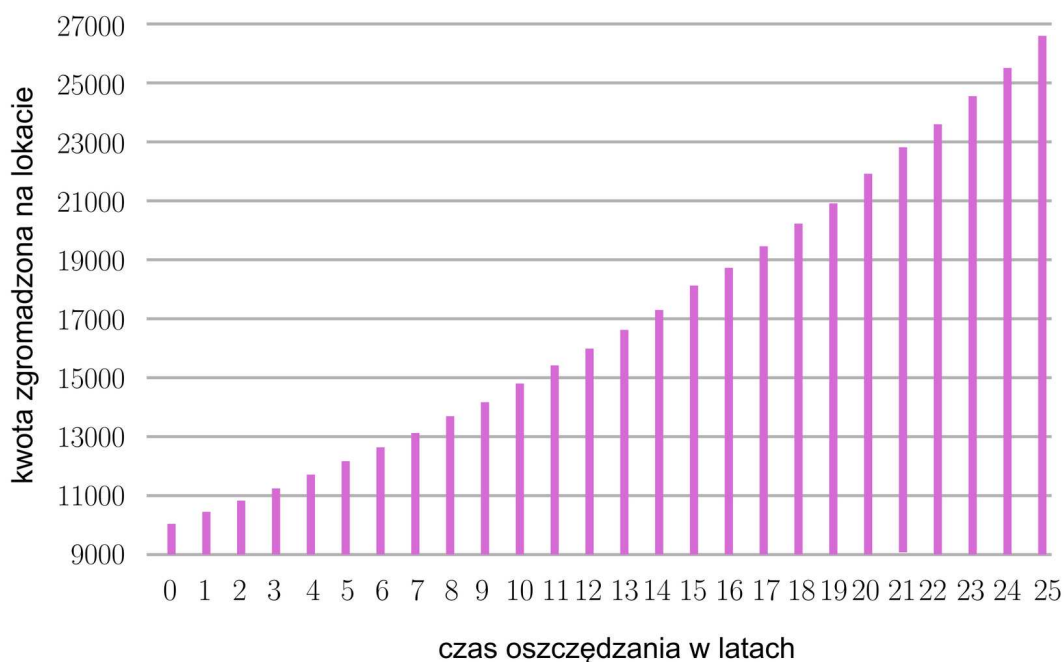
Przy takim samym kapitale początkowym oraz oprocentowaniu rocznym korzystniej jest założyć lokatę, w której kapitalizacja odsetek odbywa się po każdym roku.

W Przykładzie 2. w przypadku lokaty pierwszej mamy do czynienia z **procentem składanym**, natomiast w przypadku lokaty drugiej – z **procentem prostym**.

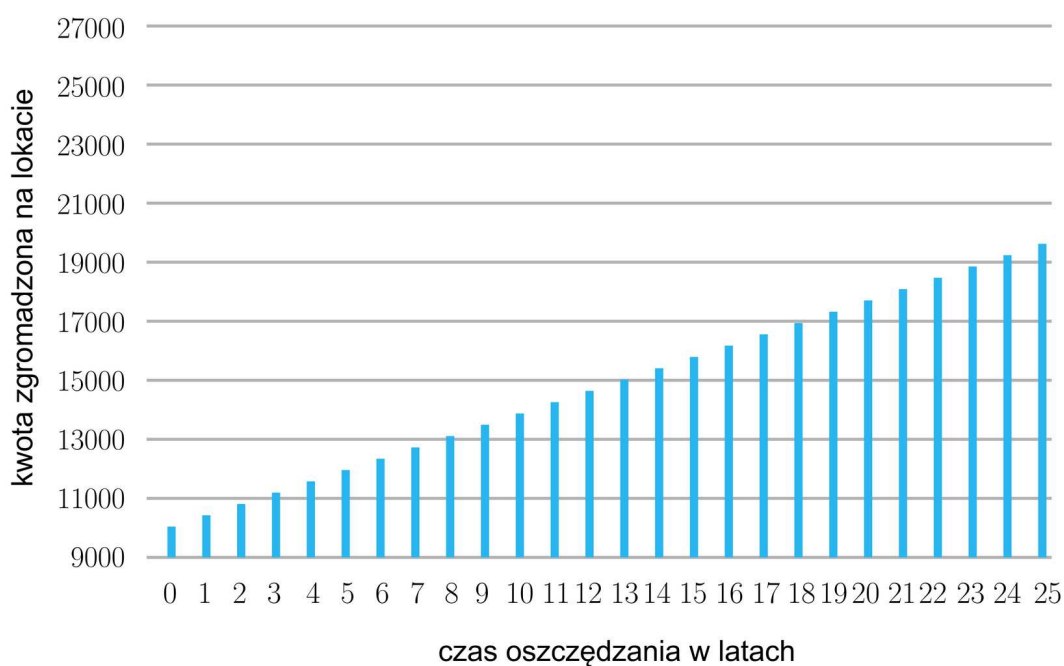
Definicja: procent prosty

Procentem prostym nazywamy sposób oprocentowania wkładu pieniężnego K_p (kapitału początkowego). Polega on na tym, że dochód w postaci odsetek jest doliczany do kapitału początkowego po każdym okresie oszczędzania i nie jest brany pod uwagę jako wkład w następnym roku – nie jest uwzględniany przy obliczaniu oprocentowania w kolejnym roku.

Zwróćmy uwagę, że w przypadku procentu składanego kapitał rośnie wykładniczo.



Z kolei w przypadku procentu prostego kapitał rośnie liniowo.



Na podstawie przykładów pierwszego i drugiego można sformułować wzór, który pozwala obliczyć kapitał końcowy, jeżeli lokata została założona na kilka lat i kapitalizacja odsetek ma miejsce kilka razy w czasie jednego roku.

Ważne!

Przyjmijmy, że kapitał początkowy K_p został wpłacony na lokatę taką, że:

- oprocentowanie roczne jest równe $p\%$,
- kapitalizacja odsetek ma miejsce n razy w ciągu roku,
- okres trwania lokaty jest równy m lat.

Wtedy kapitał końcowy obliczamy ze wzoru:

$$K_n = K_p \left(1 + \frac{p}{n}\right)^{n \cdot m},$$

gdzie:

K_n – kapitał końcowy,

K_p – kapitał początkowy,

p – oprocentowanie roczne (zapisane w postaci ułamka dziesiętnego),

n – liczba kapitalizacji w ciągu roku,

m – czas trwania lokaty w latach.

Przykład 3

W okresie wiosennym w jednym ze sklepów odzieżowych postanowiono zorganizować wyprzedaż kurtek zimowych. Cena kurtki w czasie sezonu była równa 300 zł. Podczas wyprzedaży cenę kurtki zmniejszano co dwa tygodnie o 10%. Obliczymy cenę kurtki po 10 tygodniach.

Rozwiązanie

Po upływie kolejnych dwóch tygodni cena kurtki zmniejsza się o 10%. W czasie 10 tygodni cena zostanie obniżona 5 razy. Za każdym razem cenę obniżamy o 10% od ceny obniżonej wcześniej:

pierwsza obniżka: $300 - 10\% \cdot 300 = 300(1 - 10\%) = 300(1 - 0,1) = 300 \cdot 0,9 = 270$

druga obniżka:

$270 - 10\% \cdot 270 = 270(1 - 10\%) = 300(1 - 10\%)(1 - 10\%) = 300(1 - 10\%)^2$.

Można więc zauważyć, że mamy do czynienia z procentem składanym.

Po 10 tygodniach, czyli po pięciu obniżkach, cena kurtki jest równa:

$300(1 - 10\%)^5 = 300 \cdot 0,9^5 \approx 177,15$ [zł]

Przykład 4

Pan Hubert wpłacił 10000 zł na lokatę, której roczna stopa procentowa jest równa 3% z kapitalizacją odsetek co kwartał. Obliczymy, po ilu latach oszczędzania kapitał końcowy na lokacie przekroczy 12000 zł.

Rozwiązanie

Kapitalizacja odsetek na tej lokacie odbywa się cztery razy w roku przez kilka lat. Skorzystamy więc ze wzoru:

$$K_n = K_p \left(1 + \frac{p}{n}\right)^{n \cdot m}$$

Po podstawieniu danych z treści zadania, otrzymujemy:

$$12000 = 10000 \left(1 + \frac{0,03}{4}\right)^{4m}$$

Przekształcamy równanie tak, aby wyznaczyć liczbę lat m .

$$\frac{12000}{10000} = \left(1 + \frac{0,03}{4}\right)^{4m}$$

$$1,2 = \left(1 + \frac{0,03}{4}\right)^{4m}$$

Korzystamy z własności logarytmów:

$$\log 1,2 = \log \left(1 + \frac{0,03}{4}\right)^{4m}$$

$$\log 1,2 = 4m \log \left(1 + \frac{0,03}{4}\right)$$

$$\frac{\log 1,2}{4 \log \left(1 + \frac{0,03}{4}\right)} = m$$

Do obliczenia wartości wyrażenia korzystamy z tablic logarytmów dziesiętnych.

$$m = \frac{\log 1,2}{4 \log \left(1 + \frac{0,03}{4}\right)} = \frac{\log 1,2}{4 \log \left(\frac{4,03}{4}\right)} \approx 6,1$$

Kapitał końcowy na lokacie założonej przez pana Huberta przekroczy 12000 zł po 6 latach i trzech miesiącach oszczędzania.

Przykład 5

Funkcję logarytmiczną i jej wykres można wykorzystać do ustalenia liczby cyfr, za pomocą których zapisujemy daną liczbę.

Zanim jednak wyprowadzimy ogólny wzór, zauważmy pewną prawidłowość. Rozważmy liczbę 5732 złożoną z czterech cyfr. Ta liczba spełnia nierówność:

$$1000 \leq 5732 < 10000$$

co inaczej możemy zapisać w postaci:

$$10^3 \leq 5732 < 10^4$$

Podobną nierówność możemy zapisać dla 92185:

$$10000 \leq 92185 < 100000$$

co inaczej możemy zapisać w postaci:

$$10^4 \leq 92185 < 10^5.$$

Zwróćmy uwagę, że wykładnik potęgi z prawej strony nierówności jest równy liczbie cyfr danej liczby.

Wyprowadźmy więc ogólny wzór, który umożliwi nam obliczenie liczby cyfr tworzących liczbę. Rozważmy liczbę naturalną n , która złożona jest z d cyfr. W systemie dziesiętnym ta liczba spełnia nierówność:

$$10^{d-1} \leq n < 10^d$$

Skorzystamy z własności funkcji logarytmicznej, która jest różnowartościowa i monotoniczna.

$$\log 10^{d-1} \leq \log n < \log 10^d$$

$$d - 1 \leq \log n < d$$

Zwróćmy uwagę, że $d \in \mathbb{N}$.

Powyższą nierówność możemy zapisać w postaci:

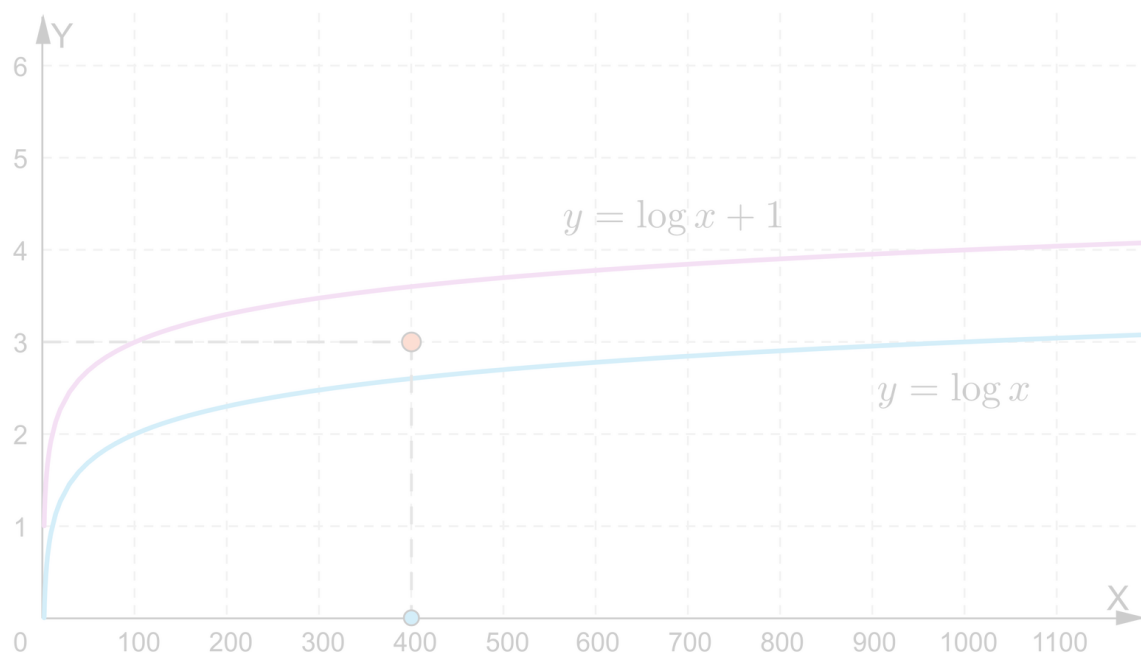
$$d - 1 \leq \log n \wedge \log n < d$$

$$d \leq \log n + 1 \wedge \log n < d$$

Oznacza to, że liczba cyfr d , za pomocą której liczbę naturalną n zapisujemy w systemie dziesiętnym, jest większa od $\log n$ i mniejsza od $\log n + 1$.

Narysujmy więc wykresy funkcji $y = \log x$ oraz $y = \log x + 1$ w jednym układzie współrzędnych.

Na osi X odczytujemy liczbę, natomiast na osi Y liczbę cyfr, za pomocą których tę liczbę opisujemy (czyli liczbę cyfr jej rozwinięcia dziesiętnego). Za pomocą suwaka możemy zmieniać liczbę.



Zasób interaktywny dostępny pod adresem <https://zpe.gov.pl/a/D15Jg0J8z>

Wzór, za pomocą którego można obliczyć liczbę cyfr rozwinięcia dziesiętnego liczby n , wyznaczamy z nierówności:

$$d - 1 \leq \log n < d, d \in \mathbb{N}$$

Aby ustalić liczbę cyfr potrzebujemy znać jedynie część całkowitą liczby $\log n$, co w matematyce zapisujemy $[\log n]$.

Zapis $[3, 582]$ oznacza 3, czyli $[3, 582] = 3$.

Z nierówności

$$d - 1 \leq \log n < d$$

wynika więc, że

$$d - 1 = [\log n].$$

Stąd

$$d = [\log n] + 1$$

Sprawdźmy więc, czy otrzymany wzór działa.

$$d = [\log 5732] + 1 = [3, 7583] + 1 = 3 + 1 = 4$$

Liczba 5732 rzeczywiście ma cztery cyfry.

$$d = \lceil \log 92185 \rceil + 1 = \lceil 4,96466 \rceil + 1 = 4 + 1 = 5$$

Za pomocą wzoru $d = \lceil \log n \rceil + 1$ można więc ustalić liczbę cyfr, za pomocą których zapiszemy liczbę n w systemie dziesiętnym.

Przykład 6

Sprawdźmy, za pomocą ilu cyfr zapiszemy liczbę 50 w systemie binarnym.

Rozwiązanie

W systemie binarnym liczby zapisujemy za pomocą zer i jedynek.

system dziesiętny	system binarny
1	1
2	10
3	11
4	100
5	101
6	110
7	111
8	1000
9	1001
10	1010
11	1011
12	1100
13	1101
14	1110
15	1111
16	10000

Można zauważyć, że liczba cyfr rozwinięcia binarnego liczby zwiększa się o jedną w przypadku liczb, które są potęgami dwójki.

Liczba 2 jest najmniejszą liczbą, którą w systemie binarnym można zapisać za pomocą dwóch cyfr. Liczba 4 jest najmniejszą liczbą, którą w systemie binarnym można zapisać za pomocą trzech zer i jedynek. Liczba 8 z kolei jest najmniejszą liczbą, którą w systemie binarnym można zapisać za pomocą czterech zer i jedynek.

Liczba 6 spełnia więc nierówność:

$$4 \leq 6 < 8$$

czyli

$$2^2 \leq 6 < 2^3$$

Liczbę 6 w systemie binarnym przedstawiamy jako 110, czyli za pomocą trzech cyfr.

Podobnie liczba 9 spełnia nierówność:

$$8 \leq 9 < 16$$

$$2^3 \leq 9 < 2^4$$

Liczbę 9 w systemie binarnym przedstawiamy jako 1001, czyli za pomocą czterech cyfr.

Zwróćmy uwagę, że liczba cyfr, za pomocą których przedstawiamy liczbę w systemie binarnym, pojawia się w wykładniku potęgi z prawej strony nierówności. Poczynioną obserwację możemy więc uogólnić

Liczba naturalna n , która w rozwinięciu binarnym ma d cyfr, spełnia nierówność:

$$2^{d-1} \leq n < 2^d$$

Skorzystamy z własności funkcji logarytmicznej, która jest różnowartościowa i monotoniczna.

$$\log_2 2^{d-1} \leq \log_2 n < \log_2 2^d$$

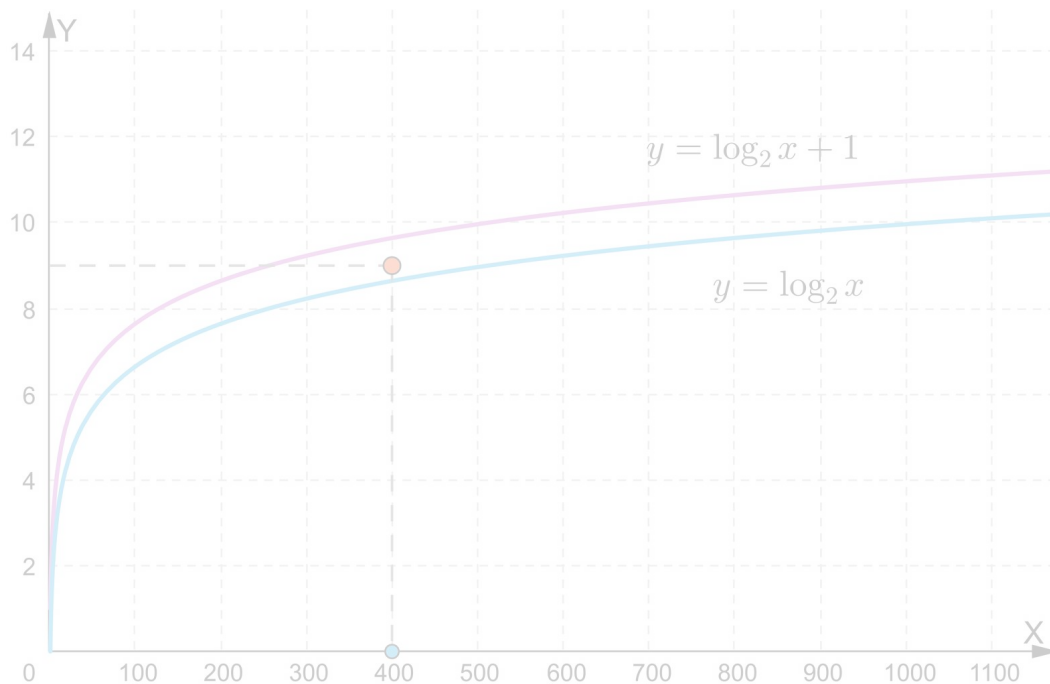
$$d - 1 \leq \log_2 n < d$$

Skoro d to liczba cyfr, więc $d \in \mathbb{N}$.

Wynika stąd, że liczba cyfr d , za pomocą której liczbę naturalną n zapisujemy w systemie binarnym, jest większa od $\log_2 n$ i mniejsza od $\log_2 n + 1$.

Narysujmy więc wykresy funkcji $y = \log_2 x$ oraz $y = \log_2 x + 1$ w jednym układzie współrzędnych.

Na osi X odczytujemy liczbę, natomiast na osi Y liczbę cyfr, za pomocą których tę liczbę opisujemy (czyli liczbę cyfr jej rozwinięcia binarnego). Za pomocą suwaka możemy zmieniać liczbę.



Zasób interaktywny dostępny pod adresem <https://zpe.gov.pl/a/D15Jg0J8z>

Wyznamy wzór, za pomocą którego można obliczyć liczbę cyfr rozwinięcia binarnego liczby n .

$$d - 1 \leq \log_2 n < d, d \in \mathbb{N}$$

Aby ustalić liczbę cyfr potrzebujemy znać jedynie część całkowitą liczby $\log_2 n$, co w matematyce zapisujemy $\lfloor \log_2 n \rfloor$.

Z nierówności

$$d - 1 \leq \log_2 n < d$$

wynika więc, że

$$d - 1 = \lfloor \log_2 n \rfloor.$$

Stąd

$$d = \lfloor \log_2 n \rfloor + 1$$

Gdy $n = 50$:

$$d = \lfloor \log_2 50 \rfloor + 1 = \lfloor 5,643856 \rfloor + 1 = 5 + 1 = 6.$$

Z wykresu również odczytujemy, że liczba 50 ma sześć cyfr rozwinięcia binarnego.

Słownik

kapitalizacja odsetek

dopisanie odsetek do kapitału po upływie określonego czasu

kapitał początkowy

początkowa kwota pieniędzy, wkład pieniężny

kapitał końcowy

końcowa kwota pieniędzy wraz z doliczonymi odsetkami za czas oszczędzania

odsetki

kwota dopisana do kapitału początkowego po upływie określonego czasu, zysk

procent prosty

sposób oprocentowania wkładu pieniężnego (kapitału początkowego). Polega on na tym, że dochód w postaci odsetek jest doliczany do kapitału początkowego po każdym okresie oszczędzania i nie jest brany pod uwagę jako wkład w następnym roku – nie jest uwzględniany przy obliczaniu oprocentowania w kolejnym roku

procent składany

sposób oprocentowania wkładu pieniężnego (kapitału początkowego). Polega on na tym, że dochód w postaci odsetek jest doliczany do kapitału początkowego po każdym okresie oszczędzania i wraz z tym wkładem początkowym procentuje w następnym okresie oszczędzania

roczna stopa procentowa

kwota (koszt), który przysługuje posiadaczowi kapitału w zamian za to, że pożyczył swoje pieniądze; zazwyczaj wyrażona jest jako procent od pożyczonej sumy i obliczana jest za każdy rok, w którym kwota była pożyczona

Animacja

Polecenie 1

Obejrzyj animację, a następnie wykonaj poniższe polecenia.

Film dostępny pod adresem <https://zpe.gov.pl/a/DNFm9CVNC>

Film nawiązujący do treści materiału dotyczącego wykorzystania wykresów funkcji logarytmicznych do opisu i interpretacji zagadnień związanych z zastosowaniami praktycznymi.

Polecenie 2

Za pomocą wzoru $m = \log_{1+\frac{p}{1200}} \left(\frac{K_m}{K_0} \right)$ można obliczyć liczbę miesięcy, na którą musi być założona lokata oprocentowana $p\%$ w skali roku z comiesięczną kapitalizacją odsetek.

m – czas trwania lokaty w miesiącach

$p\%$ – roczna stopa procentowa $p\% = \frac{p}{100}$

K_0 – kapitał początkowy

K_m – kapitał końcowy

Za pomocą którego z poniższych wzorów można obliczyć czas n liczony w latach, na jaki należy założyć lokatę oprocentowaną $p\%$ w skali roku, jeżeli kapitalizacja odsetek odbywa się co roku? Zaznacz prawidłową odpowiedź.

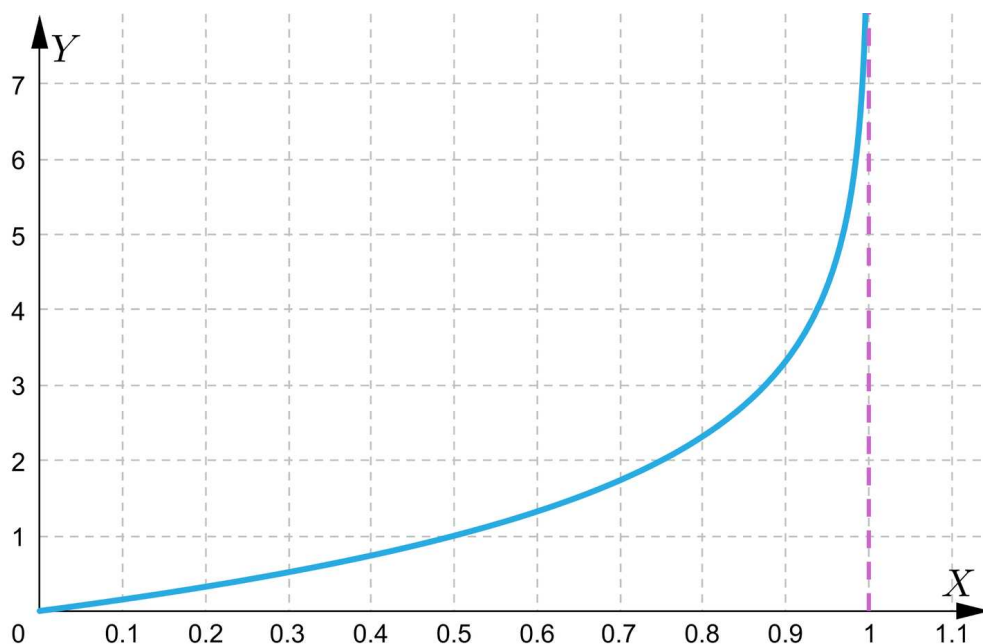
☐ $n = \log_{1+\frac{p}{1000}} \left(\frac{K_0}{K_n} \right)$

☐ $n = \log_{1+\frac{p}{1200}} \left(\frac{K_0}{K_n} \right)$

☐ $n = \log_{1+\frac{p}{100}} \left(\frac{K_n}{K_0} \right)$

Polecenie 3

Rysunek przedstawia wykres funkcji, za pomocą której można obliczyć liczbę monet y , którymi należy rzucić, aby z prawdopodobieństwem x uzyskać choć jednego orła.



Funkcja przedstawiona jest określona wzorem:

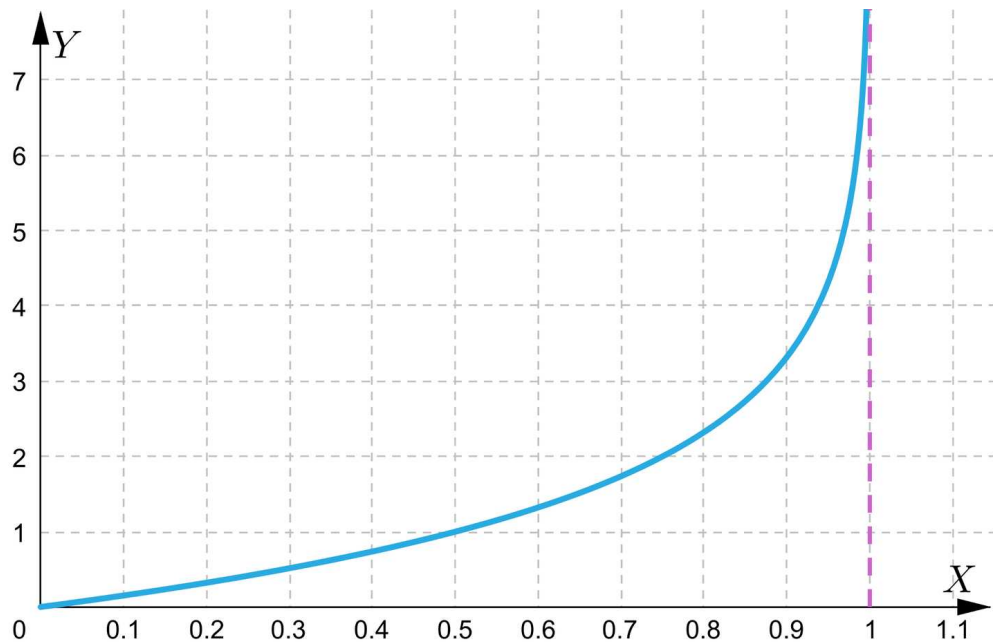
☐ $y = \log_2(1 - x)$

☐ $y = \log_{0,5}(x - 1)$

☐ $y = \log_{0,5}(1 - x)$

Polecenie 4

Rysunek przedstawia wykres funkcji, za pomocą której można obliczyć liczbę monet y , którymi należy rzucić, aby z prawdopodobieństwem x uzyskać choć jednego orła.



Na podstawie wykresu, oceń prawdziwość zdań.

Zdanie	Prawda	Fałsz
Gdy rzucamy czterema monetami, prawdopodobieństwo otrzymania przynajmniej jednego orła jest większe od 94%	☐	☐
Prawdopodobieństwo otrzymania orła będzie mniejsze od 80%, jeżeli będziemy rzucać dwiema monetami	☐	☐
Prawdopodobieństwo uzyskania przynajmniej jednego orła jest mniejsze od 98% przy rzucie sześcioma monetami	☐	☐
Jeżeli rzucimy czterema monetami, to prawdopodobieństwo otrzymania samych reszek jest równe około 6%	☐	☐

Sprawdź się

Pokaż ćwiczenia:   

Ćwiczenie 1



Na podstawie wzoru $25000\left(1 + \frac{0,025}{2}\right)^{20}$ można obliczyć kapitał końcowy pewnej lokaty. Wstaw odpowiednie wartości w puste pola.

wysokość kapitału początkowego: złotych

oprocentowanie roczne lokaty: %

liczba kapitalizacji odsetek w czasie jednego roku:

czas trwania lokaty: lat

Ćwiczenie 2



Dopasuj wzór do odpowiedniej sytuacji.

kapitalizacja odsetek co miesiąc

$$5000\left(1 + \frac{0,05}{12}\right)^{12}$$

kapitalizacja odsetek dwa razy w roku

$$5000(1 + 0,05)^{12}$$

kapitalizacja odsetek raz w roku

$$5000\left(1 + \frac{0,05}{6}\right)^{12}$$

kapitalizacja odsetek co dwa miesiące

$$5000\left(1 + \frac{0,05}{2}\right)^{12}$$

Ćwiczenie 3



Kwotę 1000 zł wpłacono na lokatę, której roczna stopa procentowa jest równa 4% z kapitalizacją odsetek co kwartał. Oceń prawdziwość zdań.

Zdanie	Prawda	Fałsz
Po upływie trzech lat odsetki zgromadzone na tej lokacie będą większe od 100 zł	☐	☐
Jeżeli kapitał początkowy będzie dwa razy większy, to odsetki po upływie trzech lat również wzrosną dwukrotnie	☐	☐
Jeżeli roczna stopa procentowa wzrośnie dwukrotnie, czyli do 8%, to odsetki po upływie trzech lat również wzrosną dwukrotnie	☐	☐
Jeżeli kapitalizacja odsetek będzie odbywała się dwa razy rzadziej, czyli co pół roku, to odsetki po trzech latach również będą dwa razy niższe	☐	☐

Ćwiczenie 4



Kwotę 5000 zł wpłacono na różne lokaty. Po dwóch latach lokaty zlikwidowano. Uporządkuj lokaty w kolejności od tej, z której zysk będzie najmniejszy, do tej, z której zysk będzie największy.

lokata 4 – oprocentowanie roczne równe 4% z kapitalizacją odsetek co kwartał



lokata 3 – oprocentowanie roczne równe 3,9% z kapitalizacją odsetek co miesiąc



lokata 1 – oprocentowanie roczne równe 4% z kapitalizacją odsetek co pół roku



lokata 2 – oprocentowanie roczne równe 5% z kapitalizacją odsetek po każdym roku



Ćwiczenie 5



Pewna suma została wpłacona na lokatę z procentowaniem 3% w skali roku i kapitalizacją roczną. Oblicz, za ile lat kapitał zgromadzony na tej lokacie będzie około 1,23 razy większy.

☐ po 2 latach

☐ po 5 latach

☐ po 7 latach

☐ po 4 latach

Ćwiczenie 6



Kwotę 1000 zł wpłacono na lokatę oprocentowaną 5% w skali roku z kapitalizacją odsetek co pół roku. Oblicz, po ilu latach oszczędzania kapitał na lokacie się podwoi.

Ćwiczenie 7



Cztery lata temu wpłacono 1000 euro na lokatę z kapitalizacją odsetek raz w roku. W dniu, w którym upłynął termin lokaty, wypłacono 1215,50 euro. Oblicz oprocentowanie lokaty.

Ćwiczenie 8



Oblicz kwotę, którą należy wpłacić na lokatę, aby po 10 latach kapitał zgromadzony na tej lokacie był równy 3000 euro. Roczna stopa procentowa lokaty jest równa 4%, a kapitalizacja odsetek następuje raz w roku.

Dla nauczyciela

Autor: Patryk Wolny

Przedmiot: Matematyka

Temat: Zastosowanie funkcji wykładniczych i logarytmicznych do opisu i interpretacji zagadnień związanych z zastosowaniami praktycznymi

Grupa docelowa: Szkoła ponadpodstawowa, liceum ogólnokształcące, technikum, poziom rozszerzony

Podstawa programowa:

V. Funkcje

Zakres podstawowy. Uczeń:

14) uczeń posługuje się funkcjami wykładniczą i logarytmiczną, w tym ich wykresami, do opisu i interpretacji zagadnień związanych z zastosowaniami praktycznymi

Kształtowane kompetencje kluczowe:

- kompetencje w zakresie rozumienia i tworzenia informacji,
- kompetencje cyfrowe,
- kompetencje osobiste, społeczne i w zakresie umiejętności uczenia się,
- kompetencje matematyczne oraz kompetencje w zakresie nauk przyrodniczych, technologii i inżynierii.

Cele operacyjne:

Uczeń:

- posługuje się pojęciami: odsetki, oprocentowanie roczne, stopa procentowa, kapitalizacja odsetek, procent prosty, procent składany,
- odczytuje informacje (interpretuje) wzór opisujący sytuację związaną z kredytami i odsetkami,
- tworzy wzór funkcji na podstawie informacji,
- rozwiązuje równania wykładnicze,
- stosuje własności logarytmów,
- odczytuje i interpretuje informacje z wykresu funkcji logarytmicznej,
- przeprowadza proste rozumowanie pomagające ustalić strategię rozwiązania zadania.

Strategie nauczania:

- konstruktywizm,
- konektywizm.

Metody i techniki nauczania:

- lekcja odwrócona,
- stoliki zadaniowe,
- dyskusja.

Formy pracy:

- praca indywidualna,
- praca w grupach,
- praca całego zespołu klasowego.

Środki dydaktyczne:

- komputery z głośnikami, słuchawkami i dostępem do Internetu,
- zasoby multimedialne zawarte w e-materiale,
- projektor multimedialny/tablica interaktywna/tablica, pisak/kreda

Przebieg lekcji

Przed lekcją:

1. Nauczyciel prosi uczniów o zapoznanie się w domu z pojęciami z sekcji „Przeczytaj”: odsetki, oprocentowanie roczne, stopa procentowa, kapitalizacja odsetek.

Faza wstępna:

1. Nauczyciel sprawdza, czy uczniowie rozumieją pojęcia: odsetki, oprocentowanie roczne, stopa procentowa, kapitalizacja odsetek. W razie potrzeby je wyjaśnia.
2. Nauczyciel podaje temat i cele zajęć oraz wspólnie z uczniami ustala kryteria sukcesu.

Faza realizacyjna:

1. Uczniowie, pracując w parach, dzielą się informacjami uzyskanymi w domu.
2. Nauczyciel wyjaśnia wątpliwości. Wspólnie starają się podsumować informacje zawarte w przykładach.
3. Nauczyciel wyświetla animację a wybrani uczniowie rozwiązują wskazane polecenia.
4. Uczniowie pracują metodą stolików zadaniowych (na każdym stoliku po dwa, wybrane przez nauczyciela, ćwiczenia interaktywne). Rozwiązują ćwiczenia interaktywne, pracując w grupach wyznaczonych przez nauczyciela.

Faza podsumowująca:

1. Wskazany przez nauczyciela uczeń krótko podsumowuje najważniejsze informacje z lekcji.
2. Nauczyciel omawia przebieg zajęć, wskazuje mocne i słabe strony pracy uczniów, udzielając im tym samym informacji zwrotnej.

Praca domowa:

1. Uczniowie rozwiązują pozostałe polecenia z sekcji „Animacja”.

Materiały pomocnicze:

[Funkcja logarytmiczna](#)

Wskazówki metodyczne:

Animacja i przykłady w niej zawarte mogą posłużyć do samodzielnej analizy jako praca domowa lub jako uzupełnienie materiału dotyczącego wykresów funkcji wykładniczych i logarytmicznych.