



Zadania na dowodzenie związane z wyznaczaniem granic ciągów zbieżnych

- [Wprowadzenie](#)
- [Przeczytaj](#)
- [Infografika](#)
- [Sprawdź się](#)
- [Dla nauczyciela](#)



Zadania na dowodzenie związane z wyznaczaniem granic ciągów zbieżnych

Źródło: dostępny w internecie: pixabay.com, domena publiczna.

W ciągu dotychczasowej nauki dowiedziałeś się, co to jest ciąg zbieżny, czyli ciąg posiadający granicę liczbową. Na tej lekcji przyjrzymy się jak udowodnić, korzystając z definicji granicy ciągu, że granicą ciągu jest wskazana liczba. W tym materiale nie będziemy obliczać granic ciągów.

Twoje cele

- Przypomnisz sobie definicję granicy ciągu zbieżnego.
- Poznasz przykłady dowodów w oparciu o definicję granicy liczbowej ciągu.

Przeczytaj

Na początku przypomnijmy definicję granicy ciągu.

Definicja: Granica ciągu

Niech dany będzie ciąg nieskończony (a_n) . Powiemy, że liczba $g \in \mathbb{R}$ jest granicą tego ciągu, jeśli dla dowolnej liczby dodatniej $\varepsilon > 0$ istnieje liczba naturalna N taka, że dla dowolnej liczby naturalnej $n > N$ zachodzi nierówność

$$|a_n - g| < \varepsilon.$$

Do tej pory obliczaliśmy granice ciągów wykorzystując twierdzenie o działaniach na granicach ciągów. Teraz przedstawimy kilka przykładów dowodów, że granicą ciągu jest określona liczba. Wykorzystamy przypomnianą powyżej definicję granicy ciągu.

Przykład 1

Wskażemy wszystkie wyrazy ciągu $a_n = \frac{2n+2}{3n+5}$, które należą do otoczenia o promieniu $\frac{1}{20}$ liczby $\frac{2}{3}$?

Rozwiązanie

Będziemy chcieli wskazać takie dodatnie liczby naturalne n , dla których zachodzi nierówność: $\left| \frac{2n+2}{3n+5} - \frac{2}{3} \right| < \frac{1}{20}$.

Odejmujemy ułamki po lewej stronie nierówności:

$$\left| \frac{-4}{9n+15} \right| < \frac{1}{20}$$

Ponieważ $\frac{-4}{9n+15} < 0$ dla dowolnej dodatniej liczby naturalnej n , zatem nierówność możemy zapisać w postaci:

$$\frac{4}{9n+15} < \frac{1}{20}$$

$$80 < 9n + 15$$

$$65 < 9n$$

$$\frac{65}{9} < n$$

Zatem nierówność $\left| \frac{2n+2}{3n+5} - \frac{2}{3} \right| < \frac{1}{20}$ jest prawdziwa dla liczb naturalnych $n \geq 8$.

Zatem do otoczenia o promieniu $\frac{1}{20}$ liczby $\frac{2}{3}$ należą **prawie wszystkie wyrazy ciągu**

$$a_n = \frac{2}{3n+5}.$$

Przykład 2

Weźmy dowolną liczbę rzeczywistą $\varepsilon > 0$. Jak dobrać liczbę naturalną N , aby dla każdej liczby naturalnej $n > N$ zachodziła nierówność:

$$\left| \frac{2n+1}{n+3} - 2 \right| < \varepsilon?$$

Rozwiązanie

Zapiszmy wyrażenie z nierówności:

$$\frac{2n+1}{n+3} - 2 = \frac{2n+1-2n-6}{n+3} = \frac{-5}{n+3}$$

Ponieważ $\frac{-5}{n+3} < 0$ dla dowolnej dodatniej liczby naturalnej n , zatem nierówność z zadania możemy zapisać w postaci:

$$\frac{5}{n+3} < \varepsilon$$

Stąd otrzymujemy:

$$\frac{5}{\varepsilon} < n + 3$$

$$\frac{5}{\varepsilon} - 3 < n$$

Zauważmy, że gdy $\frac{5}{\varepsilon} - 3 \leq 0$, to możemy przyjąć, że $N = 0$.

Gdy $\frac{5}{\varepsilon} - 3 > 0$, wówczas możemy przyjąć, że $N = \left[\frac{5}{\varepsilon} - 3 \right]$, gdzie $[x]$ jest częścią całkowitą z liczby x , czyli największą liczbą całkowitą nie większą od x .

Zatem dla dowolnej wartości $\varepsilon > 0$ dobraliśmy takie $N \in \mathbb{N}$, że dla dowolnej liczby naturalnej $n > N$, zachodzi nierówność: $\left| \frac{2n+1}{n+3} - 2 \right| < \varepsilon$.

Przykład 3

Udowodnimy, że granicą ciągu $a_n = \frac{2n-13}{2n-7}$ jest liczba 1.

Rozwiązanie

Aby udowodnić, że granicą ciągu $a_n = \frac{2n-13}{2n-7}$ jest liczba 1 pokażemy, że dla dowolnej wartości $\varepsilon > 0$ dobierzemy taką liczbę $N \in \mathbb{N}$, że dla dowolnej liczby naturalnej $n > N$ będzie zachodzić nierówność: $\left| \frac{2n-13}{2n-7} - 1 \right| < \varepsilon$.

$$\text{Zapiszmy } \left| \frac{2n-13}{2n-7} - 1 \right| = \left| \frac{-6}{2n-7} \right|.$$

Zauważmy, że wyrażenie $\left| \frac{-6}{2n-7} \right|$ jest równe $\frac{6}{2n-7}$ dla liczb naturalnych $n > 3$.

Zatem dla dowolnej wartości $\varepsilon > 0$ dobierzemy taką liczbę $N \in \mathbb{N}$ i $N \geq 3$, że dla dowolnej liczby naturalnej $n > N$ będzie zachodzić nierówność: $\frac{6}{2n-7} < \varepsilon$.

Przekształćmy zatem tę ostatnią nierówność:

$$\frac{6}{2n-7} < \varepsilon$$

$$\frac{6}{\varepsilon} < 2n - 7$$

$$\frac{6}{\varepsilon} + 7 < 2n$$

$$\frac{3}{\varepsilon} + \frac{7}{2} < n$$

Zatem dla dowolnej wartości $\varepsilon > 0$ dobraliśmy takie $N = \max\left\{\left[\frac{3}{\varepsilon} + \frac{7}{2}\right], 3\right\}$, że dla dowolnej liczby naturalnej $n > N$ zachodzi nierówność: $\left|\frac{2n-13}{2n-7} - 1\right| < \varepsilon$.

To oznacza, że granicą ciągu $a_n = \frac{2n-13}{2n-7}$ jest liczba 1.

Przykład 4

Udowodnimy, że granicą ciągu $a_n = \frac{2n^3+3n}{n^3-7n-5}$ jest liczba 2.

Rozwiązanie

Aby udowodnić, że granicą ciągu $a_n = \frac{2n^3+3n}{n^3-7n-5}$ jest liczba 2 wykażemy, że dla dowolnej wartości $\varepsilon > 0$ dobierzemy taką liczbę $N \in \mathbb{N}$, że dla dowolnej liczby naturalnej $n > N$ będzie zachodzić nierówność: $\left|\frac{2n^3+3n}{n^3-7n-5} - 2\right| < \varepsilon$.

Przekształćmy lewą stronę nierówności

$$\left|\frac{2n^3+3n}{n^3-7n-5} - 2\right| = \left|\frac{2n^3+3n}{n^3-7n-5} - \frac{2(n^3-7n-5)}{n^3-7n-5}\right| = \left|\frac{17n+10}{n^3-7n-5}\right|.$$

Zauważmy, że dla $n > 7$ wyrażenie $\frac{17n+10}{n^3-7n-5}$ przyjmuje wartości dodatnie.

Wówczas możemy wyrażenie zapisać następująco: $\left|\frac{2n^3+3n}{n^3-7n-5} - 2\right| = \frac{17n+10}{n^3-7n-5}$.

Dla $n > 7$ prawdziwa jest nierówność $17n + 10 < 20n$ oraz $n^3 - 7n - 5 > \frac{1}{2}n^3$.

Stąd dla $n > 7$ prawdziwa jest nierówność

$$\frac{17n+10}{n^3-7n-5} < \frac{20n}{\frac{1}{2}n^3},$$

$$\text{czyli } \frac{17n+10}{n^3-7n-5} < \frac{40}{n^2}.$$

Zauważmy, że dla dowolnej dodatniej liczby ε nierówność $\frac{40}{n^2} < \varepsilon$ jest prawdziwa dla $n > \sqrt{\frac{40}{\varepsilon}}$.

Zatem dla dowolnej wartości $\varepsilon > 0$ dobraliśmy takie $N = \max\left\{\left\lceil\sqrt{\frac{40}{\varepsilon}}\right\rceil, 7\right\}$, że dla dowolnej liczby naturalnej $n > N$, zachodzi nierówność: $\frac{17n+10}{n^3-7n-5} < \varepsilon$.

Ostatecznie: dla dowolnej wartości $\varepsilon > 0$ dobraliśmy takie $N = \max\left\{\left\lceil\sqrt{\frac{40}{\varepsilon}}\right\rceil, 7\right\}$, że dla dowolnej liczby naturalnej $n > N$, zachodzi nierówność: $\left|\frac{2n^3+3n}{n^3-7n-5} - 2\right| < \varepsilon$, co oznacza, że granicą ciągu $a_n = \frac{2n^3+3n}{n^3-7n-5}$ jest liczba 2.

Słownik

prawie wszystkie wyrazy ciągu nieskończonego

wszystkie wyrazy ciągu poza co najwyżej ich skończoną ilością

otoczenie punktu

otoczeniem punktu x_0 o promieniu $\varepsilon > 0$ nazywamy zbiór

$$U(x_0, \varepsilon) = \{x \in \mathbb{R} : |x - x_0| < \varepsilon\}$$

Infografika

Polecenie 1

Zapoznaj się uważnie z infografiką, a następnie wykonaj kolejne polecenie.

Polecenie 2

Uzasadnij, że dla $0 < b < 1$ zachodzi $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{b} = 1$.

Sprawdź się

Pokaż ćwiczenia:   

Ćwiczenie 1



Czy wyraz a_{10} ciągu $a_n = \frac{1}{3n}$ należy do otoczenia o promieniu $\frac{1}{20}$ liczby 0?

☐ NIE

☐ TAK

Ćwiczenie 2



Które wymienione poniżej wyrazy ciągu $a_n = \frac{2n+1}{2n-7}$ należą do otoczenia o promieniu $\frac{1}{10}$ liczby 1?

☐ a_{10}

☐ a_{101}

☐ a_{43}

☐ a_{49}

☐ a_4

☐ a_1

Ćwiczenie 3



Wstaw najmniejszą liczbę naturalną N , aby dla każdej liczby naturalnej $n > N$ spełniony był warunek: $\left| \frac{n}{2n-3} - \frac{1}{2} \right| < \frac{1}{7}$.

$N =$

Ćwiczenie 4



Wstaw najmniejszą liczbę naturalną N , aby dla każdej liczby naturalnej $n > N$ spełniony był warunek: $\left| \frac{n^2+1}{n^2+2n+1} - 1 \right| < \frac{1}{3}$.

$N =$

Ćwiczenie 5



Spośród wskazanych liczb wskaż najmniejszą liczbę naturalną N , aby dla każdej liczby naturalnej $n > N$ spełniony był warunek: $\left| \frac{n}{3n-1} - \frac{1}{3} \right| < \varepsilon$, gdzie ε jest ustaloną liczbą dodatnią.

☐ $N = \left\lceil \frac{1}{9\varepsilon} + \frac{1}{3} \right\rceil$

☐ $N = \left\lceil \frac{1}{3\varepsilon} + 1 \right\rceil$

☐ $N = \frac{1}{3\varepsilon} + 1$

☐ $N = \frac{1}{9\varepsilon} + \frac{1}{3}$

Ćwiczenie 6



Granica ciągu $a_n = \frac{2n+7}{2n+3}$ jest , ponieważ dla wartości $\varepsilon > 0$ możemy dobrać taką liczbę naturalną N , że dla dowolnej liczby naturalnej , zachodzi nierówność: $\left| \frac{2n+7}{2n+3} - 1 \right| < \varepsilon$.

Ćwiczenie 7



Granica ciągu $a_n = \frac{2n+7}{2n+3}$ nie jest , ponieważ dla wartości $\varepsilon > 0$ i dla każdej liczby naturalnej N istnieje liczba naturalna taka, że zachodzi nierówność: .

Ćwiczenie 8



Udowodnij, że granicą ciągu $a_n = \frac{3n+2}{n+5}$ jest liczba 3.

Dla nauczyciela

Autor: Jacek Dymel

Przedmiot: Matematyka

Temat: Zadania na dowodzenie związane z wyznaczaniem granic ciągów zbieżnych

Grupa docelowa:

III etap edukacyjny, liceum ogólnokształcące, technikum, zakres rozszerzony

Podstawa programowa:

VI. Ciągi.

Zakres rozszerzony. Uczeń spełnia wymagania określone dla zakresu podstawowego, a ponadto:

1) oblicza granice ciągów, korzystając z granic ciągów typu $\frac{1}{n}$, $\sqrt[n]{a}$ oraz twierdzeń o granicach sumy, różnicy, iloczynu i ilorazu ciągów zbieżnych, a także twierdzenia o trzech ciągach;

Kształtowane kompetencje kluczowe:

- kompetencje cyfrowe;
- kompetencje osobiste, społeczne i w zakresie umiejętności uczenia się;
- kompetencje matematyczne oraz kompetencje w zakresie nauk przyrodniczych, technologii i inżynierii.

Cele operacyjne:

Uczeń:

- definiuje granicę ciągu zbieżnego;
- dowodzi istnienia granicy ciągu w oparciu o definicję granicy liczbowej ciągu.

Strategie nauczania:

- konstruktywizm;
- konektywizm.

Metody i techniki nauczania:

- dyskusja;
- praca z ekspertem.

Formy pracy:

- praca indywidualna;
- praca w parach;
- praca całego zespołu klasowego.

Środki dydaktyczne:

- komputery z głośnikami, słuchawkami i dostępem do internetu;
- zasoby multimedialne zawarte w e-materiale;
- tablica interaktywna/tablica, pisak/kreda.

Przebieg lekcji**Faza wstępna:**

1. Przedstawienie uczniom tematu: „Zadania na dowodzenie związane z wyznaczaniem granic ciągów zbieżnych” oraz celów lekcji, a następnie określenie kryteriów sukcesu.

Faza realizacyjna:

1. Przed lekcją nauczyciel wyłania wśród uczniów ekspertów, którzy zapoznają się z materiałem zawartym w sekcji „Przeczytaj”. Na lekcji uczniowie pracują w grupach pod kierunkiem ekspertów. Eksperci proponują grupom rozwiązywanie zadań, które przygotowali w domu (zadania oparte na przykładach z sekcji „Przeczytaj”). W razie problemów – służą pomocą, wyjaśniają niezrozumiałe elementy.
2. Uczniowie wykonują wspólnie na forum klasy ćwiczenia nr 1-2.
3. W kolejnym kroku uczniowie realizują w parach ćwiczenia 3-5, po ich wykonaniu porównują otrzymane wyniki z inną parą.
4. Uczniowie indywidualnie wykonują kolejne ćwiczenia nr 6 i 7 z sekcji „Sprawdź się”.

Faza podsumowująca:

1. Omówienie ewentualnych problemów z rozwiązaniem ćwiczeń z sekcji „Sprawdź się”.
2. Wybrany uczeń podsumowuje zajęcia, zwracając uwagę na nabyte umiejętności, omawia ewentualne problemy podczas rozwiązania ćwiczeń w temacie: „Zadania na dowodzenie związane z wyznaczaniem granic ciągów zbieżnych”.

Praca domowa:

1. Uczniowie wykonują ćwiczenia interaktywne, które nie zostały dokończone na zajęciach.

Materiały pomocnicze:

- [Przykłady ciągów zbieżnych](#)

Wskazówki metodyczne:

- Medium w sekcji „Infografika” można potraktować jako zadania domowe dotyczące analizy problemu w temacie „Zadania na dowodzenie związane z wyznaczaniem granic ciągów zbieżnych”.