



Ostrosłup prawidłowy czworokątny

- Wprowadzenie
- Przeczytaj
- Test samosprawdzający
- Sprawdź się
- Dla nauczyciela



Ostrosłup prawidłowy czworokątny jest bryłą znaną już przynajmniej od XXVI w. p.n.e., kiedy to wybudowano piramidę Cheopsa, która znajduje się w Egipcie. W Starożytności uznana została za jeden z siedmiu cudów świata i jako jedyna z nich dotrwała epoki nowożytnej.



Piramida Cheopsa

Źródło: Platonides, dostępny w internecie: commons.wikimedia.org, licencja: CC BY-SA 2.0.

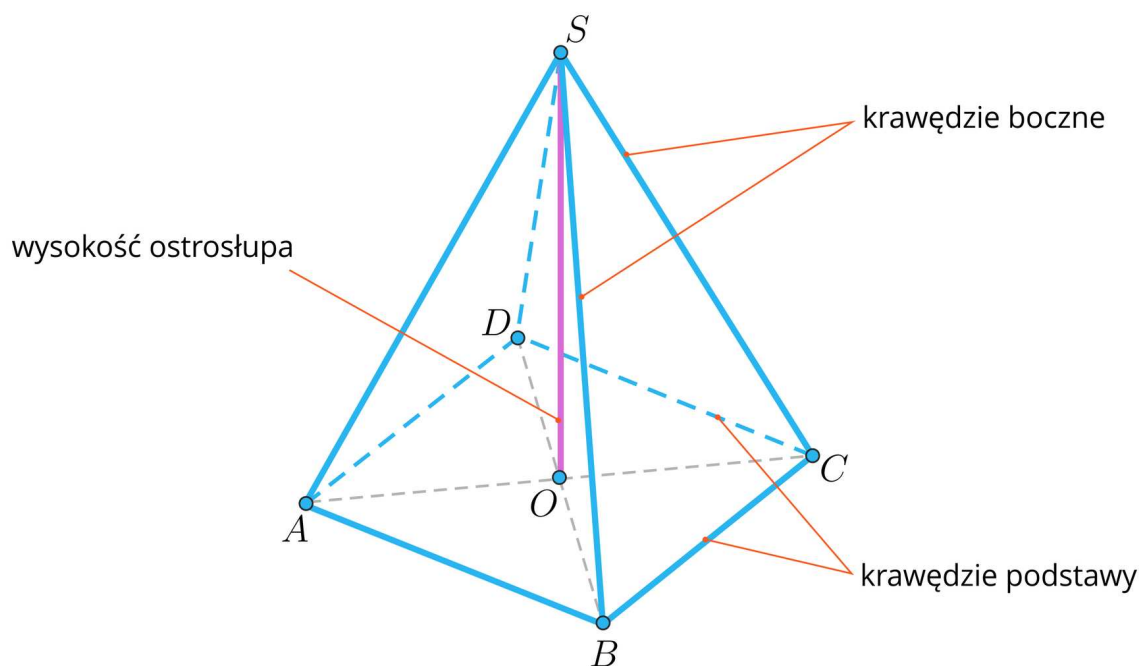
W tym materiale poznasz podstawowe wiadomości dotyczące ostrosłupa prawidłowego czworokątnego.

Twoje cele

- Podasz definicję ostrosłupa prawidłowego czworokątnego.
- Obliczysz liczbę wierzchołków, krawędzi i ścian ostrosłupa.
- Obliczysz długość krawędzi, pole ścian bocznych i pole podstawy ostrosłupa.

Przeczytaj

Ostrosłup prawidłowy czworokątny to ostrosłup, który ma w podstawie kwadrat, a ściany boczne są identycznymi trójkątami równoramiennymi. Spodek wysokości ostrosłupa leży na przecięciu przekątnych jego podstawy.



Zauważ, że **ostrosłup prawidłowy czworokątny** ma:

- podstawę (kwadrat),
- 5 ścian, w tym 4 ściany boczne, które są trójkątami równoramiennymi,
- 5 wierzchołków,
- 8 krawędzi (4 krawędzie boczne i 4 krawędzie podstawy).

Poniższy aplet pomoże zobaczyć omawiany ostrosłup z różnych stron; można go także powiększyć lub pomniejszyć. Można zaznaczyć wybraną krawędź i obserwować ją z różnej perspektywy. Po przeciągnięciu kursorem myszy, bryła zacznie się obracać.

Problem 1

Drut o długości 504 cm podzielono w stosunku 1 : 2 : 4 i stworzono z tych części trzy ostrosłupy prawidłowe czworokątne, których krawędzie są tej samej długości. Uzupełnij tabelę wpisując w odpowiednie miejsca długości krawędzi poszczególnych ostrosłupów.

Ostrosłup	Długość krawędzi [w cm] (tylko liczba)
Największy ostrosłup	
Średni ostrosłup	
Najmniejszy ostrosłup	

Przykład 1

Suma długości krawędzi **ostrosłupa prawidłowego** czworokątnego wynosi $2S$ cm. Oblicz długość jednej krawędzi, wiedząc, że wszystkie krawędzie są tej samej długości.

Rozwiązanie

Wiemy, że omawiany ostrosłup ma 8 krawędzi tej samej długości, zatem: $2S : 8 = \frac{S}{4}$.

Przykład 2

Suma długości krawędzi ostrosłupa prawidłowego czworokątnego, w którym krawędź boczna jest dwa razy dłuższa od krawędzi podstawy, wynosi $S\sqrt{S}$ cm. Oblicz pole podstawy tego ostrosłupa.

Rozwiązanie

Oznaczmy długość krawędzi podstawy jako niewiadomą a . Krawędź boczna jest dwa razy dłuższa, czyli ma długość $2a$.

Możemy więc zapisać równanie: $a \cdot 4 + 2a \cdot 4 = S\sqrt{S}$,

czyli $12 \cdot a = S\sqrt{S}$, co oznacza, że $a = \frac{S\sqrt{S}}{12}$.

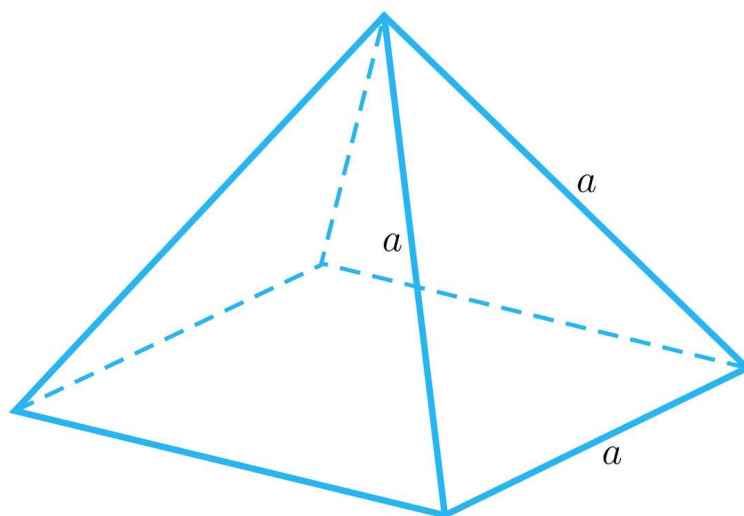
Podstawa ostrosłupa jest kwadratem, zatem jego pole wynosi $\frac{S^3}{144}$ cm².

Przykład 3

Ściana boczna ostrosłupa prawidłowego czworokątnego jest trójkątem równobocznym o polu S . Oblicz sumę długości krawędzi tego ostrosłupa.

Rozwiązanie

Wykonajmy rysunek pomocniczy.



Skoro ściana boczna jest trójkątem równobocznym, tzn. że wszystkie krawędzie ostrosłupa mają taką samą długość. Wystarczy więc obliczyć długość boku trójkąta równobocznego.

Przypomnijmy wzór na pole trójkąta równobocznego: $P = \frac{a^2\sqrt{3}}{4}$.

Możemy więc zapisać równanie: $S = \frac{a^2\sqrt{3}}{4}$,

z którego po przekształceniu otrzymujemy:

$$a^2 = \frac{4S\sqrt{3}}{3},$$

$$a = \sqrt{\frac{4S\sqrt{3}}{3}}.$$

Ostrosłup prawidłowy czworokątny ma 8 krawędzi, zatem ich suma wynosi $8\sqrt{\frac{4S\sqrt{3}}{3}}$.

Przykład 4

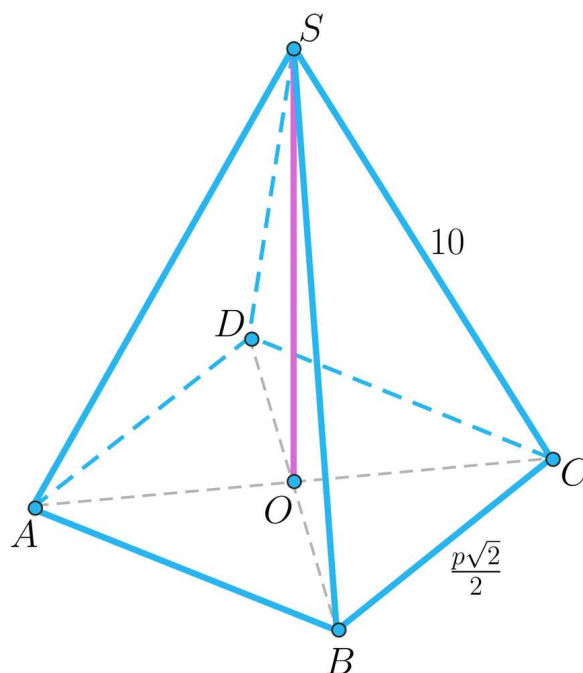
Przekątna podstawy ostrosłupa prawidłowego czworokątnego ma długość p cm. Krawędź boczna ma zaś długość 10 cm. Ile wynosi więc wysokość ściany bocznej ostrosłupa?

Rozwiązanie

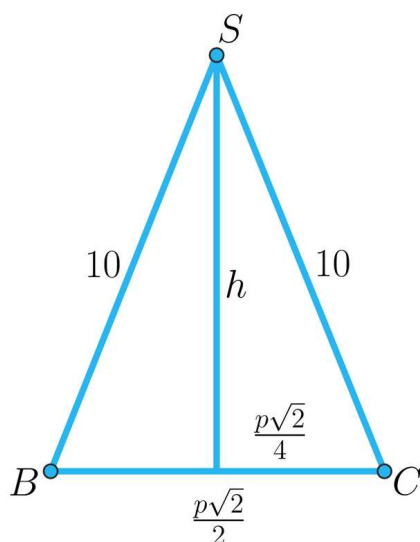
Zacznijmy od policzenia długości krawędzi podstawy naszego ostrosłupa.

Skoro przekątna podstawy ma długość p cm, to, korzystając ze wzoru na przekątną podstawy, otrzymujemy: $a\sqrt{2} = p$, czyli $a = \frac{p\sqrt{2}}{2}$.

Narysujmy więc nasz ostrosłup.



Aby obliczyć wysokość ściany bocznej, wyrysujmy tylko ścianę BCS .



Wykorzystajmy więc twierdzenie Pitagorasa, aby obliczyć długość wysokości ściany bocznej, czyli h :

$$h^2 + \left(\frac{p\sqrt{2}}{4}\right)^2 = 10^2$$

$$h^2 + \frac{p^2}{8} = 100$$

$$h^2 = \frac{800 - p^2}{8}$$

$$h = \sqrt{\frac{800-p^2}{8}}.$$

Zatem wysokość ściany bocznej ma długość $\sqrt{\frac{800-p^2}{8}}$.

Słownik

ostrosłup prawidłowy

ostrosłup prosty, który ma w podstawie wielokąt foremny

ostrosłup prawidłowy czworokątny

ostrosłup prosty, który ma w podstawie kwadrat

Test samosprawdzający

Polecenie 1

Rozwiąż test.



Test

Ostrosłup prawidłowy czworokątny

Test samosprawdzający pomoże Ci w podsumowaniu Twojej wiedzy dotyczącej ostrosłupa prawidłowego czworokątnego. Wykonaj go, aby dowiedzieć się, czy temat jest dla Ciebie zrozumiały.

Sprawdzisz:

- swoją wiedzę na temat ostrosłupów prawidłowych czworokątnych.

Liczba pytań:

5

Limit czasu:

15 min

Twój ostatni
wynik:

-

Uruchom

Polecenie 2

Przygotuj trzy pytania podobne do tych testu samosprawdzającego. Przedstaw swój mini test koleżance lub koledze.

Question: ...

- a. ...
- b. ...
- c. ...

Question: ...

- a. ...
- b. ...
- c. ...

Question: ...

- a. ...
- b. ...
- c. ...

Polecenie 3

Krawędź podstawy ostrosłupa prawidłowego czworokątnego jest równa wysokości tego ostrosłupa i wynosi 2. Oblicz długość krawędzi bocznej tego ostrosłupa oraz wysokość ściany bocznej.

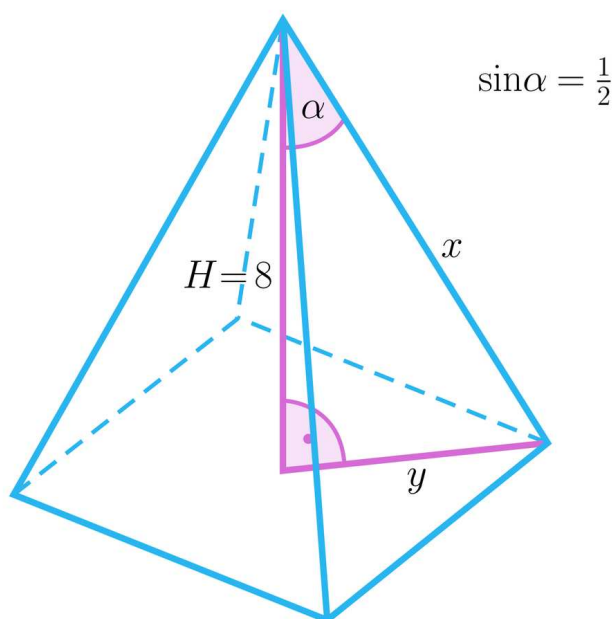
Sprawdź się

Pokaż ćwiczenia:   

Ćwiczenie 1



Ile wynosi suma krawędzi ostrosłupa prawidłowego czworokątnego przedstawionego na poniższym rysunku?



Zaznacz poprawną odpowiedź.

☐ $\frac{8\sqrt{6}}{3} + \frac{16\sqrt{3}}{3}$

☐ $\frac{24\sqrt{3}}{3}$

☐ $\frac{32}{3}(\sqrt{6} + \sqrt{3})$

☐ $\frac{32}{3}(\sqrt{6} + 2\sqrt{3})$

Ćwiczenie 2



Uzupełnij zdanie, przeciągając odpowiednią liczbę w puste miejsce.

Wysokość ściany bocznej ostrosłupa prawidłowego czworokątnego o krawędzi podstawy k i sinusie kąta pomiędzy wysokością ostrosłupa a wysokością ściany bocznej równym $\frac{1}{4}$ wynosi .

$\frac{1}{2}k$

$2k$

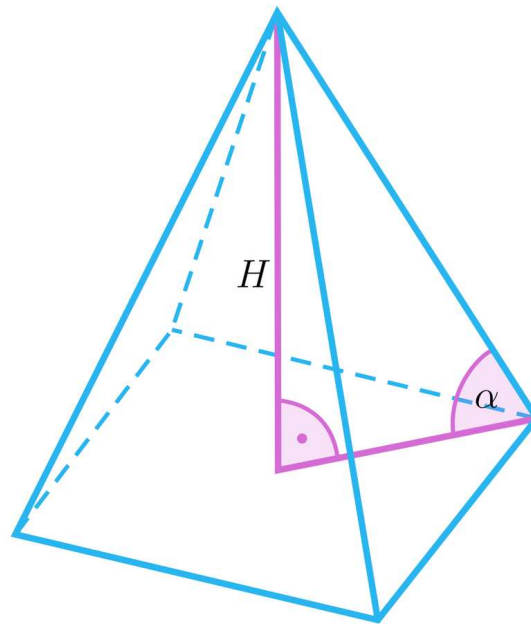
k

$4k$

Ćwiczenie 3



Na poniższym rysunku przedstawiono ostrosłup prawidłowy czworokątny.



Uzupełnij zdania, przeciągając odpowiedzi w puste miejsca.

- Krawędź boczna ostrosłupa prawidłowego czworokątnego przedstawionego na rysunku ma długość .
- Przekątna podstawy ma długość .
- Krawędź podstawy ma więc długość , a suma długości wszystkich krawędzi wynosi .

$$\frac{2H}{\operatorname{tg} \alpha}$$

$$\frac{H}{\cos \alpha}$$

$$\frac{4H(1+\sqrt{2}\cos \alpha)}{\sin \alpha}$$

$$\frac{H}{\operatorname{tg} \alpha}$$

$$\frac{H\sqrt{2}}{\operatorname{tg} \alpha}$$

$$\frac{H\sqrt{2}}{\cos \alpha}$$

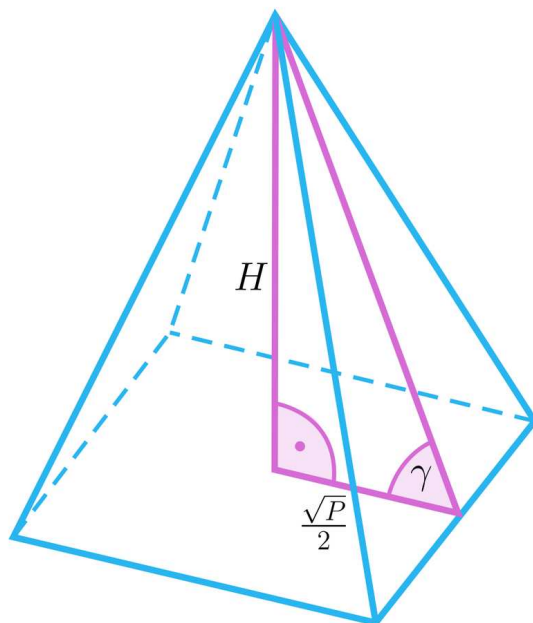
$$\frac{4H(1+\sqrt{2}\sin \alpha)}{\cos \alpha}$$

$$\frac{H}{\sin \alpha}$$

Ćwiczenie 4



Ile wynosi pole ściany bocznej ostrosłupa prawidłowego czworokątnego przedstawionego na poniższym rysunku?



Zaznacz poprawną odpowiedź.

☐ $\frac{1}{2}\sqrt{P}\cos\gamma$

☐ $P\cos\gamma$

☐ $\frac{P}{4\cos\gamma}$

☐ $\frac{P}{4\operatorname{tg}\gamma}$

Ćwiczenie 5



Dany jest ostrosłup prawidłowy czworokątny o krawędziach bocznych długości k .
Oceń, czy poniższe zdania są prawdziwe, czy fałszywe. Zaznacz wszystkie zdania prawdziwe.

☐

Jeśli kąt nachylenia krawędzi bocznej do krawędzi podstawy ma miarę α , to pole ściany bocznej jest równe $k^2 \sin \alpha \cos \alpha$.

☐

Jeśli wysokość ostrosłupa wynosi $\frac{k\sqrt{3}}{3}$, to przekątna podstawy ma długość $\frac{2\sqrt{6}}{3}k$.

☐

Jeśli kąt płaski przy wierzchołku ostrosłupa ma miarę 60° , to wysokość ściany bocznej wynosi $\frac{k}{2}$.

Ćwiczenie 6



Krawędź boczna jest dwa razy dłuższa od krawędzi podstawy ostrosłupa prawidłowego czworokątnego. Ile wynosi sinus kąta płaskiego przy wierzchołku ostrosłupa? Zaznacz poprawną odpowiedź.

☐

$\frac{7}{8}$

☐

$\frac{15}{64}$

☐

$-\frac{7}{8}$

☐

$\frac{\sqrt{15}}{8}$

Ćwiczenie 7



Pole podstawy ostrosłupa prawidłowego czworokątnego wynosi P . Wykaż, że cosinus kąta płaskiego wynosi $\frac{31}{32}$, jeśli wiemy, że krawędź boczna jest 4 razy dłuższa od krawędzi podstawy.

Ćwiczenie 8



W ostrosłupie prawidłowym czworokątnym kąt nachylenia krawędzi bocznej do krawędzi podstawy ma miarę α . Oblicz sumę krawędzi ostrosłupa, wiedząc, że jego wysokość ma długość H .

Dla nauczyciela

Autor: Grażyna Kielczykowska

Przedmiot: Matematyka

Temat: Ostrosłup prawidłowy czworokątny

Grupa docelowa:

III etap edukacyjny, liceum ogólnokształcące, technikum, zakres rozszerzony

Podstawa programowa:

X. Stereometria. Zakres podstawowy. Uczeń:

6. oblicza objętości i pola powierzchni graniastosłupów, ostrosłupów, walca, stożka i kuli, również z wykorzystaniem trygonometrii i poznanych twierdzeń.

Kształtowane kompetencje kluczowe:

- kompetencje w zakresie rozumienia i tworzenia informacji;
- kompetencje matematyczne oraz kompetencje w zakresie nauk przyrodniczych, technologii i inżynierii
- kompetencje cyfrowe
- kompetencje osobiste, społeczne i w zakresie umiejętności uczenia się.

Cele operacyjne:

Uczeń:

- zna definicję ostrosłupa prawidłowego czworokątnego,
- oblicza liczbę wierzchołków, krawędzi i ścian ostrosłupa,
- oblicza długość krawędzi ostrosłupa prawidłowego czworokątnego, pole podstawy i pole ścian bocznych,
- oblicza miarę kąta płaskiego przy wierzchołku ostrosłupa.

Strategie nauczania:

- konstruktywizm.

Metody i techniki nauczania:

- pogadanka,
- analiza pomysłów.

Formy pracy:

- praca indywidualna,
- praca całego zespołu.

Środki dydaktyczne:

- przykład bryły w kształcie ostrosłupa prawidłowego czworokątnego,
- komputery z dostępem do Internetu,
- projektor multimedialny,
- e-podręcznik,
- arkusze papieru, pisaki.

Przebieg lekcji**Faza wstępna:**

- Wprowadzenie do lekcji.
- Zaciekawienie ucznia ostrosłupami prawidłowymi czworokątnymi poprzez pokazanie Piramidy Cheopsa, która jest przykładem takiej bryły. Przedstawienie historii budowy.

Faza realizacyjna:

- Pokazanie uczniom bryły w kształcie ostrosłupa prawidłowego czworokątnego.
- Policzenie liczby krawędzi, wierzchołków, ścian.
- Rozwiązanie Ćwiczeń 1-6, które są przykładem zastosowania podstawowej wiedzy o ostrosłupie prawidłowym czworokątnym.

Faza podsumowująca:

- Rozwiązanie testu samosprawdzającego, który pokaże poziom zrozumienia zagadnienia – praca indywidualna.
- Podsumowanie testu i wspólne omówienie błędów.

Praca domowa:

- Rozwiązanie testu Sprawdź się.

Materiały pomocnicze:[Ostrosłup i jego własności](#)**Wskazówki metodyczne:**

Uczeń może powtórzyć materiał dotyczący ostrosłupa prawidłowego czworokątnego przed sprawdzianem, rozwiązując test samosprawdzający. Test można wykorzystać również przy omawianiu zagadnienia kątów między odcinkami w przestrzeni.

