



Równania kwadratowe z wartością bezwzględną

- [Wprowadzenie](#)
- [Przeczytaj](#)
- [Galeria zdjęć interaktywnych](#)
- [Sprawdź się](#)
- [Dla nauczyciela](#)

Równania kwadratowe z wartością bezwzględną

Źródło: Frank Pizzacalla z Pixabay, domena publiczna.

W tym materiale zajmiemy się rozwiązywaniem równań kwadratowych z wartością bezwzględną. W rozwiązaniach będziemy korzystać z definicji wartości bezwzględnej oraz z własności wartości bezwzględnej.

Rozważając przypadki ustalimy najpierw rozwiązania odpowiednich równań.

Po rozważeniu wszystkich przypadków zapiszemy, jaka jest suma rozwiązań otrzymanych z każdego warunku. Wspomniana suma będzie rozwiązaniem równania z wartością bezwzględną.

Twoje cele

- Rozwiążesz równania kwadratowe z wartością bezwzględną lub dwiema wartościami bezwzględnymi.
- Udoskonalisz umiejętności rozwiązywania równań kwadratowych z wartością bezwzględną.

Przeczytaj

Pamiętasz?

Równanie kwadratowe z jedną niewiadomą – jest to równanie, które można sprowadzić do postaci

$$ax^2 + bx + c = 0,$$

gdzie:

a, b i c – są dowolnymi liczbami rzeczywistymi oraz $a \neq 0$.

Postać $ax^2 + bx + c = 0$, gdy $a \neq 0$ nazywamy **postacią ogólną równania kwadratowego**.

Równania, w których współczynniki b lub c są równe 0, nazywamy **równaniami kwadratowymi niezupełnymi**.

Jeżeli $b = 0$ i $c = 0$, to równanie kwadratowe $ax^2 = 0$ ma tylko jedno rozwiązanie $x = 0$.

Z definicji wartości bezwzględnej mamy

$$|x| = \begin{cases} x & \text{dla } x \geq 0 \\ -x & \text{dla } x < 0 \end{cases}$$

Przykład 1

Rozwiążemy równanie $|x^2 + 3x| = 4$.

Skorzystamy z własności [wartości bezwzględnej](#).

Jeżeli $a > 0$, to $|x| = a \Leftrightarrow x = -a \vee x = a$.

Otrzymujemy alternatywę równań.

$$x^2 + 3x = 4 \text{ lub } x^2 + 3x = -4$$

$$x^2 + 3x - 4 = 0 \text{ lub } x^2 + 3x + 4 = 0$$

$$\Delta = 9 + 16 = 25 \text{ lub } \Delta = 9 - 16 < 0 \text{ (brak rozwiązań)}$$

$$\sqrt{\Delta} = 5$$

$$x_1 = \frac{-3-5}{2} = -4$$

$$x_2 = \frac{-3+5}{2} = 1$$

Rozwiązaniem równania są liczby $x = -4, x = 1$.

Przykład 2

Rozwiążemy równanie $|x^2 + x + 5| = 0$.

Rozważymy funkcję kwadratową $f(x) = x^2 + x + 5$.

Funkcja f nie posiada miejsc zerowych, bo $\Delta < 0$.

Ponieważ współczynnik przy x^2 jest dodatni ramiona paraboli skierowane są do góry.

Czyli funkcja przyjmuje wartości dodatnie dla $x \in \mathbb{R}$, bo wykres znajduje się powyżej osi X .

Zatem równanie $|x^2 + x + 5| = 0$ nie posiada rozwiązań.

Przykład 3

Rozwiążemy równanie $|x^2 + 2x| = |1 + 4x - x^2|$.

Aby rozwiązać równanie skorzystamy z własności, że $|a| = |b| \Leftrightarrow a = b$ lub $a = -b$.

Czyli $x^2 + 2x = 1 + 4x - x^2$ lub $x^2 + 2x = -(1 + 4x - x^2)$.

Zajmiemy się najpierw rozwiązaniem równania $x^2 + 2x = 1 + 4x - x^2$.

$$2x^2 - 2x - 1 = 0$$

$$\Delta = 4 + 8 = 12$$

$$\sqrt{\Delta} = \sqrt{12} = 2\sqrt{3}$$

$$x_1 = \frac{2-2\sqrt{3}}{4} = \frac{1-\sqrt{3}}{2}$$

$$x_2 = \frac{2+2\sqrt{3}}{4} = \frac{1+\sqrt{3}}{2}$$

Teraz rozwiążemy równanie $x^2 + 2x = -(1 + 4x - x^2)$.

$$x^2 + 2x = -1 - 4x + x^2$$

$$6x = -1$$

$$x = -\frac{1}{6}$$

Rozwiązaniem równania są liczby $x = \frac{1-\sqrt{3}}{2}$, $x = -\frac{1}{6}$, $x = \frac{1+\sqrt{3}}{2}$.

Przykład 4

Rozwiążemy równanie $|x^2 - 4x - 5| = x^2 - 4x - 5$.

Wiemy, że $|x| = x$ dla $x \geq 0$.

Czyli $x^2 - 4x - 5 \geq 0$.

$$\Delta = 16 + 20 = 36$$

$$\sqrt{\Delta} = \sqrt{36} = 6$$

$$x_1 = \frac{4-6}{2} = -1$$

$$x_2 = \frac{4+6}{2} = 5$$

$$x \in (-\infty, -1) \cup (5, \infty)$$

Równanie spełniają wszystkie liczby $x \in (-\infty, -1) \cup (5, \infty)$.

Przykład 5

Obliczymy, dla jakiej wartości parametru m równanie

$|x^2 + 2x + 3| + |x^2 + 2x - 3| = m$ ma nieskończenie wiele rozwiązań.

Korzystając z definicji [wartości bezwzględnej](#) otrzymujemy:

$$|x^2 + 2x + 3| = x^2 + 2x + 3 \text{ dla } x^2 + 2x + 3 \geq 0, x \in \mathbb{R}, \text{ bo } \Delta < 0.$$

$$|x^2 + 2x - 3| = \begin{cases} x^2 + 2x - 3 & \text{dla } x^2 + 2x - 3 \geq 0, x \in (-\infty, -3) \cup (1, \infty) \\ -(x^2 + 2x - 3) & \text{dla } x^2 + 2x - 3 < 0, x \in (-3, 1) \end{cases}$$

Czyli rozważymy alternatywę dwóch przypadków.

1. $x \in (-\infty, -3) \cup (1, \infty)$

$$x^2 + 2x + 3 + x^2 + 2x - 3 = m$$

$$2x^2 + 4x - m = 0$$

Równanie kwadratowe z niewiadomą x i parametrem m może mieć dwa rozwiązania, jedno rozwiązanie może być sprzeczne.

2. $x \in (-3, 1)$


$$x^2 + 2x + 3 - x^2 - 2x + 3 = m$$

$$m = 6$$

Równanie będzie miało nieskończenie wiele rozwiązań dla $m = 6$.

Słownik

wartość bezwzględna liczby x


$$|x| = \begin{cases} x & \text{dla } x \geq 0 \\ -x & \text{dla } x < 0 \end{cases}$$

Galeria zdjęć interaktywnych

Polecenie 1

Zapoznaj się z galerią zdjęć interaktywnych pokazującą sposób rozwiązywania równania kwadratowego niepełnego z wartością bezwzględną.

Polecenie 2

Rozwiąż równanie $|x + 2| + |x^2 + 4x + 3| = 1$.

Sprawdź się

Pokaż ćwiczenia:   

Ćwiczenie 1



Ćwiczenie 2



Ćwiczenie 3



Ćwiczenie 4



Ćwiczenie 5



Ćwiczenie 6



Ćwiczenie 7



Ćwiczenie 8



Dla nauczyciela

Autor: Jolanta Schilling

Przedmiot: Matematyka

Temat: Równania kwadratowe z wartością bezwzględną

Grupa docelowa:

III etap edukacyjny, liceum, technikum, zakres rozszerzony

Podstawa programowa:

III. Równania i nierówności. Zakres podstawowy.

Uczeń:

4) rozwiązuje równania i nierówności kwadratowe.

Kształtowane kompetencje kluczowe:

- kompetencje w zakresie rozumienia i tworzenia informacji
- kompetencje w zakresie wielojęzyczności
- kompetencje matematyczne oraz kompetencje w zakresie nauk przyrodniczych, technologii i inżynierii
- kompetencje cyfrowe
- kompetencje osobiste, społeczne i w zakresie umiejętności uczenia się

Cele operacyjne:

Uczeń:

- rozwiązuje równania kwadratowe z wartością bezwzględną lub dwiema wartościami bezwzględnymi
- tworzy algorytmy rozwiązywania równań kwadratowych z wartością bezwzględną różnych typów
- dobiera model matematyczny do określonej sytuacji

Strategie nauczania:

- konstruktywizm

Metody i techniki nauczania:

- analiza przypadku

- dyskusja
- odwrócona klasa

Formy pracy:

- praca indywidualna
- praca w grupach
- praca w parach

Środki dydaktyczne:

- komputery z głośnikami i dostępem do Internetu, słuchawki
- zasoby multimedialne zawarte w e-materiale
- tablica interaktywna/tablica, pisak/kreda

Przebieg lekcji

Faza wstępna:

1. Uczniowie w domu przygotowują sposób rozwiązywania równań kwadratowych z wartością bezwzględną.
2. Nauczyciel podaje temat i cele zajęć oraz wspólnie z uczniami ustala kryteria sukcesu.

Faza realizacyjna:

1. Uczniowie pracują w grupach metodą odwróconej klasy. Najpierw wymieniają się między sobą wiadomościami dotyczącymi rozwiązywania równań kwadratowych z wartością bezwzględną, które przygotowali w domu.
2. Uczniowie w parach omawiają rozwiązania przykładów z sekcji „Przeczytaj”.
3. Uczniowie podzieleni na grupy 4 – 6 osobowe rozwiązują zadania interaktywne. Wspólnie omawiają odpowiedzi.
4. Uczniowie oglądają galerię zdjęć i omawiają ją wraz z nauczycielem.

Faza podsumowująca:

1. Jako podsumowanie przedstawiciele grup krótko omawiają trudności, jakie napotkali podczas rozwiązywania zadań.
2. Nauczyciel omawia przebieg zajęć, wskazuje mocne i słabe strony pracy uczniów, udzielając im tym samym informacji zwrotnej.

Praca domowa:

Uczniowie wykonują w domu zadania 7 – 8 z sekcji „Sprawdź się”.

Materiały pomocnicze:

[Równanie kwadratowe](#)

Wskazówki metodyczne:

Przykład zawarty w galerii zdjęć uczniowie mogą wykorzystać jako materiał na lekcję o równaniach kwadratowych niezupełnych z wartością bezwzględną.