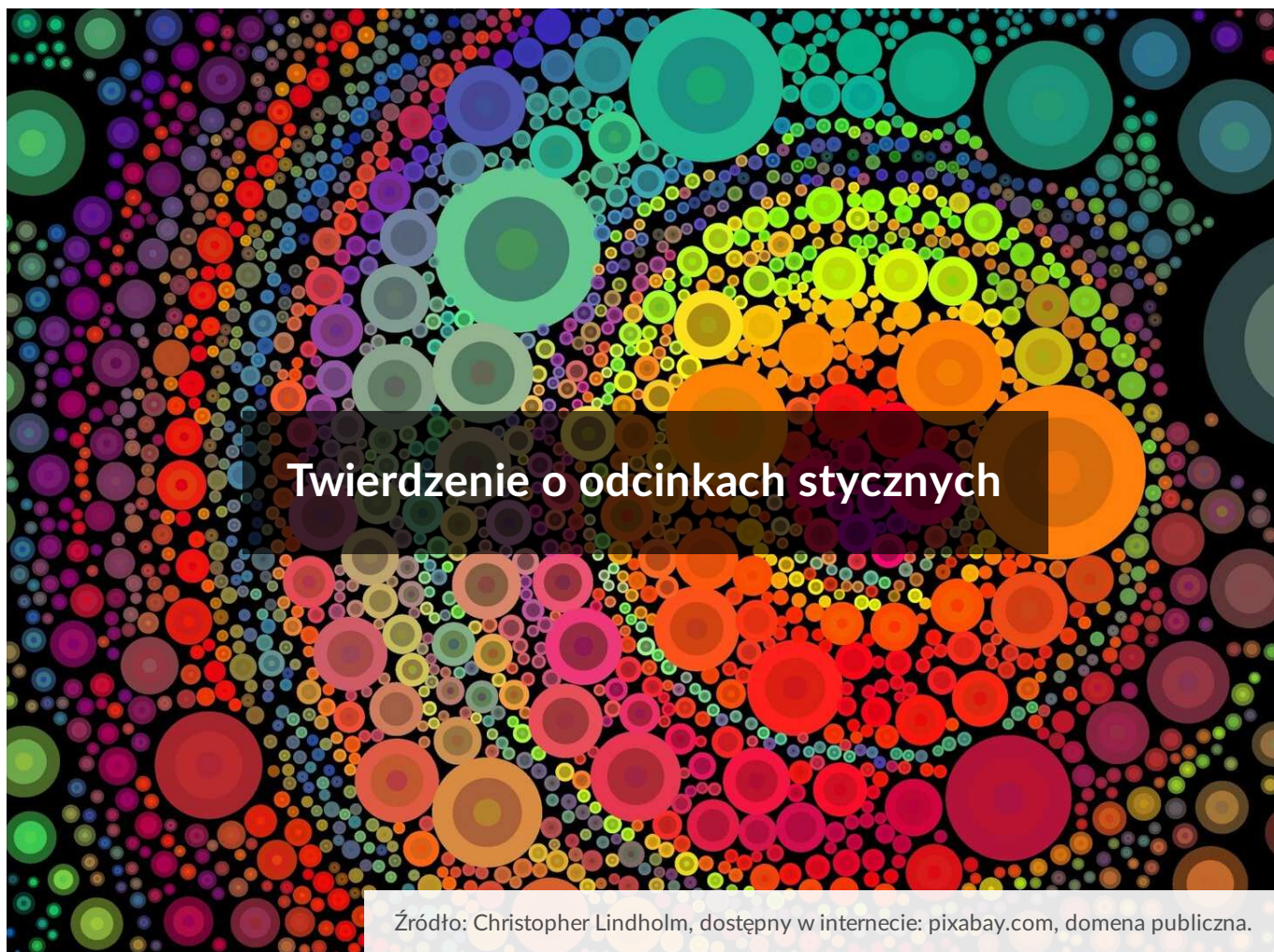




Twierdzenie o odcinkach stycznych

- Wprowadzenie
- Przeczytaj
- Aplet
- Sprawdź się
- Dla nauczyciela



Zasadnicze twierdzenie geometrii

W matematyce spotykamy czasami pojęcie „zasadniczego twierdzenia” jakiejś teorii. Mamy więc, np.:

- zasadnicze twierdzenie algebry, mówiące o tym, że wielomian stopnia n ma, w dziedzinie zespolonej, dokładnie n pierwiastków;
- zasadnicze twierdzenie arytmetyki mówiące o jednoznaczności rozkładu liczby naturalnej na czynniki pierwsze;
- zasadnicze twierdzenie rachunku całkowego, orzekające, że operacje różniczkowania i całkowania są operacjami odwrotnymi.

Przywołanie w nazwie określenia „zasadnicze” wskazuje na wyjątkowe znaczenie tego twierdzenia. Również zależności geometryczne, z jakimi spotykamy się w praktyce szkolnej, czy to z zakresu stereometrii, czy planimetrii, mają różne zastosowania i różną wagę. Ale w geometrii płaskiej, na tytuł „zasadniczego twierdzenia planimetrii” zasługuje zależność, która jest przedmiotem rozważań w tym materiale.

Twoje cele

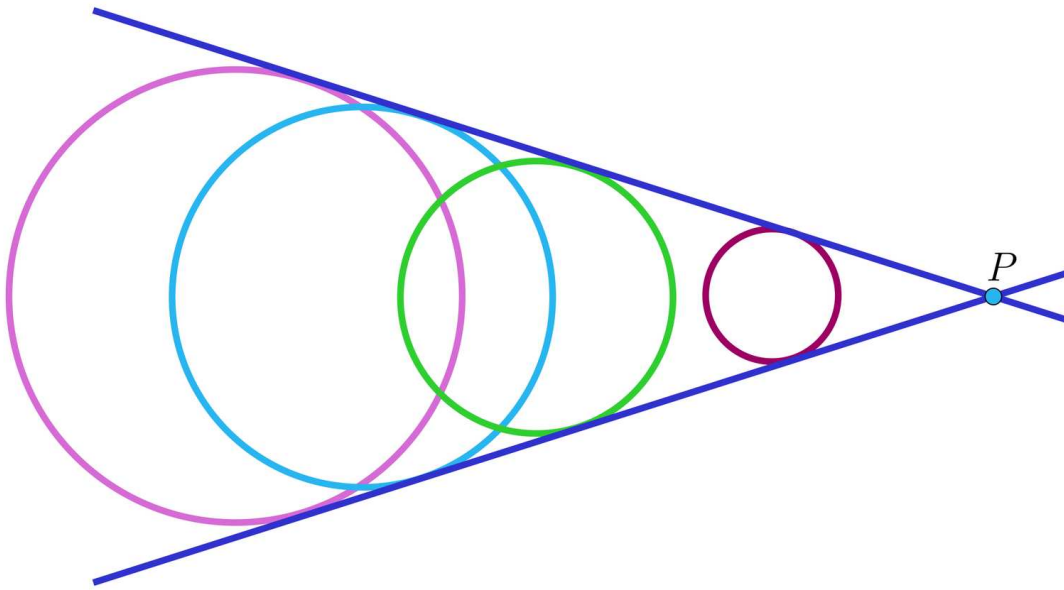
- Poznasz twierdzenie o odcinkach stycznych.

- Udowodnisz twierdzenie o odcinkach stycznych.
- Zastosujesz poznane zależności w sytuacjach typowych i problemowych.

Przeczytaj

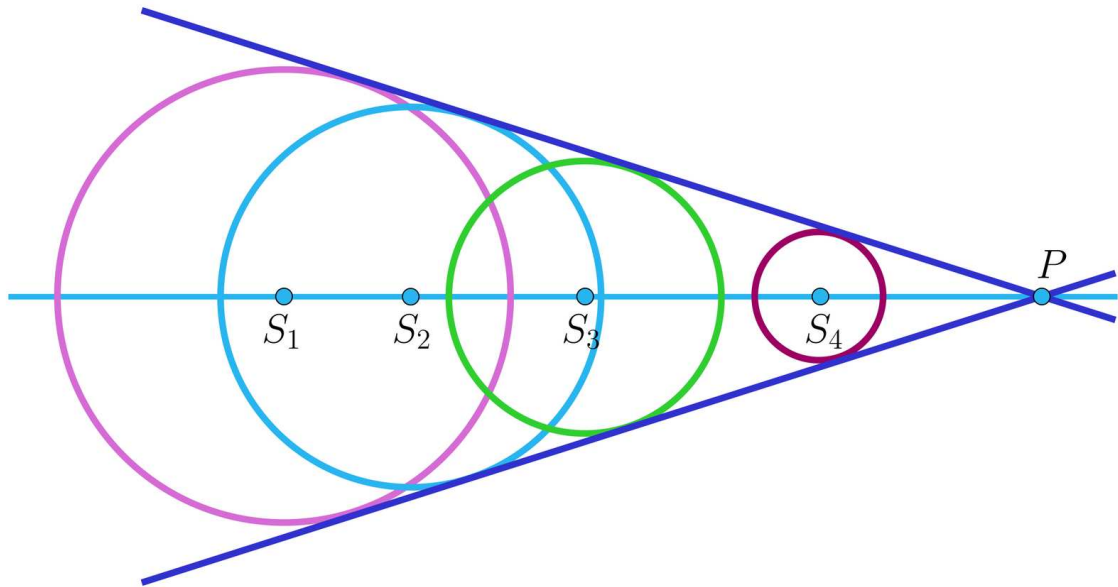
Okrąg wpisany w kąt

Rozważmy kąt o wierzchołku w punkcie P . Istnieje nieskończenie wiele okręgów, które są wpisane w ten kąt, tzn. styczne do obu ramion danego kąta, jak na rysunku.



Okręgi wpisane w kąt

Ich położenia nie są przypadkowe – w szczególności wiemy, że w każdy trójkąt można wpisać okrąg i środek tego okręgu leży w punkcie przecięcia się dwusiecznych kątów trójkąta. Ale **okrąg wpisany w trójkąt** jest wpisany w każdy z kątów wewnętrznych trójkąta. Nietrudno więc zauważyć, że każdy okrąg wpisany w dany kąt, ma środek położony na dwusiecznej tego kąta.



Środki okręgów wpisanych w kąt leżą na dwusiecznej

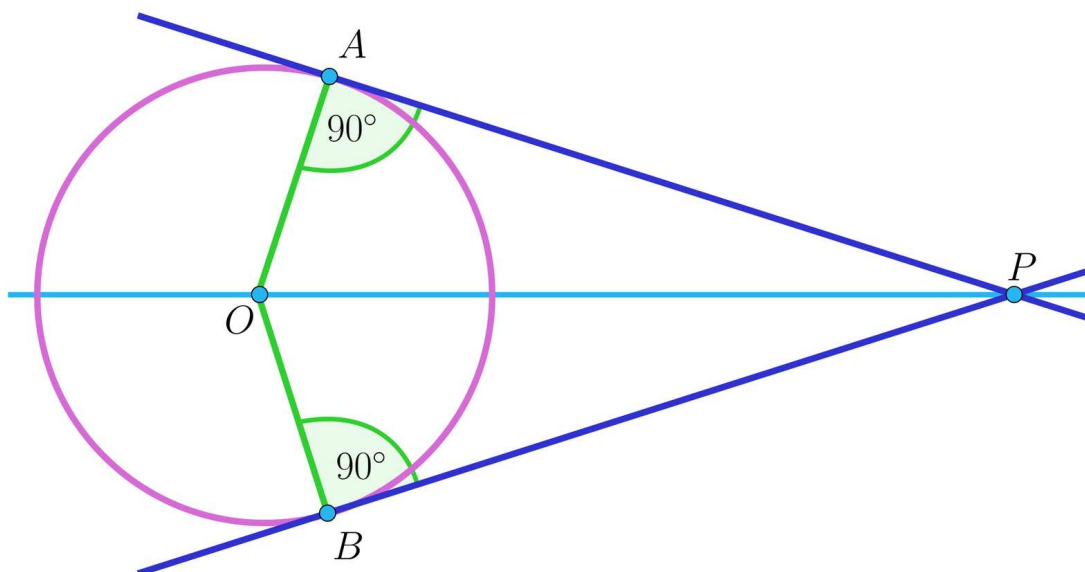
Fakt ten można uzasadnić korzystając z zasadniczego twierdzenia planimetrii, które teraz podamy i udowodnimy.

Twierdzenie: O odcinkach stycznych

Odcinki dwóch stycznych poprowadzonych do danego okręgu z punktu P leżącego na zewnątrz okręgu, wyznaczone przez punkt P i punkty styczności, są sobie równe.

Dowód

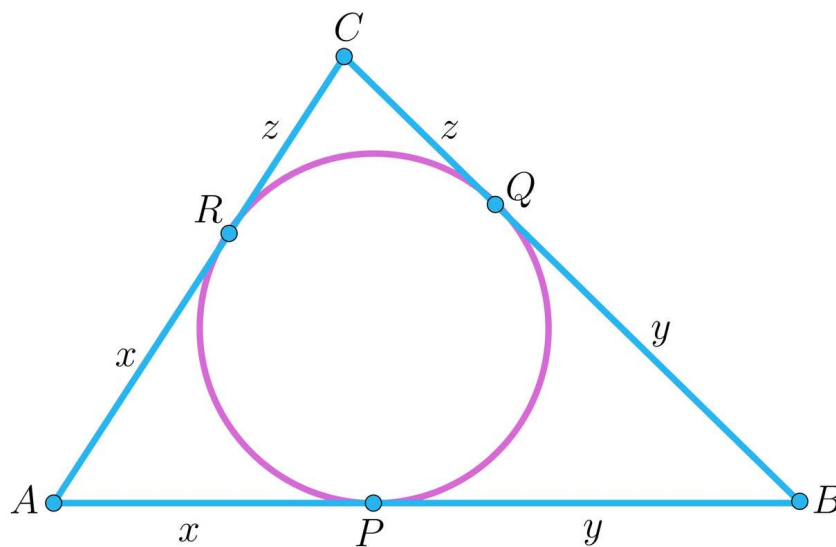
Poprowadźmy styczne do danego okręgu. Oznaczmy przez O środek tego okręgu, a przez A i B odpowiednie punkty styczności, jak na rysunku.



Kąty, jakie promienie OA i OB tworzą ze stycznymi są proste. Oznacza to w szczególności, że trójkąty PAO i PBO są trójkątami prostokątnymi. Ale odcinek OP jest wspólnym bokiem w obu trójkątach, a boki OB i OA są równe. Mamy więc dwa trójkąty prostokątne o dwóch parach boków odpowiednio równych – ale to oznacza, że trójkąty te są przystające. W szczególności $|AP| = |BP|$, co należało wykazać. Z przystawania trójkątów PAO i PBO wynika również, że $|\angle OPA| = |\angle OPB|$, czyli prosta OP zawiera dwusieczną kąta APB .

Przykład 1

Rozważmy trójkąt o bokach długości 5, 6 i 7. Wyznamy długości odcinków, na jakie boki trójkąta podzieliły punkty styczności wyznaczone przez okrąg wpisany w ten trójkąt. Popatrzmy na rysunek.



Przyjmijmy, że $|AB| = 7$, $|BC| = 6$, $|AC| = 5$. Jeśli punkty P , Q , R są punktami, w których okrąg wpisany w ten trójkąt jest styczny do odpowiednich boków trójkąta, to z twierdzenia o odcinkach stycznych wynika, że: $|AP| = |AR|$, $|BP| = |BQ|$, $|CQ| = |CR|$. Przyjmując odpowiednio oznaczenia x , y , z możemy zapisać układ równań

$$\begin{cases} x + y = 7 \\ y + z = 6 \\ x + z = 5 \end{cases}$$

Rozwiązaniem tego układu są liczby: $x = 3$, $y = 4$, $z = 2$.

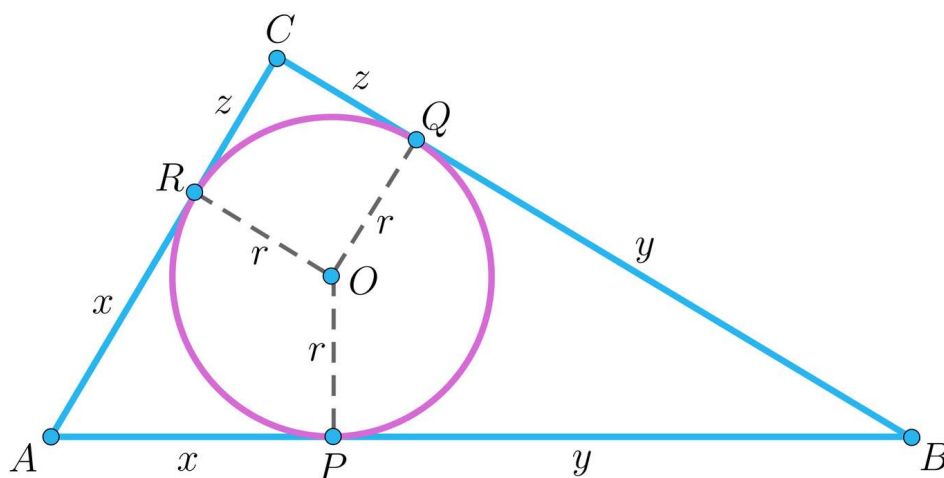
Powtórzmy teraz rozumowanie z Przykładu 1. dla dowolnego trójkąta prostokątnego, co pozwoli wyprowadzić pewien przydatny wzór.

Przykład 2

Rozważmy trójkąt prostokątny o przyprostokątnych a , b i przeciwprostokątnej c . Wyznamy długości odcinków, na jakie boki trójkąta podzieliły punkty styczności

wyznaczone przez okrąg o promieniu r wpisany w ten trójkąt.

Popatrzmy na rysunek



Przyjmijmy, że $|AB| = c$, $|BC| = a$, $|AC| = b$. Jeśli punkty P , Q , R są punktami, w których okrąg wpisany w ten trójkąt jest styczny do odpowiednich boków trójkąta, to z twierdzenia o odcinkach stycznych wynika, że: $x + y = c$, $y + z = a$ oraz $x + z = b$.

Jeśli dodamy stronami równania układu równań $\begin{cases} x + y = c \\ y + z = a \\ x + z = b \end{cases}$, to otrzymamy, że

$2(x + y + z) = a + b + c$. Stąd $x + y + z = \frac{a+b+c}{2}$. Odejmując od otrzymanego równania kolejno równania $x + y = c$, $y + z = a$ oraz $x + z = b$ otrzymamy, że: $z = \frac{a+b-c}{2}$, $x = \frac{b+c-a}{2}$ oraz $y = \frac{a+c-b}{2}$. Pozostaje zauważyć, że $z = r$, co pozwala sformułować poniższe twierdzenie.

Twierdzenie: O promieniu okręgu wpisanego w trójkąt prostokątny

Promień r okręgu wpisanego w trójkąt prostokątny o przyprostokątnych a , b i przeciwprostokątnej c jest równy $r = \frac{a+b-c}{2}$.

Słownik

okrąg wpisany w trójkąt (wielokąt)

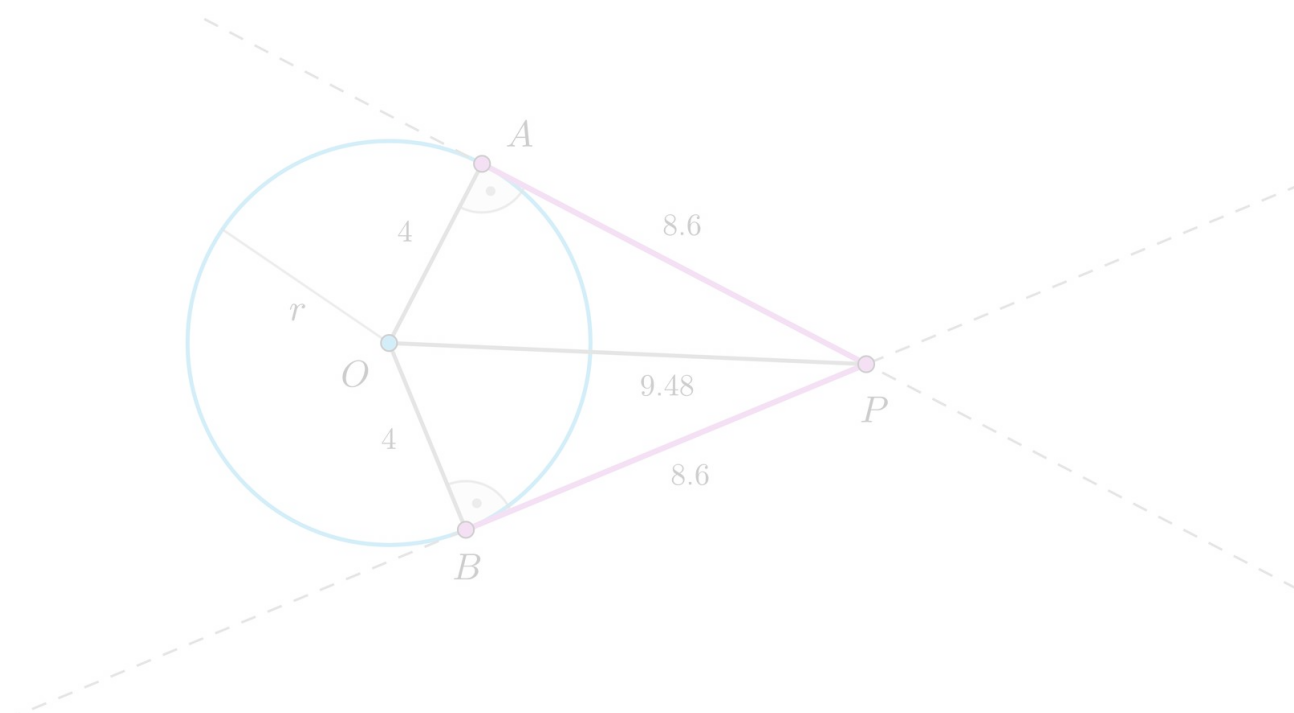
okręgiem wpisanym w trójkąt (wielokąt) nazywamy okrąg, który jest styczny do każdego z boków tego trójkąta (wielokąta)

Aplet

Polecenie 1

Uruchom Aplet.

Naciśnij przycisk: „TWIERDZENIE O STYCZNYCH”. Ustal suwakiem wielkość r promienia okręgu, a następnie ustaw położenie punktu P na zewnątrz okręgu. Gdy dokonasz ustaleń, to naciśnij przycisk „KONSTRUKCJA”. Obserwuj kolejne etapy konstrukcji stycznych i zależności między długościami powstałych odcinków. Naciśnij przycisk: „ZASTOSOWANIE”. Zmieniaj położenie wyróżnionych punktów i obserwuj zależności między długościami odpowiednich odcinków stycznych i długościami boków sześciokąta.



Zasób interaktywny dostępny pod adresem <https://zpe.gov.pl/a/DpG7Pgagx>

Polecenie 2

Wciśnij przycisk „TWIERDZENIE O STYCZNYCH”. Na podstawie obserwacji zależności między długościami promienia okręgu, odcinka stycznej i odległości środka okręgu O od punktu P , z którego poprowadzono styczne, wyznacz odcinek stycznej, który jest dwa razy krótszy niż odległość $|OP|$ i o 2 dłuższy od promienia.

Polecenie 3

Wciśnij przycisk „ZASTOSOWANIE”. Dla wybranego położenia wierzchołków, zapisz długości kolejnych boków sześciokąta, sumując odpowiednie odcinki stycznych. Sformułuj hipotezę ustalającą warunek, który charakteryzuje sześciokąty opisane na okręgu.

Sprawdź się

Pokaż ćwiczenia:   

Ćwiczenie 1



Dana jest prosta l i okrąg styczny do prostej l punkcie P . Punkty A i B są wierzchołkami trójkąta ABC opisanego na danym okręgu. Wyznacz konstrukcyjnie punkt C .

Ćwiczenie 2



Trójkąt prostokątny ABC , o kącie prostym przy wierzchołku C , jest opisany na okręgu. Odcinki, których końcami są wierzchołki trójkąta i odpowiednie punkty styczności mają długości: 3, 4, y , gdzie $y > 4$. Oblicz długości boków tego trójkąta.

Ćwiczenie 3



Boki trójkąta ABC opisanego na okręgu mają długości: $|AB| = 12$, $|BC| = 8$ oraz $|AC| = 6$. Najkrótszy z odcinków, których końcami są odpowiednio wierzchołki trójkąta i punkty styczności ma długość

3

$4\frac{1}{2}$

1

$\frac{1}{2}$

Ćwiczenie 4



Przyprostokątne trójkąta prostokątnego mają długości a , b , a przeciwprostokątna jest równa c . Promień okręgu wpisanego w ten trójkąt jest równy r . Dopasuj długości boków trójkąta i promienia okręgu do długości przeciwprostokątnej.

$$a = 7, b = 24, r = 3$$

$$c = 17$$

$$a = 8, b = 15, r = 3$$

$$c = 41$$

$$a = 9, b = 40, r = 4$$

$$c = 25$$

Ćwiczenie 5



Obwód trójkąta ABC opisanego na okręgu jest równy 24, a długości odcinków, których końcami są wierzchołki tego trójkąta i odpowiednie punkty styczności, są odpowiednio równe $d - 1$, d , $d + 4$. Wyznacz długości boków tego trójkąta.

Ćwiczenie 6

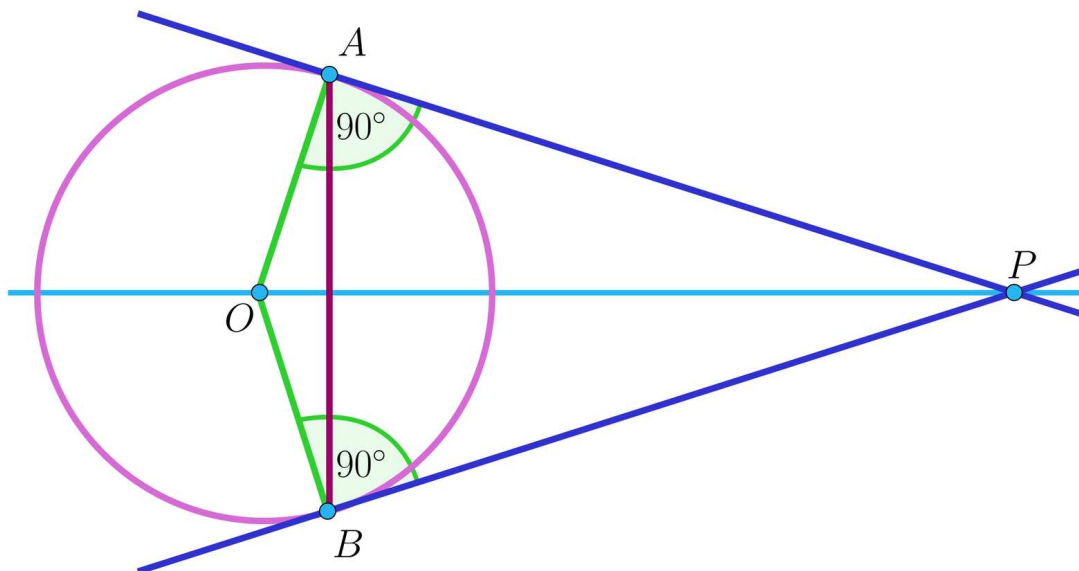


Dany jest okrąg, na którym opisano sześciokąt, o bokach długości: $|A_1A_2| = 5$, $|A_2A_3| = 3$, $|A_3A_4| = 5$, $|A_4A_5| = 5$, $|A_5A_6| = 4$, 4 . Oblicz długość boku A_1A_6 tego sześciokąta.

Ćwiczenie 7



Z punktu P poprowadzono styczne w punktach A i B do danego okręgu. Cięciwa AB ma długość 12, a kąt środkowy rozpięty na tej cięciwie ma miarę 120° , jak na rysunku.

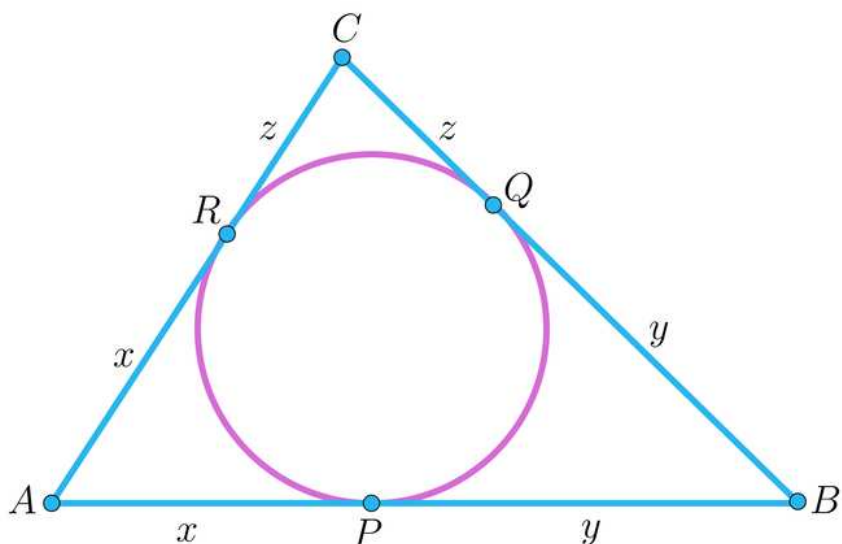


Oblicz długość odcina AP .

Ćwiczenie 8



Długości boków trójkąta ABC są równe odpowiednio: $|AC| = d - 1$, $|BC| = d$, $|AB| = d + 1$. Uzasadnij, że długość jednego z odcinków x, y, z , których końcami są wierzchołki tego trójkąta i odpowiednie punkty styczności, jest średnią arytmetyczną długości pozostałych (patrz rysunek).



Ułóż w kolejności etapy dowodu.

Stąd $z = \frac{d}{2} - 1$. ◆

Odejmując stronami od otrzymanej sumy pierwsze z równań dostajemy:
 $(x + y + z) - (x + z) = \frac{3d}{2} - (d - 1)$. ◆

Stąd $y = \frac{d}{2} + 1$. ◆

Stąd $x = \frac{d}{2}$. ◆

Analogicznie, odejmując stronami od otrzymanej sumy drugie z równań dostajemy:
 $(x + y + z) - (y + z) = \frac{3d}{2} - d$. ◆

Przy przyjętych oznaczeniach możemy zapisać układ równań: $\begin{cases} x + z = d - 1 \\ y + z = d \\ x + y = d + 1 \end{cases}$. ◆

Zatem $x + y + z = \frac{3d}{2}$.



Wreszcie, odejmując stronami od otrzymanej sumy trzecie z równań dostajemy:

$$(x + y + z) - (x + y) = \frac{3d}{2} - (d + 1).$$



Pozostaje zauważyć, że $x = \frac{d}{2} = \frac{(\frac{d}{2}+1)+(\frac{d}{2}-1)}{2} = \frac{y+z}{2}$, co należało wykazać.



Dodając stronami równania układu otrzymujemy, że $2x + 2y + 2z = 3d$.



Ćwiczenie 9



Udowodnij, że pole P_w każdego wielokąta opisanego na okręgu o promieniu r jest równe $P_w = p \cdot r$, gdzie p jest połową obwodu tego wielokąta.

Dla nauczyciela

Autor: Jacek Człapiński

Przedmiot: Matematyka

Temat: Twierdzenie o odcinkach stycznych

Grupa docelowa:

III etap edukacyjny, liceum, technikum, zakres rozszerzony.

Podstawa programowa:

VIII. Planimetria

1) wyznacza promienie i średnice okręgów, długości cięciw okręgów oraz odcinków stycznych

5) stosuje własności kątów wpisanych i środkowych

12) przeprowadza dowody geometryczne

Kształtowane kompetencje kluczowe:

- kompetencje w zakresie rozumienia i tworzenia informacji
- kompetencje matematyczne oraz kompetencje w zakresie nauk przyrodniczych, technologii i inżynierii
- kompetencje cyfrowe

Cele operacyjne:

Uczeń:

- zna i stosuje zasadnicze twierdzenie planimetrii
- przeprowadza dowód twierdzenia o odcinkach stycznych
- wykorzystuje zasadnicze twierdzenie planimetrii do badania związków miarowych w trójkącie
- zna pojęcie wielokąta opisanego na okręgu i korzysta z zależności między bokami wielokątów opisanych na okręgu
- przeprowadza dowody geometryczne

Strategie i metody nauczania:

- konstruktywizm

- dyskusja
- rozmowa nauczająca z wykorzystaniem ćwiczeń interaktywnych

Formy pracy:

- praca indywidualna
- praca w grupach
- praca całego zespołu klasowego

Środki dydaktyczne:

- komputery z dostępem do Internetu w takiej liczbie, żeby każda para uczniów miała do dyspozycji komputer. Lekcję tę można przeprowadzić, mając do dyspozycji jeden komputer z rzutnikiem multimedialnym.

Przebieg lekcji

Faza wstępna:

1. Nauczyciel zadaje pytanie dotyczące stosowania określenia „zasadnicze twierdzenie”. Prosi o podanie przykładów, ewentualnie sam podaje przykłady.
2. Nauczyciel podaje temat i cele zajęć, uczniowie ustalają kryteria sukcesu.

Faza realizacyjna:

1. Nauczyciel prosi uczniów o przypomnienie pojęcia okręgu wpisanego w trójkąt i/lub kąt.
2. Nauczyciel ilustruje położenie kilku okręgów wpisanych w ten sam kąt i prosi uczniów o ich scharakteryzowanie – w szczególności tak prowadzi rozmowę, by pojawiło się odniesienie do dwusiecznej kąta.
3. Nauczyciel poleca uruchomić Aplet i prosi o podanie hipotezy dotyczącej odcinków stycznych. Następnie formułuje i prosi o przeprowadzenie dowodu twierdzenia – wybrany uczeń przeprowadza dowód na tablicy. W razie braku możliwości uruchomienia Apletu, nauczyciel szkicuje odpowiedni rysunek i pyta uczniów o opisanie związku między długościami odcinków stycznych.
4. Nauczyciel formułuje problemy opisane w przykładach i prosi uczniów o ich rozwiązanie.
5. Nauczyciel prosi o ponowne uruchomienie Apletu i prosi o podanie hipotezy dotyczącej zależności między bokami sześciokąta opisanego na okręgu (można uogólnić na przypadek wielokąta o parzystej liczbie boków).
6. Uczniowie wykonują zaproponowane ćwiczenia interaktywne, wykorzystując umiejętności z różnych działów matematyki.

Faza podsumowująca:

- Nauczyciel prosi wybranych uczniów o przedstawienie najważniejszych elementów, jakie były omawiane w trakcie lekcji.

Praca domowa:

Nauczyciel poleca, aby uczniowie wykonali w domu ćwiczenia interaktywne, które nie zostały wykonane w czasie zajęć. Ewentualnie może prosić o dokończenie dowodu twierdzenia.

Materiały pomocnicze:

[Okrąg wpisany w trójkąt](#)

Wskazówki metodyczne:

Aplet można zastosować w ramach powtórzenia przed sprawdzianem. Można wykorzystać przy realizacji tematu o okręgu opisanym na okręgu.