Postać kanoniczna funkcji homograficznej

Postać kanoniczna funkcji homograficznej

Źródło: dostępny w internecie: pxhere.com, domena publiczna.

Wzór funkcji homograficznej można zapisać w postaci ogólnej lub w postaci kanonicznej. W tym materiale skoncentrujemy się na własnościach funkcji homograficznej związanych z postacią kanoniczną tej funkcji.

Twoje cele

- Przekształcisz wzór funkcji homograficznej z postaci ogólnej do postaci kanonicznej.
- Określisz związek postaci kanonicznej funkcji homograficznej z własnościami funkcji.
- Wykorzystasz postać kanoniczną funkcji homograficznej w zadaniach.

Przeczytaj

Już wiesz

Funkcją homograficzną nazywamy funkcję wymierną

$$f(x) = \frac{ax+b}{cx+d}$$

gdzie $c \neq 0$ i $ad - cb \neq 0$.

Dziedziną funkcji homograficznej jest zbiór $\mathbb{R} \setminus \left\{-\frac{d}{c}\right\}$.

Powyższy wzór to postać ogólna funkcji homograficznej.

Postać kanoniczna funkcji homograficznej:

$$f(x) = \frac{r}{x-p} + q, r \neq 0, D_f = \mathbb{R} \setminus \{p\}.$$

Wykresem każdej funkcji homograficznej jest **hiperbola**. Wykres funkcji $f(x) = \frac{r}{x-p} + q$ powstaje w wyniku przesunięcia wykresu funkcji $g(x) = \frac{r}{x}$ o wektor $[p, q]$.

Asymptotami wykresu funkcji $f(x) = \frac{r}{x-p} + q$ są proste o równaniach:

$x = p$ – asymptota pionowa

$y = q$ – asymptota pozioma

Zauważmy, że funkcja nie jest określona dla $x = p$ i właśnie prosta o równaniu $x = p$ jest asymptotą pionową. Podobnie funkcja nie przyjmuje wartości $y = q$ i prosta $y = q$ jest asymptotą poziomą.

Przykład 1

Przekształcimy wzór funkcji $f(x) = \frac{3x+3}{-x+1}$ do postaci kanonicznej.

Rozwiązanie

$f(x) = \frac{3x+3}{-x+1}$.

Wyłączamy w mianowniku liczbę -1:

$f(x) = \frac{3x+3}{-(x-1)}$.

Licznik i mianownik mnożymy przez -1:

$f(x) = \frac{-3x-3}{x-1}$.

Przekształcamy licznik tak, by zawierał wyrażenie z mianownika:

$f(x) = \frac{-3(x-1)-6}{x-1}$.

Zapisujemy funkcję w postaci sumy ułamków:

$f(x) = \frac{-3(x-1)}{x-1} + \frac{-6}{x-1}$.

Zapisujemy funkcję w postaci kanonicznej:

$f(x) = -3 - \frac{6}{x-1}$.

Odpowiedź:

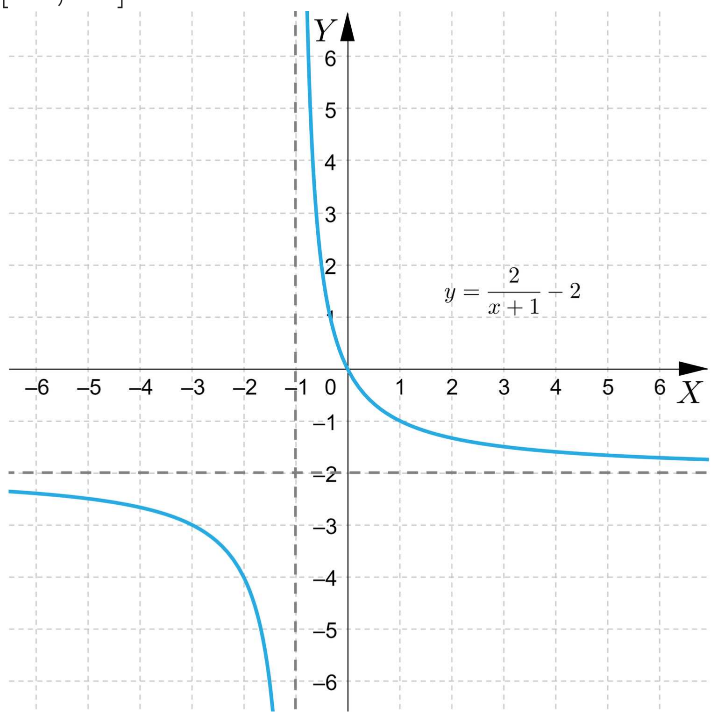
Postać kanoniczna funkcji $f(x) = \frac{3x+3}{-x+1}$ to $f(x) = -\frac{6}{x-1} - 3$.

Przykład 2

Na podstawie wykresu funkcji $f(x) = \frac{2}{x+1} - 2$ podamy własności funkcji, które można określić na podstawie postaci kanonicznej funkcji homograficznej.

Rozwiązanie

Aby narysować wykres funkcji $f(x) = \frac{2}{x+1} - 2$ należy wykres funkcji $g(x) = \frac{2}{x}$ przesunąć o wektor $[-1, -2]$.



Własności funkcji:

- $D_f = \mathbb{R} \setminus \{-1\}$;
- $ZW_f = \mathbb{R} \setminus \{-2\}$;

- funkcja jest malejąca w każdym z przedziałów: $(-\infty, -1)$, $(-1, \infty)$;
- równanie asymptoty poziomej: $y = -2$;
- równanie asymptoty pionowej: $x = -1$.

Powyższe własności funkcji można określić na podstawie postaci kanonicznej funkcji.
Przykład 3

Wyznaczymy wektor, o który należy przesunąć wykres funkcji $g(x) = \frac{r}{x}$, $r \neq 0$, aby otrzymać funkcję o natępujących własnościach:

- $D_f = \mathbb{R} \setminus \{4\}$;
- $ZW_f = \mathbb{R} \setminus \{3\}$.

Rozwiązanie

Skoro funkcja nie jest określona dla $x = 4$, to prosta o równaniu $x = 4$ jest asymptotą pionową wykresu tej funkcji. Podobnie funkcja nie przyjmuje wartości $y = 3$ i prosta $y = 3$ jest jej asymptotą poziomą.

Funkcja $g(x) = \frac{r}{x}$, $r \neq 0$ posiada asymptoty o równaniach: $x = 0$ oraz $y = 0$, które przesuwają się wraz z przesunięciem wykresu funkcji.

Zatem wektor przesunięcia to $[4, 3]$.
Przykład 4

Wyznaczymy postać kanoniczną funkcji homograficznej, której osiami symetrii są proste o równaniach $y = x + 2$ oraz $y = -x - 6$.

Rozwiązanie

Osie symetrii wykresu funkcji przecinają się w tym samym punkcie, co asymptoty wykresu funkcji. Wyznaczymy punkt przecięcia osi symetrii. W tym celu należy rozwiązać układ równań:

$$\begin{cases} y = x + 2 \\ y = -x - 6 \end{cases}.$$

Rozwiązaniem układu równań jest para liczb $(-4, -2)$.

Skoro asymptoty wykresu funkcji przecinają się w punkcie $(-4, -2)$, to każda funkcja postaci: $f(x) = \frac{r}{x+4} - 2$, $r \neq 0$, określa postać kanoniczną tej funkcji.
Przykład 5

Wyznaczymy wzór funkcji homograficznej wiedząc, że jest ona rosnąca w każdym z przedziałów: $(-\infty, -3)$, $(-3, \infty)$, $ZW_f = \mathbb{R} \setminus \{4\}$ oraz do wykresu funkcji należy punkt $(-1, 3)$.

Rozwiązanie

Jeśli funkcja nie jest określona dla $x = -3$, to prosta o równaniu $x = -3$ jest asymptotą pionową wykresu tej funkcji. Podobnie, funkcja nie przyjmuje wartości $y = 4$ i prosta $y = 4$ jest jej asymptotą poziomą.

W związku z tym, wzór funkcji można zapisać w postaci:

$f(x) = \frac{r}{x+3} + 4.$

Podstawiamy współrzędne punktu $(-1, 3)$ do wzoru funkcji:

$3 = \frac{r}{-1+3} + 4$

$r = -2.$

Odpowiedź:

Wzór funkcji $f(x) = \frac{-2}{x+3} + 4.$

Słownik

funkcja wymierna

funkcja, która jest ilorazem dwóch wielomianów $f(x) = \frac{W(x)}{P(x)}$, gdzie $P(x) \not\equiv 0$

asymptota

prosta jest asymptotą danej krzywej, jeśli dla punktu oddalającego się nieograniczenie wzdłuż krzywej, odległość tego punktu od prostej dąży do zera; asymptota funkcji to asymptota krzywej stanowiącej wykres funkcji

Symulacja interaktywna

Polecenie 1

Zapoznaj się z symulacją interaktywną, obserwuj jak zmieniają się równania asymptot wykresu funkcji w zależności od parametrów p, q, r.

Zasób interaktywny dostępny pod adresem https://zpe.gov.pl/a/D5HXqcVYt

Polecenie 2

Polecenie 3

Sprawdź się

Pokaż ćwiczenia:

Ćwiczenie 1

Ćwiczenie 2

Ćwiczenie 3

Ćwiczenie 4

Ćwiczenie 5

Przeciągnij poprawną odpowiedź.

$"["3, -4"]", "["-3, -4"]"$

Aby otrzymać funkcję malejącą w każdym z przedziałów: $(-\infty, 3)$, $(3, \infty)$, której $ZW_f = (-\infty, -4) \cup (-4, \infty)$, należy wykres funkcji $f(x) = \frac{6}{x}$ przesunąć o wektor ....

Ćwiczenie 6

Ćwiczenie 7

Podaj postać kanoniczną dowolnej funkcji homograficznej, której osiami symetrii są proste o równaniach $y = x + 1$ oraz $y = -x + 5$.

Ćwiczenie 8

Przekształć wzór funkcji $f(x) = \frac{4x+2}{3x-1}$ do postaci kanonicznej.

Dla nauczyciela

Autor: Gabriela Pendyk

Przedmiot: Matematyka

Temat: Postać kanoniczna funkcji homograficznej

Grupa docelowa:

III etap edukacyjny, liceum ogólnokształcące, technikum, zakres rozszerzony

Podstawa programowa:

V. Funkcje. Zakres podstawowy.

Uczeń:

12) na podstawie wykresu funkcji $y = f(x)$ szkicuje wykresy funkcji $y = f(x - a)$, $y = f(x) + b$, $y = -f(x)$, $y = f(-x)$;

13) posługuje się funkcją $f(x) = \frac{a}{x}$, w tym jej wykresem, do opisu i interpretacji zagadnień związanych z wielkościami odwrotnie proporcjonalnymi, również w zastosowaniach praktycznych.

Kształtowane kompetencje kluczowe:

- kompetencje w zakresie rozumienia i tworzenia informacji;
- kompetencje matematyczne oraz kompetencje w zakresie nauk przyrodniczych, technologii i inżynierii;
- kompetencje cyfrowe;
- kompetencje osobiste, społeczne i w zakresie umiejętności uczenia się.

Cele operacyjne:

Uczeń:

- przekształca wzór funkcji homograficznej z postaci ogólnej do postaci kanonicznej;
- podaje dziedzinę oraz zbiór wartości funkcji homograficznej na podstawie jej wzoru w postaci kanonicznej;
- zna związek postaci kanonicznej funkcji homograficznej z własnościami funkcji;
- wykorzystuje postać kanoniczną funkcji homograficznej w zadaniach.

Strategie nauczania:

- konstruktywizm.

Metody i techniki nauczania:

- odwrócona klasa;
- burza mózgów;
- liga zadaniowa.

Formy pracy:

- praca w parach;
- praca indywidualna;
- praca całego zespołu klasowego.

Środki dydaktyczne:

- komputery z dostępem do Internetu dla uczniów;
- tablica interaktywna/tablica, pisak/kreda.

Przebieg lekcji:

Przed lekcją:

- Uczniowie zapoznają się z sekcją „Wprowadzenie" oraz „Przeczytaj".

Faza wstępna:

1. Nauczyciel podaje temat i cele zajęć.
2. Uczniowie, metodą burzy mózgów, przypominają wszystkie informacje dotyczące funkcji homograficznej i jej postaci kanonicznej.
3. Uczniowie określają kryteria sukcesu.

Faza realizacyjna:

1. Uczniowie pracują w parach. Każda z par zapoznaje się z poleceniami zawartymi w sekcji „Symulacja interaktywna" i wspólnie wykonują polecenia.
2. Kolejny etap to liga zadaniowa – uczniowie wykonują w grupach na czas ćwiczenia 1 – 7 z sekcji „Sprawdź się", a następnie omawiają zadania na forum klasy.
3. Uczniowie indywidualnie rozwiązują ćwiczenie 8 z sekcji „Sprawdź się".

Faza podsumowująca:

1. Nauczyciel omawia ewentualne problemy dotyczące rozwiązania ćwiczeń z sekcji „Sprawdź się".
2. Nauczyciel prosi wskazanych uczniów o podanie, czego dotyczyła lekcja oraz jakie umiejętności zdobyli podczas zajęć.

Praca domowa:

Uczniowie mają za zadanie ułożyć dwa zadania dotyczące postaci kanonicznej funkcji homograficznej dla koleżanki lub kolegi.

Materiały pomocnicze:

- Wykresy funkcji $f(x) = \frac{a}{x}$
- Przesunięcia wykresu funkcji wzdłuż osi układu współrzędnych

Wskazówki metodyczne:

- Symulację interaktywną można wykorzystać podczas powtórzenia wiadomości o funkcji homograficznej oraz podczas realizacji tematu: „Zastosowanie wykresu funkcji homograficznej do rozwiązywania równań”.