



Zastosowania wzorów do rozwiązywania równań trygonometrycznych z parametrem

- [Wprowadzenie](#)
- [Przeczytaj](#)
- [Gra edukacyjna](#)
- [Sprawdź się](#)
- [Dla nauczyciela](#)



Zastosowania wzorów do rozwiązywania równań trygonometrycznych z parametrem

Źródło: dostępny w internecie: pixabay.com, domena publiczna.

Wiesz już w jaki sposób rozwiązywać równania trygonometryczne różnych typów. W tym materiale będziemy rozwiązywać równania trygonometryczne, w których występuje parametr. Na ogół są to zadania typu: dla jakich wartości parametru równanie posiada rozwiązania lub posiada rozwiązania w określonym zbiorze. Prezentowane przykłady w zdecydowanej części wykraczają poza zakres podstawy programowej dla poziomu rozszerzonego, ale jest to interesujące uzupełnienie poznanych wiadomości na temat funkcji trygonometrycznych.

Twoje cele

- Przypomnisz sobie wszystkie typy wzorów trygonometrycznych, które poznaliśmy na poprzednich lekcjach.
- Przypomnisz sobie, jak wykorzystywać własności funkcji trygonometrycznych do rozwiązywania równań trygonometrycznych.

Przeczytaj

Równania trygonometryczne z parametrem to bardzo specyficzne typy równań. Rzadko chodzi o to, by rozwiązać równanie w zależności od wartości parametru. Znacznie częściej dotyczą tego, dla jakich wartości parametru mają rozwiązania lub ile jest rozwiązań równania w danym przedziale w zależności od wartości parametru.

W zadaniach wielokrotnie będziemy wykorzystywać zbiory wartości funkcji sinus oraz cosinus, to znaczy będziemy określać zbiory wartości funkcji zależnych od funkcji sinus lub cosinus występujących w zadaniu w przedziale $\langle -1, 1 \rangle$.

Zobaczmy kilka przykładów.

Przykład 1

Wyznamy takie wartości parametru $a \in \mathbb{R}$, dla których równanie $2 \sin x + 3 \cos x = a$ ma co najmniej jedno rozwiązanie w zbiorze liczb rzeczywistych.

Rozwiązanie

Z wyrażeń po lewej stronie równania wyciągnijmy przed nawias $\sqrt{2^2 + 3^2}$.

Wówczas równanie przyjmuje postać:

$$\sqrt{2^2 + 3^2} \left(\frac{2}{\sqrt{2^2 + 3^2}} \sin x + \frac{3}{\sqrt{2^2 + 3^2}} \cos x \right) = a.$$

Zauważmy, że $\left(\frac{2}{\sqrt{13}} \right)^2 + \left(\frac{3}{\sqrt{13}} \right)^2 = 1$, a to oznacza, że istnieje taki kąt α , że

$$\cos \alpha = \frac{2}{\sqrt{13}} \text{ oraz } \sin \alpha = \frac{3}{\sqrt{13}}.$$

Wobec tego równanie możemy zapisać w postaci:

$$\sqrt{13}(\cos \alpha \sin x + \sin \alpha \cos x) = a.$$

Korzystamy ze [wzoru na sinus sumy argumentów](#) i otrzymujemy:

$$\sqrt{13} \sin(x + \alpha) = a.$$

Ponieważ x jest dowolną liczbą rzeczywistą, więc funkcja $y = \sin(\alpha + x)$ przyjmuje każdą wartość ze zbioru: $\langle -1, 1 \rangle$.

Zatem zbiorem wartości funkcji $y = \sqrt{13} \sin(x + \alpha)$ jest przedział $\langle -\sqrt{13}, \sqrt{13} \rangle$.

Odpowiedź

Równanie $2 \sin x + 3 \cos x = a$ ma co najmniej jedno rozwiązanie w zbiorze liczb rzeczywistych wtedy i tylko wtedy, gdy $a \in \langle -\sqrt{13}, \sqrt{13} \rangle$.

Przykład 2

Wyznamy takie wartości parametru $a \in \mathbb{R}$, dla których równanie $\sin^4 x + \cos^4 x = a$ ma co najmniej jedno rozwiązanie w zbiorze liczb rzeczywistych.

Rozwiązanie

Przekształcamy równanie z wykorzystaniem wzoru skróconego mnożenia na kwadrat sumy:

$$(\sin^2 x + \cos^2 x)^2 - 2 \sin^2 x \cos^2 x = a.$$

Korzystamy z jedynki trygonometrycznej i otrzymujemy:

$$1 - 2 \sin^2 x \cos^2 x = a.$$

Przekształcamy równanie z wykorzystaniem [wzoru na sinus podwojonego argumentu](#):

$$1 - \frac{1}{2} \sin^2 2x = a.$$

Stąd otrzymujemy:

$$\sin^2 2x = 2 - 2a.$$

Ponieważ zbiorem wartości funkcji $y = \sin^2 2x$ jest przedział $\langle 0, 1 \rangle$, to równanie $\sin^2 2x = 2 - 2a$ ma przynajmniej jedno rozwiązanie, gdy

$$0 \leq 2 - 2a \leq 1.$$

Zatem:

$$-2 \leq -2a \leq -1.$$

Odpowiedź

$$\frac{1}{2} \leq a \leq 1.$$

Przykład 3

Wyznamy takie wartości parametru $a \in \mathbb{R}$, dla których równanie $\sin x + \cos x + \sin x \cos x = a$ ma co najmniej jedno rozwiązanie.

Rozwiązanie

Wykorzystując wzór na kwadrat sumy dwóch dowolnych wyrażeń, zapiszmy ciąg równości:

$$(\sin x + \cos x)^2 = \sin^2 x + 2 \sin x \cos x + \cos^2 x = 1 + 2 \sin x \cos x.$$

Zróbmy podstawienie: $t = \sin x + \cos x$.

Wówczas możemy zapisać wyrażenie: $\sin x \cos x = \frac{t^2 - 1}{2}$.

Równanie z zadania przyjmuje postać:

$$t^2 + 2t - (1 + 2a) = 0.$$

Ponieważ $\sin x + \cos x = \sqrt{2} \sin(x + \frac{\pi}{4})$, zatem zbiorem wartości funkcji $y = \sin x + \cos x$ jest przedział $\langle -\sqrt{2}, \sqrt{2} \rangle$, czyli $t \in \langle -\sqrt{2}, \sqrt{2} \rangle$.

Funkcja $f(t) = t^2 + 2t - (1 + 2a)$ ma co najmniej jedno rozwiązanie rzeczywiste w przedziale $\langle -\sqrt{2}, \sqrt{2} \rangle$ wtedy i tylko wtedy, gdy $\Delta \geq 0$ i $f(\sqrt{2}) \geq 0$. Ten drugi warunek wynika stąd, że pierwsza współrzędna wierzchołka paraboli $y = t^2 + 2t - (1 + 2a)$ jest równa (-1) , co oznacza, że oś symetrii paraboli jest prosta $x = -1$.

Zatem

$$\Delta \geq 0 \Leftrightarrow a \geq -1$$

oraz

$$f(\sqrt{2}) \geq 0 \Leftrightarrow a \leq \frac{1}{2} + \sqrt{2}.$$

Odpowiedź

$$-1 \leq a \leq \frac{1}{2} + \sqrt{2}.$$

Przykład 4

Wyznamy takie wartości parametru $a \in \mathbb{R}$, dla których równanie $\cos 2x + 2 \cos x - 2a^2 - 2a + 1 = 0$ ma dokładnie jedno rozwiązanie w przedziale $\langle 0, 2\pi \rangle$.

Rozwiązanie

Korzystając ze [wzoru na cosinus podwojonego kąta](#) zapisujemy równanie w postaci:

$$2 \cos^2 x - 1 + 2 \cos x - 2a^2 - 2a + 1 = 0,$$

$$2 \cos^2 x + 2 \cos x - 2a^2 - 2a = 0.$$

Aby równanie z zadania miało dokładnie jedno rozwiązanie w przedziale $\langle 0, 2\pi \rangle$, jedynym rozwiązaniem powinno być $\cos x = 1$ lub $\cos x = -1$.

Przypadek 1

Sprawdźmy zatem, dla jakich wartości parametru a rozwiązaniem równania $2 \cos^2 x + 2 \cos x - 2a^2 - 2a = 0$ jest taki x , że $\cos x = 1$:

$$1 + 1 - a^2 - a = 0.$$

Wówczas $a = 1$ lub $a = -2$.

Dla $a = 1$ równanie z zadania przyjmuje postać: $\cos^2 x + \cos x - 2 = 0$.

Stąd otrzymujemy: $\cos x = 1$ lub $\cos x = -2$. A zatem dla $a = 1$ równanie z zadania ma jedno rozwiązanie.

Dla $a = -2$ równanie przyjmuje postać: $\cos^2 x + \cos x - 2 = 0$. A zatem dla $a = -2$ równanie z zadania ma jedno rozwiązanie w przedziale $\langle 0, 2\pi \rangle$.

Przypadek 2

Sprawdźmy zatem, dla jakich wartości parametru a rozwiązaniem równania $2 \cos^2 x + 2 \cos x - 2a^2 - 2a = 0$ jest taki x , że $\cos x = -1$:

$$1 - 1 - a^2 - a = 0,$$

$$a^2 + a = 0.$$

Wówczas $a = 0$ lub $a = -1$.

Dla takich wartości parametru a równanie przyjmuje postać: $\cos^2 x + \cos x = 0$, czyli $\cos x = 0$ lub $\cos x = -1$. Wówczas jednak równanie z zadania ma w przedziale $\langle 0, 2\pi \rangle$ trzy rozwiązania.

Odpowiedź

$$a = -2, a = 1.$$

Słownik

sinus sumy argumentów

$$\sin(x + y) = \sin x \cdot \cos y + \cos x \cdot \sin y, \text{ dla } x, y \in \mathbb{R}$$

sinus podwojonego kąta

tożsamość trygonometryczna: $\sin 2x = 2 \sin x \cos x$ prawdziwa dla każdej liczby rzeczywistej x

cosinus podwojonego kąta

tożsamość trygonometryczna: $\cos 2x = \cos^2 x - \sin^2 x$ prawdziwa dla każdej liczby rzeczywistej x

Gra edukacyjna

Polecenie 1

Do równania z parametrem $a \in \mathbb{R}$ dobierz przedział, do którego należą parametry, dla których równanie ma przynajmniej jedno rozwiązanie.

Polecenie 2

Dla jakich wartości parametru $\alpha \in \mathbb{R}$ równanie

$$\sin 2x + \sin x + \sin(x - \alpha) = \sin \alpha + \sin(x + \alpha)$$

ma 3 rozwiązania w przedziale $(0, \pi)$?

Sprawdź się

Pokaż ćwiczenia:   

Ćwiczenie 1



Połącz równanie ze zbiorem wartości parametru a , dla których równanie ma przynajmniej jedno rozwiązanie.

$$\cos x = a - 2$$

$$a \in \left\langle -\frac{1}{4}, \frac{3}{4} \right\rangle$$

$$2 \cos x + 1 = 4a$$

$$a \in \left\langle -\frac{4}{3}, -\frac{1}{3} \right\rangle$$

$$\sin x - 1 = 2a$$

$$a \in \langle -1, 0 \rangle$$

$$3 \sin x = 6a + 5$$

$$a \in \langle 1, 3 \rangle$$

Ćwiczenie 2



Wybierz i zaznacz te wartości parametru a , dla których istnieje rozwiązanie równania:
 $3 \sin^2 x + 2 \sin x + \frac{1}{3}a - 5 = 0$.

☐ 8

☐ 10

☐ 3

☐ 12

☐ -1

☐ 14

☐ 15

☐ -3

☐ 0

☐ 2

Ćwiczenie 3



Wskaż zbiór wszystkich parametrów $a \in \mathbb{R}$, dla których równanie $5 \sin x - 12 \cos x = a$ ma co najmniej jedno rozwiązanie.

☐ $\langle -17, 1 \rangle$

☐ $\langle -5, 5 \rangle$

☐ $\langle -13, 13 \rangle$

☐ $\langle -12, 12 \rangle$

Ćwiczenie 4



Zaznacz prawidłową odpowiedź. Zbiorem wartości parametru $a \in \mathbb{R}$, dla których równanie $\cos 2x + \cos x + a - 1 = 0$ ma co najmniej jedno rozwiązanie, jest przedział:

☐ $\langle -1, 1 \rangle$.

☐ $\langle -\frac{17}{8}, \frac{17}{8} \rangle$.

☐ $\langle -1, \frac{17}{8} \rangle$.

☐ $\langle -\frac{17}{8}, 1 \rangle$.

Ćwiczenie 5



Zaznacz prawidłową odpowiedź. Zbiorem wartości parametru $a \in \mathbb{R}$, dla których równanie $\sin^6 x + \cos^6 x = 2a + 1$ ma co najmniej jedno rozwiązanie jest przedział:

☐ $\langle -\frac{1}{2}, 0 \rangle$.

☐ $\langle -\frac{1}{4}, 0 \rangle$.

☐ $\langle 0, \frac{1}{2} \rangle$.

☐ $\langle -\frac{3}{8}, 0 \rangle$.

Ćwiczenie 6



Zaznacz prawidłową odpowiedź. Zbiorem wartości parametru $a \in \mathbb{R}$, dla których równanie $\cos x \sin\left(\frac{\pi}{15} - x\right) - \sin x \cos\left(\frac{\pi}{15} - x\right) = 3a + 2$ ma co najmniej jedno rozwiązanie jest przedział:

☐ $\langle -\frac{1}{3}, 1 \rangle$.

☐ $\langle -\frac{1}{3}, \frac{1}{3} \rangle$.

☐ $\langle -1, 1 \rangle$.

☐ $\langle -1, -\frac{1}{3} \rangle$.

Ćwiczenie 7



Dla jakich wartości parametru $a \in \mathbb{R}$ równanie $2 \cos 2x - 4a \cos x + a^2 + 2 = 0$ ma przynajmniej jedno rozwiązanie?

Ćwiczenie 8



Rozwiąż równanie $\sin(x - p) = \sin x - \sin p$ w zależności od wartości parametru p .

Dla nauczyciela

Autor: Jacek Dymel

Przedmiot: Matematyka

Temat: Zastosowania wzorów do rozwiązywania równań trygonometrycznych z parametrem

Grupa docelowa:

III etap edukacyjny, liceum ogólnokształcące, technikum, zakres rozszerzony

Podstawa programowa:

VII. Trygonometria. Zakres rozszerzony. Uczeń spełnia wymagania określone dla zakresu podstawowego, a ponadto:

5) korzysta z wzorów na sinus, cosinus i tangens sumy i różnicy kątów, a także na funkcje trygonometryczne kątów podwojonych;

6) rozwiązuje równania i nierówności trygonometryczne o stopniu trudności nie większym niż w przykładach: $4 \cos 2x \cos 5x = 2 \cos 7x + 1$, $2 \sin^2 x \leq 1$.

Kształtowane kompetencje kluczowe:

- kompetencje cyfrowe;
- kompetencje osobiste, społeczne i w zakresie umiejętności uczenia się;
- kompetencje matematyczne oraz kompetencje w zakresie nauk przyrodniczych, technologii i inżynierii.

Cele operacyjne:

Uczeń:

- stosuje wzory trygonometryczne na sinus, cosinus i tangens sumy i różnicy kątów, a także na funkcje trygonometryczne kątów podwojonych do przekształceń wyrażeń,
- wykorzystuje własności funkcji trygonometrycznych do rozwiązywania równań trygonometrycznych.

Strategie nauczania:

- konstruktywizm;
- konektywizm.

Metody i techniki nauczania:

- dyskusja;
- drzewo pomysłów.

Formy pracy:

- praca indywidualna;
- praca w parach;
- praca w grupach;
- praca całego zespołu klasowego.

Środki dydaktyczne:

- komputery z głośnikami, słuchawkami i dostępem do internetu;
- zasoby multimedialne zawarte w e-materiale;
- tablica interaktywna/tablica, pisak/kreda.

Przebieg lekcji

Faza wstępna:

1. Nauczyciel prezentuje temat: „Zastosowania wzorów do rozwiązywania równań trygonometrycznych z parametrem” oraz cele zajęć, omawiając lub ustalając razem z uczniami kryteria sukcesu.

Faza realizacyjna:

1. Uczniowie w grupach zapoznają się z przykładami zawartymi w sekcji „Przeczytaj”. Ich zadaniem jest najpierw rozwiązanie danego zadania, a dopiero następnie porównanie jego rozwiązania. Grupy tworzą drzewa pomysłów, na których umieszczają przykłady. Po prezentacji prac grup powstaje jedno, wspólne dla całej klasy, drzewo pomysłów.
2. W dalszej części uczniowie wykonują w grupach ćwiczenia 3-5. Po zakończeniu każdego ćwiczenia wybrana grupa prezentuje swoje rozwiązanie na forum klasy.
3. Uczniowie rozwiązują indywidualnie ćwiczenia nr 6, 7 i 8. Nauczyciel sprawdza poprawność wykonanych, omawiając je wraz z uczniami.

Faza podsumowująca:

1. Uczniowie grają w grę edukacyjną. Omawiają z nauczycielem napotkane problemy.
2. Wybrany uczeń podsumowuje zajęcia, zwracając uwagę na nabyte umiejętności, odnosząc się do wyświetlonych na tablicy interaktywnej celów z sekcji „Wprowadzenie”.

Praca domowa:

1. Uczniowie wykonują ćwiczenia interaktywne, które nie zostały dokończone na zajęciach.

Materiały pomocnicze:

[Wykresy i własności funkcji trygonometrycznych](#)

Wskazówki metodyczne:

- Medium w sekcji „Gra edukacyjna” można potraktować jako zadania domowe dotyczące analizy problemu w temacie „Zastosowania wzorów do rozwiązywania równań trygonometrycznych z parametrem”.