Odkryj, zrozum, zastosuj...

Czy funkcja może działać jak maszyna? Czy trójkąty mogą być podobne? I czy potęga naprawdę jest potężna? Na te i inne pytania znajdziesz odpowiedź w naszym e-podręczniku.

- Funkcja
    - Pojęcie funkcji
        - Wprowadzenie
        - Definicja funkcji. Sposoby przedstawiania funkcji
        - Zbiór zadań
            - Zadania
            - Zadania generatorowe
    - Dziedzina funkcji
        - Wprowadzenie
        - Dziedzina
        - Zbiór zadań
            - Zadania
            - Zadania generatorowe
    - Argument i wartość funkcji. Miejsca zerowe funkcji liczbowej
        - Miejsca zerowe funkcji
        - Wartość funkcji dla danego argumentu
        - Argumenty, dla których funkcja przyjmuje daną wartość
        - Zbiór zadań
            - Zadania
            - Zadania generatorowe
    - Odczytywanie własności funkcji na podstawie jej wykresu. Część I
        - Argumenty i wartości funkcji
        - Przykłady
        - Zadania. Część I
        - Zadania. Część II
    - Odczytywanie własności funkcji na podstawie jej wykresu. Część II
        - Przykłady zastosowania funkcji
        - Monotoniczność funkcji
        - Monotoniczność. Przykłady
        - Zadania. Część I

        - Zadania. Część II
        - Zadania generatorowe
    - Przekształcanie figur na płaszczyźnie kartezjańskiej
        - Symetria punktu
        - Symetria wykresu funkcji
        - Przykłady symetrii funkcji
        - Zadania. Część I
        - Zadania. Część II
        - Zadania generatorowe
    - Przesunięcie wzdłuż osi układu współrzędnych
        - Przesunięcie punktu w układzie współrzędnych
        - Przykłady
        - Przesunięcie wykresów funkcji
        - Przykłady
        - Zadania
        - Zadania generatorowe
- Funkcja liniowa
    - Funkcja liniowa. Wykres funkcji liniowej
        - Proporcjonalność prosta
        - Przykłady
        - Definicja funkcji liniowej
        - Zadania
        - Zadania generatorowe
    - Własności funkcji liniowej
        - Współczynnik kierunkowy funkcji liniowej
        - Funkcja liniowa rosnąca, funkcja liniowa malejąca
        - Zadania
        - Zadania generatorowe
    - Miejsce zerowe funkcji liniowej. Równanie liniowe, nierówność liniowa
        - Równanie liniowe
        - Nierówność liniowa
        - Zadania
        - Zadania generatorowe
    - Układ równań liniowych. Geometryczna interpretacja układu równań
        - Układ dwóch równań liniowych
        - Układ równań liniowych
        - Zadania
        - Zadania generatorowe
    - Zastosowanie funkcji liniowej
        - Przykłady zastosowania funkcji liniowej. Część I
        - Przykłady zastosowania funkcji liniowej. Część II
        - Zadania. Część I

        - Zadania. Część II
- Trygonometria
    - Podobieństwo trójkątów prostokątnych
        - Wprowadzenie do trygonometrii
        - Sinus, cosinus i tangens kąta ostrego
        - Przykłady
        - Zadania. Część I
        - Zadania. Część II
    - Tożsamości trygonometryczne
        - Tożsamości trygonometryczne
        - Przykłady
        - Zadania
        - Zadania generatorowe
    - Zastosowanie trygonometrii w geometrii
        - Przykłady. Część I
        - Przykłady. Część II
        - Zadania
    - Wykresy i własności funkcji trygonometrycznych
        - Wykresy i własności funkcji trygonometrycznych
- Liczby
    - Liczby naturalne, całkowite, wymierne
        - Liczby naturalne, całkowite i wymierne
        - Zadania
    - Procenty
        - Procenty i punkty procentowe
        - Zadania
        - Zadania generatorowe
    - Potęgi, pierwiastki, notacja wykładnicza
        - Działania na potęgach
        - Zadania
        - Działania na pierwiastkach
        - Zadania. Część I
        - Zadania. Część II
    - Wyrażenia algebraiczne
        - Działania na wyrażeniach algebraicznych
        - Zadania
        - Przykłady
        - Zadania, zadania generatorowe
    - Potęga o wykładniku wymiernym
        - Potęga o wykładniku wymiernym
        - Zadania
    - Nierówności, przedziały, odległość

            - Równania i nierówności liczbowe. Przedziały liczbowe
            - Przedziały liczbowe. Przedziały jako zbiory
            - Wartość bezwzględna - definicja
            - Zadania
        - Zaokrąglenia i przybliżenia
            - Przybliżenia i zaokrąglenia liczb
            - Błąd bezwzględny, błąd względny
            - Zadania
- Geometria
    - Planimetria. Podstawowe związki na płaszczyźnie
        - Przystawanie trójkątów
        - Twierdzenie Pitagorasa
        - Dwusieczne kąta
        - Symetralna odcinka. Symetralne boków trójkąta
        - Zadania
    - Wielokąty na płaszczyźnie. Związki miarowe
        - Kąty przyległe, wierzchołkowe, naprzemianległe i odpowiadające
        - Kąty w figurach, przekątne
        - Zadania
    - Przystawanie trójkątów
        - Przykłady
        - Zadania
    - Podobieństwo trójkątów
        - Cechy podobieństwa trójkątów
        - Przykłady
        - Własności podobieństwa
    - Kąty w trójkącie. Styczna do okręgu
        - Kąty w okręgu
        - Kąt środkowy, kąt wpisany
        - Wzajemne położenie prostej i okręgu
        - Wycinek i odcinek koła
        - Okrąg wpisany w trójkąt prostokątny
        - Zadania
    - Stereometria
        - Siatki i modele brył
- Słowniczek

Wprowadzenie

W praktyce często korzystamy z zależności między różnymi wielkościami.

Przykład 1

Przeprowadź symulację kosztów tankowania. Obserwuj, jak zmienia się kwota należności w zależności od ilości zatankowanego paliwa.

Zasób interaktywny dostępny pod adresem https://zpe.gov.pl/a/D76vba47U

Symulacja kosztów tankowania paliwa jest przykładem modelowania matematycznego. Tworzenie modelu rozpoczyna się od opisu zjawiska, a następnie określamy zależności między danymi wielkościami.

Przykład 2

Droga s, jaką pokonuje samochód jadący ze stałą prędkością v zależy od czasu t. Zależność tę możemy opisać za pomocą równości

$$s = \mathrm{vt}$$

Obserwuj, jak zmienia się długość drogi pokonywanej przez samochód jadący ze stałą prędkością $v = 80$ km/h.

- W ciągu 1 godziny samochód pokonuje drogę długości 80 km.
- W ciągu 2 godzin samochód pokonuje drogę długości 160 km.
- W ciągu pół godziny samochód pokonuje drogę długości 40 km.
- W ciągu 15 minut samochód pokonuje drogę długości 20 km.
- W ciągu 3 godzin 45 minut samochód pokonuje drogę długości 300 km.

czas [t] w h	0.25	0.50	0.75	1.00	1.25	1.50	1.75	2.00	2.25	2.50	2.75	3.00	3.25	3.50	3.75	4.00
droga [s] w km	20	40	60	80	100	120	140	160	180	200	220	240	260	280	300	320

Zasób interaktywny dostępny pod adresem https://zpe.gov.pl/a/D76vba47U

Przykład 3

- Energia kinetyczna E_k ciała poruszającego się z prędkością v zależy od tej prędkości i masy danego ciała m

$$E_k = \frac{mv^2}{2}$$

Energia kinetyczna jest równa pracy, jaką należy wykonać, by ciało o masie m rozpędzić od prędkości 0 (względem przyjętego układu odniesienia) do danej prędkości v.
Dla ciał poruszających się z prędkościami bliskimi prędkości światła energia kinetyczna obliczana jest według innego wzoru. Energia kinetyczna jest różnicą pomiędzy energią całkowitą i energią spoczynkową.

- Energia potencjalna grawitacji ziemskiej ciała o masie m, znajdującego się na wysokości h ponad poziomem Ziemi, jest równa iloczynowi m, h i przyspieszenia ziemskiego g

$$E_p = \mathrm{mgh}$$

Ćwiczenie 1

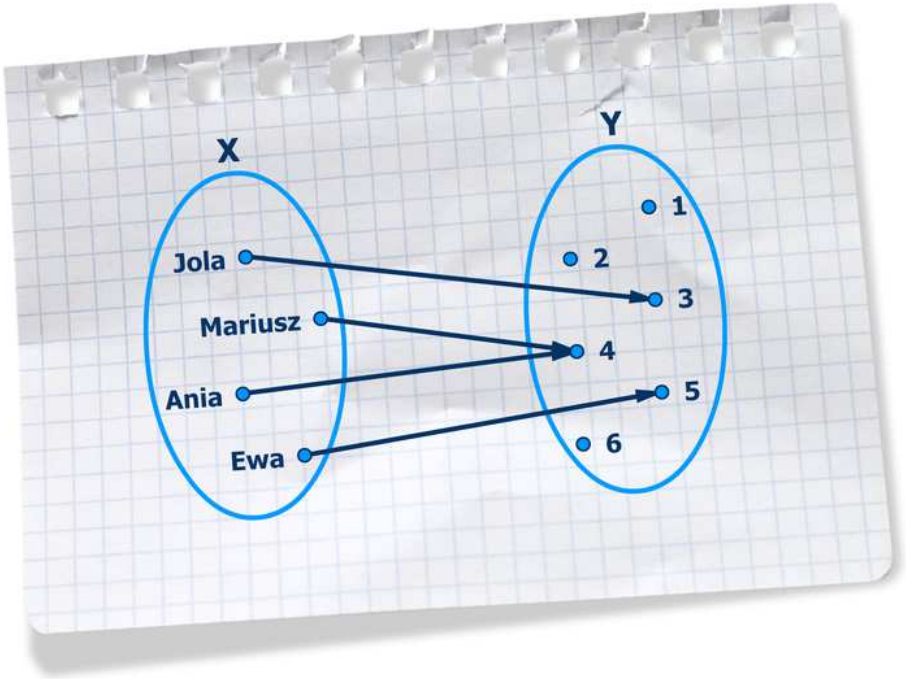
Każdą osobę, zameldowaną w Polsce na pobyt stały dłuższy niż 3 miesiące, rejestruje się w Powszechnym Elektronicznym Systemie Ewidencji Ludności, nadając jej unikatowy symbol, nazywany numerem PESEL – jest to 11-cyfrowy, stały symbol numeryczny.
Jednoznaczne przyporządkowanie numeru PESEL do osoby jest przydatne przy tworzeniu osobowych baz danych. Co roku do każdej ze szkół przesyłane są zestawienia, w których wyniki egzaminów zewnętrznych przypisane są do numerów PESEL uczniów, którzy w danej szkole zdawali te egzaminy. W ten sposób jednoznacznie identyfikuje się wynik egzaminu z konkretnym uczniem.
Wpisz swój numer PESEL i sprawdź, jakie informacje o tobie są tam zakodowane.

Zasób interaktywny dostępny pod adresem https://zpe.gov.pl/a/D76vba47U

Zależności między wielkościami możemy także opisywać za pomocą grafów.

Przykład 4

Graf opisuje przyporządkowanie, które każdej z osób: Mariuszowi, Joli, Ewie i Ani przyporządkowuje ocenę z matematyki, jaką otrzymała na koniec roku szkolnego.



Film dostępny na portalu epodreczniki.pl

Animacja.

Definicja funkcji. Sposoby przedstawiania funkcji

Definicja: Funkcja

Funkcją f ze zbioru X w zbiór Y nazywamy przyporządkowanie, które każdemu elementowi zbioru X przyporządkowuje dokładnie jeden element zbioru Y.
Symbolicznie piszemy $f : X \to Y$. Czytamy „funkcja f odwzorowuje zbiór X w zbiór Y”.

- Zbiór X nazywamy dziedziną funkcji, a jego elementy – argumentami funkcji f.
- Zbiór Y nazywamy przeciwdziedziną funkcji. Każdy element y zbioru Y, który został przyporządkowany co najmniej jednemu argumentowi x nazywamy wartością funkcji f dla argumentu x, co zapisujemy symbolicznie $y = f(x)$. Zbiór Z tych elementów y nazywamy zbiorem wartości funkcji.

Przykład 1

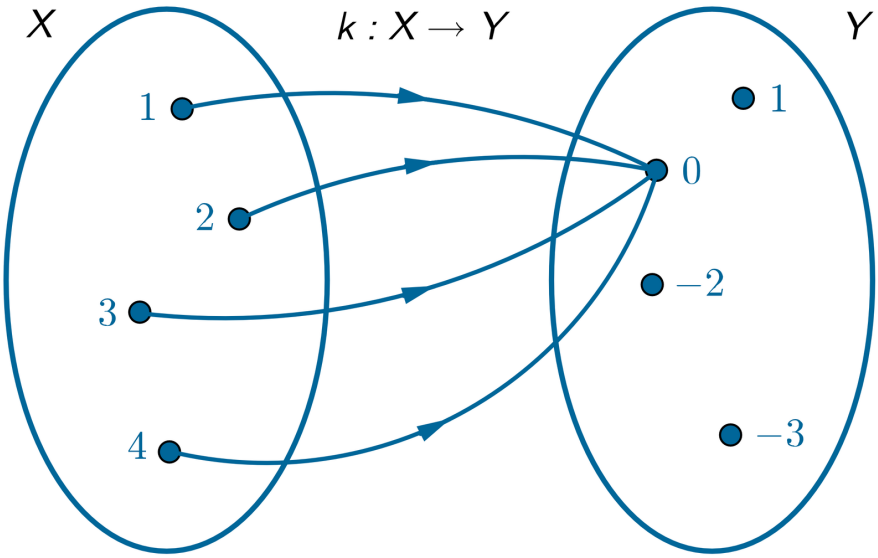
Dane są zbiory $X = \{1,\ 2,\ 3,\ 4\}$ oraz $Y = \{-3,\ -2,\ 0,\ 1\}$.
Rozważmy różne sposoby opisu funkcji.

- Funkcja f opisana jest za pomocą tabeli.

Funkcja f

x	1	2	3	4
$f(x)$	1	-2	-2	-2

- Funkcja k przedstawiona jest za pomocą grafu.

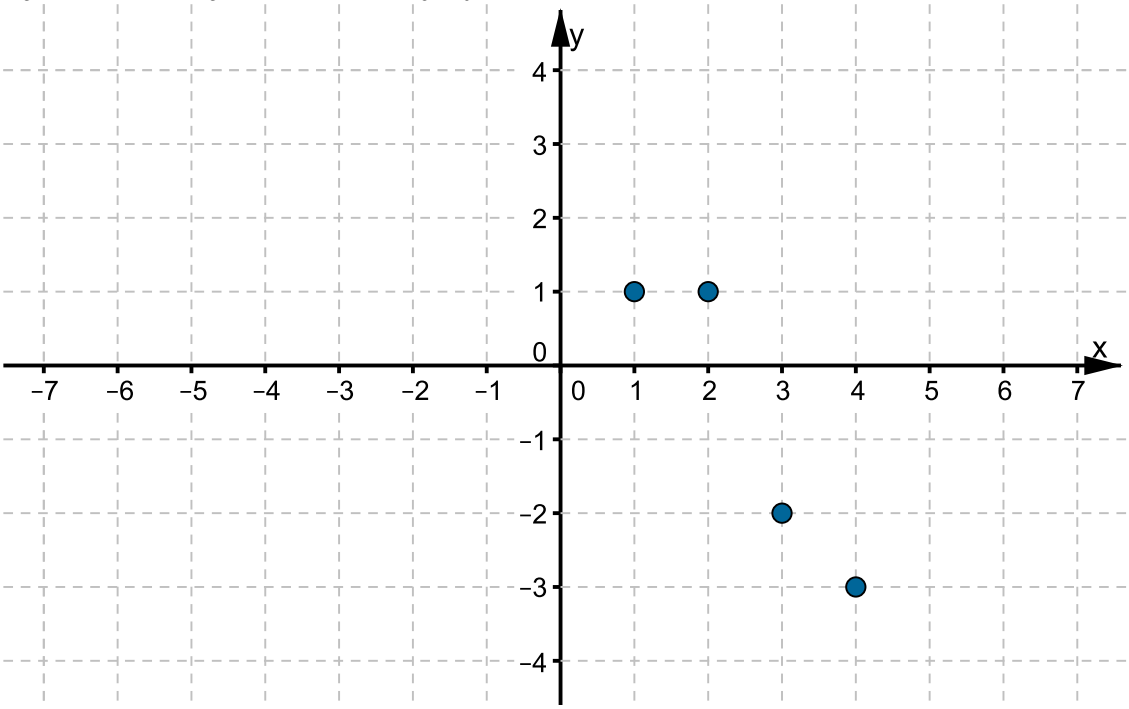


- Funkcja g opisana jest słownie. Funkcja g każdej liczbie nieparzystej ze zbioru X przyporządkowuje wartość 1. Każdemu z pozostałych argumentów

przyporządkowuje liczbę o 4 mniejszą.

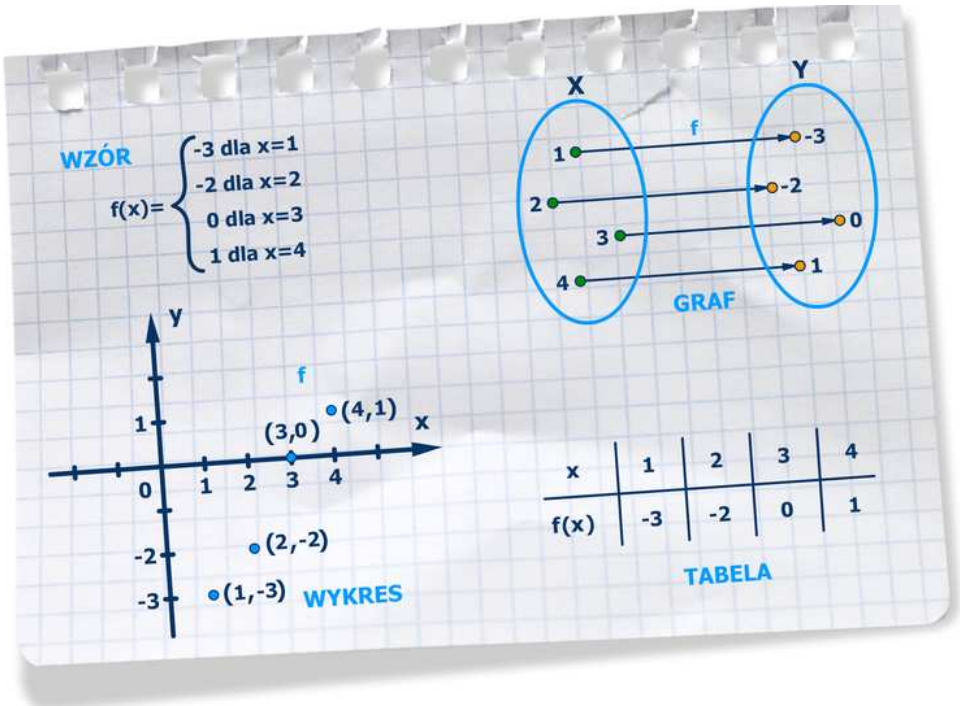
Zatem: $g(1) = g(3) = 1$, $g(2) = 2 - 4 = -2$ i $g(4) = 4 - 4 = 0$.

- Funkcja w opisana jest za pomocą wykresu.



- Funkcja z opisana jest za pomocą wzoru.

$$f(x) = \begin{cases} -3 & \text{dla} \quad x = 1 \\ -2 & \text{dla} \quad x = 2 \\ 0 & \text{dla} \quad x = 3 \\ 1 & \text{dla} \quad x = 4 \end{cases}$$



Film dostępny na portalu epodreczniki.pl

Animacja

Przedstawiliśmy różne przykłady funkcji określonych na zbiorze $X = \{1,\ 2,\ 3,\ 4\}$ o wartościach ze zbioru $Y = \{-3,\ -2,\ 0,\ 1\}$.

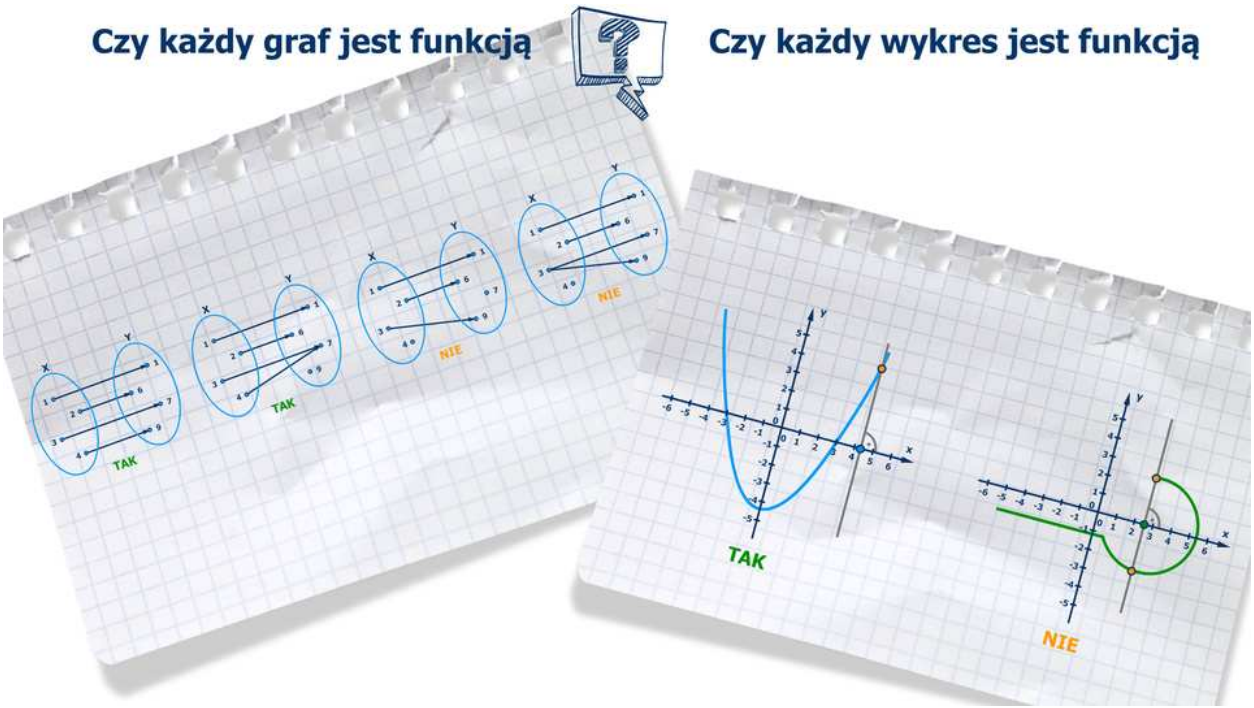
Ćwiczenie 1

Podaj przykład funkcji określonej na zbiorze $X = \{1,\ 4,\ 5,\ 7\}$ o wartościach ze zbioru $Y = \{-4,\ -1,\ 0,\ 1\}$.

Ćwiczenie 2

Ile jest wszystkich funkcji określonych na zbiorze $X = \{1,\ 2,\ 3,\ 4\}$ o wartościach ze zbioru $Y = \{-3,\ -2,\ 0,\ 1\}$?

Przykład 2



Film dostępny na portalu epodreczniki.pl

Animacja

Przykład 3

Pole kwadratu o boku długości x określamy wzorem $P = x^2$. Wobec tego dla dowolnego $x > 0$ funkcja $P(x) = x^2$ opisuje pole kwadratu o boku x.

Zasób interaktywny dostępny pod adresem https://zpe.gov.pl/a/DJFP4MOjs

Przykład 4

Długość d przekątnej kwadratu jest funkcją długości x jego boku.
W szczególności $d(3) = 3\sqrt{2}$, a ogólnie $d(x) = x\sqrt{2}$, dla $x > 0$.

Przykład 5

Wysokość h trójkąta równobocznego i pole P tego trójkąta są funkcjami długości a boku trójkąta.
W szczególności $h(6) = 3\sqrt{3}$, $P(4) = 4\sqrt{3}$, a ogólnie $h(a) = \frac{a\sqrt{3}}{2}$ oraz $P(a) = \frac{a^2\sqrt{3}}{4}$, dla $a > 0$.

Ćwiczenie 3

W zależności od długości promienia r, podaj wzór funkcji opisującej

a. pole koła

b. obwód koła

Przykład 6

Rzucamy cztery razy sześcienną kostką. Rozpatrzmy funkcję f, która numerowi rzutu przyporządkowuje liczbę wyrzuconych oczek uzyskanych na kostce w tym rzucie. Wówczas dziedziną funkcji f jest zbiór $\{1,\ 2,\ 3,\ 4\}$, a jej przeciwdziedziną zbiór $\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$, przy czym zbiór wartości funkcji jest co najwyżej czteroelementowy.

Zasób interaktywny dostępny pod adresem https://zpe.gov.pl/a/DJFP4MOjs

Przykład 7

Dla danej funkcji określ dziedzinę i zbiór wartości.

Zasób interaktywny dostępny pod adresem https://zpe.gov.pl/a/DJFP4MOjs

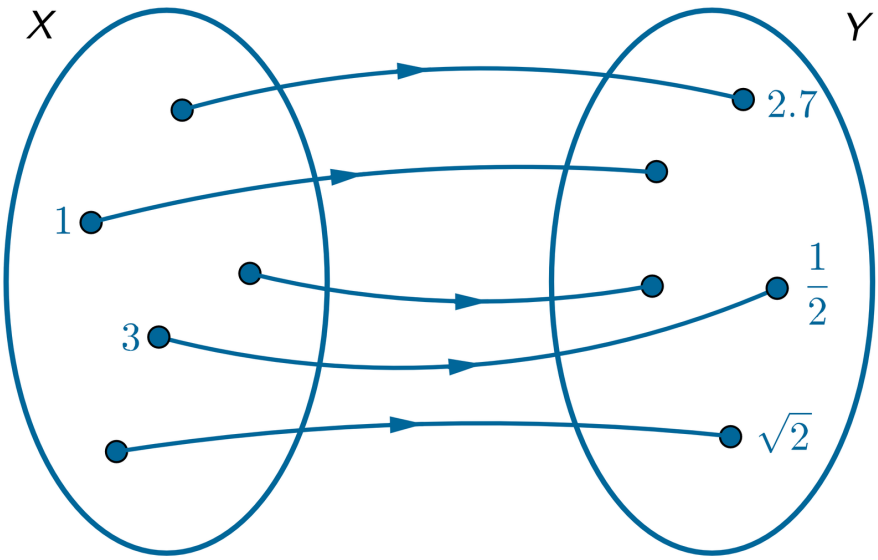
Ćwiczenie 4

Funkcja g, ze zbioru X w zbiór Y, określona jest za pomocą tabeli.

Funkcja g

x	1	2	3	4	5
$g(x)$	2	-3	$\frac{1}{2}$	$2{,}7$	$\sqrt{2}$

Uzupełnij graf tej funkcji.



Ćwiczenie 5

Dane są zbiory $X = \{-2, -1, 0, 1, 2, 3\}, Y = \{-1, 0, 1, 2, 5\}$ oraz funkcja $f: X \to Y$ taka, że

$$f(x) = \begin{cases} 5 & \text{dla} \quad x < 0 \\ x - 3 & \text{dla} \quad x > 1 \\ x + 1 & \text{dla} \quad x = 0 \text{ lub } x = 1 \end{cases}$$

Uzupełnij tabelkę.

Funkcja f

x	-2	-1	0	1	2	3
$f(x)$						

Ćwiczenie 6

Uczniom klasy Ia przyporządkowane są w dzienniku kolejne numery od 1 do 33. Które z poniższych przyporządkowań jest funkcją?

a. Każdemu numerowi ucznia przyporządkowujemy dzień tygodnia, w którym się uczeń urodził.

b. Każdemu z 7 dni tygodnia przyporządkowujemy numer z dziennika tego ucznia, który się w tym dniu urodził.

Ćwiczenie 7

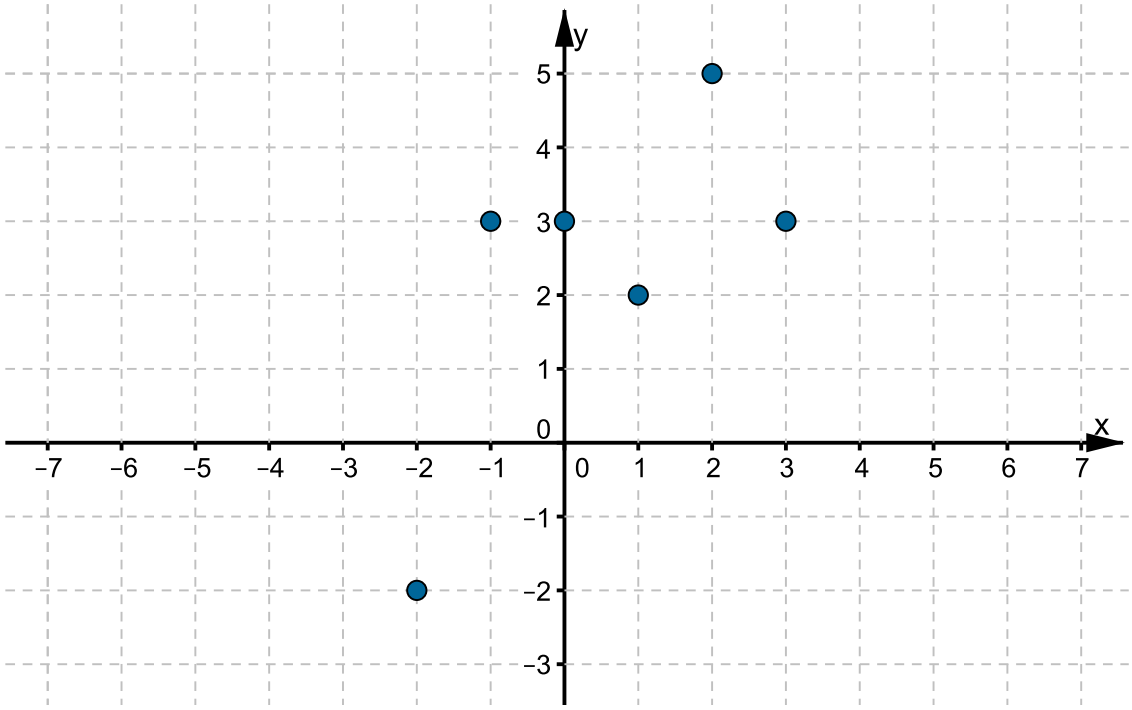
Funkcja s każdej liczbie dwucyfrowej przypisuje sumę cyfry dziesiątek i podwojonej cyfry jedności.

a. Oblicz $s(37)$.

b. Zapisz w tabelce wartości funkcji s dla argumentów większych od 94.

Ćwiczenie 8

Na rysunku przedstawiony jest wykres funkcji f, określonej na zbiorze $\{-2, -1, 0, 1, 2, 3\}$.



Oceń, które równości są prawdziwe.

- [ ] $f(0) + f(1) = f(2)$
- [ ] $f(-2) + f(0) + f(2) + 1 = f(-1) + f(1) + f(3)$
- [ ] $f(-1) + f(0) = 6$
- [ ] $f(-2) + f(2) = 0$

Ćwiczenie 9

Czy dla funkcji określonej wzorem $f(x) = 2x^2 - x + 3$ podane równości są prawdziwe?

- [ ] $f(1) + f(2) = 10$
- [ ] $f(3) = f(-3)$
- [ ] $f(-1) = 0$
- [ ] $f(0) = 3$

Ćwiczenie 10

W klasie jest 31 uczniów. Każdemu z nich na zakończenie roku szkolnego została wystawiona pozytywna ocena z matematyki. Uzasadnij, że wśród uczniów jest co najmniej siedmiu takich, którzy na zakończenie roku szkolnego uzyskali taką samą ocenę z matematyki.

Ćwiczenie 11

Graniastosłup prawidłowy ma w podstawie wielokąt o n wierzchołkach $(n \geq 3)$. Oznaczmy

- przez $w(n)$ liczbę wszystkich wierzchołków tego graniastosłupa
- przez $k(n)$ liczbę wszystkich krawędzi tego graniastosłupa
- przez $s(n)$ liczbę wszystkich ścian tego graniastosłupa

a. Wyznacz: $w(3)$, $k(4)$, $\mathrm{s}(5)$.

b. Wyznacz: $w(31)$, $k(28)$, $\mathrm{s}(17)$.

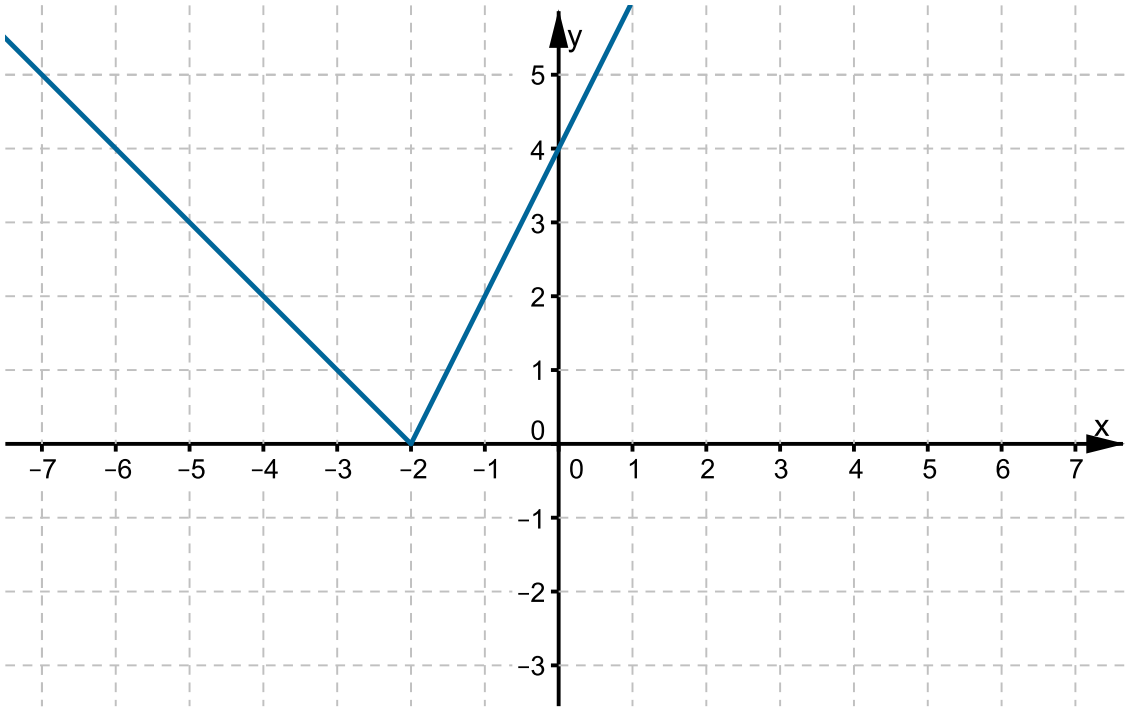
c. Dla ustalonej liczby naturalnej $\mathrm{n} \geq 3$ podaj wzory funkcji: $\mathrm{w}(n)$, $\mathrm{k}(n)$, $\mathrm{s}(n)$.

d. Wykaż, że dla dowolnej liczby naturalnej $n \geq 3$ prawdziwa jest równość $w(n) + s(n) - k(n) = 2$.

Zadania

Ćwiczenie 1

Na rysunku przedstawiono wykres funkcji f.

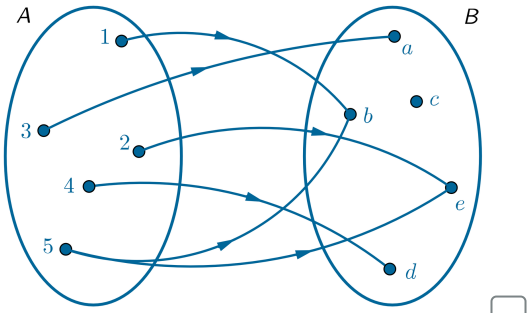


Dla argumentu 0 funkcja przyjmuje wartość

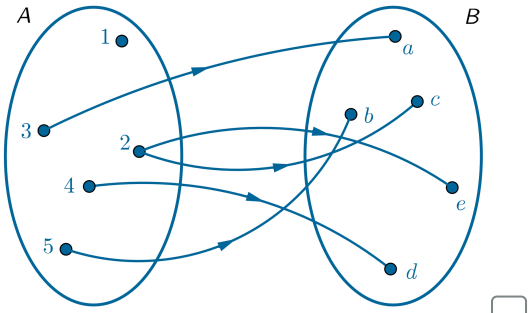
- [ ] 4
- [ ] -2
- [ ] 0
- [ ] 2

Ćwiczenie 2

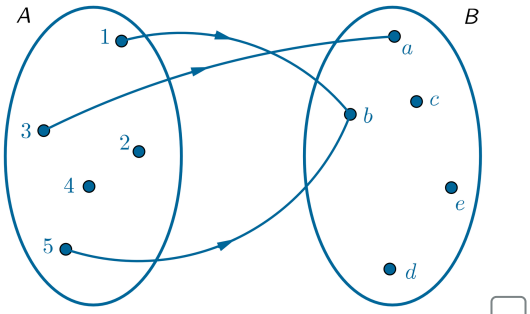
Wybierz graf przedstawiający funkcję, której dziedziną jest zbiór A i przeciwdziedziną zbiór B.



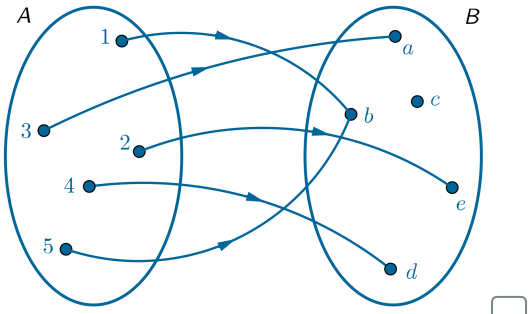
☐



☐



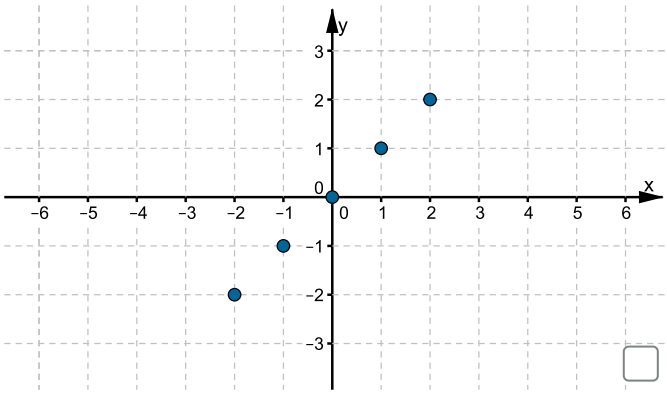
☐

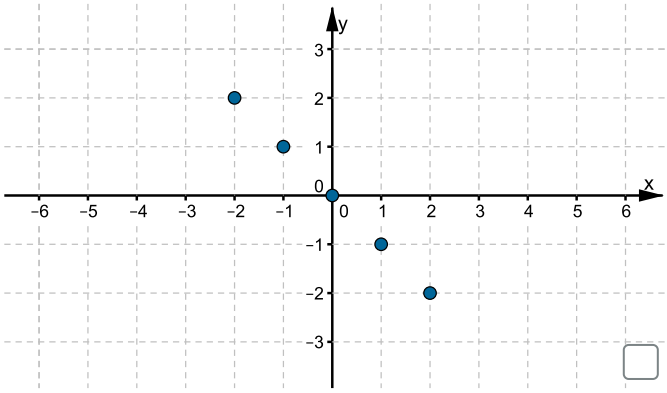


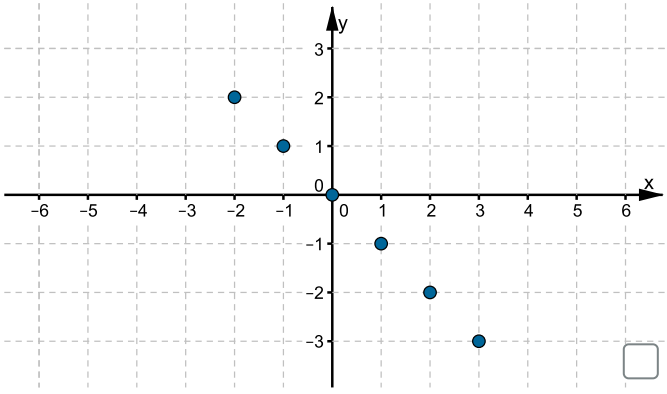
☐

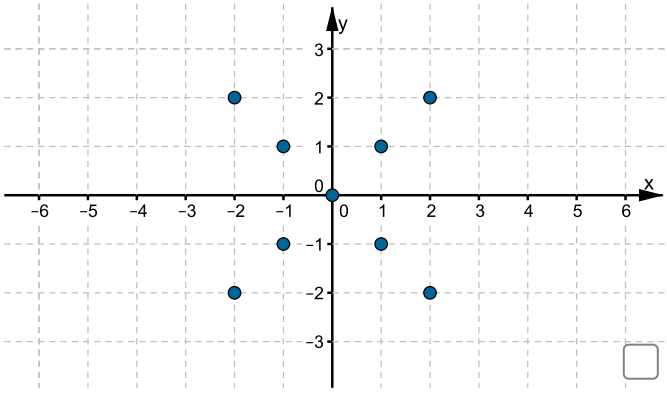
Ćwiczenie 3

Funkcja f określona na zbiorze $\{-2, -1, 0, 1, 2\}$ każdemu argumentowi przyporządkowuje liczbę do niego przeciwną. Na którym rysunku przedstawiony jest wykres funkcji f?









Ćwiczenie 4

Funkcja f każdej liczbie ze zbioru $\{20,\ 31,\ 44,\ 52,\ 67\}$ przypisuje sumę jej cyfr. Wskaż tabelkę, która ilustruje to przyporządkowanie.

- ◯
- ◯
- ◯
- ◯

Ćwiczenie 5

Funkcja f określona wzorem $f(a) = 4a$ dla $a > 0$ opisuje

- ◯ obwód kwadratu o boku długości a
- ◯ długość przekątnej kwadratu o boku długości a
- ◯ pole kwadratu o boku długości a
- ◯ długość boku kwadratu o przekątnej długości a

Ćwiczenie 6

Funkcja f określona na zbiorze liczb całkowitych dodatnich każdemu argumentowi x przyporządkowuje największą wielokrotność liczby 3, która jest nie większa od x. Liczba $f(101)$ jest równa

- 99
- 102
- 3
- 33

Ćwiczenie 7

Funkcja g jest określona wzorem $g(x) = \begin{cases} 6-2x & \text{dla} \quad x \leq 2 \\ x+5 & \text{dla} \quad x > 2 \end{cases}$. Wynika z tego, że liczba $g(2)$ jest równa

- 5
- 7
- 4
- 2

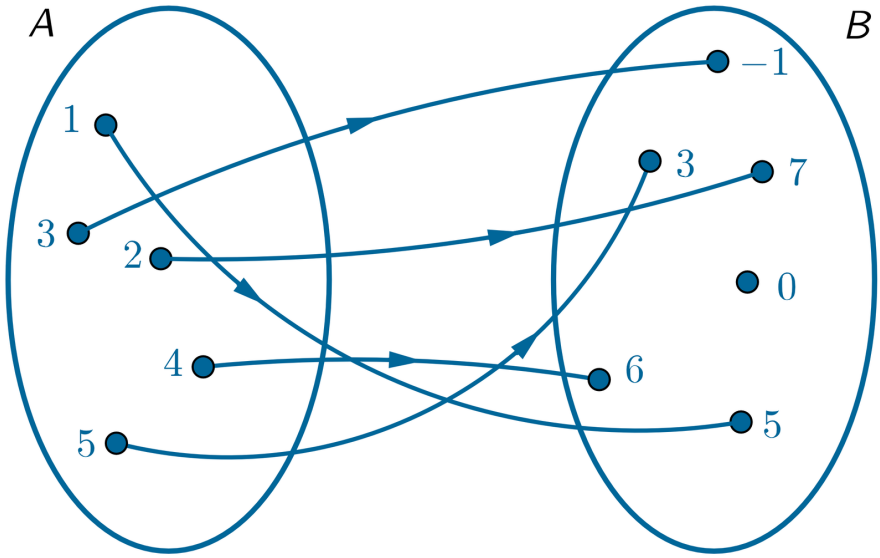
Ćwiczenie 8

Ponumerujmy kolejne liczby naturalne podzielne przez 3, zaczynając od 30, a kończąc na 999. Wtedy liczba 900 jest zapisana na miejscu o numerze

- ◯ 291
- ◯ 299
- ◯ 300
- ◯ 290

Ćwiczenie 9

Poniższy graf opisuje funkcję f ze zbioru A w zbiór B. Odczytaj $f(3)$.



Ćwiczenie 10

Funkcja g jest określona za pomocą tabeli. Odczytaj najmniejszą wartość funkcji g.

Funkcja g

x	-4	-3	-2	-1	0	1
$g(x)$	0	1	2	-1	1	0

Ćwiczenie 11

Dziedziną funkcji f określonej wzorem $f(x)=\frac{x}{x^2-3}$ jest zbiór $\left\{-\sqrt{2}, 0, \frac{1}{2},\ 1,\ 2,\ \sqrt{5}\right\}$. Dla każdego z argumentów funkcji f oblicz wartość tej funkcji.

Ćwiczenie 12

Funkcja f każdej dodatniej liczbie całkowitej mniejszej od 6 przyporządkowuje 20% tej liczby. Przedstaw tę funkcję w postaci grafu.

Ćwiczenie 13

Funkcja f jest określona dla każdej liczby całkowitej dodatniej n wzorem $f(n)=-2n+5$. Wypisz wartości, które funkcja f przyjmuje dla czterech najmniejszych argumentów.

Ćwiczenie 14

Rozpatrzmy wszystkie liczby dwucyfrowe, których suma cyfr jest równa 8. Funkcja f każdej z tych liczb przyporządkowuje iloczyn jej cyfr. Przedstaw funkcję f za pomocą tabeli.

Ćwiczenie 15

Funkcja f każdej liczbie dwucyfrowej mniejszej od 26 przyporządkowuje liczbę jej dzielników naturalnych. Przedstaw tę funkcję za pomocą tabeli. Podaj

a. wszystkie argumenty x, dla których $f(x) = 2$

b. wszystkie argumenty x, dla których $f(x) = 3$

c. największą wartość funkcji f

Zadania generatorowe

- Ćwiczenie 1
- Ćwiczenie 2
- Ćwiczenie 3
- Ćwiczenie 4
- Ćwiczenie 5
- Ćwiczenie 6
- Ćwiczenie 7
- Ćwiczenie 8
- Ćwiczenie 9
- Ćwiczenie 10
- Ćwiczenie 11

Wprowadzenie

Analizując zależności funkcyjne między różnymi wielkościami, spotykamy się z przypadkami, w których należy dokładnie ustalić, dla jakich argumentów określamy funkcję. Taką czynność nazywamy wyznaczaniem dziedziny funkcji.

Przykład 1

Rozważmy pole P kwadratu jako funkcję długości jego boku x. Funkcję tę zapisujemy wzorem $P(x) = x^2$.
Do wzoru funkcji P można podstawiać dowolną liczbę rzeczywistą x, jednak dziedziną tej funkcji nie jest zbiór wszystkich liczb rzeczywistych, tylko zbiór liczb dodatnich, bo tylko takie liczby mogą być długościami boków.
Z warunków zadania wynika, że dziedziną D_P funkcji P jest zbiór wszystkich liczb dodatnich.

Zasób interaktywny dostępny pod adresem https://zpe.gov.pl/a/DTEryxZ8O

Przykład 2

W trójkącie ABC dane są długości boków $|AC| = 7$ i $|BC| = 8$. Oznaczmy $|AB| = c$.
Funkcja L przyporządkowuje długości boku c obwód trójkąta ABC. Wówczas $L(c) = 7 + 8 + c = 15 + c$, przy czym funkcja L jest określona dla tych c, dla których istnieje trójkąt ABC.
Z nierówności trójkąta wiemy, że odcinki o długościach 7, 8, c są bokami trójkąta wtedy i tylko wtedy, gdy spełnione są warunki:
$c > 0$, $c + 7 > 8$, $7 + 8 > c$ oraz $c + 8 > 7$.
Stąd $c > 1$ i $c < 15$. A zatem dziedziną D_L funkcji L jest przedział $(1,\ 15)$.

Zasób interaktywny dostępny pod adresem https://zpe.gov.pl/a/DTEryxZ8O

Przykład 3

Rozważmy wszystkie prostokąty, których obwód jest równy 24. Jeżeli przez a oznaczymy długość jednego z boków takiego prostokąta, to sąsiedni bok ma długość $12 - a$, zatem pole P prostokąta wyraża się wzorem $P(a) = a(12 - a) = -a^2 + 12a$. Taki prostokąt istnieje, gdy $a > 0$ i $12 - a > 0$. Wobec tego dziedziną D funkcji P jest przedział $(0, 12)$.

Zasób interaktywny dostępny pod adresem https://zpe.gov.pl/a/DTEryxZ8O

Przykład 4

Rozważmy wszystkie pary dodatnich liczb rzeczywistych x i y, których suma jest dwa razy mniejsza od ich iloczynu. Zapiszemy liczbę y w zależności od x.
Warunki zadania zapisujemy w postaci
$x > 0$ i $y > 0$ i $xy = 2(x + y)$.
Z równości $xy = 2(x + y)$ wyznaczamy y

$$xy - 2y = 2x$$

$$y(x - 2) = 2x$$

Zauważmy, że dla $x = 2$ otrzymujemy równość sprzeczną $0 = 4$. A zatem dla $x \neq 2$ mamy $y = \frac{2x}{x-2}$. Wynika z tego, że liczba dodatnia y jest ilorazem liczby dodatniej $2x$ i liczby $x - 2$, więc $x - 2 > 0$, czyli $x > 2$.
Zatem funkcję y zapisujemy wzorem

$$y(x) = \frac{2x}{x-2}$$

a dziedziną D tej funkcji jest przedział

$$(2, +\infty)$$

Zasób interaktywny dostępny pod adresem https://zpe.gov.pl/a/DTEryxZ8O

Ćwiczenie 1

Znajdź wszystkie pary dodatnich liczb całkowitych x i y, których suma jest dwa razy mniejsza od ich iloczynu.

Przykład 5

Rozważmy wszystkie trójkąty prostokątne o przeciwprostokątnej długości 5. Na przyprostokątnych takiego trójkąta zbudujemy kwadraty o polach x i y. Wyznaczymy długość boku kwadratu o polu y w zależności od x.
Wiemy, że $x > 0$ i $y > 0$. Z twierdzenia Pitagorasa wynika, że $x + y = 5^2$, czyli $y = 25 - x$.
Zatem długość d boku kwadratu o polu y jest funkcją zmiennej x, postaci $d(x) = \sqrt{25 - x}$, a dziedziną D_d tej funkcji jest przedział $(0,\ 25)$.

Zasób interaktywny dostępny pod adresem https://zpe.gov.pl/a/DTEryxZ8O

Przykład 6

Rozważmy wszystkie graniastosłupy prawidłowe czworokątne, których suma długości wszystkich krawędzi jest równa 16. Wyznaczymy objętość V takiego graniastosłupa w zależności od długości a krawędzi jego podstawy.
Oznaczmy długość krawędzi bocznej tego graniastosłupa przez b. Z warunków zadania mamy $a > 0$ i $b > 0$ oraz $8a + 4b = 16$, skąd $b = 4 - 2a$, zatem $a < 2$.
Wobec tego objętość V graniastosłupa jest funkcją zmiennej a postaci

$$V(a) = a^2(4 - 2a) = -2a^3 + 4a^2$$

a dziedziną funkcji V jest przedział $(0,\ 2)$.

Zasób interaktywny dostępny pod adresem https://zpe.gov.pl/a/DTEryxZ8O

Przykład 7

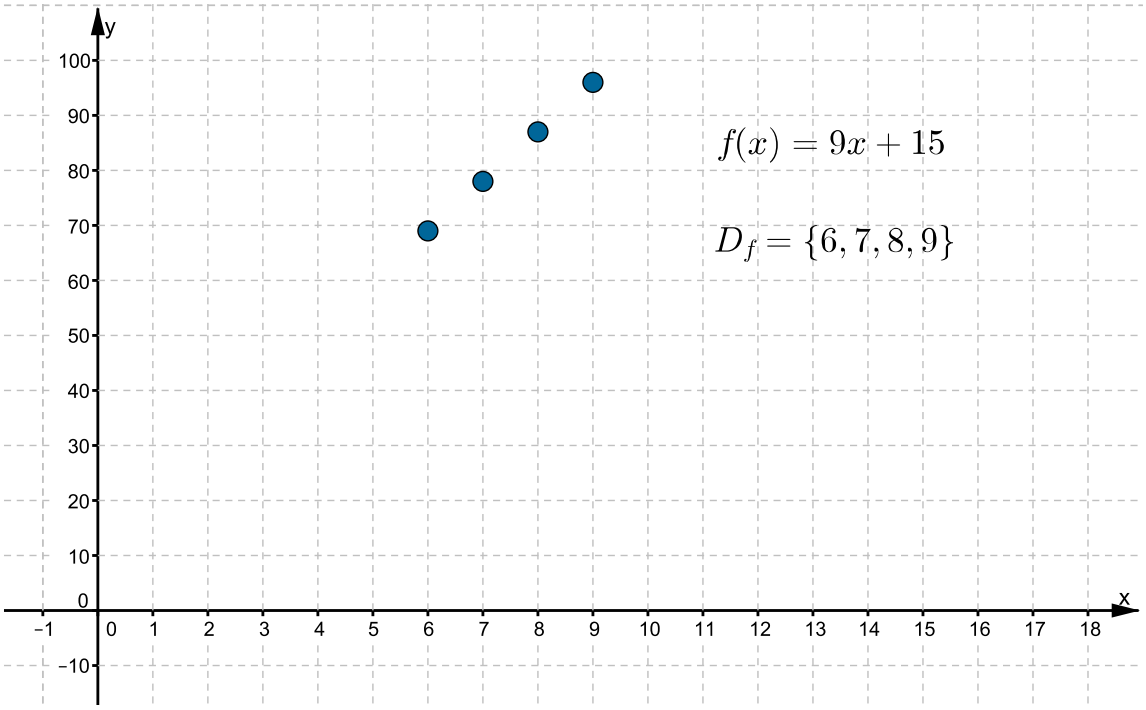
Rozważmy wszystkie liczby dwucyfrowe, których suma cyfr jest równa 15, a cyfrą dziesiątek jest x. Zapiszemy taką liczbę dwucyfrową wzorem zależnym od x.
Z warunków zadania wynika, że cyfrą jedności takiej liczby jest $15 - x$, a tą liczbą dwucyfrową jest $10x + (15 - x)$.
Zauważmy, że powyższy wzór określa liczbę dwucyfrową wtedy i tylko wtedy, gdy spełnione są następujące dwa warunki:

- cyfra dziesiątek: x jest jedną z liczb: $1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5,\ 6,\ 7,\ 8,\ 9$,
- cyfra jedności: $15-x$ jest jedną z liczb: $0,\ 1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5,\ 6,\ 7,\ 8,\ 9$.

Wobec tego x należy do zbioru $\{6,\ 7,\ 8,\ 9\}$.
Zapisując tę liczbę dwucyfrową jako funkcję f zmiennej x, otrzymujemy

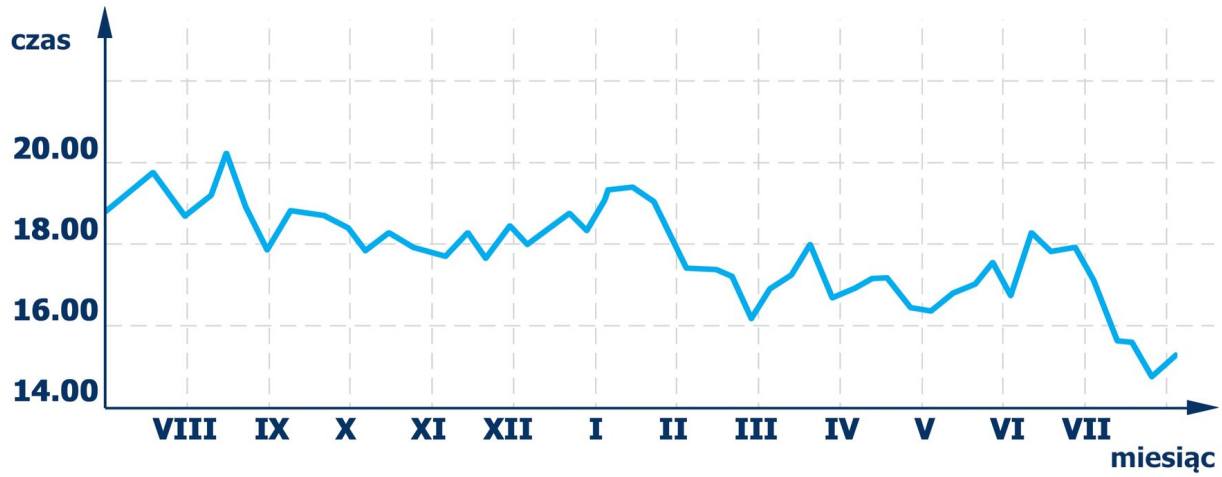
$$f(x) = 10x + (15 - x) = 9x + 15$$

Dziedziną funkcji f jest zbiór czteroelementowy $\{6,\ 7,\ 8,\ 9\}$.



Przykład 8

Na rysunku przedstawiony jest wykres zmian ceny akcji pewnej spółki w ciągu kilku miesięcy 2013 i 2014 r. Na podstawie wykresu można odczytać cenę akcji w każdym miesiącu, w którym została ona zapisana. Jednak przebieg tej funkcji opisującej te zmiany zmienia się w czasie rzeczywistym. Nie jesteśmy w stanie wyznaczyć wartości akcji w kolejnych miesiącach.



Ćwiczenie 2

Zapoznaj się z najprostszą metodą przewidywania cen akcji na giełdzie.

Ćwiczenie 3

Zapoznaj się ze stroną internetową zawierającą informacje o notowaniu spółek giełdowych. Wybierz jedną z nich i śledź zmiany jej ceny przez kilka dni. Staraj się codziennie przewidzieć cenę spółki i oceń trafność swoich przewidywań.

Dziedzina

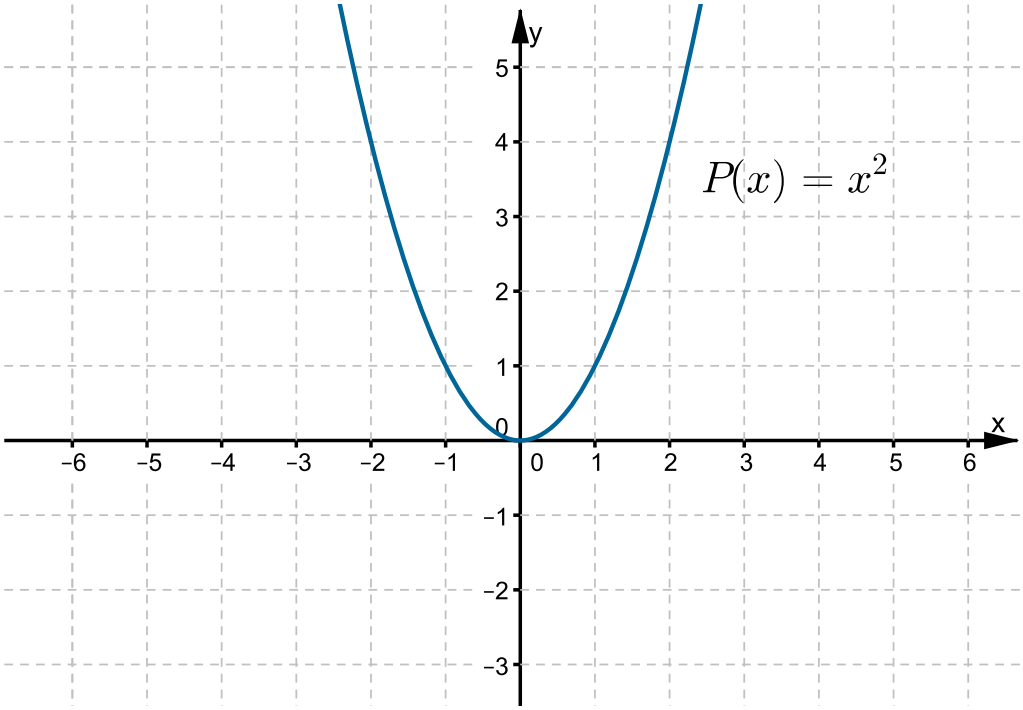
Definicja: Dziedzina

Zbiór tych wszystkich liczb rzeczywistych, dla których wzór funkcji ma sens liczbowy nazywamy dziedziną funkcji.

Przyjmujemy domyślnie, że jeżeli w zadaniu pojawi się tylko wzór funkcji, to funkcja określona jest w całej swojej dziedzinie.

Przykład 1

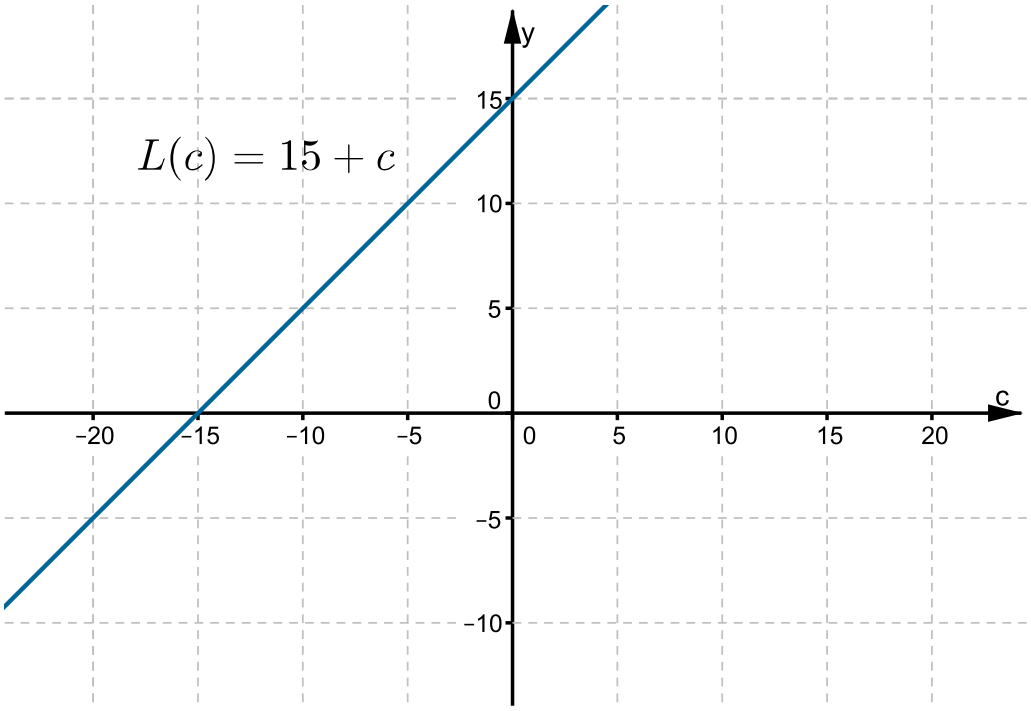
Wyznacz dziedzinę funkcji $P(x) = x^2$.



Dziedziną funkcji P jest zbiór liczb rzeczywistych, co zapisujemy: $D_P = R$.

Przykład 2

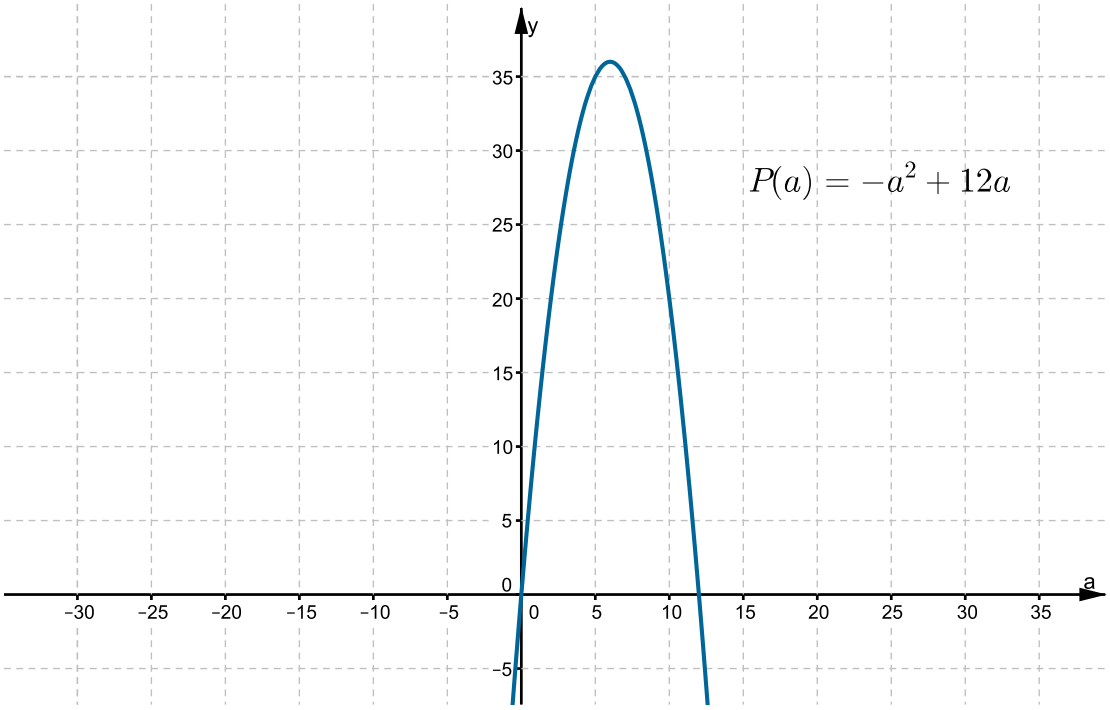
Wyznacz dziedzinę funkcji $L(c) = 15 + c$.



Dziedziną funkcji L jest zbiór liczb rzeczywistych, co zapisujemy: $D_L = R$.

Przykład 3

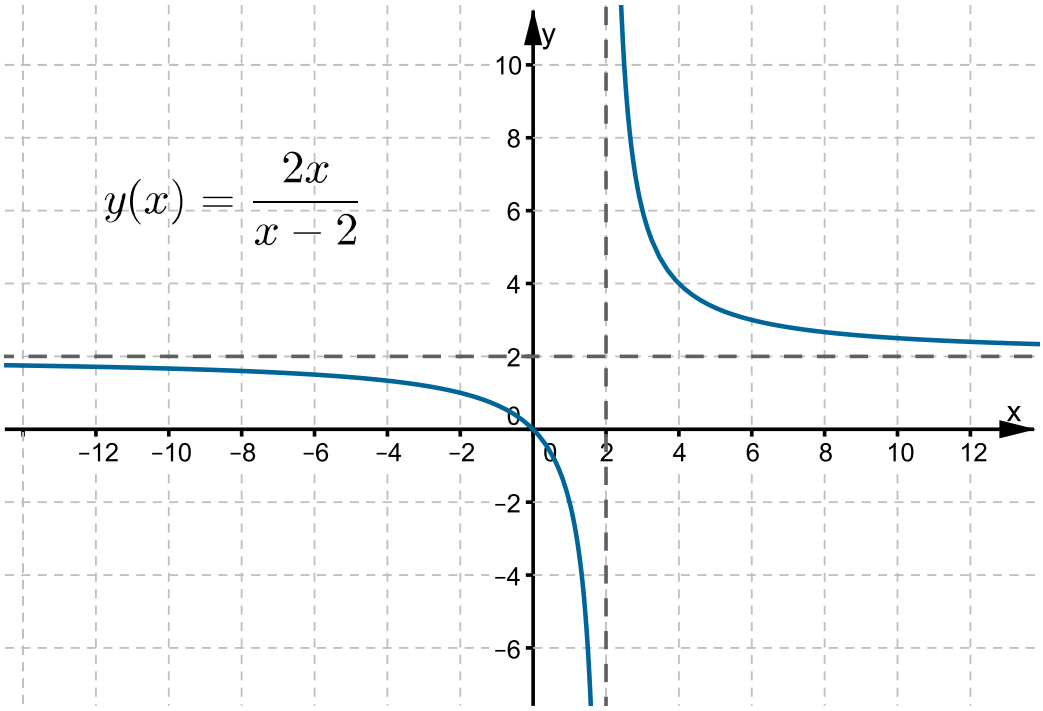
Wyznacz dziedzinę funkcji $P(a) = -a^2 + 12a$.



Dziedziną funkcji P jest zbiór liczb rzeczywistych, co zapisujemy: $D_P = R$.

Przykład 4

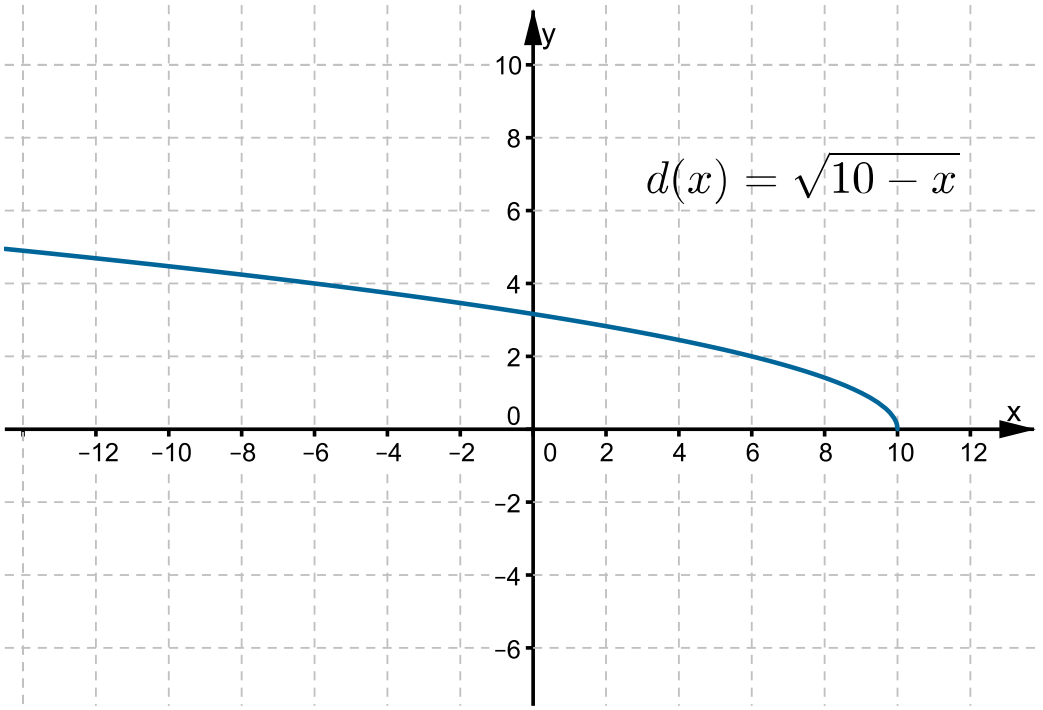
Wyznacz dziedzinę funkcji $y(x) = \frac{2x}{x-2}$.



Dzielenie przez zero jest niewykonalne, zatem $x - 2 \neq 0$. Dziedziną funkcji y jest zbiór liczb rzeczywistych różnych od 2, co zapisujemy: $D_y = R \setminus \{2\}$.

Przykład 5

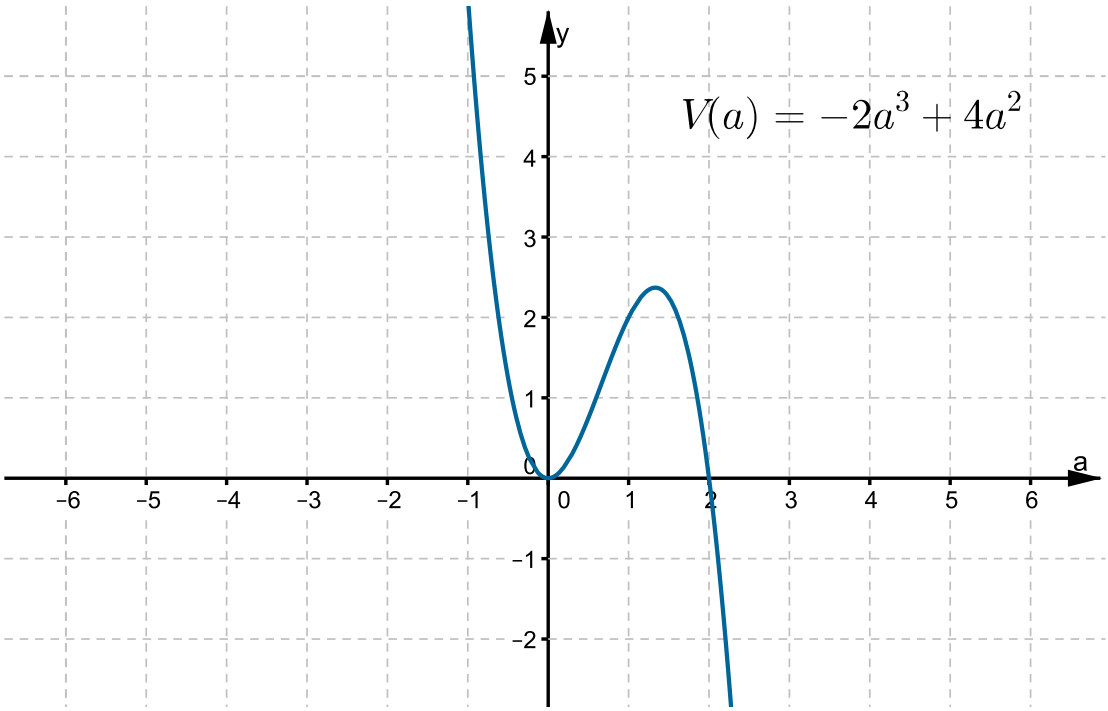
Wyznacz dziedzinę funkcji $d(x) = \sqrt{10 - x}$



Pierwiastek kwadratowy określony jest dla liczb nieujemnych, zatem $10 - x \geq 0$. Dziedziną funkcji d jest zbiór $(-\infty; 1\,0\rangle$, co zapisujemy: $D_d = (-\infty; 1\,0\rangle$.

Przykład 6

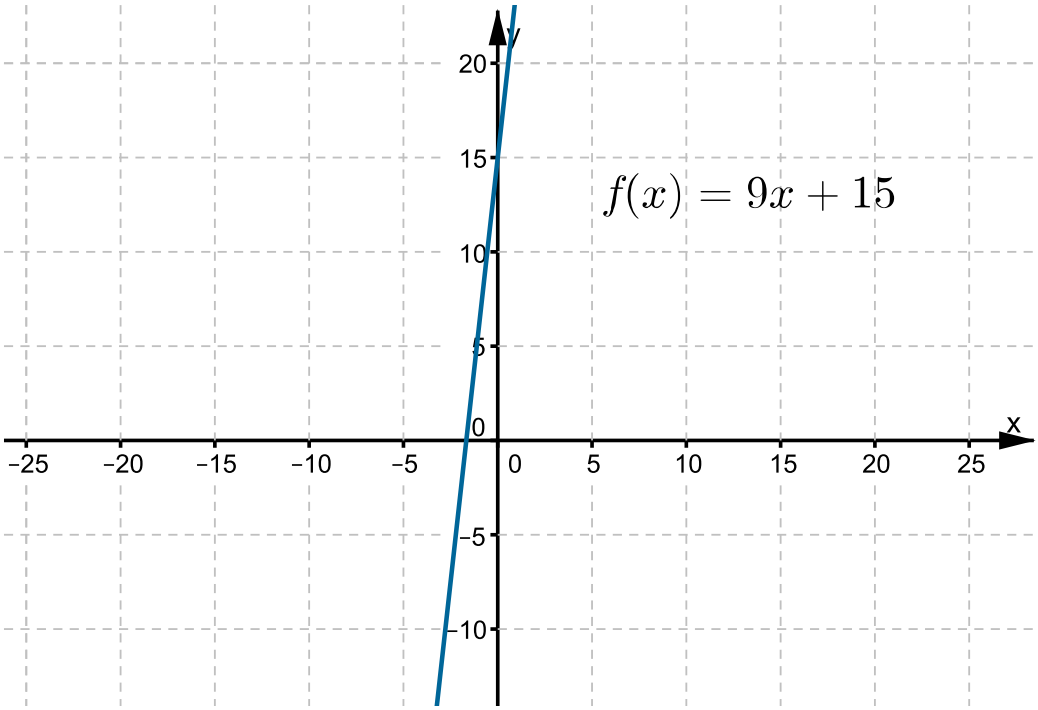
Wyznacz dziedzinę funkcji $V(a) = -2a^3 + 4a^2$.



Dziedziną funkcji V jest zbiór liczb rzeczywistych, co zapisujemy: $D_V = R$.

Przykład 7

Wyznacz dziedzinę funkcji $f(x) = 9x + 15$.



Dziedziną funkcji f jest zbiór liczb rzeczywistych, co zapisujemy: $D_f = R$.

Ćwiczenie 1

Sprawdź, czy podana liczba należy do dziedziny funkcji $f(x) = \frac{x}{x+3} + 1$.

- [ ] 0
- [ ] -3
- [ ] 2

Ćwiczenie 2

Sprawdź, czy podana liczba należy do dziedziny funkcji $g(x) = \frac{x}{x^2+3}$.

- [ ] 0
- [ ] -3
- [ ] $-\sqrt{3}$

Ćwiczenie 3

Sprawdź, czy podana liczba należy do dziedziny funkcji $f(x) = \sqrt{x+2} - 3$.

- [ ] -2
- [ ] 3
- [ ] -4

Ćwiczenie 4

Wyznacz dziedzinę funkcji $k(x) = \frac{x+2}{x-3}$.

Ćwiczenie 5

Wyznacz dziedzinę funkcji $f(x) = \sqrt{x-5}$.

Ćwiczenie 6

Wyznacz dziedzinę funkcji $f(x) = \frac{3}{(x+1)(2x-6)}$.

Ćwiczenie 7

Znajdź dziedzinę funkcji $f(x) = \frac{x-3}{x^2-4x}$.

Ćwiczenie 8

Wyznacz dziedzinę funkcji $t(x) = \frac{3}{\sqrt{-1-x}}$.

Ćwiczenie 9

Ustal dziedzinę funkcji $f(x) = \sqrt{2-x} + \frac{x}{x+7}$.

Ćwiczenie 10

Bok kwadratu ABCD ma długość 2. Punkt E leży na boku BC, przy czym długość odcinka CE jest równa x. Punkt F leży na boku CD i $|\mathrm{CF}| = |\mathrm{CE}|$. Zapisz pole P trójkąta AEF jako funkcję x. Ustal dziedzinę tej funkcji.

Zadania

Ćwiczenie 1

Wskaż funkcję, której dziedziną jest zbiór liczb rzeczywistych.

- $f(x) = \frac{3x+7}{x}$
- $f\left(x\right) = \frac{x+\sqrt{3}}{2}$
- $f(x) = \frac{1}{x+2}$
- $f(x) = \frac{5}{3-x}$

Ćwiczenie 2

Liczba 1 należy do dziedziny funkcji

- $f(x) = \frac{4}{x+1}$
- $f\left(x\right) = \frac{3}{x^2-1}$
- $f(x) = \frac{2}{x-1}$
- $f(x) = \frac{1}{3-3x}$

Ćwiczenie 3

Dziedziną funkcji $f\left(x\right) = \sqrt{x+2}$ jest przedział

- ◯ $\langle 2, +\infty)$
- ◯ $\langle -2, +\infty)$
- ◯ $(-\infty, -2\rangle$
- ◯ $(-\infty, 2\rangle$

Ćwiczenie 4

Połącz w pary funkcje i ich dziedziny.

$f(x) = x^2 + \frac{1}{x}$	$x \neq -2$
$f(x) = \frac{1}{\sqrt{x+4}}$	$x \neq -\frac{3}{2}$
$f(x) = \frac{1}{x+2}$	$x \neq 0$
$f(x) = \sqrt[3]{2x+4}$	$x > -4$
$f(x) = \frac{2x}{2x+3}$	$x \geq -3$
$f(x) = \sqrt{x+3}$	$\mathbb{R}$

Ćwiczenie 5

Wskaż funkcję, do dziedziny której należy każda liczba ze zbioru $\{-1,\ 0,\ 1,\ 2\}$.

- $f(x) = \frac{x}{x-2}$
- $f(x) = \frac{x-1}{x+2}$
- $f(x) = \frac{x-2}{x}$
- $f(x) = \frac{x+1}{x-1}$

Ćwiczenie 6

Do dziedziny funkcji $f(x) = \frac{2}{\sqrt{4-x}}$ należy liczba

- 5
- 4
- 3
- 6

Ćwiczenie 7

Wskaż funkcję, której dziedziną nie jest zbiór wszystkich liczb rzeczywistych.

- $f(x)=\frac{x^2+x}{-x^2-3}$
- $f(x)=\frac{x+2}{\sqrt{x^2+4}}$
- $f(x)=\frac{x^2-1}{x^2+1}$
- $f(x)=\frac{x^2-5x}{x^2-3}$

Ćwiczenie 8

Do dziedziny funkcji $f(x)=\frac{x}{(x-1)(x+2)(x-3)}$ należy liczba

- 3
- -1
- 1
- -2

Ćwiczenie 9

Rozważmy wszystkie graniastosłupy prawidłowe trójkątne, których suma długości wszystkich krawędzi jest równa 18. Długość krawędzi podstawy takiego graniastosłupa może być dowolną liczbą rzeczywistą z przedziału

- ◯ $\langle 0,\ 2\rangle$
- ◯ $(2,\ 6)$
- ◯ $(0,\ 3)$
- ◯ $(1,\ 4)$

Ćwiczenie 10

Wyznacz dziedzinę funkcji.

a. $f(x) = 2x + 5$

b. $g\big(x\big) = x^2 - 5$

c. $h(x) = x^3 - 2x + 7$

d. $k(x) = 5$

Ćwiczenie 11

Wypisz wszystkie liczby, które nie należą do dziedziny funkcji.

a. $f\big(x\big) = \frac{2x}{x+7}$

b. $g\big(x\big) = \frac{x-1}{1-x}$

c. $h\big(x\big) = \frac{2x+1}{3x-9}$

d. $k\big(x\big) = \frac{3x-11}{20x+4}$

Ćwiczenie 12

Ustal dziedzinę funkcji.

a. $f\Big(x\Big) = \frac{7}{(x-2)(x+2)}$

b. $h\Big(x\Big) = \frac{x-3}{x(3-x)}$

c. $g\Big(x\Big) = \frac{x^2-1}{(x-1)(x+4)}$

d. $k\Big(x\Big) = \frac{x^3-5x^2}{x(2x+4)(x-1)}$

e. $m\Big(x\Big) = \frac{5}{x^2-9}$

f. $p\Big(x\Big) = \frac{2x+5}{x^2+6}$

g. $t\Big(x\Big) = \frac{3-6x}{x^2+2x+1}$

h. $u\Big(x\Big) = \frac{8x-9}{x^2-4x+4}$

Ćwiczenie 13

Wypisz wszystkie dodatnie liczby całkowite, które należą do dziedziny funkcji

a. $f\Big(x\Big) = \sqrt{5-x}$

b. $g\Big(x\Big) = \sqrt{18-2x}$

c. $h\Big(x\Big) = \sqrt{7-3x}$

d. $k\Big(x\Big) = \sqrt{24-5x}$

Ćwiczenie 14

Wyznacz dziedzinę funkcji.

a. $f(x) = \frac{2}{\sqrt{x+3}}$

b. $g(x) = \frac{\sqrt{4-2x}}{10x+10}$

c. $h(x) = \frac{x}{15-3x} + \sqrt{x-4}$

d. $t(x) = \frac{\sqrt{16-2x}}{x+1} + \frac{\sqrt{7x+21}}{x-5}$

Ćwiczenie 15

Rozpatrzmy wszystkie trójkąty, których obwód jest równy 8. Oznaczmy wierzchołki takiego trójkąta przez A, B, C. Przyjmijmy, że AB jest najkrótszym bokiem $|\mathrm{AB}| = 2$ i $|\mathrm{AC}| = x$. Zapisz długość a boku BC w zależności od x. Wyznacz dziedzinę otrzymanej funkcji a.

Ćwiczenie 16

Bok trójkąta równobocznego ABC ma długość 6. Punkty D i E leżą na bokach odpowiednio BC i AC w tej samej odległości x od wierzchołka C. Zapisz pole P trapezu ABDE jako funkcję x. Ustal dziedzinę tej funkcji.

Ćwiczenie 17

Rozważmy wszystkie graniastosłupy prawidłowe czworokątne o objętości 100. Zakładając, że krawędź podstawy takiego graniastosłupa jest równa a, zapisz jego pole powierzchni całkowitej P w zależności od a. Wyznacz dziedzinę funkcji P.

Ćwiczenie 18

Rozpatrzmy wszystkie trójkąty prostokątne, których pole jest równe 18. Przyjmijmy, że długość jednej z przyprostokątnych takiego trójkąta jest równa b. Zapisz długość c przeciwprostokątnej trójkąta w zależności od b. Wyznacz dziedzinę funkcji c.

Zadania generatorowe

Ćwiczenie 1

Ćwiczenie 2

Ćwiczenie 3

Ćwiczenie 4

Ćwiczenie 5

Połącz w pary funkcje i ich dziedziny.

$f(x)=\frac{1}{x+2}$	$x>-4$
$f(x)=x^2+\frac{1}{x}$	$x\neq 0$
$f(x)=\frac{2x}{2x+3}$	$\mathbb{R}$
$f(x)=\frac{1}{\sqrt{x+4}}$	$x\neq -\frac{3}{2}$
$f(x)=\sqrt[3]{2x+4}$	$x\geq -3$
$f(x)=\sqrt{x+3}$	$x\neq -2$

Ćwiczenie 6

Ćwiczenie 7

Ćwiczenie 8

Ćwiczenie 9

Ćwiczenie 10

Ćwiczenie 11

Ćwiczenie 12

Ćwiczenie 13

Ćwiczenie 14

Ćwiczenie 15

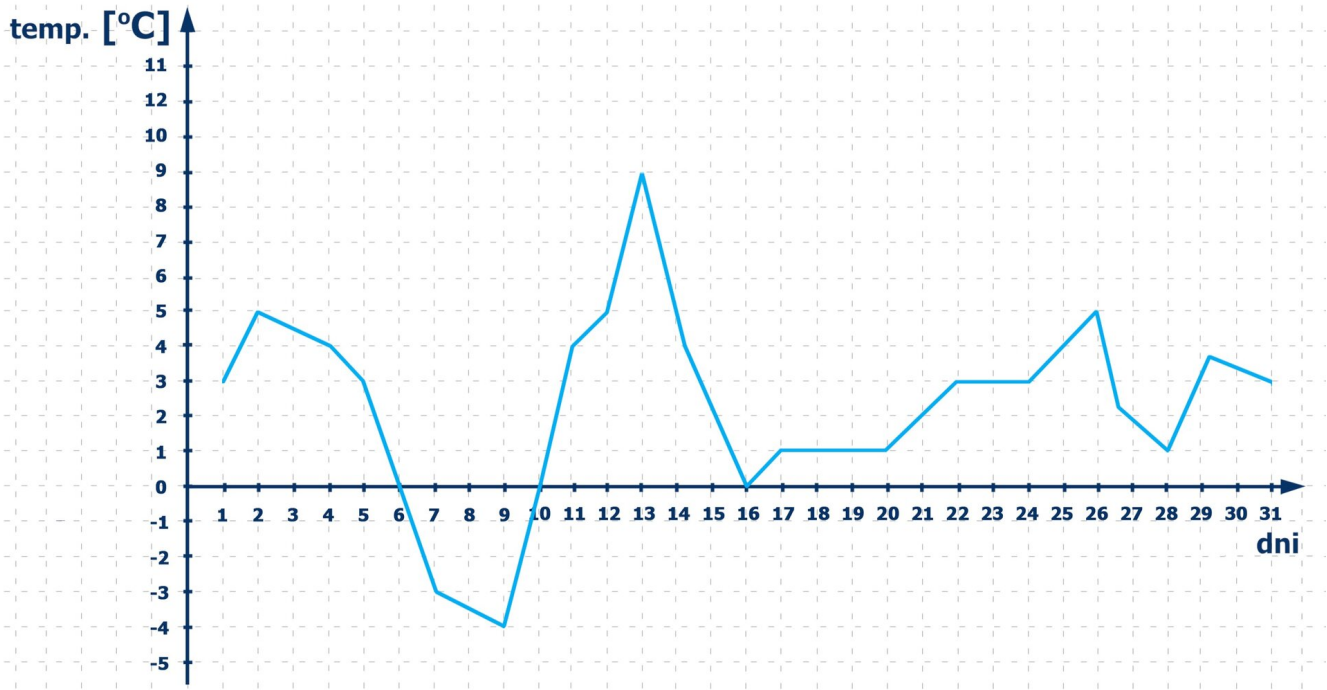
Ćwiczenie 16

Ćwiczenie 17

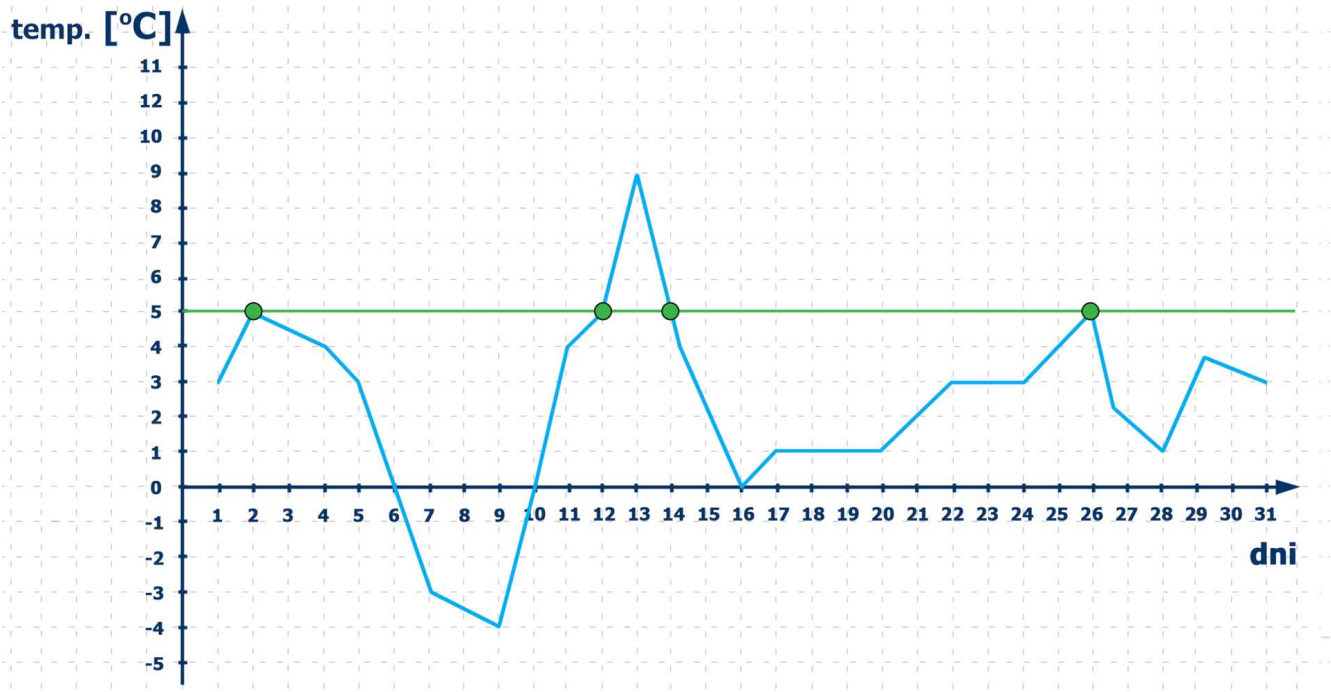
Miejsca zerowe funkcji

Przykład 1

Przyjrzyjmy się wykresowi zmian temperatury powietrza w pewnej miejscowości w marcu.



Z wykresu możemy odczytać, że temperatura powietrza w dniu 5 marca była równa $3^{\circ}C$, natomiast 11 marca wynosiła 4°C. Możemy też zadać pytanie: kiedy temperatura wynosiła 5°C? Z wykresu odczytujemy, że temperaturę 5°C odnotowano czterokrotnie: 2, 12, 14, 26 marca.



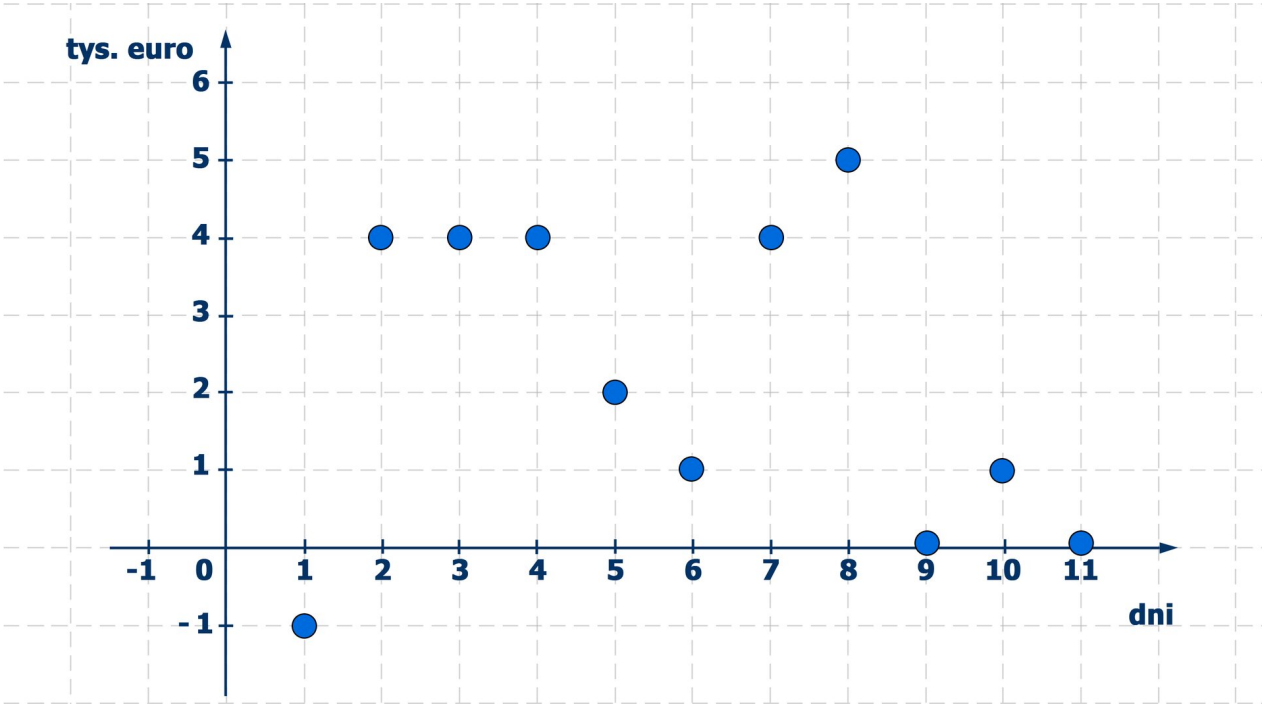
Szczególną wartością temperatury powietrza jest $0^{\circ}C$. W tej temperaturze woda przechodzi ze stanu stałego w ciekły lub na odwrót. Zadajmy sobie pytanie: kiedy w marcu, w tej miejscowości odnotowano temperaturę $0^{\circ}C$? Z wykresu odczytujemy: 6, 10, 16 marca. Przyjmijmy, że rysunek przedstawia wykres pewnej funkcji. Wtedy dla $x = 6,\ x = 10,\ x = 16$ wartości tej funkcji wynoszą 0.

Definicja: Miejsce zerowe funkcji

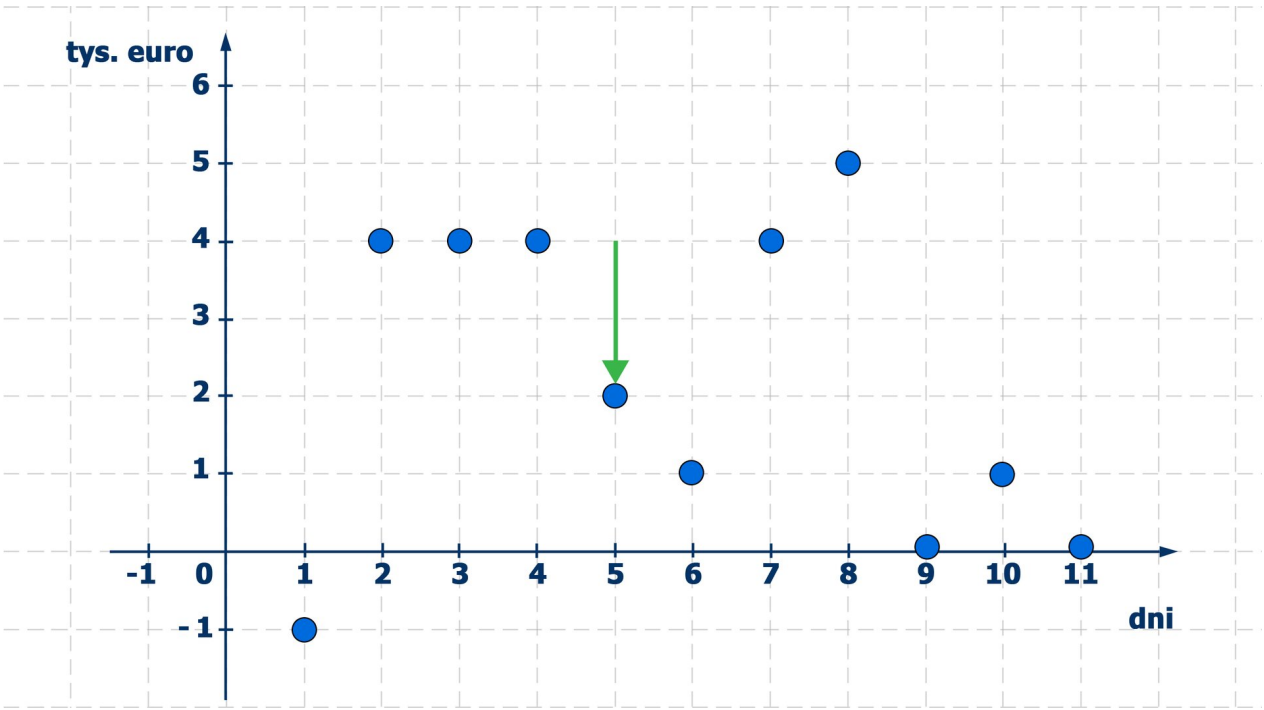
Każdy argument, dla którego funkcja przyjmuje wartość 0 nazywamy miejscem zerowym tej funkcji.

Przykład 2

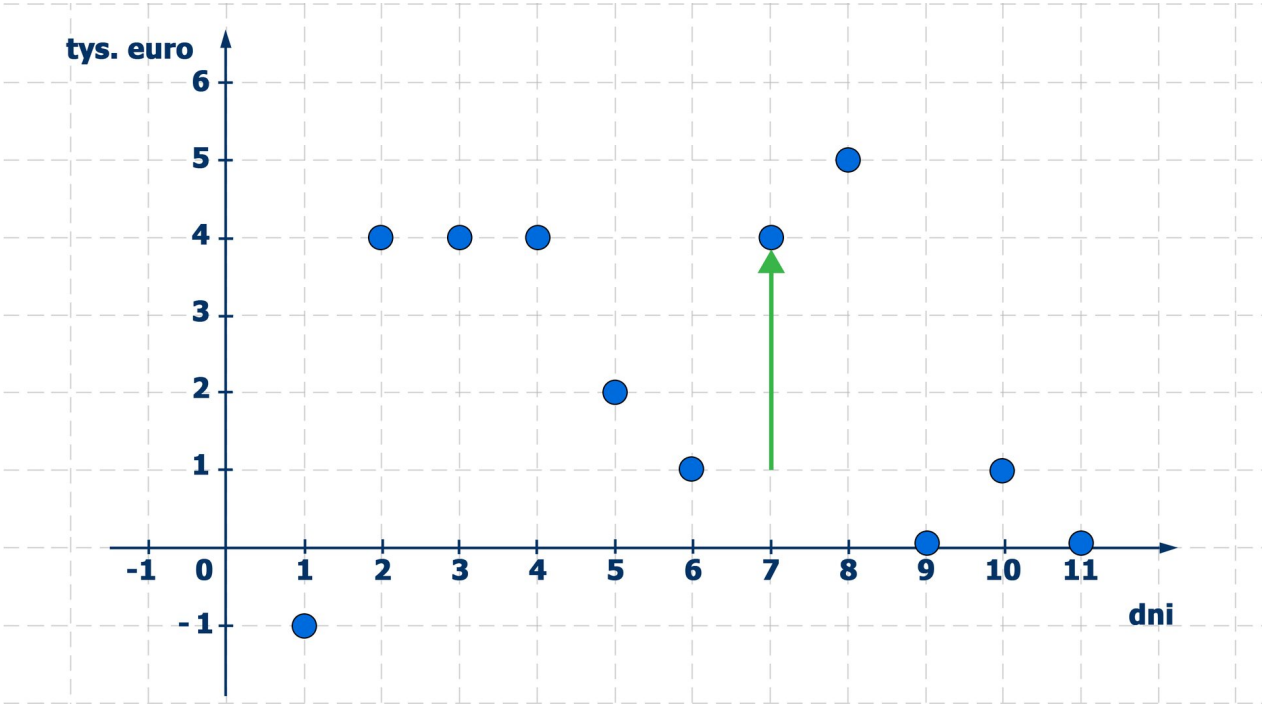
Wykres przedstawia zmiany stanu konta klienta banku w pierwszych jedenastu dniach miesiąca.



Klient zakupił lodówkę za kwotę 2 tys. euro (czyli stan jego konta zmniejszył się o 2 tys. euro w momencie dokonania płatności). Innych zakupów tego dnia już nie zrobił.
Z wykresu odczytujemy, że zakup ten nastąpił 5. dnia miesiąca, gdyż 4. dnia stan konta wynosił 4 tys. euro, a 5 dnia 2 tys. euro, a w żadnym innym dniu stan konta nie był o 2 tys. euro niższy, niż w dniu poprzednim.



Konto klienta zostało zasilone kwotą 3 tys. euro. Którego dnia miesiąca zostało zasilone konto taką kwotą? Z wykresu możemy odczytać, że nastąpiło to w 7. dniu miesiąca.

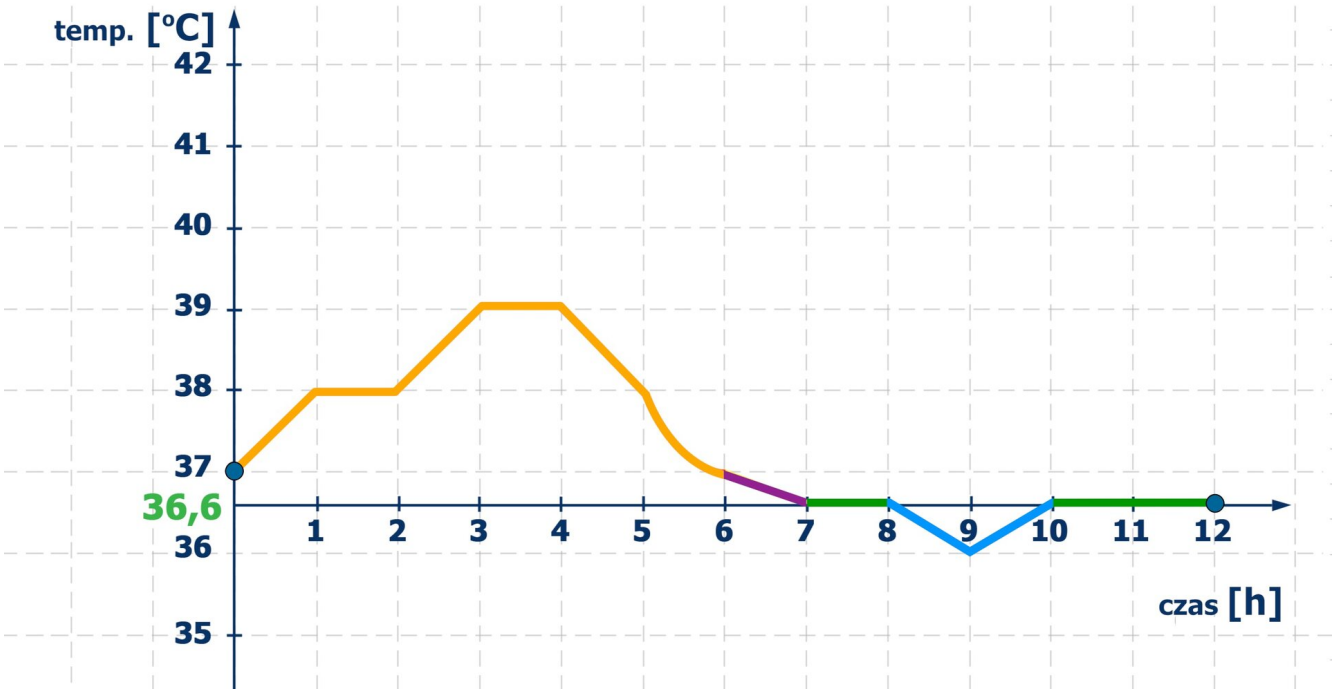


Kiedy stan konta klienta był równy zero? Z wykresu odczytujemy, że klient miał zerowy stan konta 9. i 11. dnia miesiąca. W przypadku niektórych kont banki dopuszczają sytuację, w której klient wypłaca z konta więcej pieniędzy niż posiada na koncie. Powstaje wówczas tzw. debet. Możemy, analizując ciągle ten sam wykres, zapytać, czy na koncie klienta był w tym okresie debet, a jeśli był, to w jakiej wysokości. Debet ilustrują te punkty wykresu, które znajdują się poniżej osi poziomej układu współrzędnych, a więc punkty odpowiadające ujemnym wartościom funkcji. Z wykresu odczytujemy, że tylko w 1. dniu miesiąca miała miejsce taka sytuacja. Wielkość debetu wyniosła 1 tys. zł.

Powyższe przykłady pokazują, że w praktyce niekiedy istotne jest określenie, w jakim przypadku funkcja przyjmuje wartość 0. Są też sytuacje, gdy wygodniej jest porównywać wartości funkcji z inną szczególną wartością tej funkcji. Na przykład, gdy analizujemy wykres temperatury ciała człowieka w pewnym przedziale czasowym, to temperaturę porównujemy z wartością $36{,}6^\circ$C. Jest to tzw. normalna temperatura ciała człowieka. Temperatura ciała wyższa od tej wartości, ale nie większa niż $37^\circ C$, wskazuje na stan podgorączkowy. Temperatura ciała wyższa niż 37°C oznacza gorączkę. Temperatura ciała człowieka niższa niż $36{,}6^\circ$C oznacza osłabienie organizmu.

Przykład 3

Na rysunku przedstawiony jest wykres temperatury ciała pacjenta, mierzonej co godzinę, przez kolejnych 12 godzin.

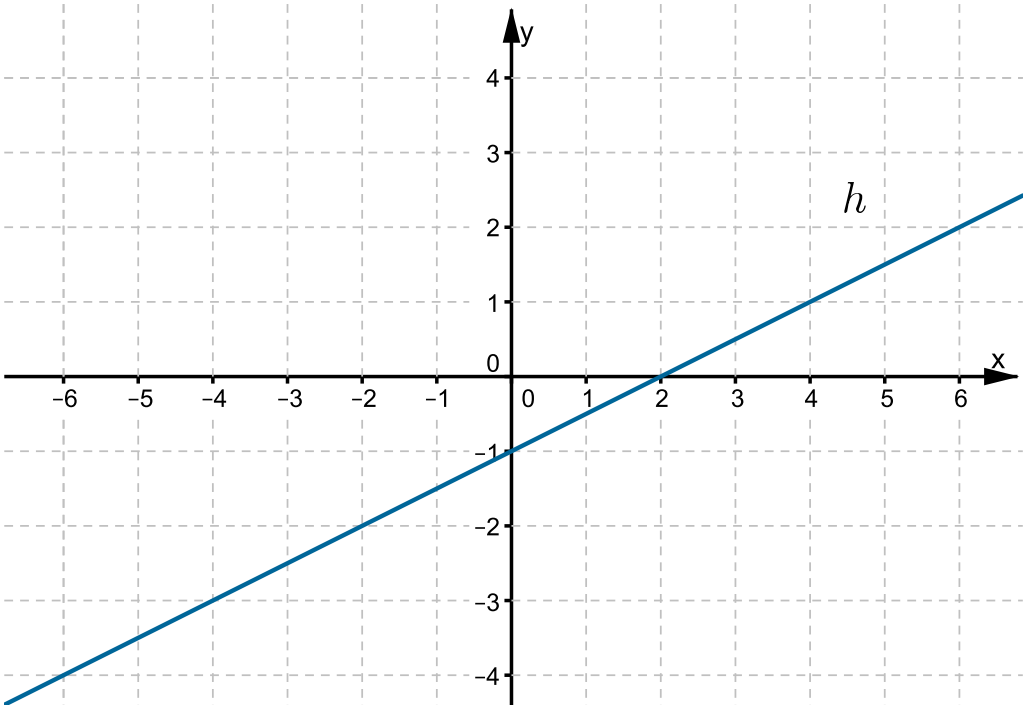


Określmy kilka przykładowych wartości temperatury ciała tego pacjenta. W początkowym momencie mierzenia, czyli w chwili $t = 0$ pacjent miał stan podgorączkowy, temperatura jego ciała była równa 37°C. W chwili $t = 4$ temperatura jego ciała wynosiła 39°C, a więc miał wówczas gorączkę. Po siedmiu godzinach pomiaru temperatura ciała pacjenta przyjęła wartość normalną i taka temperatura utrzymywała się przez godzinę, do chwili $t = 8$. Przez następne dwie godziny pacjent był osłabiony, ale od chwili $t = 10$, aż do końca pomiaru, czyli do chwili $t = 12$ znowu powróciła u niego temperatura normalna. Możemy więc powiedzieć, że normalna temperatura odnotowana była w dwóch przedziałach czasowych $\langle 7,\ 8\rangle$ oraz $\langle 10,\ 12\rangle$.

W praktyce często występują charakterystyczne wartości różnych wielkości, często inne niż zero, w stosunku do których odnosimy mierzone wartości. Np. temperatura 100°C, a więc temperatura wrzenia wody w warunkach normalnego ciśnienia, $50\ \mathrm{km}/h$ – dopuszczalna prędkość poruszania się pojazdów po drogach na obszarach zabudowanych, 8000 metrów n.p.m. – tzw. „granica śmierci” w górach.

Przykład 4

Gdy dziedziną lub zbiorem wartości funkcji jest zbiór nieograniczony, to jesteśmy w stanie narysować jedynie pewien fragment wykresu tej funkcji (ze względu na ograniczone rozmiary kartki papieru lub ekranu monitora). Jeśli narysowany jest jedynie fragment wykresu funkcji i nie wiemy nic więcej o tej funkcji, to nie możemy na podstawie tego fragmentu wykresu wyciągać wniosków, które dotyczą tych części wykresu, których rysunek nie przedstawia. Na przykład na podstawie przedstawionego fragmentu wykresu funkcji h możemy podać jej miejsce zerowe $x = 2$ i stwierdzić, że w widocznym na rysunku przedziale $\langle -6{,}6\rangle$ innych miejsc zerowych ta funkcja nie ma.



Jeśli wiedzielibyśmy, że funkcja przedstawiona na wykresie jest dla każdego x rzeczywistego określona wzorem

$$h(x) = \frac{1}{2}x - 1,$$

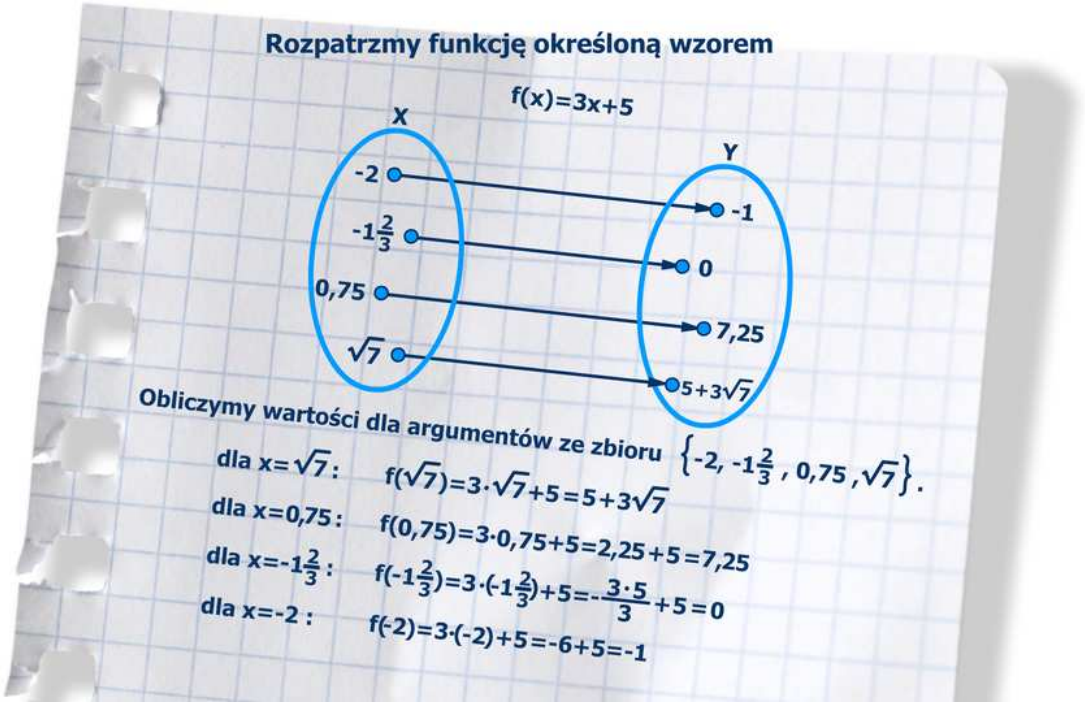
to wyznaczenie jej wszystkich miejsc zerowych sprowadziłoby się do rozwiązania równania $h(x) = 0$, co równoważnie zapisujemy $\frac{1}{2}x - 1 = 0$, skąd $\frac{1}{2}x = 1$, czyli $x = 2$.

Wartość funkcji dla danego argumentu

Jeżeli funkcja określona jest wzorem, to obliczanie wartości funkcji dla danego argumentu polega na wstawieniu do wzoru tego argumentu i obliczeniu wartości otrzymanego wyrażenia arytmetycznego.

Przykład 1

Rozpatrzmy funkcję f określoną wzorem $f(x) = 3x + 5$. Obliczymy wartości tej funkcji dla argumentów ze zbioru $\left\{-2,\ -1\frac{2}{3},\ 0{,}75,\ \sqrt{7}\right\}$.



Film dostępny na portalu epodreczniki.pl

Animacja

Przykład 2

Aby odczytać z wykresu funkcji, jaką wartość przyjmuje ona dla danego argumentu a, wystarczy dorysować prostą równoległą do osi Oy, na której leżą wszystkie punkty, których pierwsza współrzędna jest równa a (o takiej prostej mówimy, że ma równanie $x = a$). Otrzymamy wtedy dokładnie jeden punkt przecięcia tej prostej z wykresem funkcji. Druga współrzędna tego punktu jest szukaną wartością.

Film dostępny na portalu epodreczniki.pl

Animacja

Przykład 3

W praktyce często analizujemy wykresy, szukając na nich argumentów, dla których funkcja osiąga pewne szczególne wartości (co było szerzej skomentowane w przykładach wstępnych). Istotną umiejętnością jest odczytanie z wykresu funkcji jej wartości najmniejszej i wartości największej, o ile da się takie wartości wyznaczyć.

Zasób interaktywny dostępny pod adresem https://zpe.gov.pl/a/DqUPeROFA

Przykład 4

Sprawdzimy, który z punktów: $A = (0,\ -1), B = (-1,\ 3), C = (2,\ 1), D = (4,\ 8)$ należy do wykresu funkcji $f(x) = x^2 - 2x$.

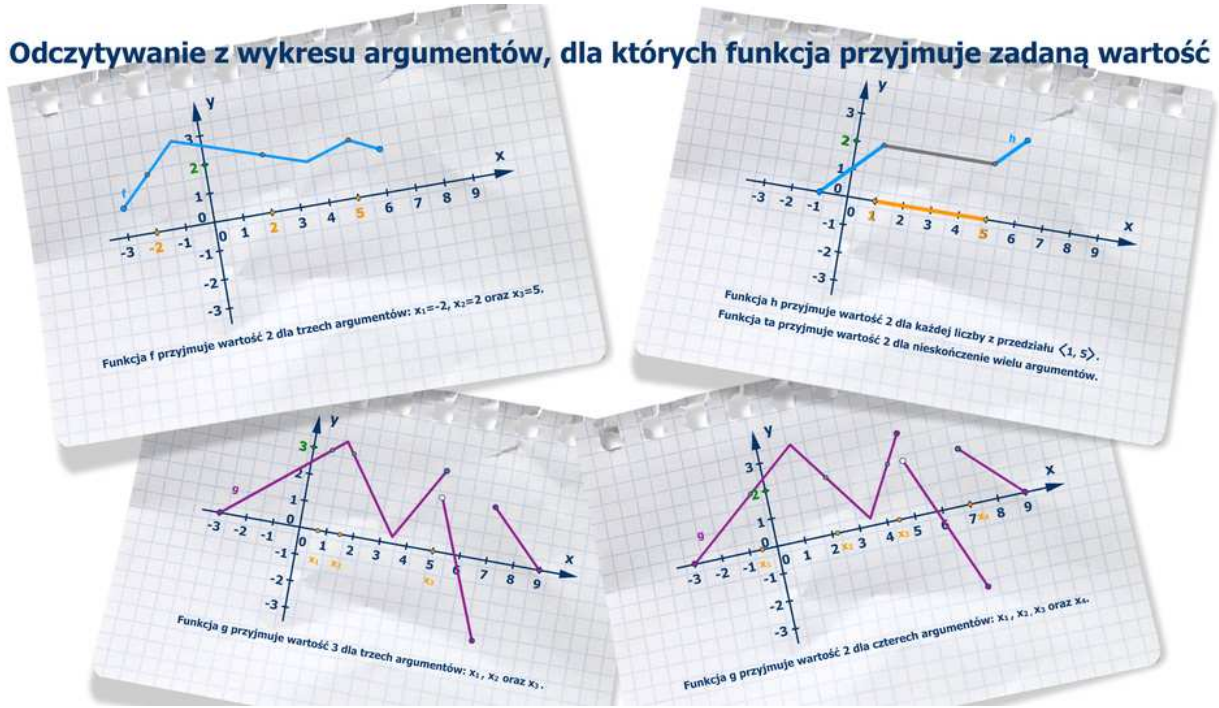
Ponieważ:

- $f(0) = 0^2 - 2 \cdot 0 = 0$, to do wykresu funkcji f należy punkt $(0,\ 0)$, a więc nie należy do niego punkt $A = (0,\ -1)$;
- $f(-1) = (-1)^2 - 2 \cdot (-1) = 1 + 2 = 3$, to punkt $B = (-1,\ 3)$ należy do wykresu funkcji f;
- $f(2) = 2^2 - 2 \cdot 2 = 0$, to do wykresu funkcji f należy punkt $(2,\ 0)$, a zatem punkt $C = (2,\ 1)$ nie należy do tego wykresu;
- $f(4) = 4^2 - 2 \cdot 4 = 8$, to punkt $D = (4,\ 8)$ należy do wykresu funkcji f.

Argumenty, dla których funkcja przyjmuje daną wartość

Przykład 1

Aby odczytać z wykresu, czy i dla jakich argumentów funkcja przyjmuje wartość w, wystarczy dorysować prostą równoległą do osi OX, na której leżą wszystkie punkty, których druga współrzędna jest równa w (o takiej prostej mówimy, że ma równanie $y = w$). Jeżeli taka dorysowana prosta przecina wykres danej funkcji, to odczytując pierwszą współrzędną każdego z punktów przecięcia, wyznaczymy argumenty, dla których funkcja przyjmuje daną wartość.



Film dostępny na portalu epodreczniki.pl

Animacja.

Przykład 2

Odczytaj z wykresu funkcji f liczbę rozwiązań równania $f(x) = m$.

Zasób interaktywny dostępny pod adresem https://zpe.gov.pl/a/D124pzltd

Przykład 3

Wyznaczymy wszystkie miejsca zerowe funkcji

- $p(x) = 8 - 7x$

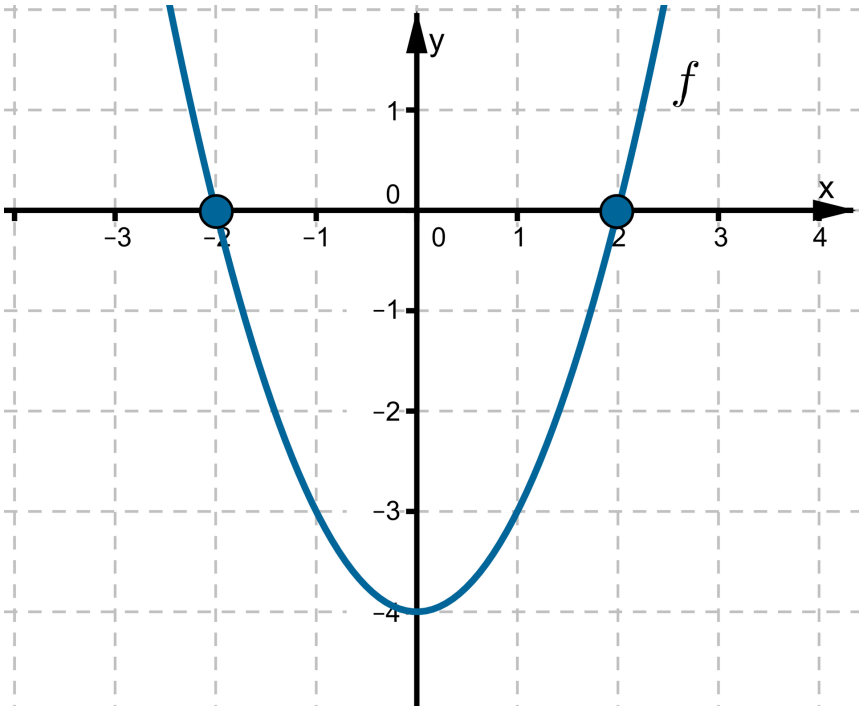
Dziedziną tej funkcji jest zbiór liczb rzeczywistych.
Rozwiązujemy równanie $p(x) = 0$, a zatem $8 - 7x = 0$, skąd $7x = 8$, czyli $x = \frac{8}{7}$.
Funkcja p ma jedno miejsce zerowe $x = \frac{8}{7}$.

- $k(x) = (3x - 2)(x + 1)$

Dziedziną tej funkcji jest zbiór liczb rzeczywistych.
Rozwiązujemy równanie $k(x) = 0$, a zatem $(3x - 2)(x + 1) = 0$. Ponieważ iloczyn jest równy 0 wtedy i tylko wtedy, gdy co najmniej jeden z jego czynników jest równy 0, więc $3x - 2 = 0$ lub $x + 1 = 0$. Stąd $x = \frac{2}{3}$ lub $x = -1$.
Funkcja k ma dwa miejsca zerowe: $x_1 = \frac{2}{3}$ oraz $x_2 = -1$.

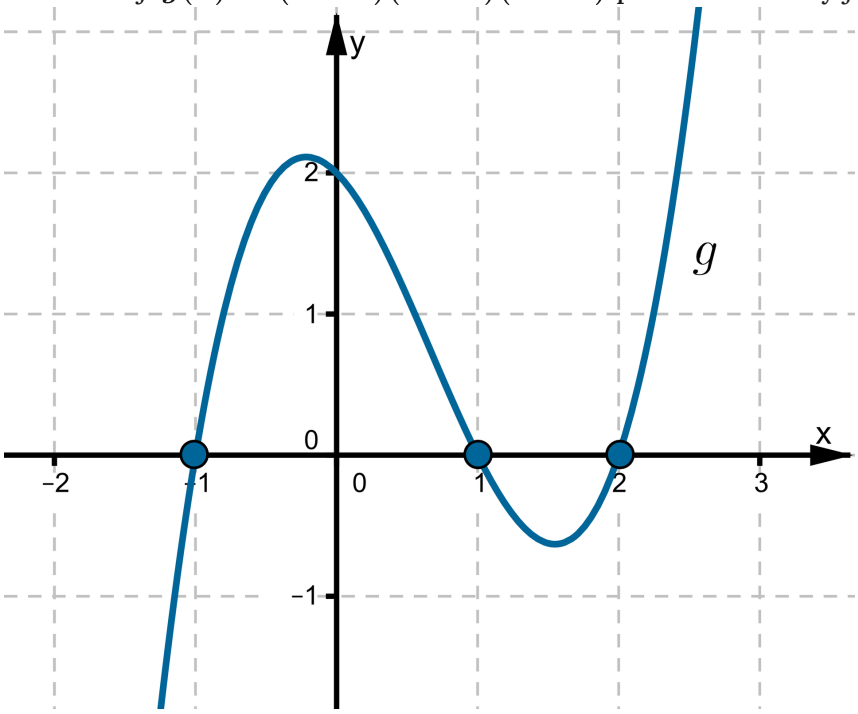
- $f(x) = x^2 - 4$

Dziedziną tej funkcji jest zbiór liczb rzeczywistych.
Rozwiązujemy równanie $f(x) = 0$, a zatem $x^2 - 4 = 0$. Korzystając ze wzoru na różnicę kwadratów, zapisujemy równanie w postaci $(x - 2)(x + 2) = 0$, a więc $x - 2 = 0$ lub $x + 2 = 0$. Wynika z tego, że $x = 2$ lub $x = -2$.
Funkcja f ma dwa miejsca zerowe: $x_1 = 2$ oraz $x_2 = -2$.
Fragment wykresu funkcji $f(x) = x^2 - 4$ przedstawiony jest na rysunku.



- $g(x) = (x-1)(x+1)(x-2)$

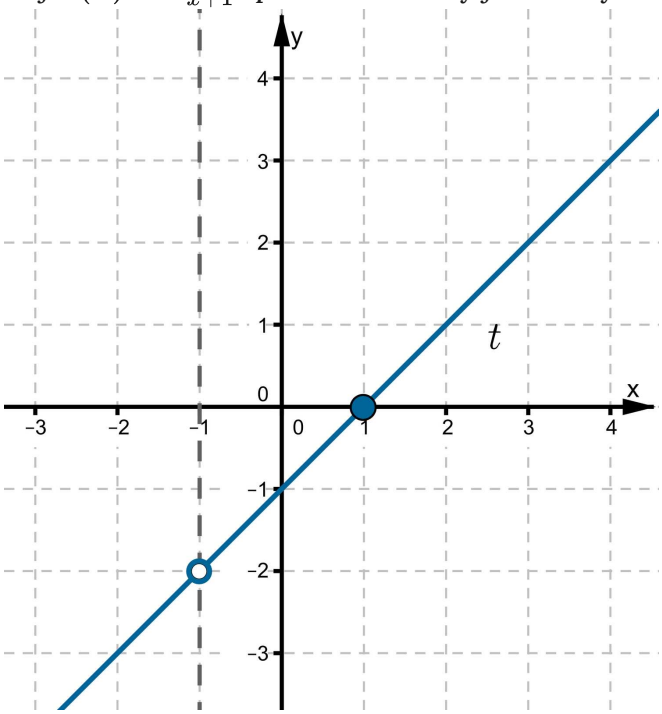
Dziedziną tej funkcji jest zbiór liczb rzeczywistych.
Rozwiązujemy równanie $g(x) = 0$, a zatem $(x-1)(x+1)(x-2) = 0$, skąd $x-1 = 0$ lub $x+1 = 0$ lub $x-2 = 0$. Wynika z tego, że funkcja g ma 3 miejsca zerowe: $x_1 = 1$, $x_2 = -1$ oraz $x_3 = 2$.
Fragment wykresu funkcji $g(x) = (x-1)(x+1)(x-2)$ przedstawiony jest na rysunku.



- $t(x) = \frac{x^2-1}{x+1}$

Dziedziną funkcji t jest zbiór wszystkich liczb rzeczywistych, z wyjątkiem liczby -1.
Zauważmy, że dla $x \neq -1$ funkcję t można zapisać w postaci

$t(x) = \frac{(x-1)(x+1)}{x+1} = x - 1$. Jedynym miejscem zerowym funkcji t jest zatem $x = 1$.
Fragment wykresu funkcji $t(x) = \frac{x^2-1}{x+1}$ przedstawiony jest na rysunku.

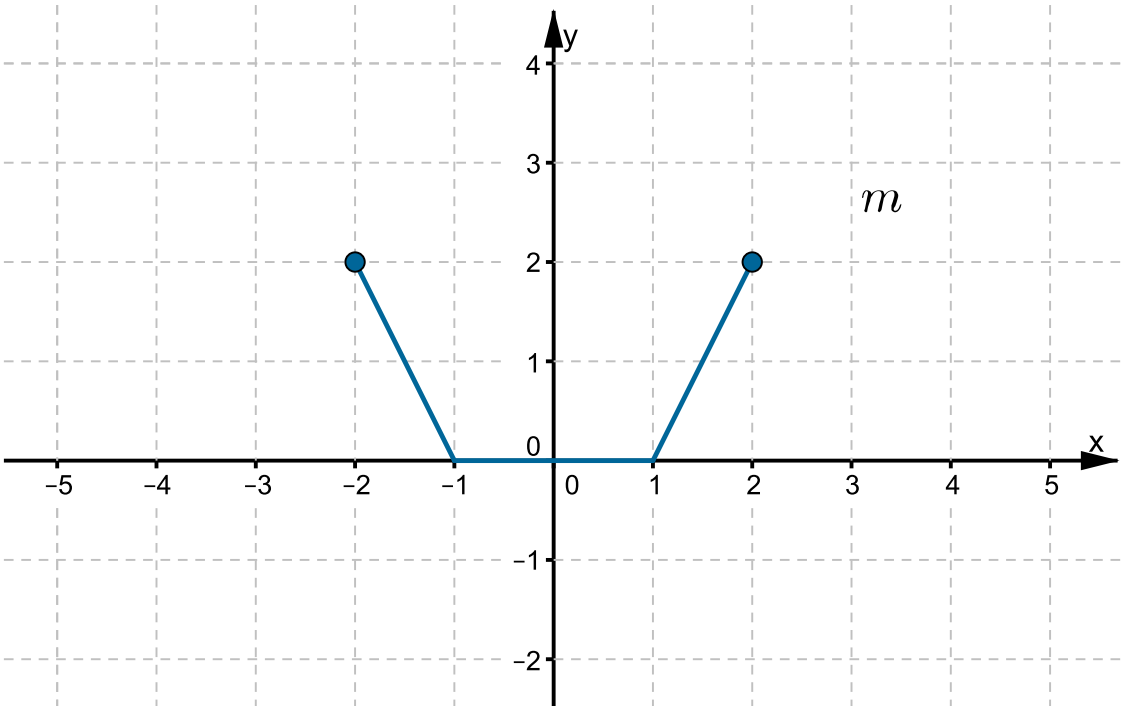


- $m(x) = \begin{cases} -2x - 2 & \text{dla} \quad -2 \leq x < -1 \\ 0 & \text{dla} \quad -1 \leq x \leq 1 \\ 2x - 2 & \text{dla} \quad 1 < x \leq 2 \end{cases}$

Dziedziną tej funkcji jest przedział $\langle -2,\ 2 \rangle$.
Zauważmy, że:

a. Jeżeli $x \in \langle -2,\ -1 \rangle$, to $m(x) = -2x - 2$. Rozwiązujemy równanie $m(x) = 0$, a zatem $-2x - 2 = 0$, skąd $x = -1$. Ale -1 nie należy do przedziału $\langle -2,\ -1 \rangle$, zatem w tym przypadku funkcja m nie ma miejsc zerowych;
b. Ponieważ dla $x \in \langle -1,\ 1 \rangle$ funkcja m dana jest wzorem $m(x) = 0$, to każda liczba z przedziału $\langle -1,\ 1 \rangle$ jest miejscem zerowym tej funkcji;
c. Jeżeli $x \in (1,\ 2 \rangle$, to $m(x) = 2x - 2$. Rozwiązujemy równanie $m(x) = 0$, a więc $2x - 2 = 0$, skąd $x = 1$. Ale 1 nie należy do przedziału $(1,\ 2 \rangle$, zatem w tym przypadku funkcja m nie ma miejsc zerowych.

A zatem każda liczba rzeczywista z przedziału $\langle -1,\ 1 \rangle$ jest miejscem zerowym funkcji m.
Funkcja m ma nieskończenie wiele miejsc zerowych.
Cały wykres funkcji m przedstawiony jest na rysunku.



Przykład 4

Funkcja f każdej liczbie rzeczywistej dodatniej przyporządkowuje liczbę o 30% od niej mniejszą. Obliczymy, dla jakiego argumentu funkcja f przyjmuje wartość 14.
Oznaczmy taką liczbę rzeczywistą przez x. Przyporządkowanie opisane w treści zadania zapisujemy wzorem $f(x) = x - 30\%\,\mathrm{x} = x - 0{,}3x = 0{,}7x$. Dziedziną tej funkcji jest zbiór liczb rzeczywistych dodatnich.
Szukamy argumentu, dla którego $f(x) = 14$, a więc $0{,}7\mathrm{x} = 14$, skąd $x = \frac{14}{0{,}7} = 20$.
Jedynym argumentem, dla którego funkcja f przyjmuje wartość 14 jest $x = 20$.

Przykład 5

Wyznaczymy wszystkie argumenty, dla których funkcja $g(x) = \frac{x^2-4x}{2}$ przyjmuje wartość -2.
Dziedziną tej funkcji jest zbiór liczb rzeczywistych.
Rozwiązujemy równanie $g(x) = -2$.
$\frac{x^2-4x}{2} = -2$
$x^2 - 4x = -4$
$x^2 - 4x + 4 = 0$
Korzystamy ze wzoru skróconego mnożenia na kwadrat różnicy. Wtedy $(x-2)^2 = 0$, czyli $x - 2 = 0$, a zatem $x = 2$.
Wobec tego funkcja $g(x) = \frac{x^2-4x}{2}$ przyjmuje wartość -2 tylko wtedy, gdy $x = 2$.

Przykład 6

Wyznaczymy wszystkie argumenty, dla których funkcja $k(x) = \frac{2}{x+1}$ przyjmuje wartość $\frac{1}{3}$.
Najpierw ustalimy dziedzinę funkcji k. Jest to zbiór wszystkich liczb rzeczywistych różnych od -1.
Rozwiązujemy równanie $k(x) = \frac{1}{3}$.

$\frac{2}{x+1} = \frac{1}{3}$
Z własności proporcji $x + 1 = 2 \cdot 3$,
czyli $x = 5$.
A zatem funkcja $k(x) = \frac{2}{x+1}$ przyjmuje wartość $\frac{1}{3}$ tylko wtedy, gdy $x = 5$.

Przykład 7

Funkcja P każdej dodatniej liczbie rzeczywistej a przyporządkowuje pole trójkąta równobocznego o boku a. Obliczymy a, dla którego funkcja P osiąga wartość $\sqrt{3}$.
Korzystając ze wzoru na pole trójkąta równobocznego, ustalamy wzór funkcji P:
$P(a) = \frac{\sqrt{3}}{4}a^2$, dla $a > 0$.
Rozwiązujemy równanie $P(a) = \sqrt{3}$

$$\frac{\sqrt{3}}{4}a^2 = \sqrt{3} \Big| \cdot \frac{4}{\sqrt{3}}$$

$$a^2 = 4$$

Ponieważ a jest liczbą dodatnią, to korzystamy z definicji pierwiastka kwadratowego, skąd $a = \sqrt{4} = 2$.
A zatem P osiąga wartość $\sqrt{3}$ dla $a = 2$.

Przykład 8

Funkcje: $a(n) = n(2n - 3)(n - 4)$ i $b(n) = -3n^2 + 1$ określone są na zbiorze dodatnich liczb całkowitych.

- Obliczymy miejsce zerowe funkcji a.

Rozwiązujemy równanie $a(n) = 0$, a więc $n(2n - 3)(n - 4) = 0$, skąd $n = 0$ lub $2n - 3 = 0$ lub $n - 4 = 0$, czyli $n = 0$ lub $n = \frac{3}{2}$ lub $n = 4$. Spośród tych trzech liczb jedynie 4 jest liczbą całkowitą dodatnią, a zatem funkcja a ma tylko jedno miejsce zerowe, $n = 4$.

- Wyznaczymy wszystkie argumenty, dla których funkcja b przyjmuje wartość -26.

Rozwiązujemy równanie $b(n) = -26$.

$$-3n^2 + 1 = -26$$

$$-3n^2 = -26 - 1$$

$$-3n^2 = -27 \big| : (-3)$$

$$n^2 = 9$$

Ponieważ n jest liczbą dodatnią, to korzystamy z definicji pierwiastka kwadratowego, skąd

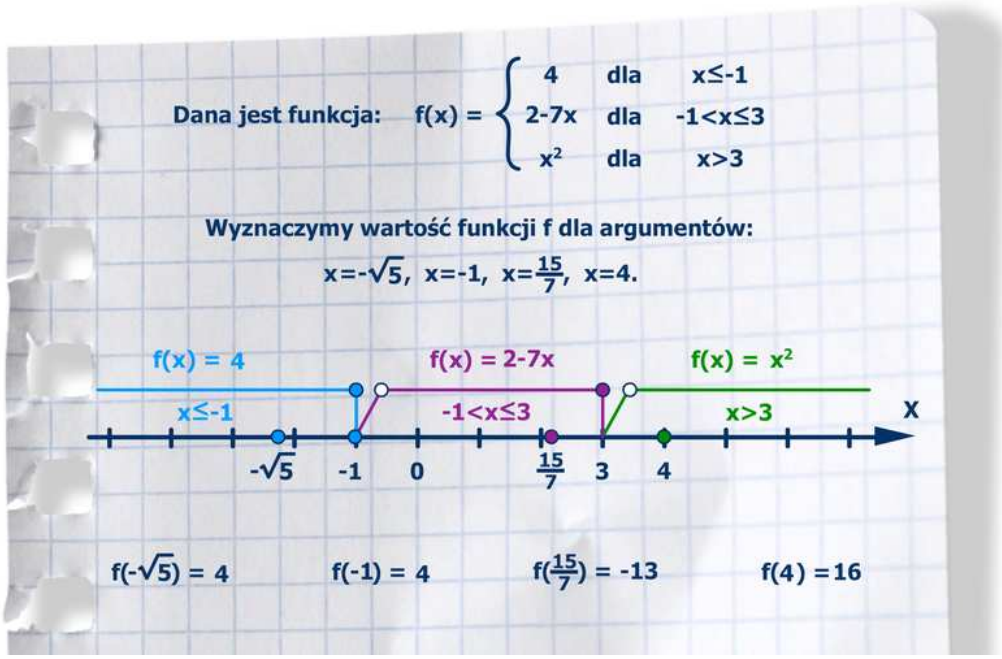
$$n = \sqrt{9} = 3$$

Wynika z tego, że funkcja b przyjmuje wartość -26 tylko wtedy, gdy $n = 3$.

Przykład 9

Dana jest funkcja $f(x) = \begin{cases} 4 & \text{dla} \quad x \leq -1 \\ 2 - 7x & \text{dla} \quad -1 < x \leq 3 \\ x^2 & \text{dla} \quad x > 3 \end{cases}$.

Wyznaczymy wartości funkcji f dla argumentów: $x = -\sqrt{5}$, $x = -1$, $x = \frac{15}{7}$, $x = 4$.

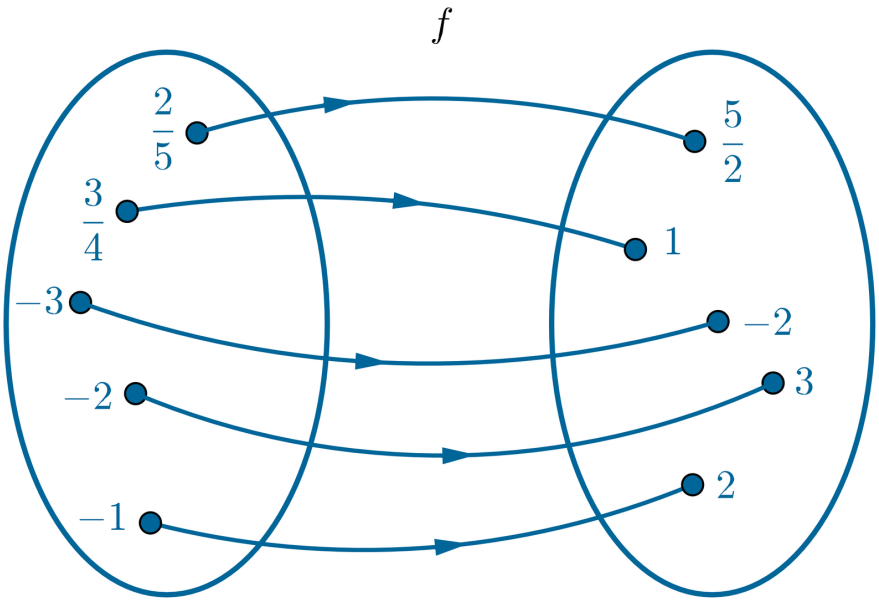


Film dostępny na portalu epodreczniki.pl

Animacja pokazuje jak obliczyć wartości funkcji f(x) dla podanych argumentów.

Ćwiczenie 1

Funkcję f przedstawiono za pomocą grafu.



Wskaż, która równość jest poprawna.

- [ ] $\frac{2}{5} \cdot f\left(\frac{2}{5}\right) = 1$
- [ ] $f(-1) = 2$
- [ ] $f(-2) = -3$
- [ ] $f(-3) + f(-1) = 0$

Ćwiczenie 2

Funkcję g przedstawiono za pomocą tabelki.

Funkcja g

x	-2	-1	0	1	2	3
$g(x)$	2	4	-1	0	-2	2

Wynika z tego, że funkcja g

- ◯ dla $x = 0$ przyjmuje wartość 1
- ◯ dla każdego argumentu ujemnego przyjmuje wartość dodatnią
- ◯ przyjmuje wartość 3
- ◯ ma dwa miejsca zerowe

Ćwiczenie 3

Funkcja i każdej dodatniej liczbie dwucyfrowej przyporządkowuje iloraz tej liczby przez sumę jej cyfr. Wynika z tego, że

- ☐ $i(35)$ jest liczbą całkowitą
- ☐ $i(20) < i(21)$
- ☐ $i(24) = 4$
- ☐ $i(10) = 10$

Ćwiczenie 4

Rozpatrzmy funkcję $g(x) = \frac{3-2x}{5}$. Funkcja g

- [ ] ma jedno miejsce zerowe
- [ ] dla $x = -1$ przyjmuje wartość 1
- [ ] nie przyjmuje wartości 2
- [ ] dla $x = 7$ przyjmuje wartość całkowitą

Ćwiczenie 5

Funkcja z każdej dodatniej liczbie całkowitej n przyporządkowuje liczbę o 1 mniejszą od dwukrotności liczby n. Wtedy

- [ ] funkcja z nie ma miejsc zerowych
- [ ] do zbioru wartości funkcji z należy liczba 333
- [ ] $z(5) = 4$
- [ ] $z(2) = z(3)$

Ćwiczenie 6

Oznaczmy przez $P(a)$ pole powierzchni sześcianu o krawędzi długości a.

a. Oblicz $P\left(\frac{1}{2}\right)$.

b. Wykaż, że $P\left(\sqrt{2}\right) > 10$.

c. Wyznacz a, dla którego $P(a)$ przyjmuje wartość 6.

d. Wyznacz a, dla którego $P(a)$ przyjmuje wartość 30.

Ćwiczenie 7

Ćwiczenie 8

Dziedziną funkcji $a(n) = 7n - 2$ jest zbiór liczb naturalnych. Sprawdź, czy do zbioru wartości funkcji a należy liczba

- [ ] 1000
- [ ] 5
- [ ] 15
- [ ] 110

Ćwiczenie 9

Miejscem zerowym funkcji $f(x) = (m+2)x^2 - \mathrm{mx} + 8$ jest liczba -1. Wynika stąd, że

- ◯ $m = 8$
- ◯ $m = -5$
- ◯ $m = -1$
- ◯ $m = 0$

Ćwiczenie 10

Funkcja f jest określona wzorem

$$f(x) = \begin{cases} x+1 & \text{dla} \quad x \leq 2 \\ 7-2x & \text{dla} \quad 2 < x < 5 \end{cases}$$

Dla jakich argumentów funkcja f przyjmuje wartość -5?

Ćwiczenie 11

Dla dowolnej liczby całkowitej dodatniej n przez $s(n)$ oznaczamy sumę n początkowych liczb całkowitych dodatnich, to znaczy $s(n) = 1 + 2 + \ldots + n$.

a. Oblicz $s(10)$.

b. Znajdź n, dla którego $s(n) = 66$.

c. Wykaż, że nie istnieje n, dla którego $s(n) = 60$.

Ćwiczenie 12

Długość boku kwadratu ABCD jest równa 4. Punkt E leży na przekątnej AC kwadratu, przy czym $|\mathrm{AE}| = x$. Dla jakiej wartości x pole P trójkąta ABE jest równe $3\sqrt{2}$?

Zadania

Ćwiczenie 1

Wskaż funkcję, której miejscem zerowym jest liczba 3.

- $f(x) = \frac{1}{3}x + 3$
- $f(x) = 2x + 3$
- $f(x) = 15 - 5x$
- $f(x) = 3x$

Ćwiczenie 2

Funkcja f określona jest wzorem $f(x) = \frac{x-3}{2}$. Wynika z tego, że $f(x) = -2$ dla

- $x = 1$
- $x = -2$
- $x = 2$
- $x = -1$

Ćwiczenie 3

Funkcja g określona jest za pomocą tabeli.

Funkcja g

x	1	2	3	4	5	6
$g(x)$	0	$\frac{7}{4}$	$\sqrt{5}$	0	1	2

Największą wartością funkcji g jest

- ◯ 2
- ◯ 6
- ◯ $\frac{7}{4}$
- ◯ $\sqrt{5}$

Ćwiczenie 4

Uzupełnij miejsca zerowe funkcji f.

a) $f(x) = x^3 - x$: [ ], [ ], [ ]

b) $f(x) = x^2 + x$: [ ], [ ]

c) $f(x) = 2x + 4$: [ ]

d) $f(x) = -5x - 20$: [ ]

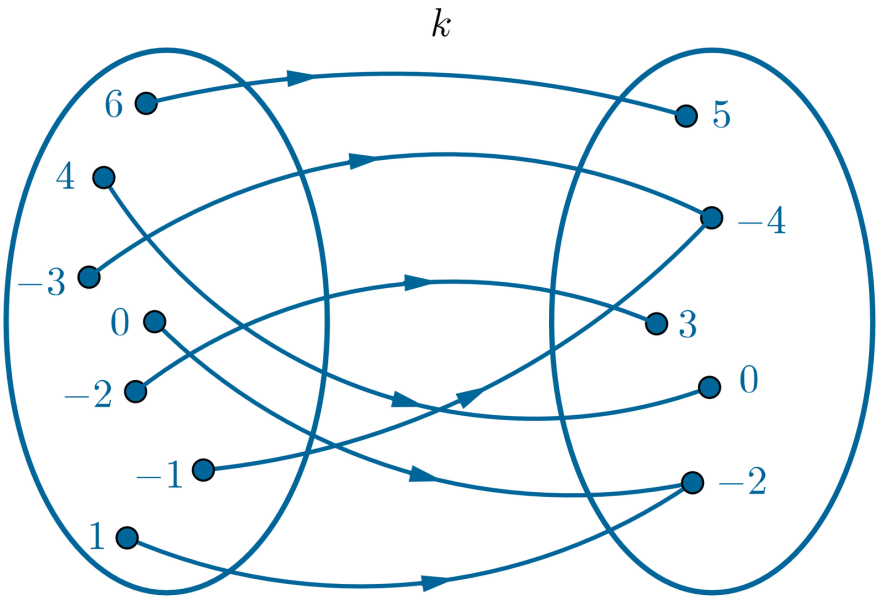
e) $f(x) = \frac{x+2}{x}$: [ ]

f) $f(x) = \sqrt{x+3}$: [ ]

g) $f(x) = \frac{4x-4}{\sqrt{x}}$: [ ]

Ćwiczenie 5

Funkcja k określona jest za pomocą grafu.



Dla ilu argumentów funkcja k przyjmuje wartości ujemne?

- ○ 2
- ○ 4
- ○ 1
- ○ 3

Ćwiczenie 6

Oblicz wartość funkcji f w punkcie $x = -1$.

a) $f(x) = \sqrt{x+5}$:

b) $f(x) = \frac{2}{\sqrt{-2x+2}}$:

c) $f(x) = \frac{3}{x+4}$:

d) $f(x) = \sqrt[3]{x-7}$:

Ćwiczenie 7

Dana jest funkcja $f(x) = \begin{cases} 3x-1 & \text{dla} \quad x \leq -1 \\ x+2 & \text{dla} \quad x > -1 \end{cases}$. Wynika z tego, że $f(-1)$ jest równe

- ◯ 1
- ◯ 0
- ◯ -4
- ◯ -2

Ćwiczenie 8

Funkcja f każdej liczbie trzycyfrowej mniejszej od 125 przypisuje iloczyn jej cyfr. Różnica między największą i najmniejszą wartością tej funkcji jest równa

- ◯ 8
- ◯ 9
- ◯ 19
- ◯ 10

Ćwiczenie 9

Miejscem zerowym funkcji $t(x) = (3 - m)x - 3m - 4$ jest -2. Wynika z tego, że $t(0)$ jest równe

- 3
- 26
- -4
- 17

Ćwiczenie 10

Do zbioru wartości funkcji $f(x) = x^2 + 2$ należy liczba

- $\sqrt{2}$
- $\sqrt{5}$
- 1
- $\sqrt{3}$

Ćwiczenie 11

Funkcja g określona jest za pomocą tabeli.

Funkcja g

x	-4	-3	-2	-1	0	1	2	3
$g(x)$	4	3	2	1	1	2	3	4

Wyznacz zbiór wartości funkcji g.

Ćwiczenie 12

Funkcja f jest określona wzorem $f(x) = \begin{cases} x^2 & \text{dla} \quad x \leq 0 \\ x+1 & \text{dla} \quad x > 0 \end{cases}$.

Oblicz.

a. $f(0)$

b. $f\left(-\sqrt{2}\right)$

c. $f\left(\frac{2}{3}\right)$

d. $f\left(\sqrt{5}\right)$

Ćwiczenie 13

Wyznacz miejsce zerowe funkcji.

a. $f(x) = 4x - 6$

b. $g(x) = 5 - 2x$

c. $h(x) = \frac{2x-3}{7}$

d. $k(x) = \frac{9-3x}{11}$

Ćwiczenie 14

Na wykresie funkcji $f(x) = -2x + 5$ leży każdy z punktów: $A = (-1, a)$, $B = (0, b)$, $C = (1, c)$, $D = (2, d)$. Oblicz a, b, c i d.

Ćwiczenie 15

Wyznacz miejsca zerowe funkcji.

a. $f(x) = x(x - 5)$

b. $g(x) = (2x + 4)(x - 3)$

c. $h(x) = (x - 1)(5 - x)$

d. $k(x) = x(x + 2)(8 - 4x)$

Ćwiczenie 16

Dany jest okrąg o promieniu r. Przez $P(r)$ oznaczamy funkcję określającą zależność między polem sześciokąta foremnego wpisanego w ten okrąg a promieniem r.

a. Podaj wzór funkcji P.

b. Oblicz $\mathrm{P}(2)$.

c. Znajdź r, dla którego funkcja P przyjmuje wartość $54\sqrt{3}$.

Ćwiczenie 17

Dziedziną funkcji $f(x) = x^2$ jest przedział $\langle -5,\ 2\rangle$. Znajdź wszystkie argumenty, dla których funkcja f przyjmuje wartość

a. 0

b. 1

c. 3

d. 16

Ćwiczenie 18

Funkcja g określona jest, dla każdej dodatniej liczby całkowitej n, wzorem $g(n) = \frac{n^2-1}{4}$. Znajdź wszystkie argumenty, dla których funkcja g osiąga wartość 20.

Ćwiczenie 19

Wyznacz miejsca zerowe funkcji.

a. $f(x) = x^2 - 25$

b. $g(x) = 7 - x^2$

c. $h(x) = 9x^2 + 6x + 1$

d. $k(x) = x^2 - 12x + 36$

Ćwiczenie 20

Funkcja u jest określona wzorem $u(x) = \begin{cases} -x - 1 & \text{dla} \quad x < -3 \\ 2 & \text{dla} \quad -3 \leq x \leq 2 \\ 2x - 2 & \text{dla} \quad x > 2 \end{cases}$

Wykaż, że dla dowolnej liczby rzeczywistej x funkcja u przyjmuje tylko wartości dodatnie.

Zadania generatorowe

- Ćwiczenie 1
- Ćwiczenie 2
- Ćwiczenie 3
- Ćwiczenie 4
- Ćwiczenie 5
- Ćwiczenie 6
- Ćwiczenie 7
- Ćwiczenie 8
- Ćwiczenie 9
- Ćwiczenie 10
- Ćwiczenie 11
- Ćwiczenie 12

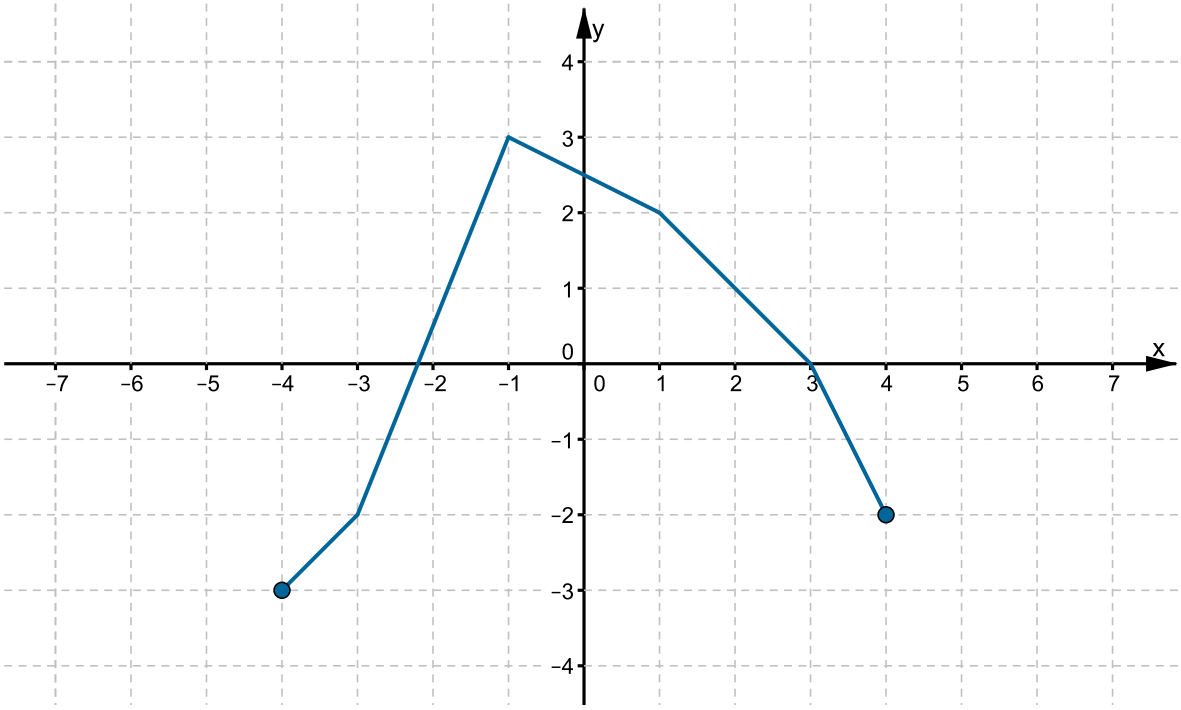
Argumenty i wartości funkcji

Już wiesz

Przypomnijmy, że wykres funkcji, której argumentami i wartościami są liczby rzeczywiste, to zbiór tych punktów płaszczyzny, których pierwsza współrzędna jest argumentem funkcji, a druga współrzędna – wartością funkcji dla tego argumentu.

Przykład 1

Z przedstawionego wykresu funkcji f odczytaj jej wartości kolejno dla argumentów: $-4,\ -3,\ -1,\ 1,\ 2,\ 3,\ 4$. Wskaż miejsca zerowe funkcji.



Dla argumentu

- $\mathrm{x} = -4$ wartość funkcji f jest równa -3, co zapiszemy $f(-4) = -3$
- $\mathrm{x} = -3$ wartość tej funkcji jest równa -2, czyli $f(-3) = -2$

Następnie $\mathrm{f}(-1) = 3$, $\mathrm{f}(1) = 2$, $\mathrm{f}(2) = 1$, $\mathrm{f}(3) = 0$ oraz $\mathrm{f}(4) = -2$.
Funkcja ma dwa miejsca zerowe.

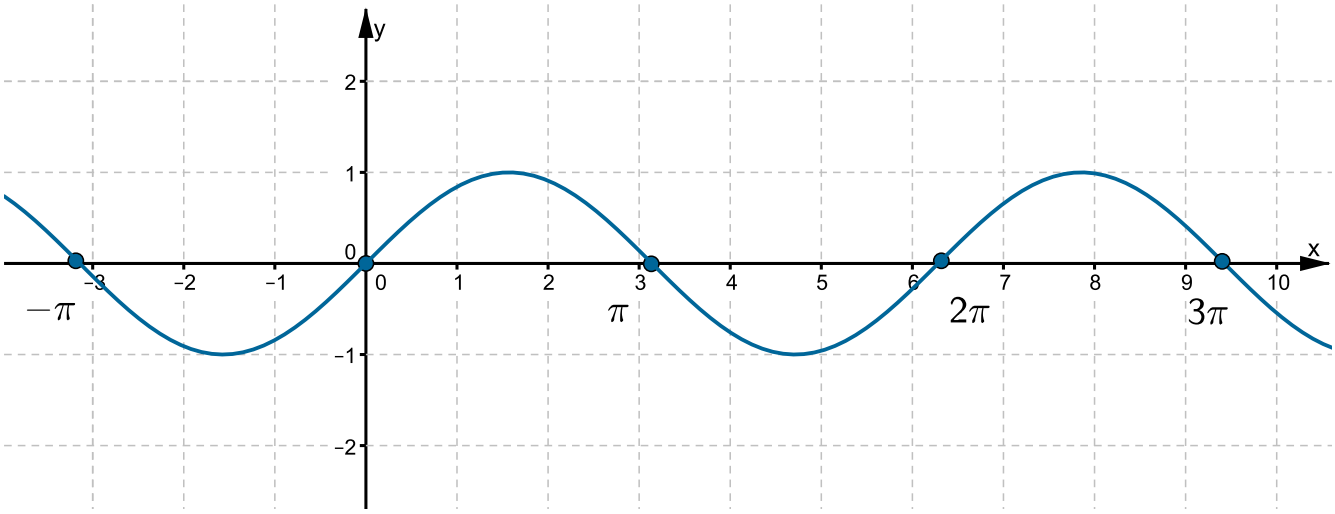
Ważne!

Przypominamy, że nie należy mylić miejsca zerowego z punktem wspólnym wykresu funkcji i osi Ox. W tym rozpatrywanym przykładzie są dwa takie punkty $(-2,\ 0)$ oraz

$(3,\ 0)$. Miejsca zerowe to pierwsze współrzędne tych punktów, czyli $x_1 = -2$ oraz $x_2 = 3$. Są to argumenty, dla których funkcja przyjmuje wartość 0.

Przykład 2

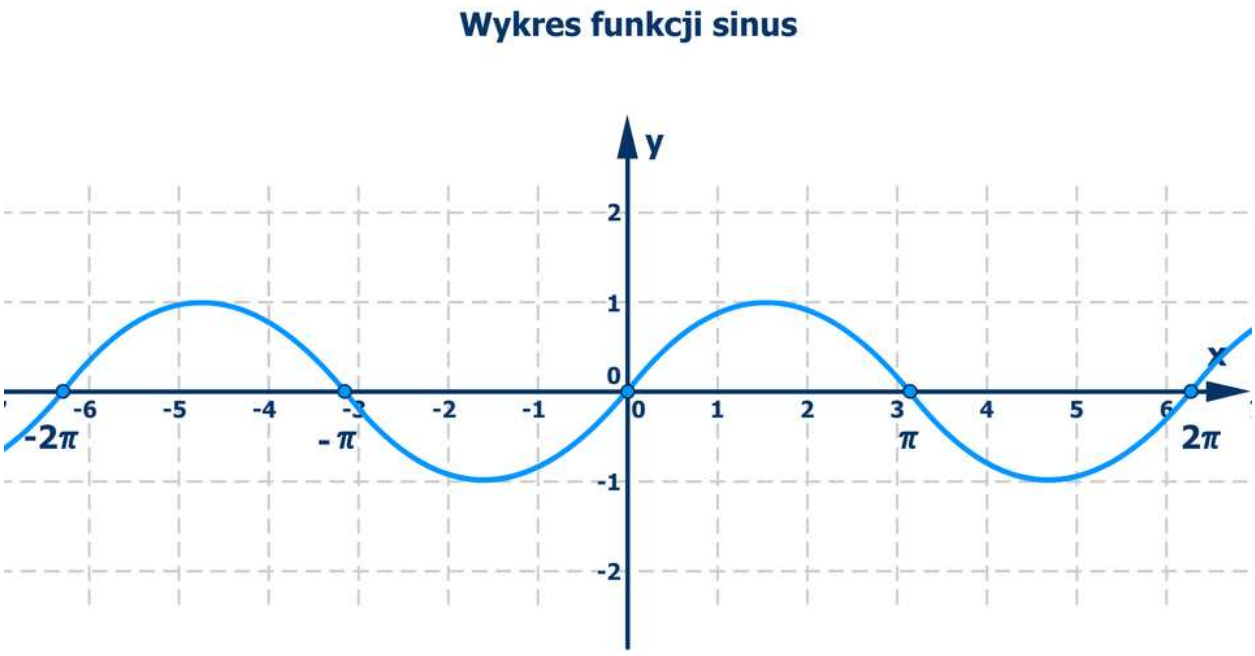
Na rysunku przedstawiony jest fragment wykresu pewnej funkcji s, której dziedziną jest zbiór wszystkich liczb rzeczywistych.



Na podstawie tego fragmentu wykresu funkcji s możemy wskazać pięć miejsc zerowych:

$$\mathrm{x} = -\pi,\ \mathrm{x} = 0,\ \mathrm{x} = \pi,\ \mathrm{x} = 2\pi\ , x = 3\pi.$$

W rzeczywistości funkcja ta jest określona dla każdej liczby rzeczywistej. Miejscem zerowym tej funkcji jest każda całkowita wielokrotność liczby π, a więc każda liczba postaci $x = k\pi$, gdzie k jest liczbą całkowitą. Funkcją tą jest sinus. Jest to jedna z funkcji trygonometrycznych.



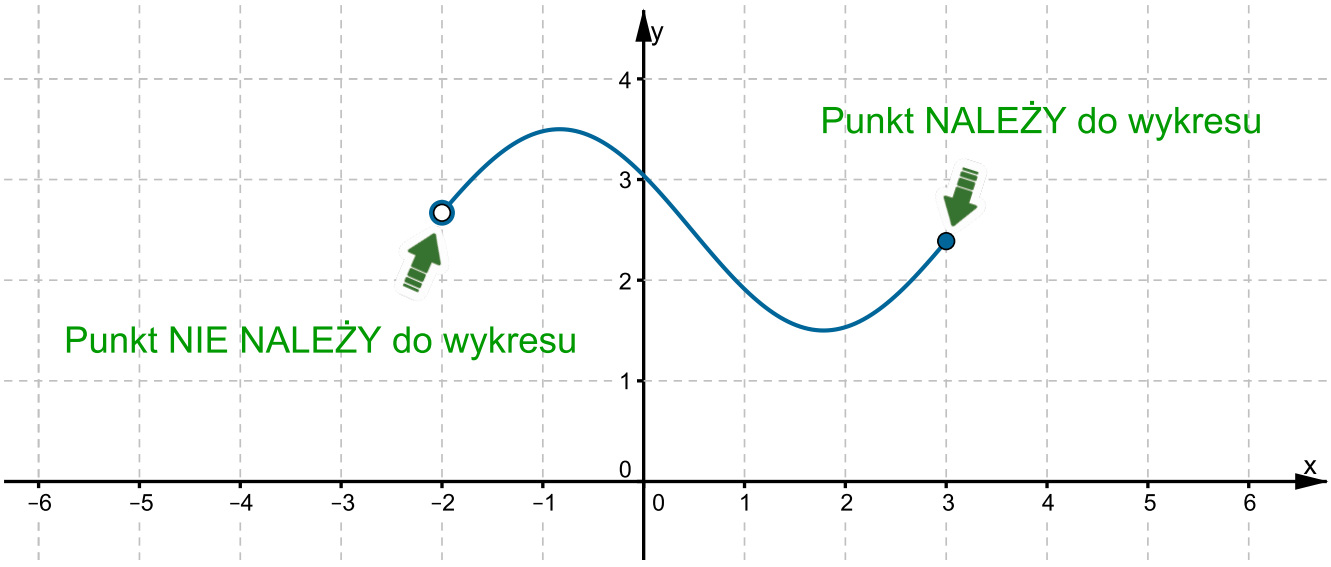
Film dostępny na portalu epodreczniki.pl

Animacja pokazuje wykres funkcji sinus.

Ważne!

Nie narysujemy w całości wykresu funkcji, której dziedziną jest zbiór nieograniczony. Z wykresu takiej funkcji nie odczytamy poprawnie wszystkich jej własności.

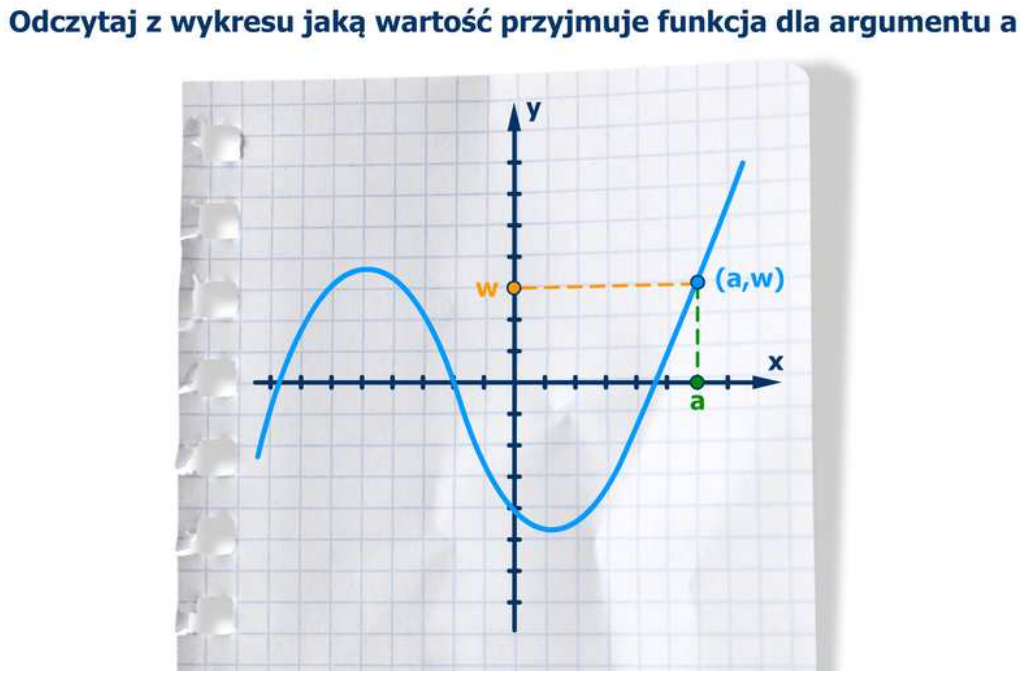
Przykład 3



Już wiesz

Aby odczytać z wykresu funkcji, jaką wartość przyjmuje ona dla danego argumentu a, wystarczy dorysować prostą równoległą do osi Oy, na której leżą wszystkie punkty,

których pierwsza współrzędna jest równa a (taką prostą opisujemy równaniem $x = a$). Otrzymamy wtedy dokładnie jeden punkt przecięcia tej prostej z wykresem funkcji. Druga współrzędna tego punktu jest szukaną wartością.



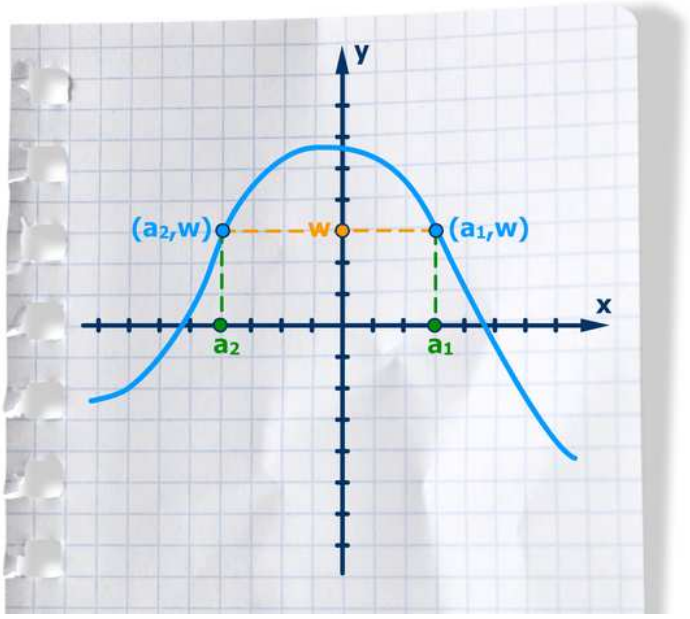
Film dostępny na portalu epodreczniki.pl

Animacja pokazuje, jak z wykresu funkcji odczytać jaką wartość przyjmuje funkcja dla argumentu a.

Już wiesz

- Aby odczytać z wykresu, czy i dla jakich argumentów funkcja przyjmuje wartość w, wystarczy dorysować prostą równoległą do osi Ox, na której leżą wszystkie punkty, których druga współrzędna jest równa w (taką prostą opisujemy równaniem $y = w$).
- Jeżeli taka dorysowana prosta ma punkt wspólny z wykresem danej funkcji, to odczytując pierwszą współrzędną każdego z takich punktów wspólnych, wyznaczymy argumenty, dla których funkcja przyjmuje zadaną wartość.

Odczytaj z wykresu dla jakich argumentów funkcja przyjmuje wartość w



Film dostępny na portalu epodreczniki.pl

Animacja pokazuje, jak z wykresu funkcji odczytać dla jakich argumentów funkcja przyjmuje wartość w.

Przykłady

Przykład 1

Odczytaj miejsca zerowe funkcji przedstawionej na wykresie.
Jeżeli argument funkcji nie jest jej miejscem zerowym, to wartość funkcji dla tego argumentu jest dodatnia lub ujemna.

Zasób interaktywny dostępny pod adresem https://zpe.gov.pl/a/DlCDBZART

Oś Ox dzieli wykres funkcji tak, że każdy punkt wykresu, który leży powyżej osi Ox ma drugą współrzędną dodatnią. Mówimy wtedy, że funkcja przyjmuje wartości dodatnie. Podobnie każdy punkt wykresu, który leży poniżej osi Ox ma drugą współrzędną ujemną. Mówimy wtedy, że funkcja przyjmuje wartości ujemne.

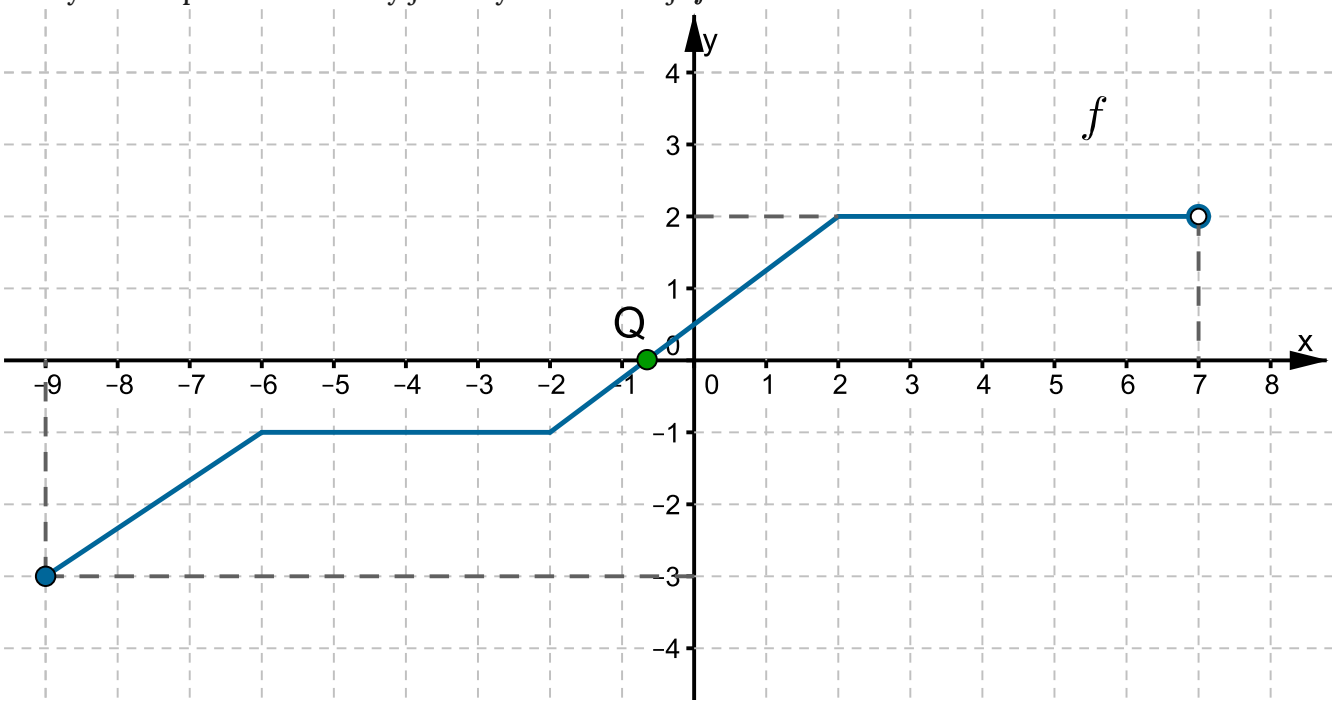
Przykład 2

Wskaż, dla jakich argumentów funkcja f przyjmuje wartości dodatnie, a dla jakich ujemne.

Zasób interaktywny dostępny pod adresem https://zpe.gov.pl/a/DlCDBZART

Przykład 3

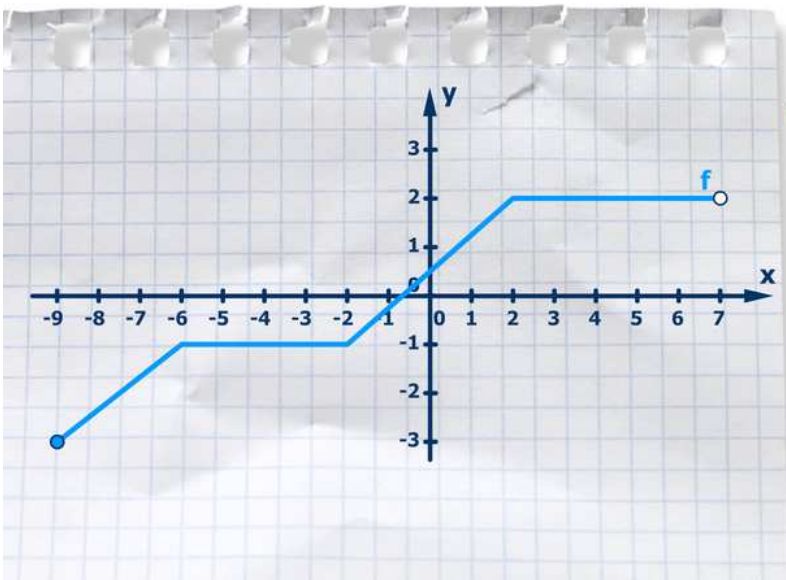
Na rysunku przedstawiony jest wykres funkcji f.



Odczytujemy z wykresu tej funkcji dziedzinę, wartość najmniejszą, wartość największą, zbiór wartości, liczbę miejsc zerowych.

a. Dziedzina to przedział $<-9,\ 7)$.
b. Wartość najmniejsza to liczba -3.
c. Wartość największa to liczba 2.
d. Zbiór wartości to przedział $<-3,\ 2>$.
e. Funkcja f ma jedno miejsce zerowe.

Na rysunku poniżej przedstawiony jest wykres funkcji f



Odczytujemy z wykresu funkcji

dziedzinę: przedział ⟨9,7),

wartość najmniejszą: liczba -3,

wartość największą: liczba 2,

zbiór wartości: przedział ⟨-3,2⟩,

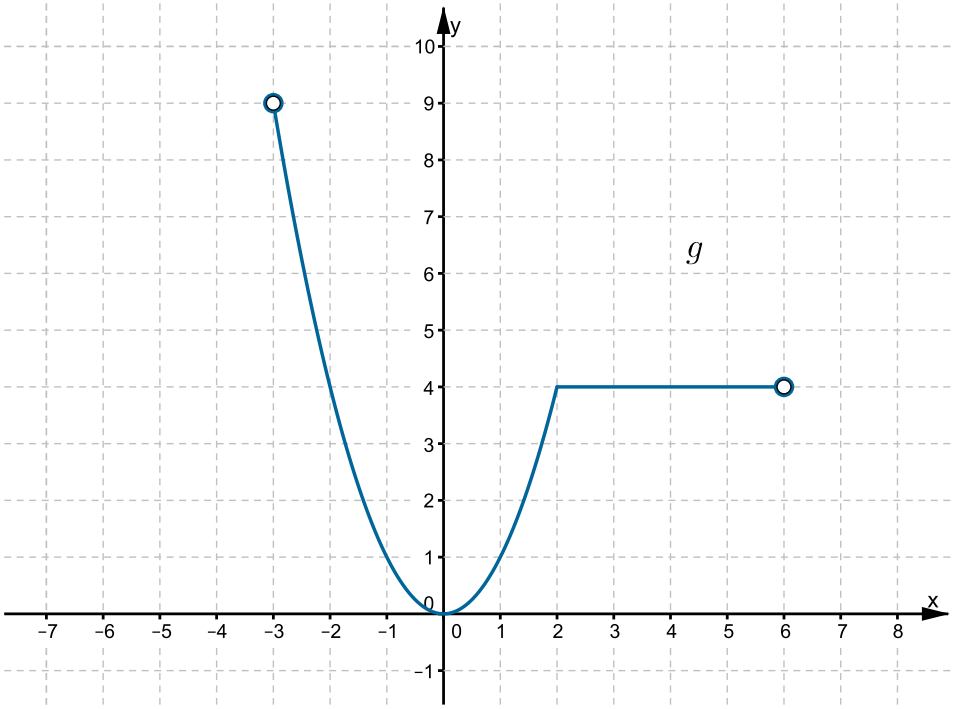
liczbę miejsc zerowych: jedno.

Film dostępny na portalu epodreczniki.pl

Animacja pokazuje jak poruszając się po wykresie funkcji f odczytać dziedzinę funkcji, najmniejszą i największą wartości funkcji, zbiór wartości funkcji oraz liczbę miejsc zerowych.

Przykład 4

Na rysunku przedstawiony jest wykres funkcji g.

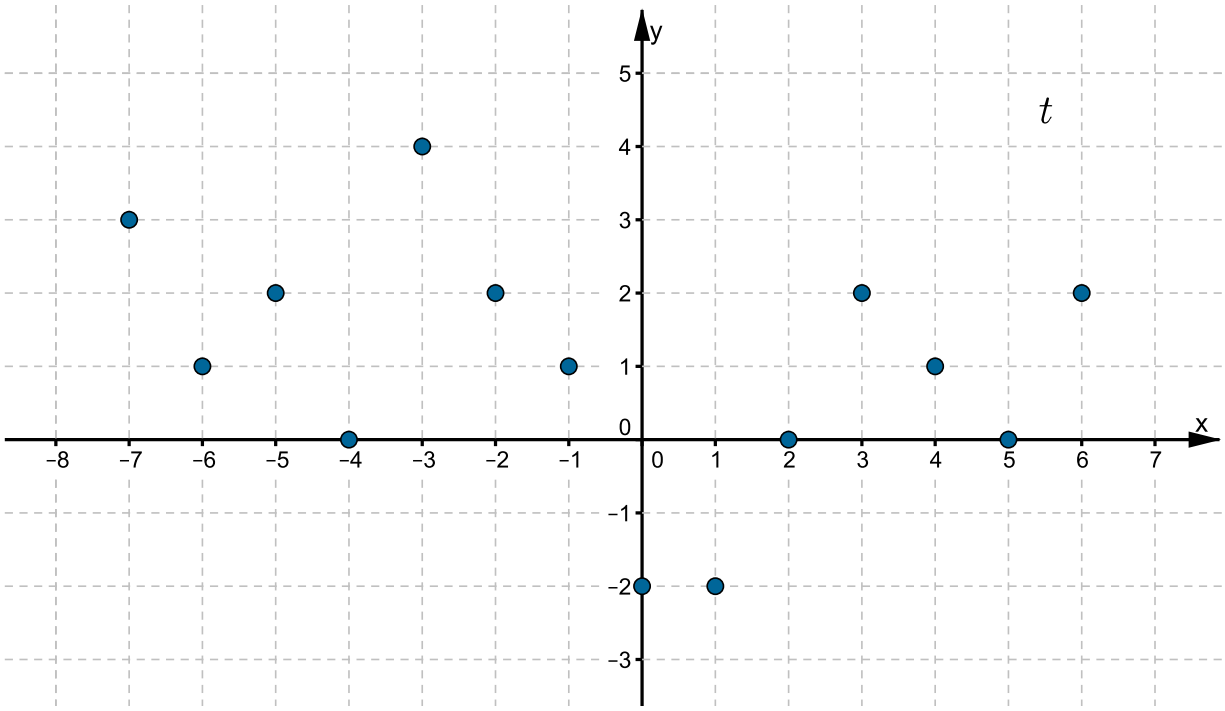


Odczytujemy z wykresu tej funkcji dziedzinę, wartość najmniejszą, wartość największą, zbiór wartości, liczbę miejsc zerowych, zbiór argumentów, dla których funkcja przyjmuje wartości dodatnie oraz ujemne.
Odczytujemy z wykresu funkcji:

a. dziedzinę: przedział $(-3,\ 6)$,
b. zbiór wartości: przedział $< 0,\ 9)$,
c. wartość najmniejszą: 0
   zauważmy, że funkcja g nie przyjmuje wartości największej,
d. liczbę miejsc zerowych: jedno, jest to $x\ =\ 0$,
e. dla jakich argumentów funkcja g przyjmuje wartości dodatnie: dla każdego x z przedziału $(-3,\ 0)$ oraz dla każdego x z przedziału $(0,\ 6)$.
   Zauważmy też, że funkcja g nie przyjmuje wartości ujemnych.

Przykład 5

Na rysunku przedstawiony jest wykres funkcji t.



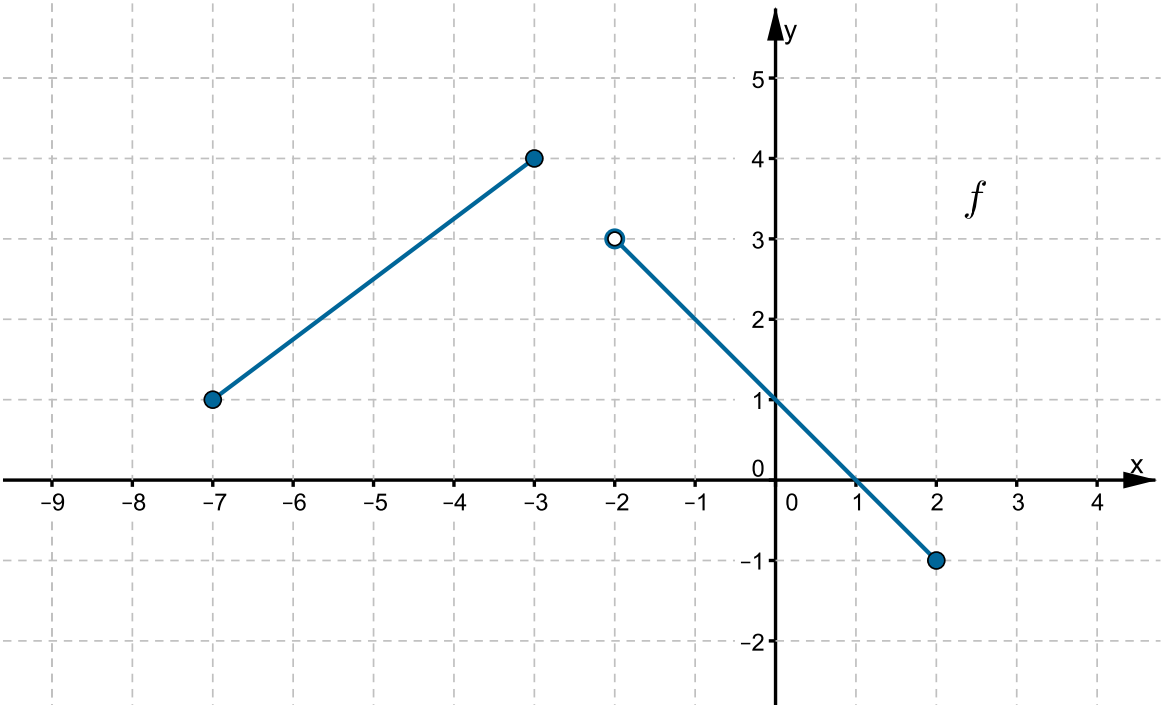
Odczytujemy z wykresu tej funkcji dziedzinę, wartość najmniejszą, wartość największą, zbiór wartości, liczbę miejsc zerowych, zbiór argumentów, dla których funkcja przyjmuje wartości dodatnie oraz ujemne.
Odczytujemy z wykresu funkcji:

a. dziedzinę: zbiór czternastoelementowy $\{-7,\ -6,\ -5,\ -4,\ -3,\ -2,\ -1,\ 0,\ 1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5,\ 6\}$,
b. zbiór wartości: zbiór sześcioelementowy $\{-2,\ 0,\ 1,\ 2,\ 3,\ 4\}$,
c. wartość najmniejszą: -2,
d. wartość największą: 4,
e. liczbę miejsc zerowych: trzy, są to: liczby $-4,\ 2,\ 5$,
f. dla jakich argumentów funkcja t przyjmuje wartości dodatnie: dla każdego x ze zbioru $\{-7,\ -6,\ -5,\ -3,\ -2,\ -1,\ 3,\ 4,\ 6\}$,
g. dla jakich argumentów funkcja t przyjmuje wartości ujemne: dla $\mathrm{x}\ =\ 0$ oraz $\mathrm{x}\ =\ 1$.

Zadania. Część I

Ćwiczenie 1

Na rysunku przedstawiony jest wykres funkcji f.

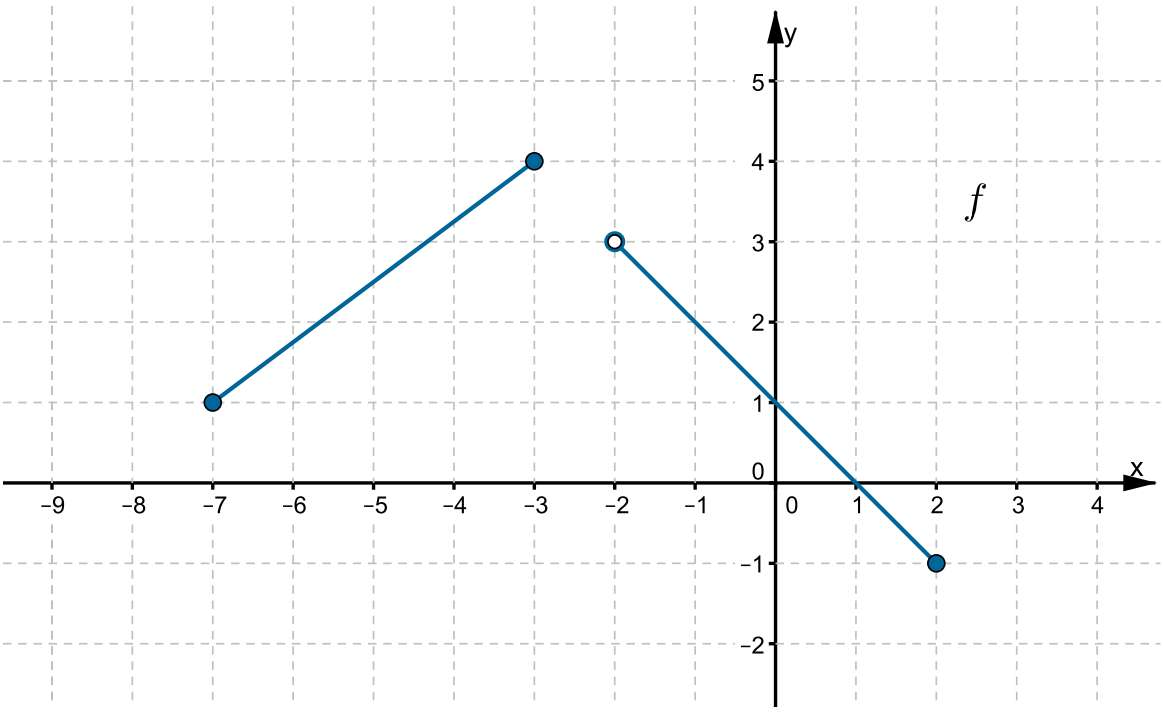


Zbiorem wartości funkcji f jest przedział

- ◯ $(-1, 4)$
- ◯ $(-7, 4)$
- ◯ $\langle -1, 4 \rangle$
- ◯ $\langle -7, 4 \rangle$

Ćwiczenie 2

Na rysunku przedstawiony jest wykres funkcji f.

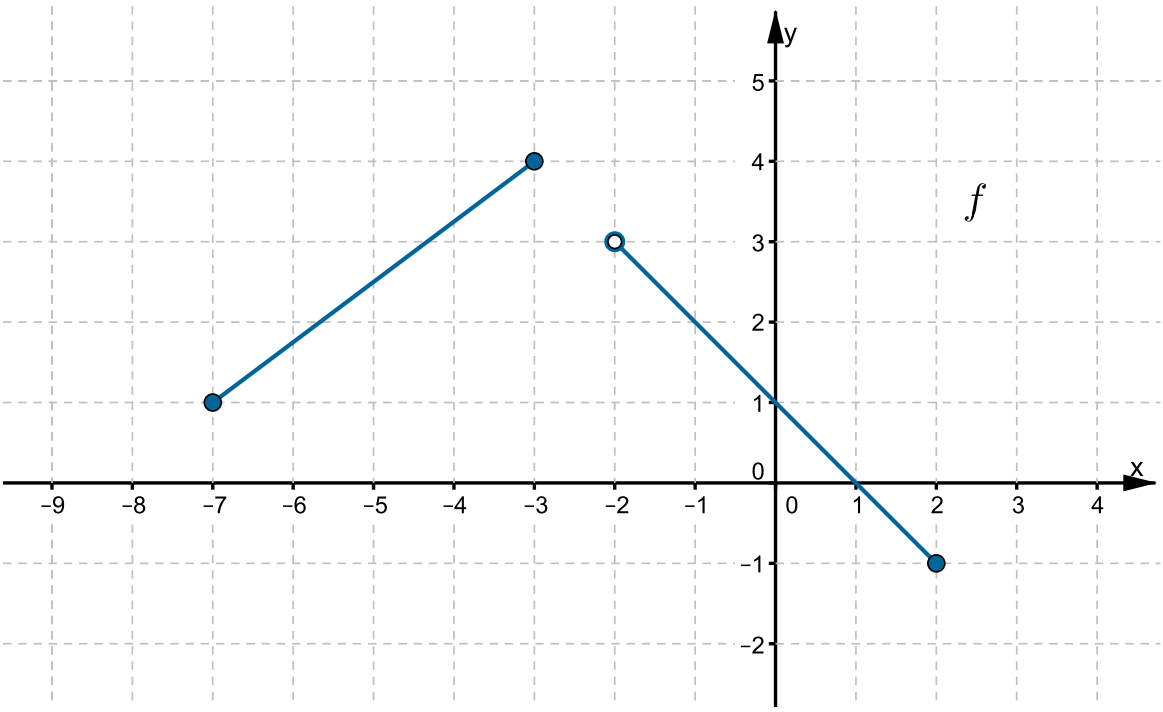


Największa wartość funkcji f

- jest równa 4 i funkcja przyjmuje tę wartość dla argumentu $\mathrm{x} = -3$
- jest równa 3 i funkcja przyjmuje tę wartość dla argumentu $\mathrm{x} = -2$
- nie istnieje

Ćwiczenie 3

Na rysunku przedstawiony jest wykres funkcji f.

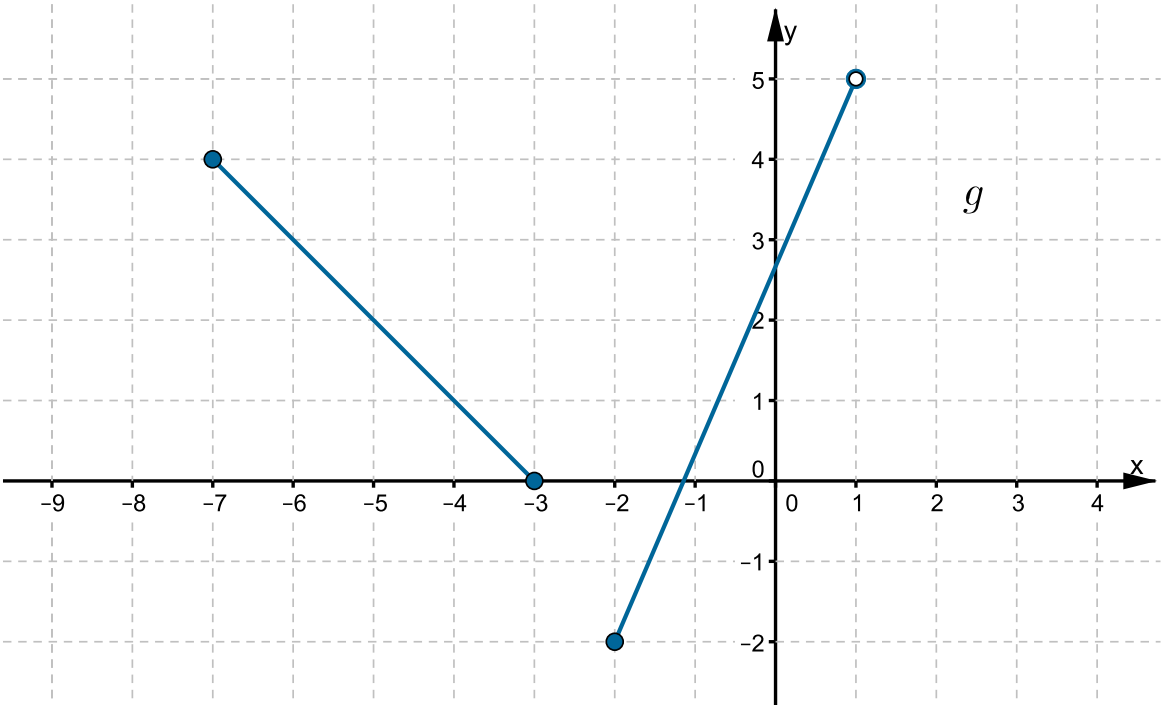


Najmniejsza wartość funkcji f

- jest równa 1 i funkcja przyjmuje tę wartość dla argumentu $x = -7$
- jest równa -1 i funkcja przyjmuje tę wartość dla argumentu $x = 2$
- nie istnieje

Ćwiczenie 4

Na rysunku przedstawiony jest wykres funkcji g.

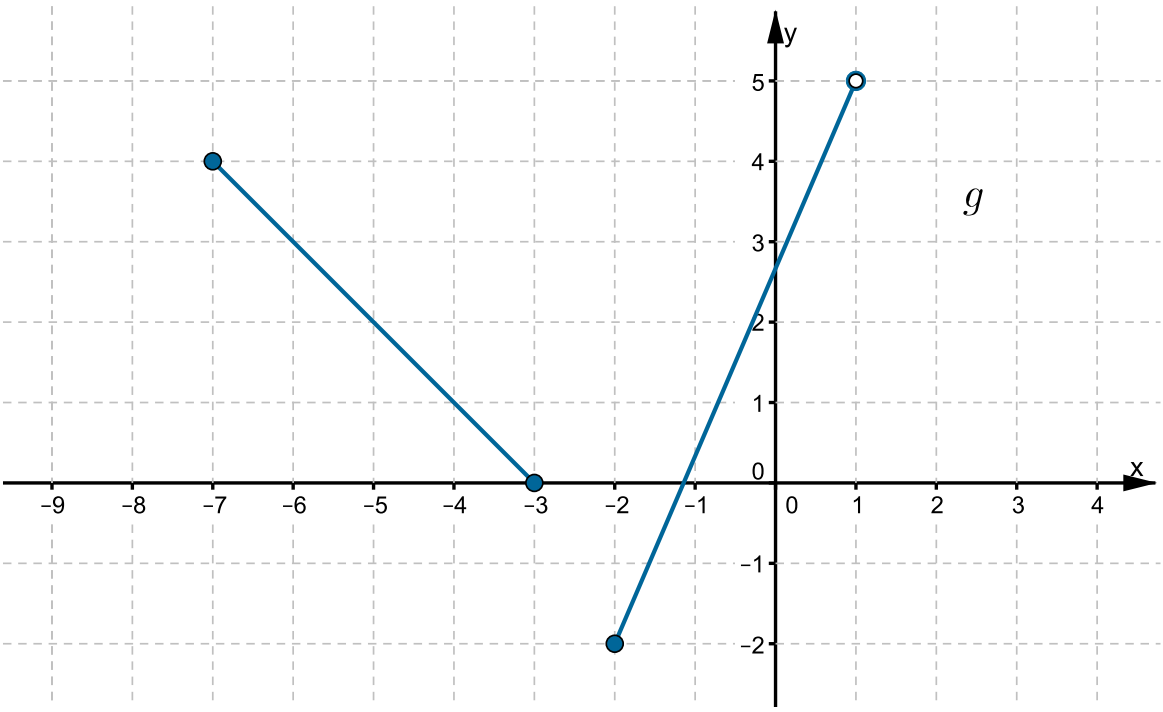


Zbiorem wartości funkcji g jest

- $(-2, 5)$
- $(-2, 5\rangle$
- $\langle -7, 1)$
- $\langle -2, 5)$

Ćwiczenie 5

Wykres funkcji g przedstawiony jest na rysunku.

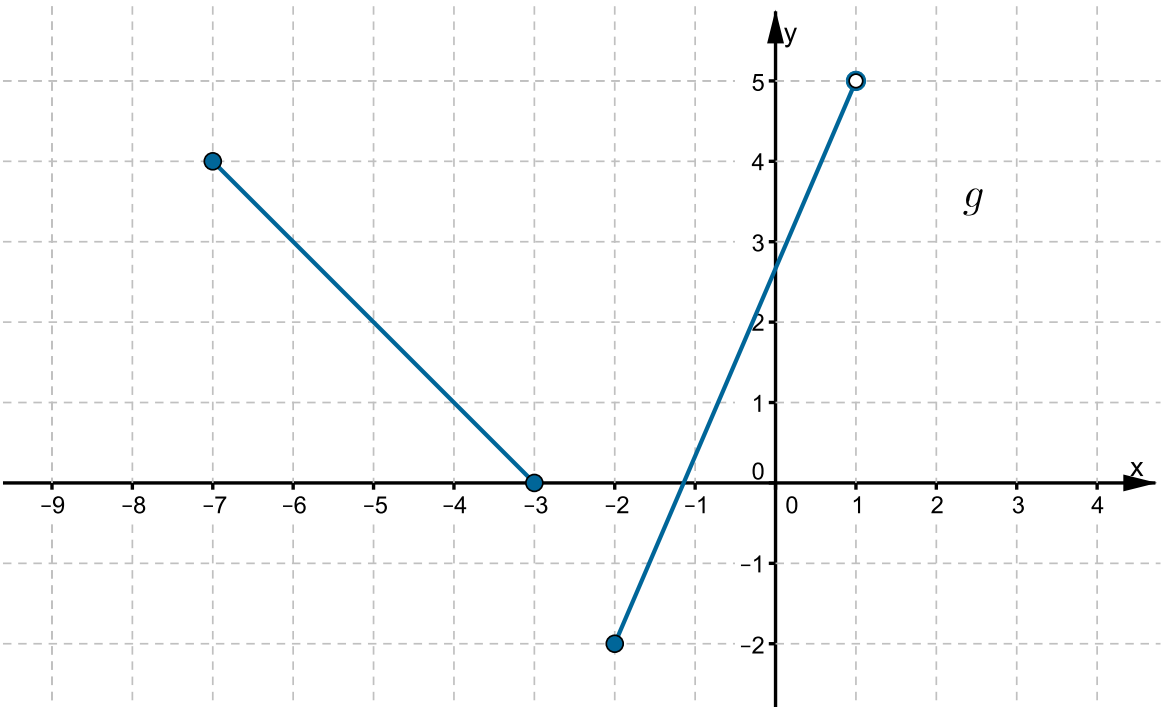


Największa wartość funkcji g

- jest równa -2
- nie istnieje
- jest równa 5

Ćwiczenie 6

Na rysunku przedstawiony jest wykres funkcji g.

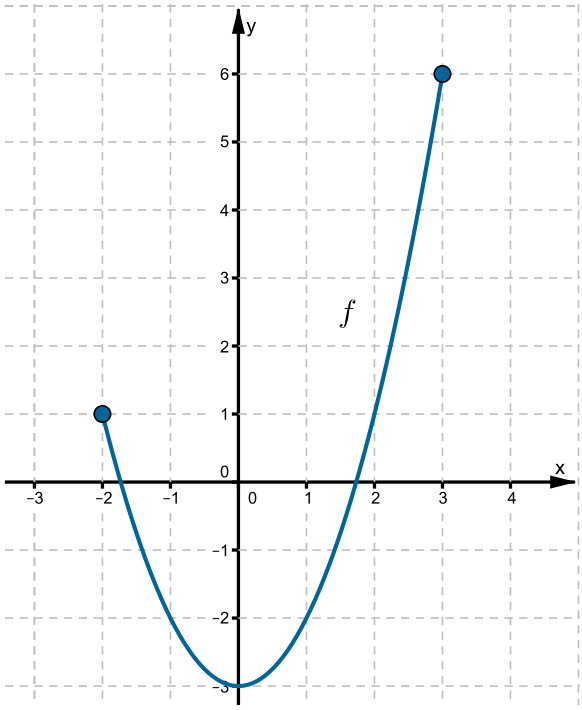


Najmniejsza wartość funkcji g

- jest równa 4
- nie istnieje
- jest równa -2

Ćwiczenie 7

Wykres funkcji f przedstawiony jest na rysunku.

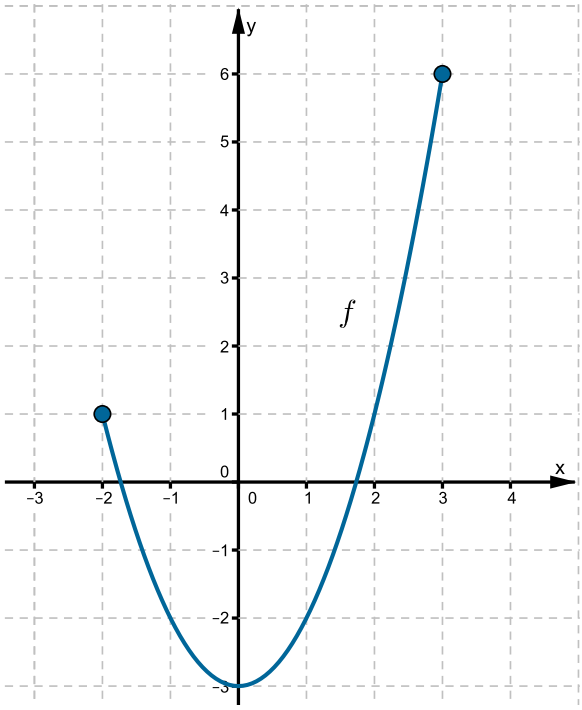


Zbiorem wartości funkcji jest

- ○ $\langle -3, 6 \rangle$
- ○ $\langle 1, 6 \rangle$
- ○ $(-3, 6)$
- ○ $(-2, 3)$

Ćwiczenie 8

Wykres funkcji f przedstawiony jest na rysunku.

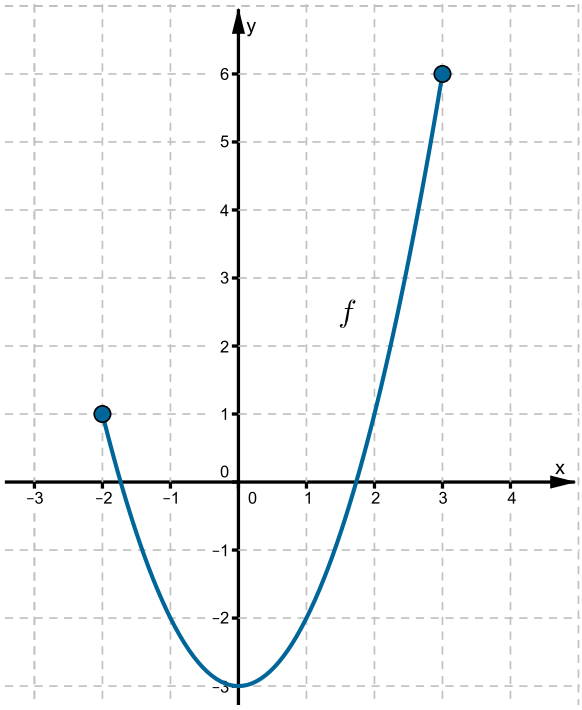


Największa wartość funkcji f

- jest równa 6
- nie istnieje
- jest równa 1

Ćwiczenie 9

Wykres funkcji f przedstawiony jest na rysunku.

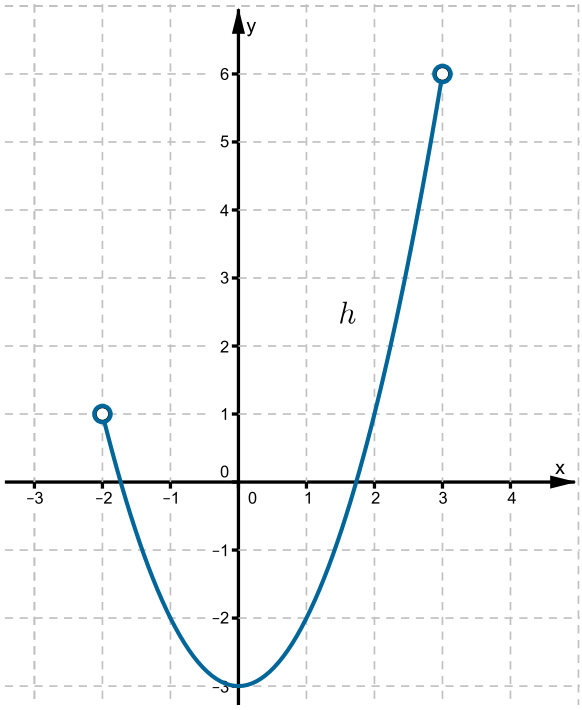


Najmniejsza wartość funkcji

- jest równa 1
- nie istnieje
- jest równa -3

Ćwiczenie 10

Wykres funkcji h przedstawiony jest na rysunku.

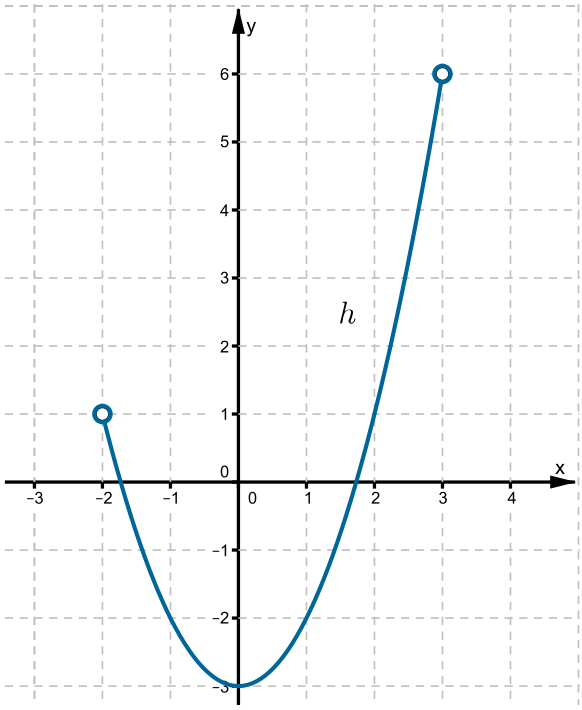


Zbiorem wartości funkcji jest

- ○ $\langle -3,\ 6)$
- ○ $\langle 1, 6\rangle$
- ○ $(-2, 3)$
- ○ $\langle -3, 6\rangle$

Ćwiczenie 11

Wykres funkcji h przedstawiony jest na rysunku.

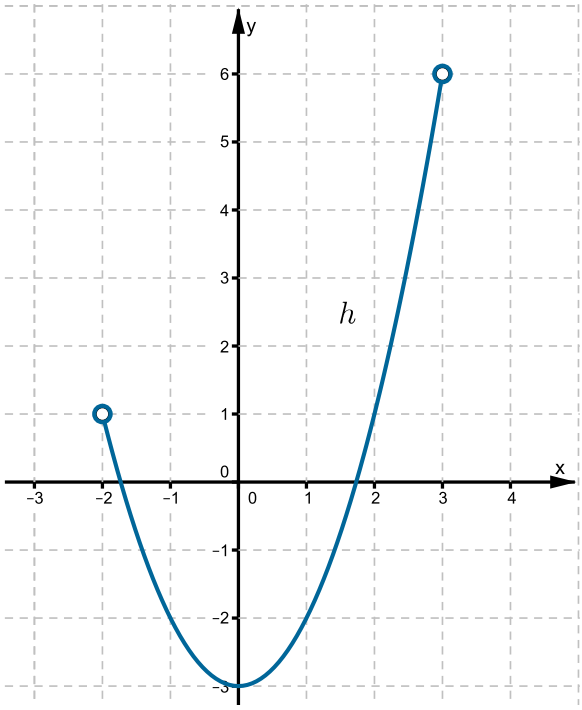


Największa wartość funkcji h

- jest równa 6
- nie istnieje
- jest równa 1

Ćwiczenie 12

Wykres funkcji h przedstawiony jest na rysunku.



Najmniejsza wartość funkcji h

- jest równa -2 dla argumentu $\mathrm{x} = 1$
- jest równa -3 dla argumentu $\mathrm{x} = 0$
- nie istnieje

Ćwiczenie 13

Na rysunku przedstawiony jest wykres funkcji t. Odczytaj z wykresu

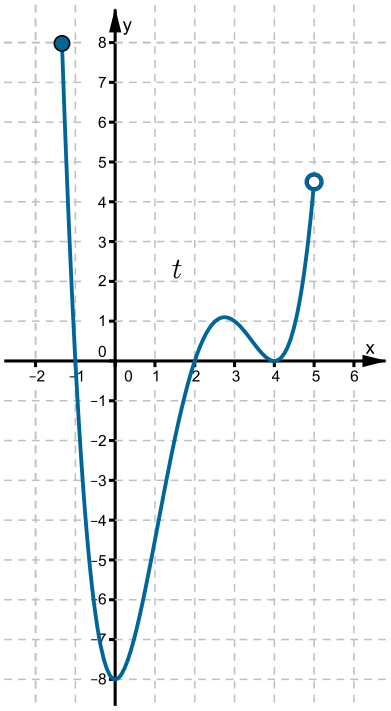
a. zbiór wartości funkcji t,

b. najmniejszą wartość funkcji t,

c. największą wartość funkcji t,

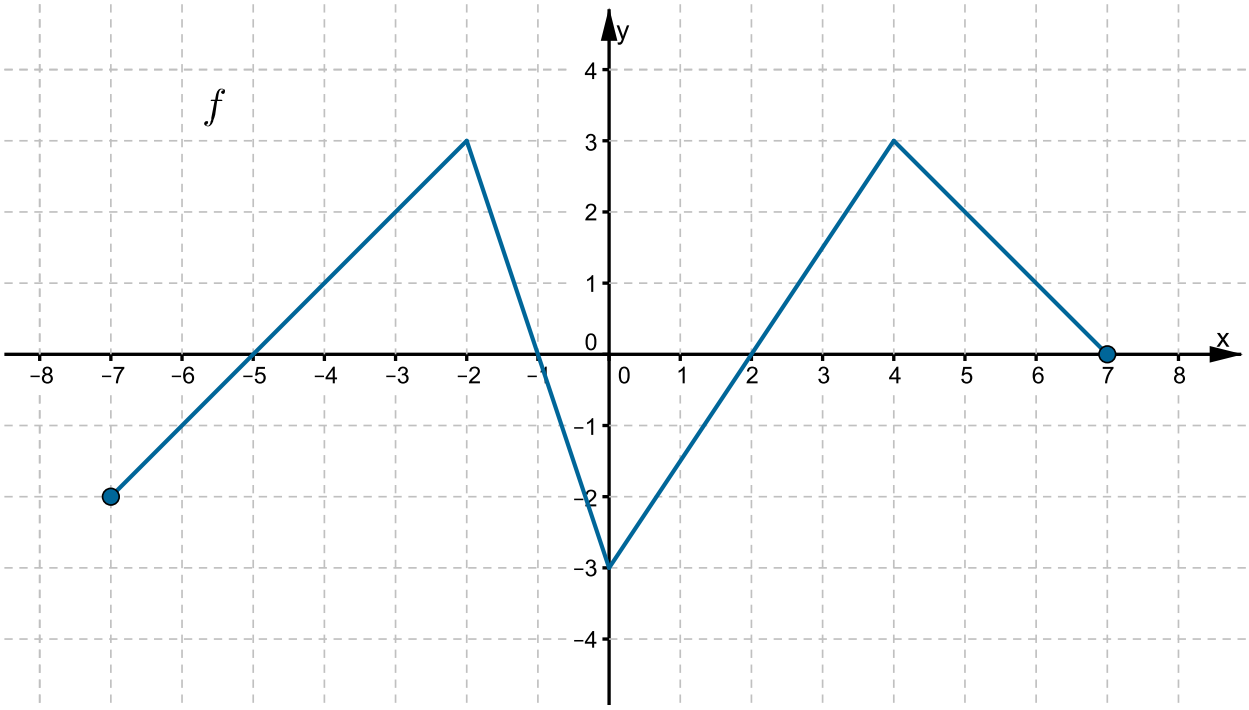
d. miejsca zerowe funkcji t,

e. maksymalny przedział, w którym funkcja t przyjmuje wartości ujemne.



Ćwiczenie 14

Na rysunku przedstawiony jest wykres funkcji f.

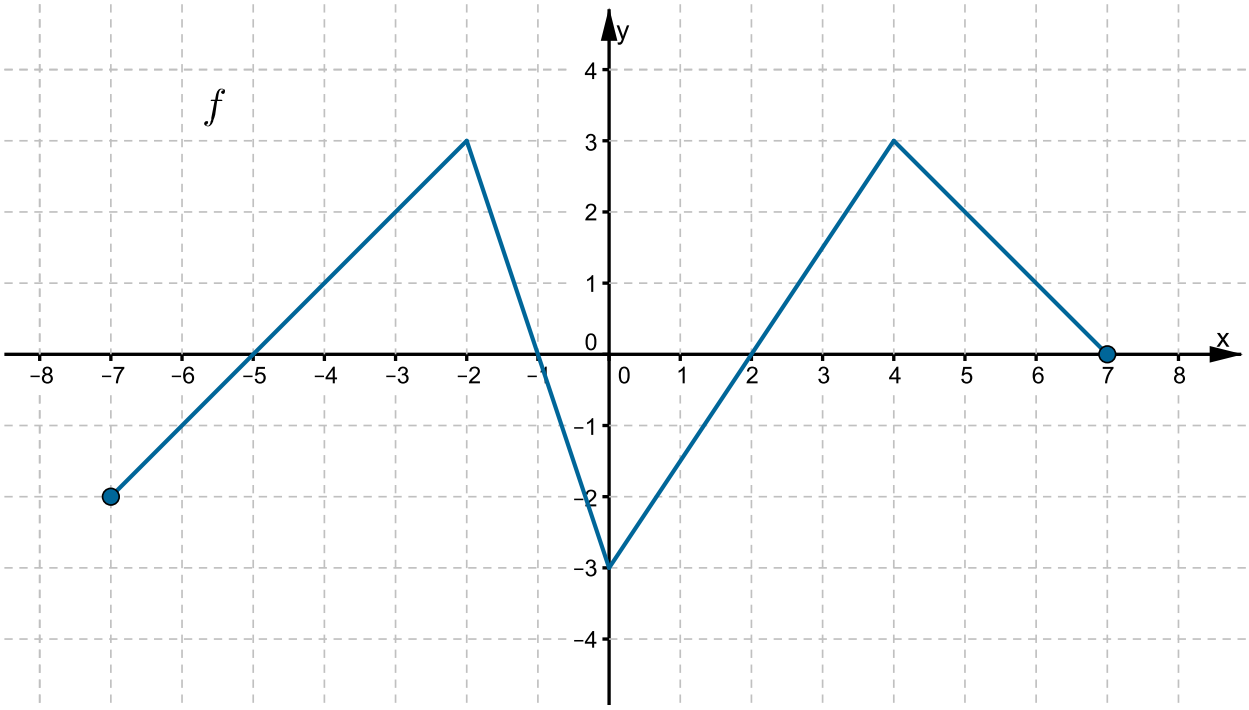


Ile miejsc zerowych ma funkcja f?

- 4
- nieskończenie wiele
- 3
- 5

Ćwiczenie 15

Na rysunku przedstawiony jest wykres funkcji f.

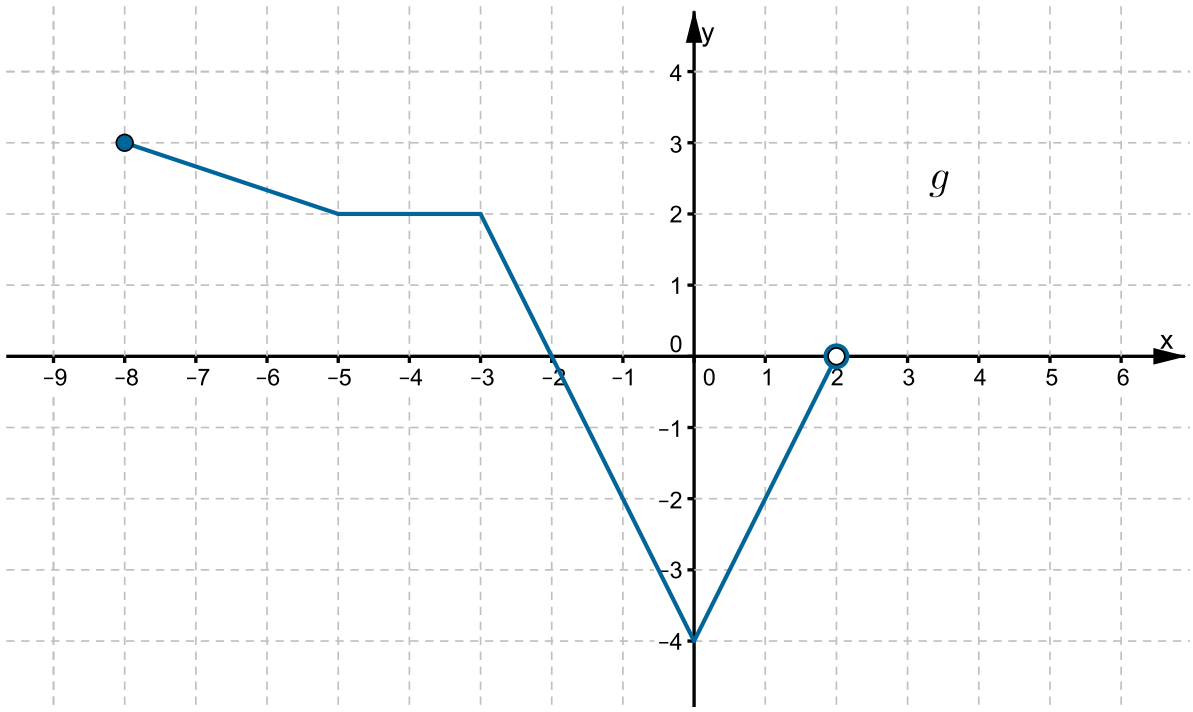


Zaznacz wszystkie miejsca zerowe funkcji f.

- [ ] $x = -3$
- [ ] $x = 7$
- [ ] $x = 2$
- [ ] $x = -5$
- [ ] $x = -1$
- [ ] $x = -6$

Ćwiczenie 16

Na rysunku przedstawiony jest wykres funkcji g.

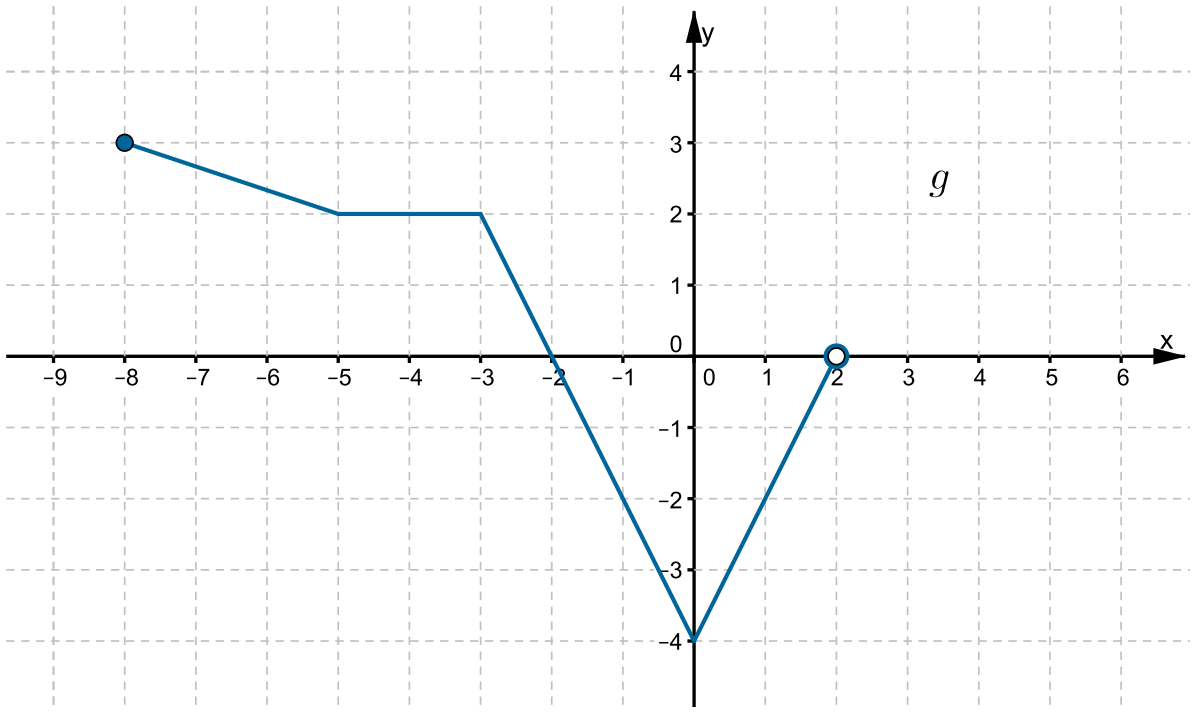


Ile miejsc zerowych ma ta funkcja?

- ◯ 1
- ◯ nieskończenie wiele
- ◯ 0
- ◯ 2

Ćwiczenie 17

Na rysunku przedstawiony jest wykres funkcji g.

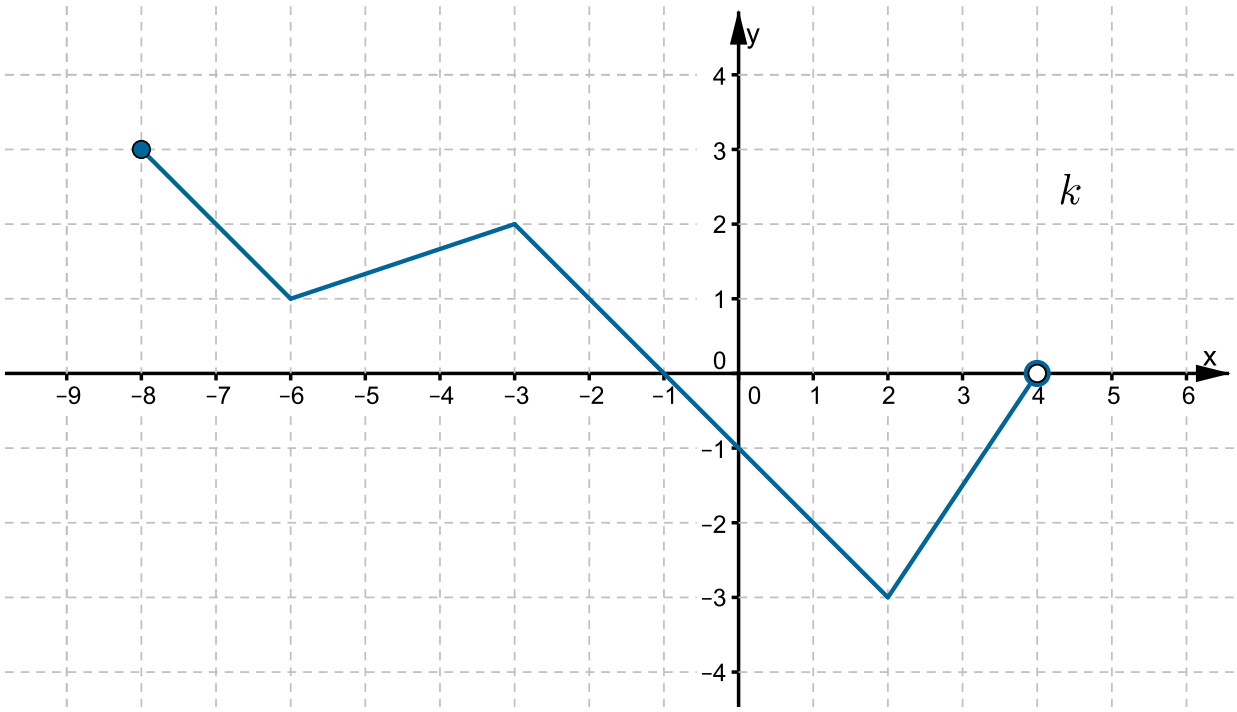


Zaznacz wszystkie miejsca zerowe funkcji g.

- [ ] $x = -2$
- [ ] $x = 2$
- [ ] $x = -3$
- [ ] $x = -1$
- [ ] $x = -4$

Ćwiczenie 18

Na rysunku przedstawiony jest wykres funkcji k.



Wskaż maksymalny przedział, w którym funkcja k przyjmuje wartości dodatnie.

- $x \in (-8,\ -1\rangle$
- $x \in (-8,\ -1)$
- $x \in \langle -8,\ -1\rangle$
- $x \in \langle -8,\ -1)$

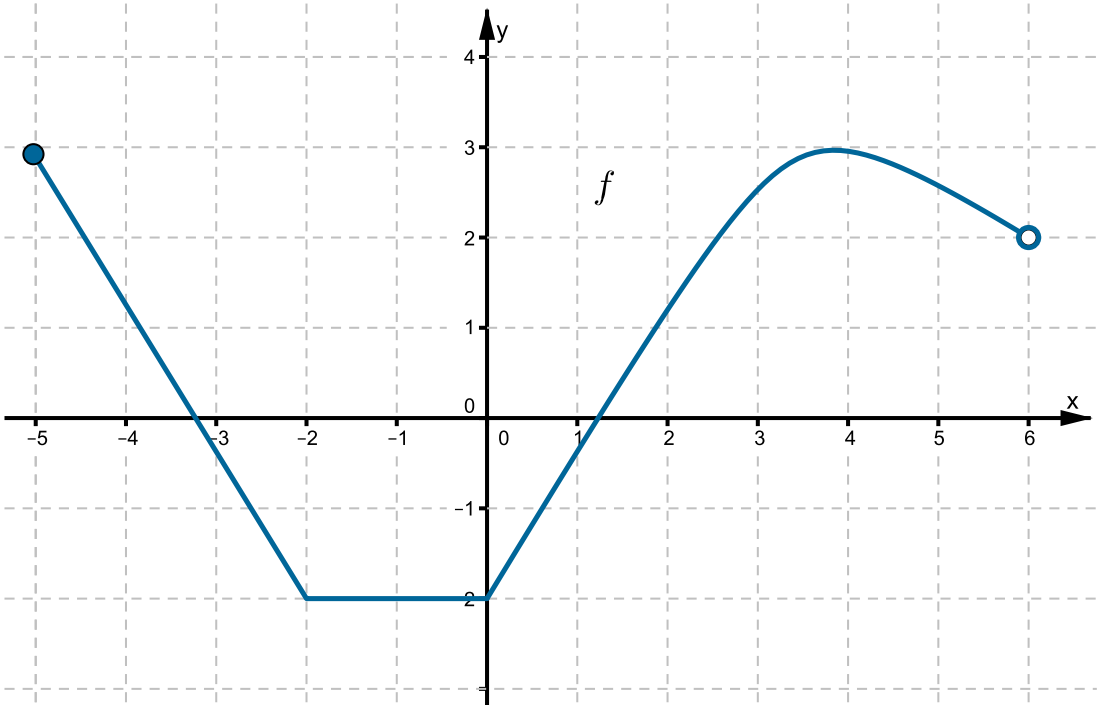
Ćwiczenie 19

Na rysunku przedstawiony jest wykres funkcji f. Wyznacz:

a. $f\left(2-\sqrt{10}\right)$,

b. znak iloczynu $f(1)\cdot f(-3)$,

c. różnicę między wartością największą a wartością najmniejszą funkcji f.



Ćwiczenie 20

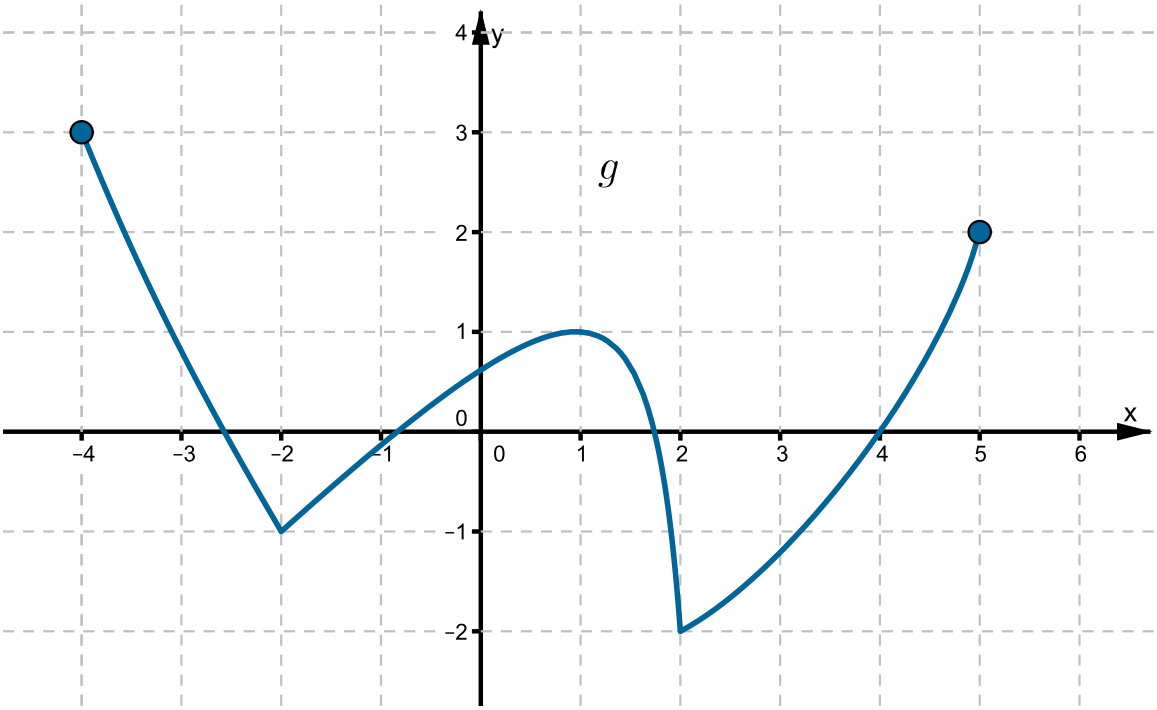
Na rysunku przedstawiony jest wykres funkcji g. Odczytaj z niego liczbę rozwiązań równania.

a. $g(x) = 1$

b. $g(x) = 2$

c. $g(x) = 3$

d. $g(x) = \frac{1}{2}$



Ćwiczenie 21

Na rysunkach przedstawione są wykresy funkcji h i k.
Funkcja f określona jest następująco

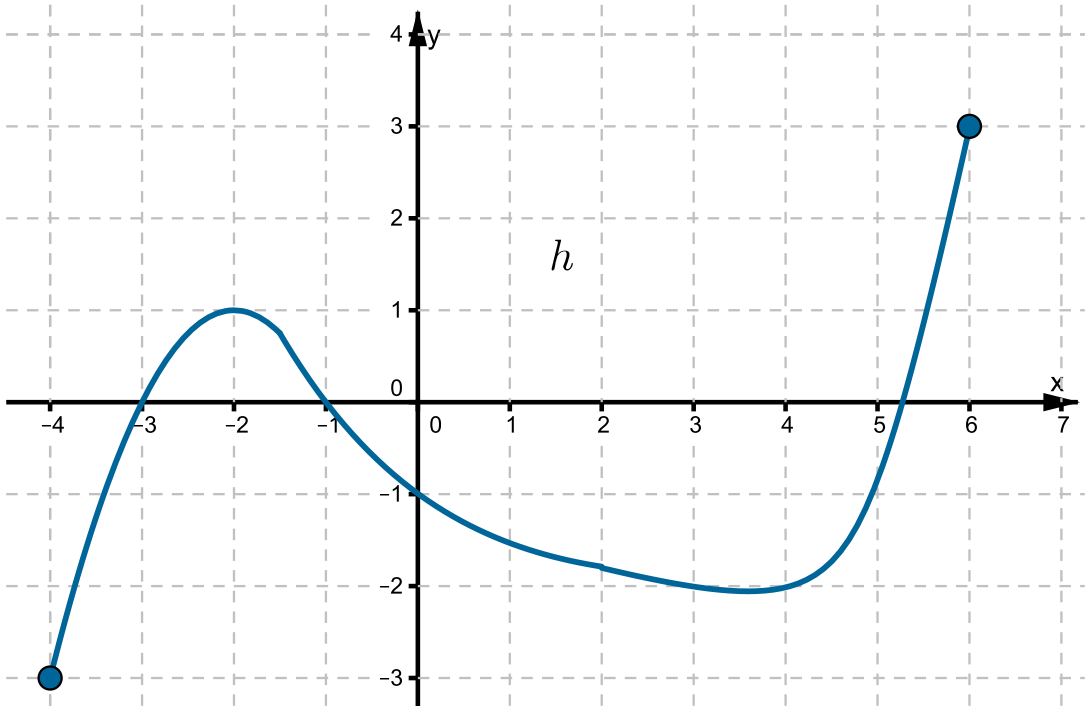
$$f(x) = \begin{cases} h(x) & \text{dla} \quad -4 \leq x \leq -1 \\ k(x) & \text{dla} \quad -1 < x \leq 5 \end{cases}.$$

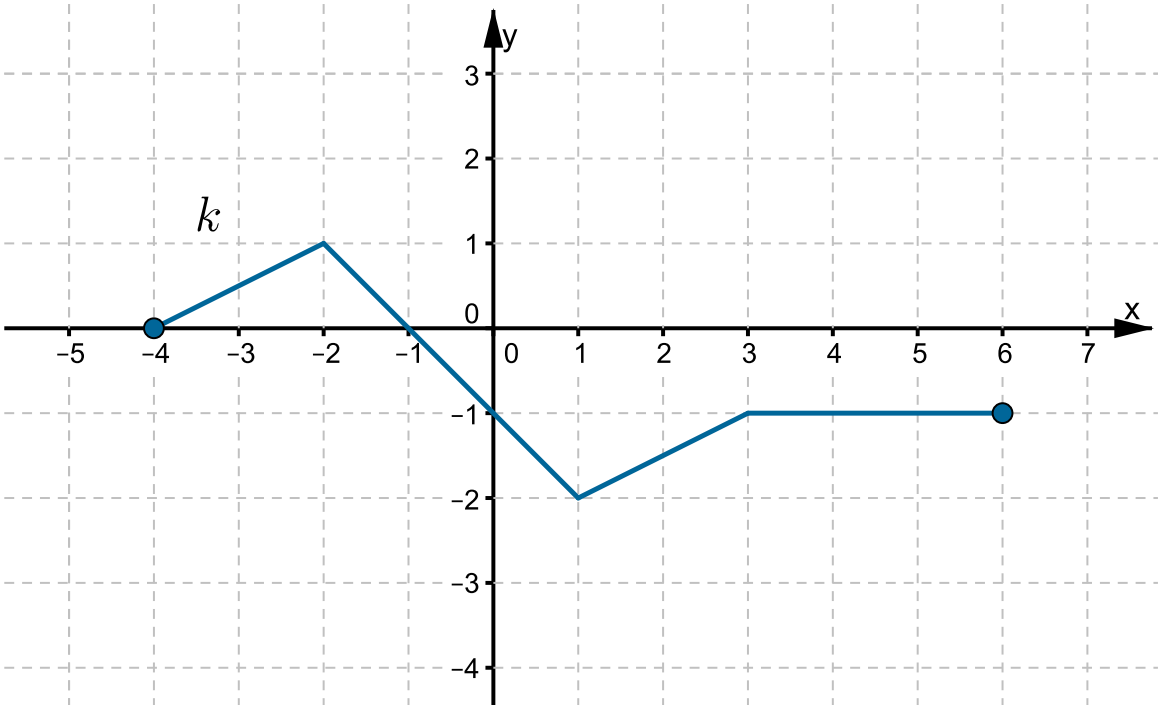
a. Podaj miejsca zerowe funkcji f.

b. Podaj wartość najmniejszą oraz wartość największą funkcji f.

c. Podaj wszystkie argumenty, dla których funkcja f przyjmuje wartości dodatnie.

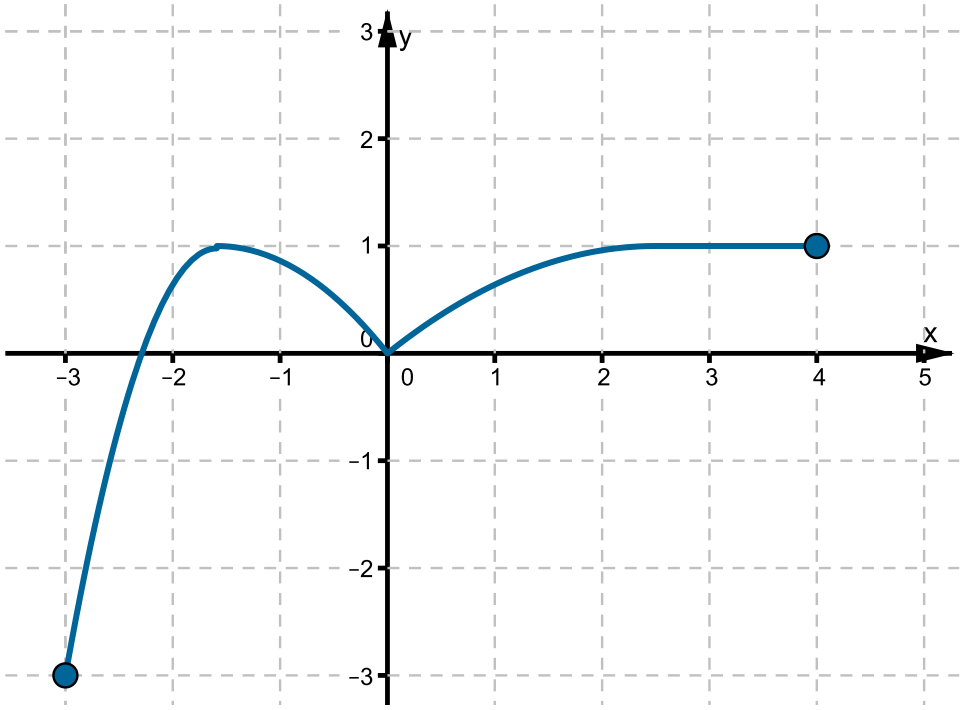
d. Ile rozwiązań ma równanie $f(x) = -1$?




y
x
k
3
2
1
0
−1
−2
−3
−4
−5
−4
−3
−2
−1
0
1
2
3
4
5
6
7

Ćwiczenie 22

Rysunek przedstawia wykres funkcji f.



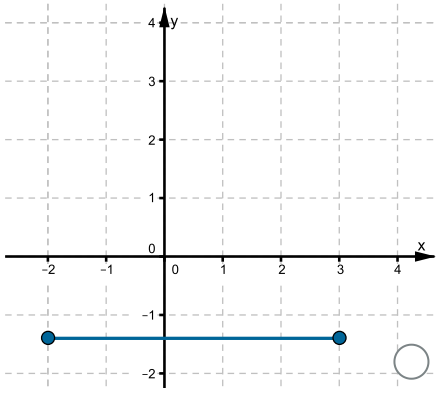
Podaj liczbę miejsc zerowych funkcji f.

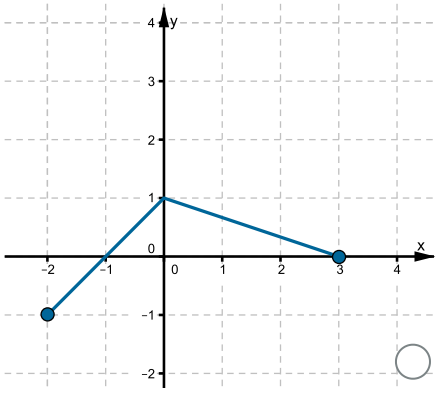
- ○ 1
- ○ 2
- ○ 4
- ○ 3

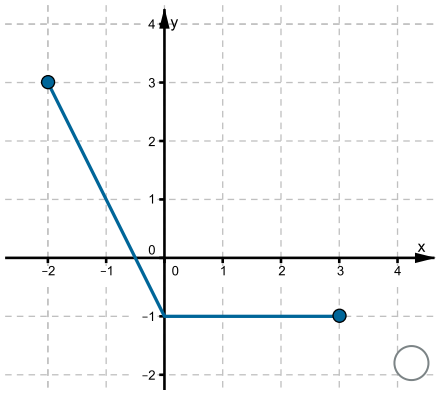
Zadania. Część II

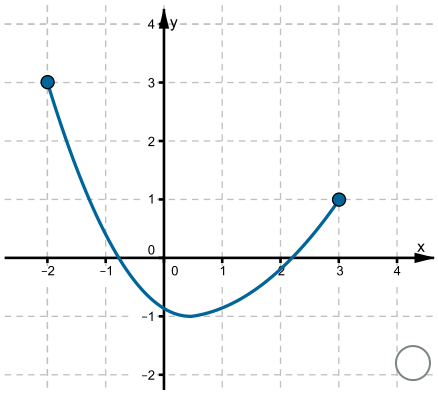
Ćwiczenie 1

Wskaż wykres funkcji, która w przedziale $\langle -2, 3 \rangle$ ma dokładnie jedno miejsce zerowe.



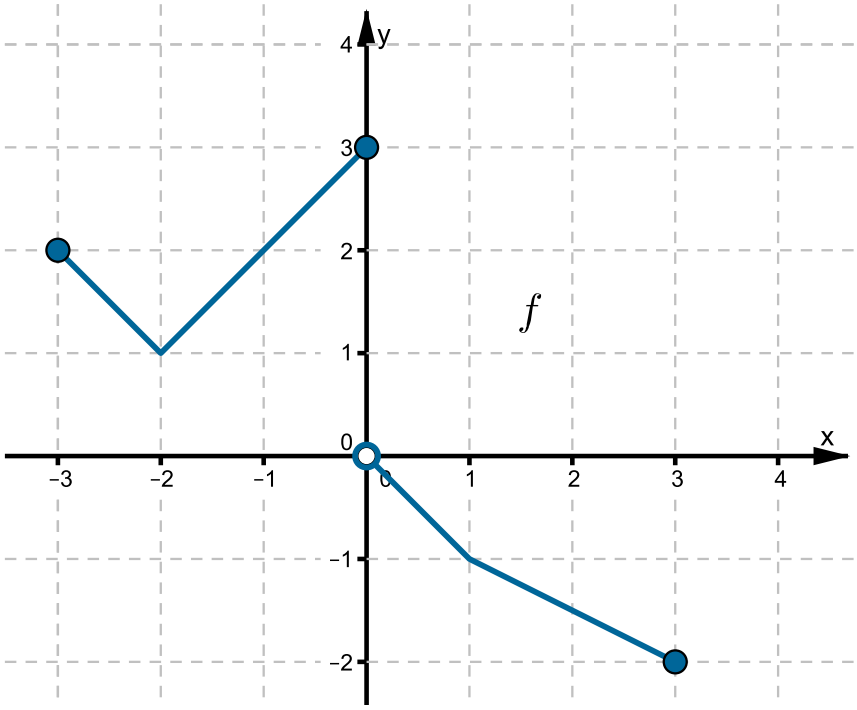






Ćwiczenie 2

Na rysunku przedstawiono wykres funkcji $y = f(x)$.

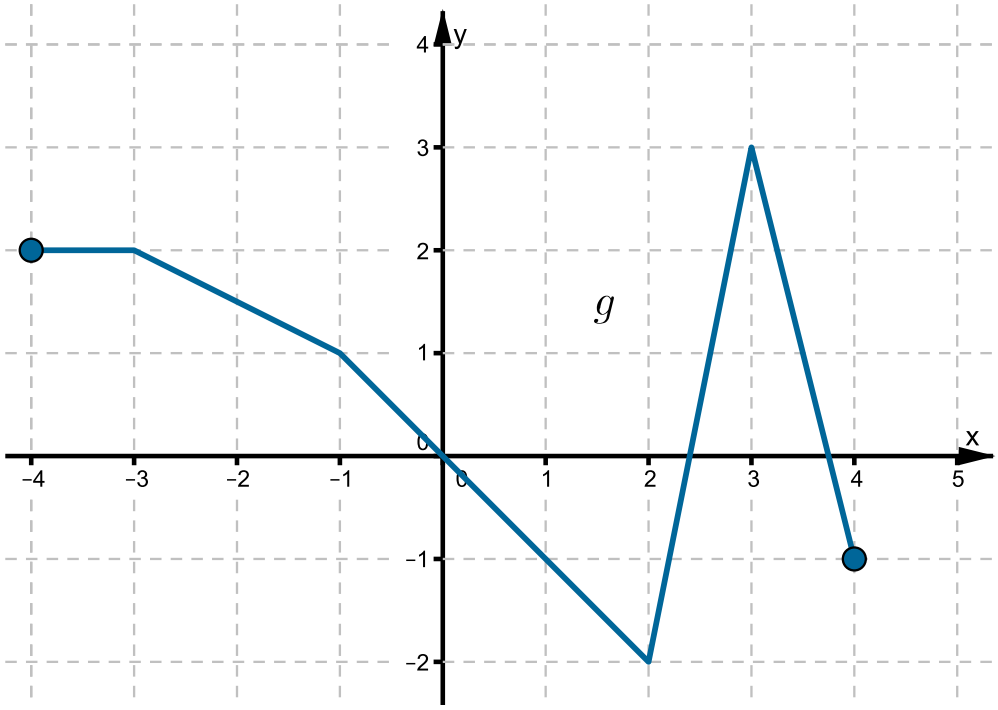


Zbiorem wartości funkcji jest

- $\langle -2, 0\rangle \cup \langle 1, 3\rangle$
- $\langle -3, 3\rangle$
- $\langle -2,\ 0) \cup \langle 1, 3\rangle$
- $\langle -2, 3\rangle$

Ćwiczenie 3

Rysunek przedstawia wykres funkcji g.

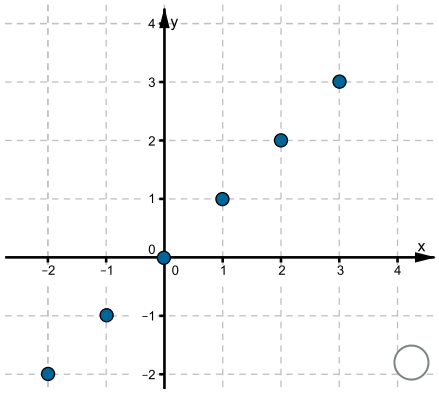


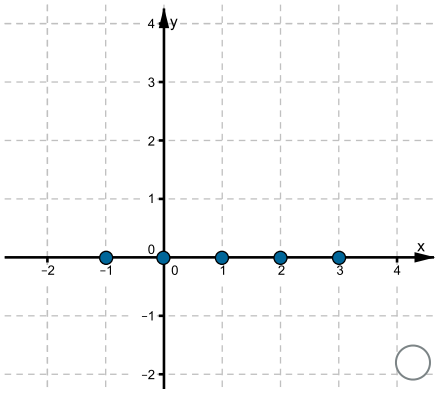
Zaznacz nierówność prawdziwą.

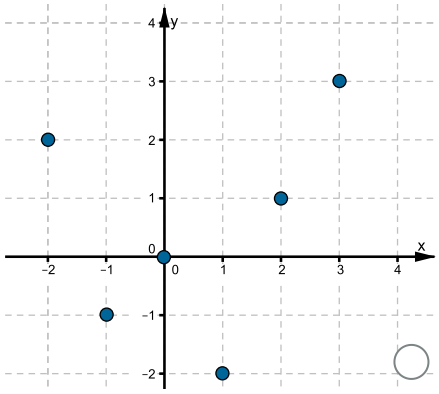
- $g(-2) < g(4)$
- $g(0) < g(2)$
- $g(-3) < g(-4)$
- $g(1) < g(-1)$

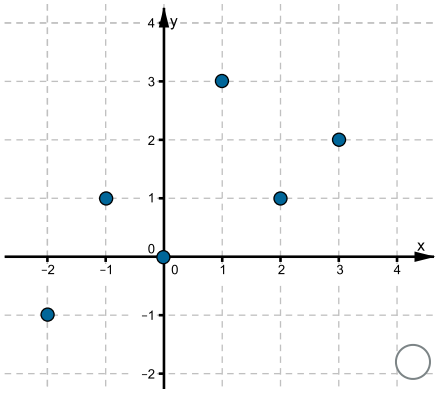
Ćwiczenie 4

Wskaż wykres funkcji, której zbiorem wartości jest $\{-1,\ 0,\ 1,\ 2,\ 3\}$.



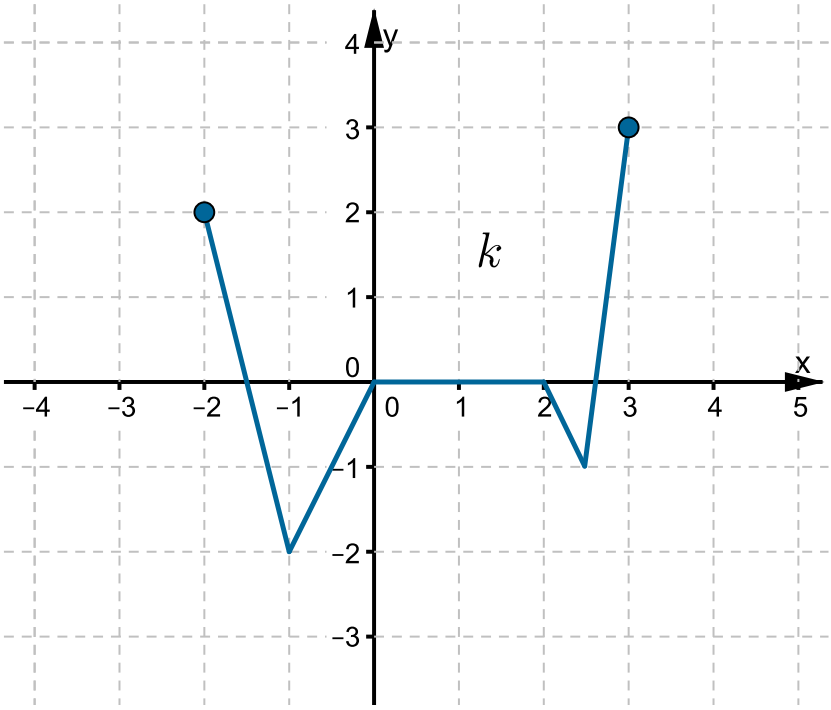






Ćwiczenie 5

Na rysunku jest przedstawiony wykres funkcji k.

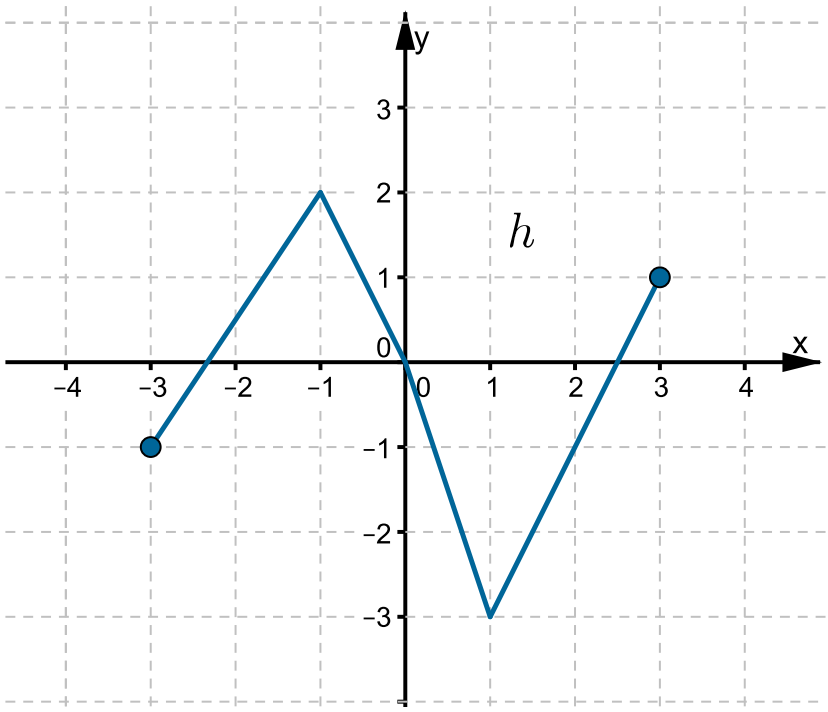


Które równanie ma dokładnie 4 różne rozwiązania?

- $k(x) = 1$
- $k(x) = -0{,}5$
- $k(x) = 0$
- $k(x) = 0{,}5$

Ćwiczenie 6

Na rysunku przedstawiony jest wykres funkcji h.

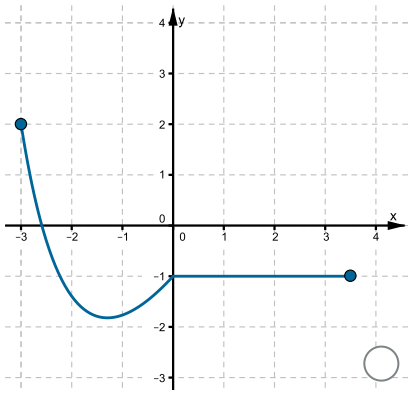


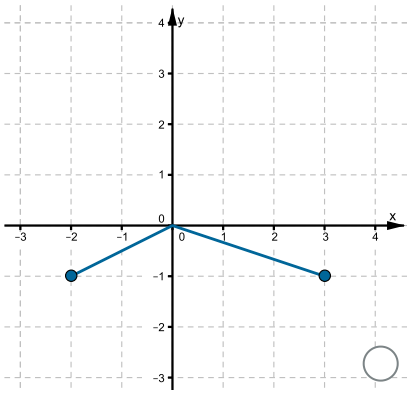
Suma wartości najmniejszej i wartości największej funkcji h jest równa

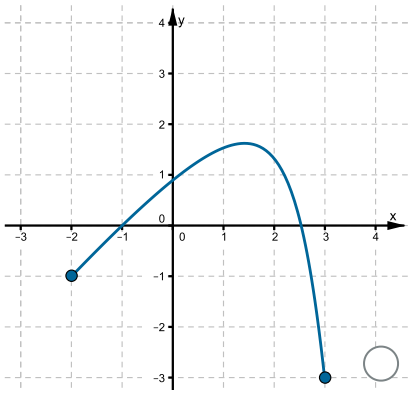
- -1
- 2
- 0
- 1

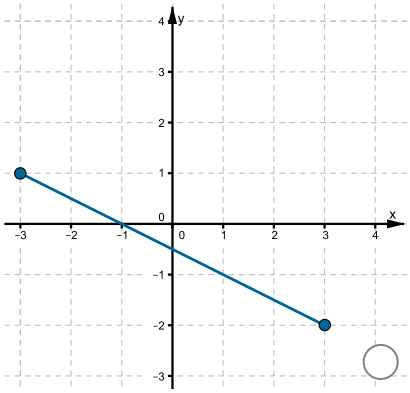
Ćwiczenie 7

Wskaż wykres funkcji, która dla każdego argumentu z przedziału $\langle -2, 2 \rangle$ przyjmuje wartości ujemne.









Ćwiczenie 8

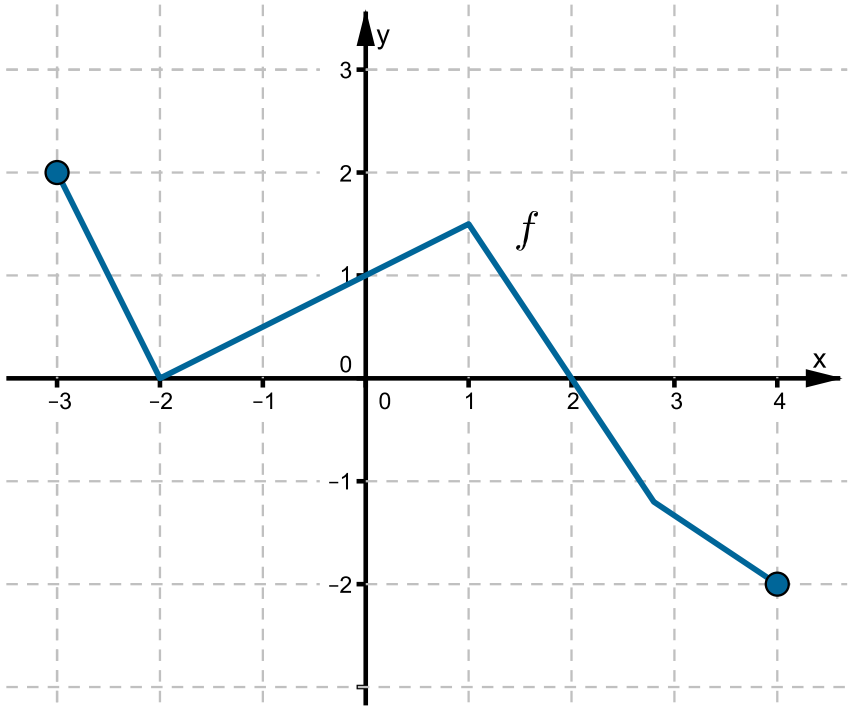
Na rysunku przedstawiony jest wykres funkcji f.

a. Podaj wartość funkcji dla $x = 0$.

b. Zapisz zbiór wartości funkcji f.

c. Wypisz miejsca zerowe tej funkcji.

d. Podaj wszystkie argumenty, dla których funkcja przyjmuje wartości nieujemne.



Ćwiczenie 9

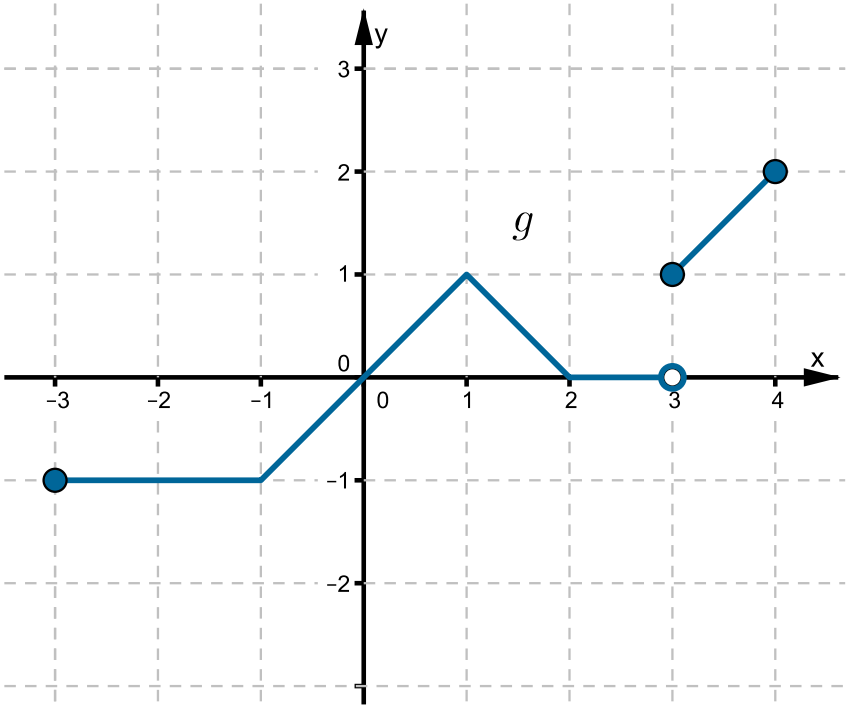
Na rysunku przedstawiono wykres funkcji g. Podaj wszystkie argumenty, dla których funkcja g przyjmuje wartość

a. 0

b. 1

c. -1

d. 2



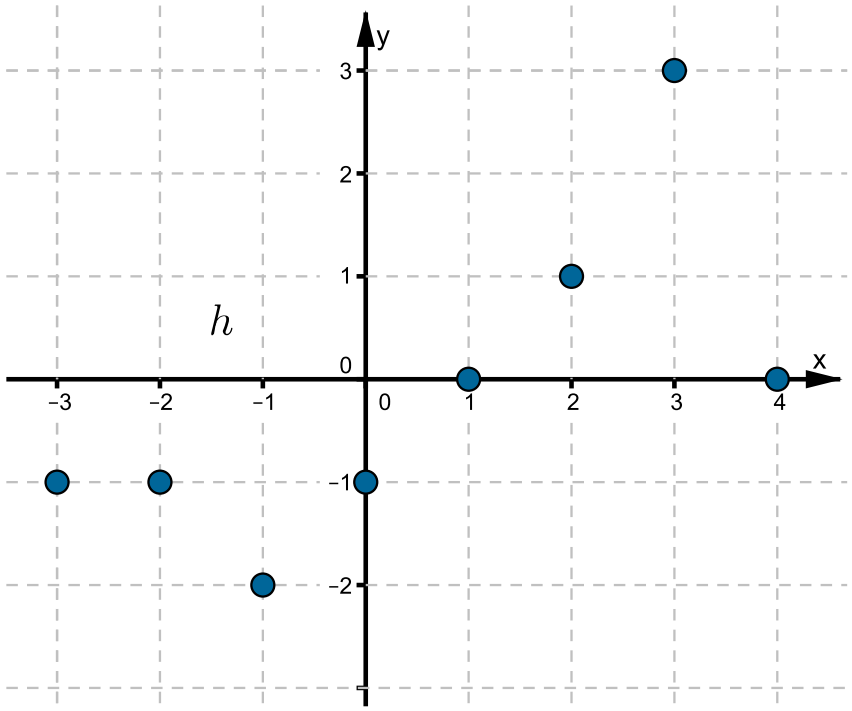
Ćwiczenie 10

Z wykresu funkcji h odczytaj

a. najmniejszą wartość tej funkcji

b. dla jakich x funkcja h przyjmuje wartości niedodatnie

c. jakie wartości przyjmuje funkcja h dla każdego z argumentów dodatnich



Ćwiczenie 11

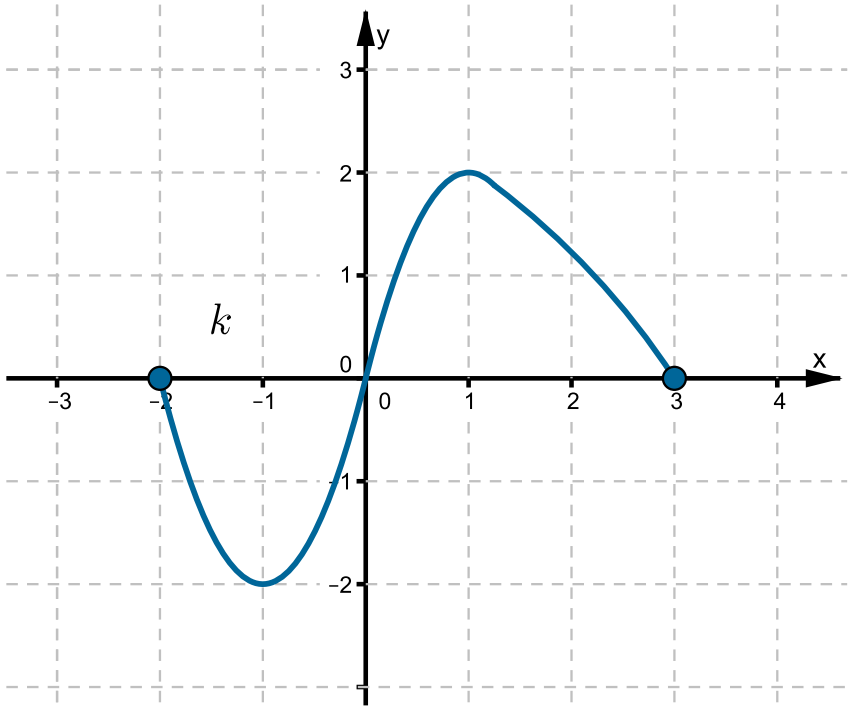
Korzystając z przedstawionego wykresu funkcji k, odczytaj

a. ile miejsc zerowych ma ta funkcja

b. dla jakiego argumentu funkcja k przyjmuje wartość największą

c. dla jakiego argumentu funkcja k przyjmuje wartość najmniejszą

d. zbiór wartości funkcji k



Ćwiczenie 12

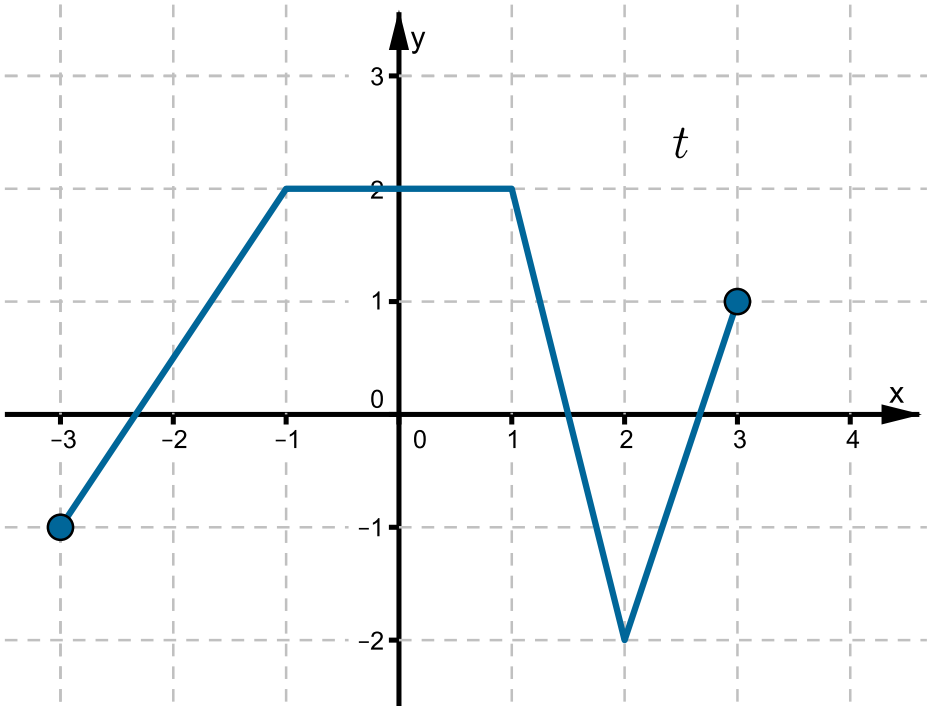
Na rysunku przedstawiony jest wykres funkcji t. Odczytaj z wykresu

a. najmniejszą wartość funkcji t w przedziale $\langle -3,\ -1\rangle$

b. najmniejszą wartość funkcji t w przedziale $\langle -1, 1\rangle$

c. najmniejszą wartość funkcji t w przedziale $\langle 0, 2\rangle$

d. najmniejszą wartość funkcji t w przedziale $\langle 1, 3\rangle$



Ćwiczenie 13

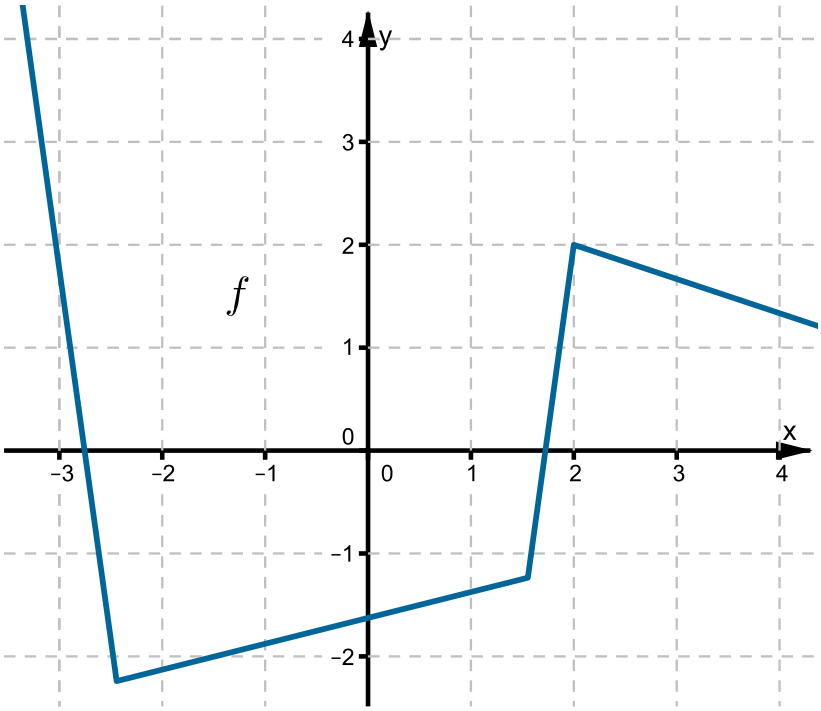
Korzystając z wykresu funkcji f, ustal znak

a. iloczynu $f(2) \cdot f(1)$

b. różnicy $f(3) - f(0)$

c. sumy $f(-2) + f(3)$

d. ilorazu $\frac{f(4)}{f(-3)}$



Ćwiczenie 14

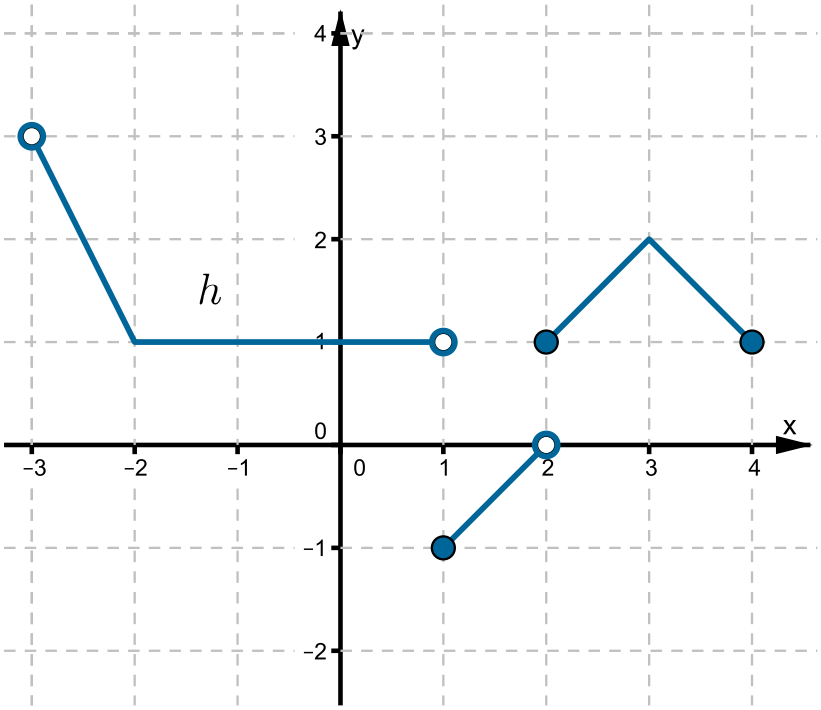
Z przedstawionego na rysunku wykresu funkcji h, odczytaj

a. zbiór wartości tej funkcji

b. wszystkie argumenty, dla których funkcja h przyjmuje wartości ujemne

c. dla ilu argumentów funkcja h przyjmuje wartość 2

d. wszystkie argumenty, dla których funkcja h przyjmuje wartości większe od 1



Ćwiczenie 15

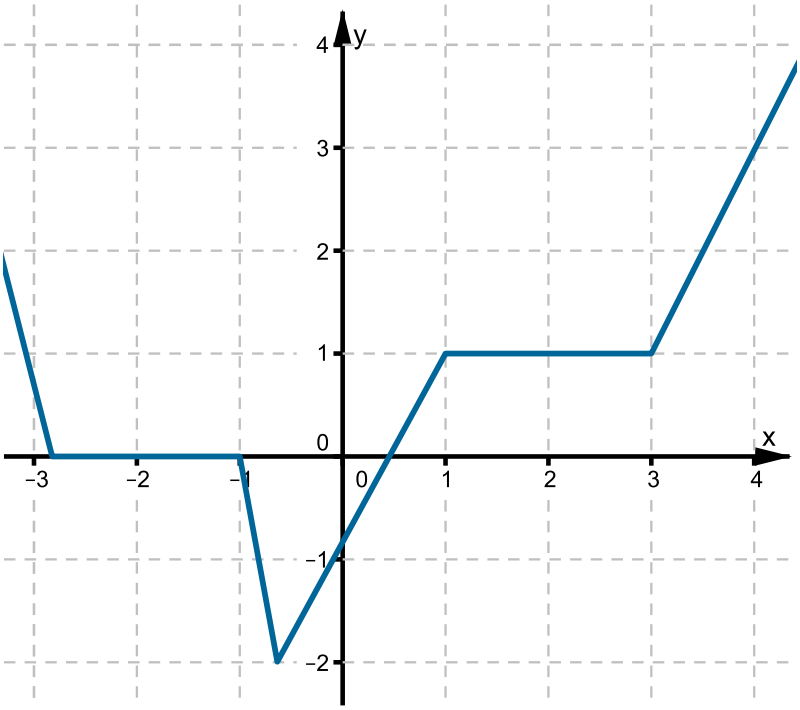
Na rysunku przedstawiony jest wykres funkcji t. Odczytaj z wykresu

a. wartość $t\left(\sqrt{2}\right)$

b. znak $t(-0{,}3)$

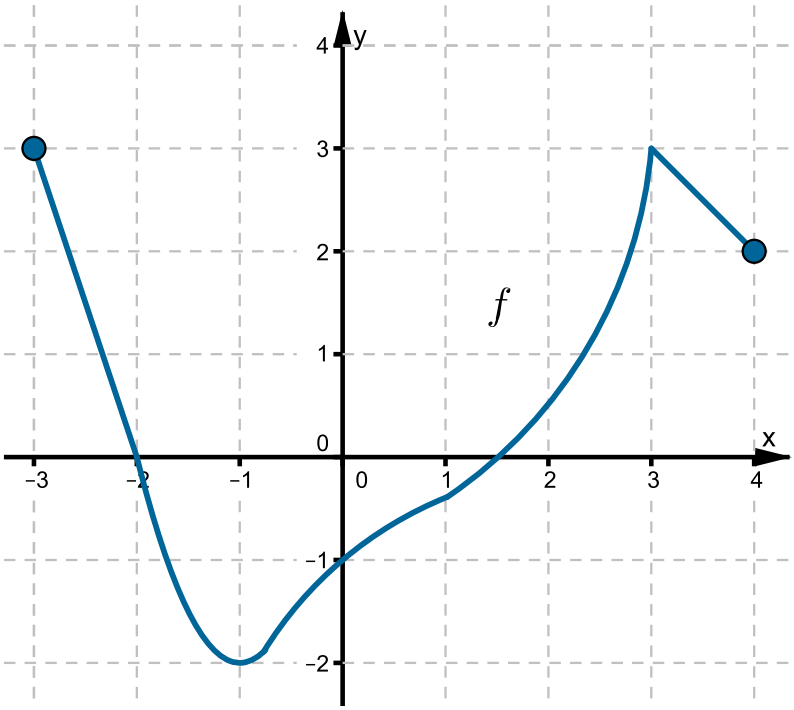
c. wartość iloczynu $t\left(\frac{25}{17}\right) \cdot t\left(-\frac{34}{29}\right)$

d. znak różnicy $t(\pi) - t(3 - \pi)$



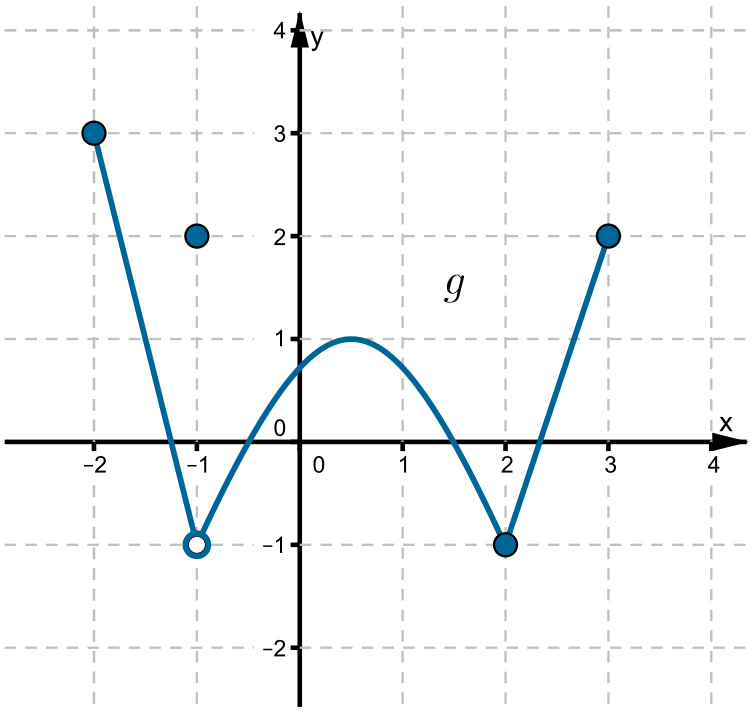
Ćwiczenie 16

Na rysunku przedstawiony jest wykres funkcji f. Odczytaj z niego różnicę między wartością największą a wartością najmniejszą funkcji f.



Ćwiczenie 17

Wykres funkcji g przedstawiony jest na rysunku. Ustal liczbę rozwiązań równania $g(x) = m$ w zależności od m.



Ćwiczenie 18

Sporządź przykładowy wykres funkcji, której dziedziną jest zbiór $\{-2,3\}$, a zbiorem wartości jest przedział $\{-3,1\}$.

Ćwiczenie 19

Sporządź przykładowy wykres funkcji, która posiada dwa miejsca zerowe, a jej dziedziną jest zbiór $\{-4;0\}$.

Ćwiczenie 20

Sporządź przykładowy wykres funkcji, która spełnia wszystkie podane warunki:

a. największa wartość funkcji wynosi 3,

b. najmniejsza wartość funkcji wynosi -1.

Ćwiczenie 21

Sporządź przykładowy wykres funkcji, która spełnia wszystkie podane warunki:

a. w przedziale $(-4,0)$ funkcja jest dodatnia,

b. dziedzina funkcji to $(-4,0) \cup (0,5>$,

c. zbiór wartości funkcji to $\{-2,0,1\}$.

Ćwiczenie 22

Sporządź przykładowy wykres funkcji, która spełnia wszystkie podane warunki:

a. dziedziną funkcji jest $(-1,1) \cup (1,5 >$,

b. zbiór wartości to $\{-2,0,1\}$,

c. funkcja posiada dwa miejsca zerowe,

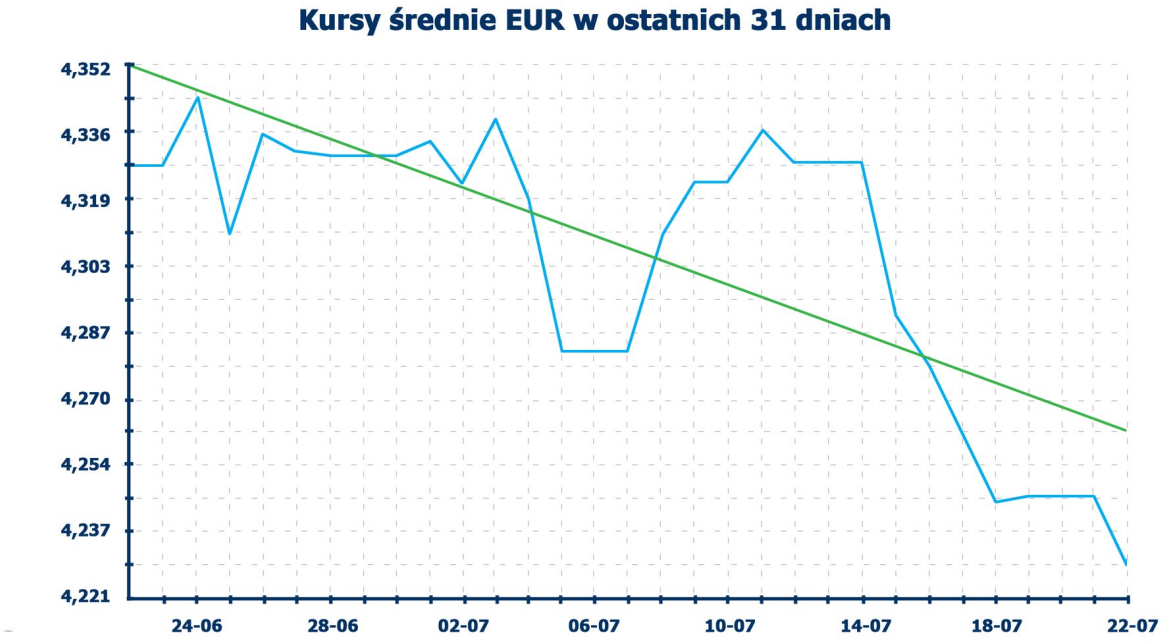
d. funkcja osiąga minimum tylko dla $x = 2$.

Przykłady zastosowania funkcji

W analizach zjawisk gospodarczych bardzo często używa się sformułowań: „tendencja spadkowa", „wzrost sprzedaży", „nagły spadek notowań" itp. Pojęcia te są ściśle związane ze zmniejszaniem się, zwiększaniem lub stabilizacją pewnych wielkości wraz z upływem czasu.

Przykład 1

Wykres przedstawia zmiany kursu euro w odniesieniu do złotego (1 EUR do 1 PLN), w okresie od 24.06. 2013 r do 22.07.2013 r.



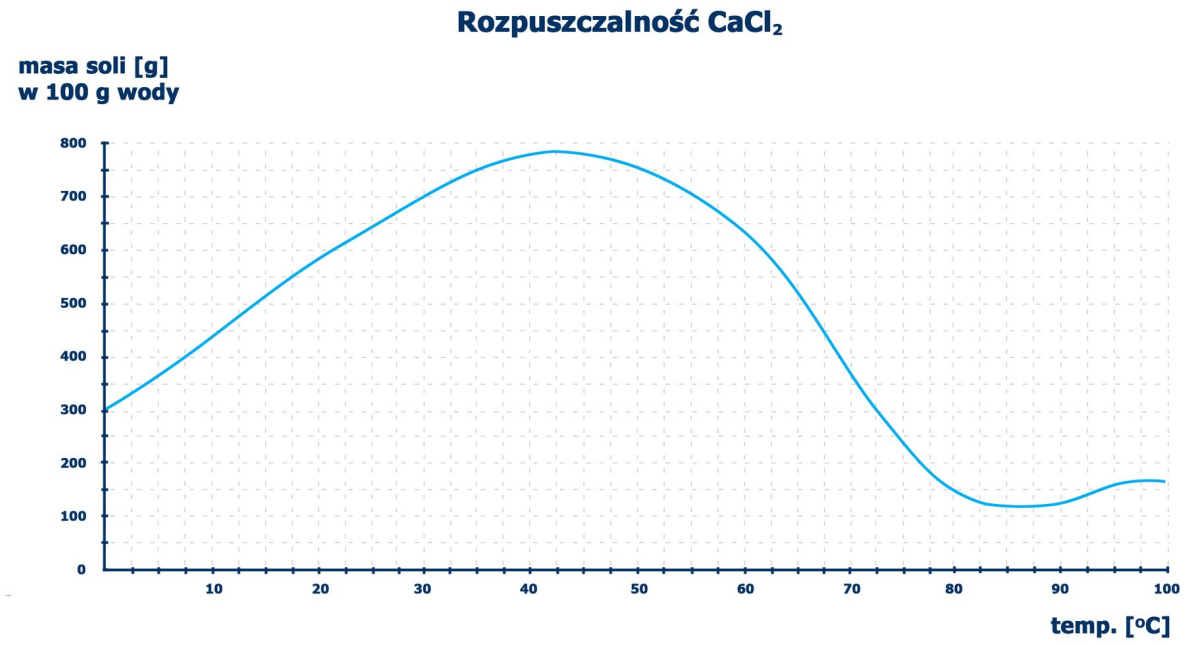
Analizując wykres, odczytujemy, jak zmieniał się średni kurs euro w tym czasie. Zauważmy, że w niektórych okresach kurs wzrastał, a w innych spadał lub nie zmieniał się.

- W okresie od 5 do 11 lipca kurs euro wzrósł z 4,282 zł do 4,336 zł.
- W ciągu pięciu dni, od 14 do 18 lipca kurs euro nieustannie spadał – w ciągu tego okresu kurs spadł z 4,333 zł do 4,245 zł, a więc w efekcie spadł o blisko 9 groszy.
- Między 18 lipca a 19 lipca jego wartość ustaliła się na poziomie 4,245 zł.

Podsumowując cały analizowany okres, stwierdzamy, że w ciągu obserwowanych 30 dni kurs euro miał tendencję spadkową, co pokazuje widoczna w tle linia trendu.

Przykład 2

Ważną cechą niektórych związków chemicznych jest ich rozpuszczalność w wodzie. Rozpuszczalność jest definiowana jako masa substancji rozpuszczona w 100g wody. Nie wszystkie substancje rozpuszczają się równie łatwo, często ich wskaźnik rozpuszczalności jest zależny od temperatury wody. Na wykresie przedstawiano wykres rozpuszczalności chlorku wapnia (calcium chloratum - wzór chemiczny $\mathrm{CaC}\,l_2$) w zależności od temperatury wody.



Z wykresu możemy odczytać, że rozpuszczalność chlorku wapnia wzrasta, jeśli podgrzewamy wodę od temperatury zbliżonej do $0^\circ C$ do temperatury około $42^\circ C$. W przedziale od $42^\circ C$ do $83^\circ C$ rozpuszczalność spada do tego stopnia, że w 100 g wody o temperaturze $83^\circ C$ rozpuścimy mniej chlorku $\mathrm{CaC}\,l_2$ niż w lodowatej wodzie o temperaturze zbliżonej do $0^\circ C$.

Monotoniczność funkcji

Przykład 1

Obserwuj, jak przy zmianie argumentów zmieniają się wartości funkcji, o której mówimy, że jest funkcją rosnącą.

Zasób interaktywny dostępny pod adresem https://zpe.gov.pl/a/DRBFgBGnP

Przykład 2

Obserwuj, jak przy zmianie argumentów zmieniają się wartości funkcji, o której mówimy, że jest funkcją malejącą.

Zasób interaktywny dostępny pod adresem https://zpe.gov.pl/a/DRBFgBGnP

Przykład 3

Obserwuj, jak przy zmianie argumentów zmieniają się wartości funkcji, o której mówimy, że jest funkcją nierosnącą.

Zasób interaktywny dostępny pod adresem https://zpe.gov.pl/a/DRBFgBGnP

Przykład 4

Obserwuj, jak przy zmianie argumentów zmieniają się wartości funkcji, o której mówimy, że jest funkcją niemalejącą.

Zasób interaktywny dostępny pod adresem https://zpe.gov.pl/a/DRBFgBGnP

Każdą z czterech prezentowanych w powyższych przykładach funkcji nazywać będziemy funkcją monotoniczną.

Definicja: Funkcja rosnąca

Funkcja f jest określona w przedziale $\langle a; b\rangle$.
Jeżeli dla dowolnych $x_1, x_2 \in \langle a, b\rangle$ takich, że $x_1 < x_2$ spełniony jest warunek:

$$f(x_1) < f(x_2),$$

to mówimy, że funkcja f jest rosnąca w przedziale $\langle a, b\rangle$.

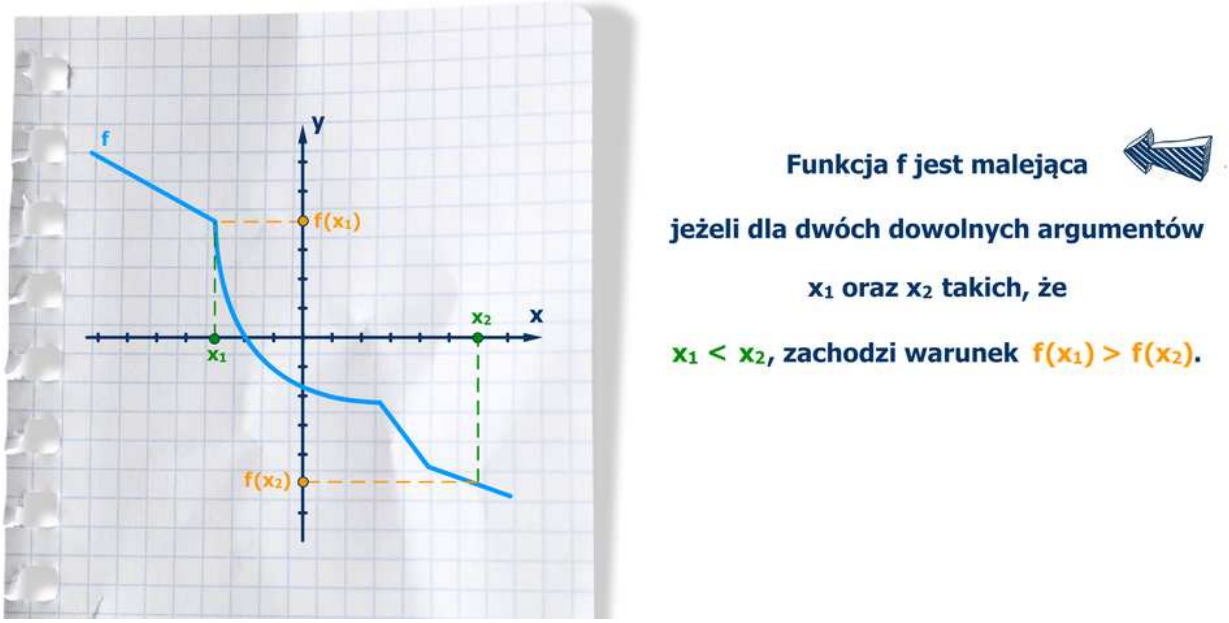
Definicja: Funkcja malejąca

Funkcja f jest określona w przedziale $\langle a; b\rangle$.
Jeżeli dla dowolnych $x_1, x_2 \in \langle a, b\rangle$ takich, że $x_1 < x_2$ spełniony jest warunek:

$$f(x_1) > f(x_2),$$

to mówimy, że funkcja f jest malejąca w przedziale $\langle a, b\rangle$.

Funkcja malejąca



Film dostępny na portalu epodreczniki.pl

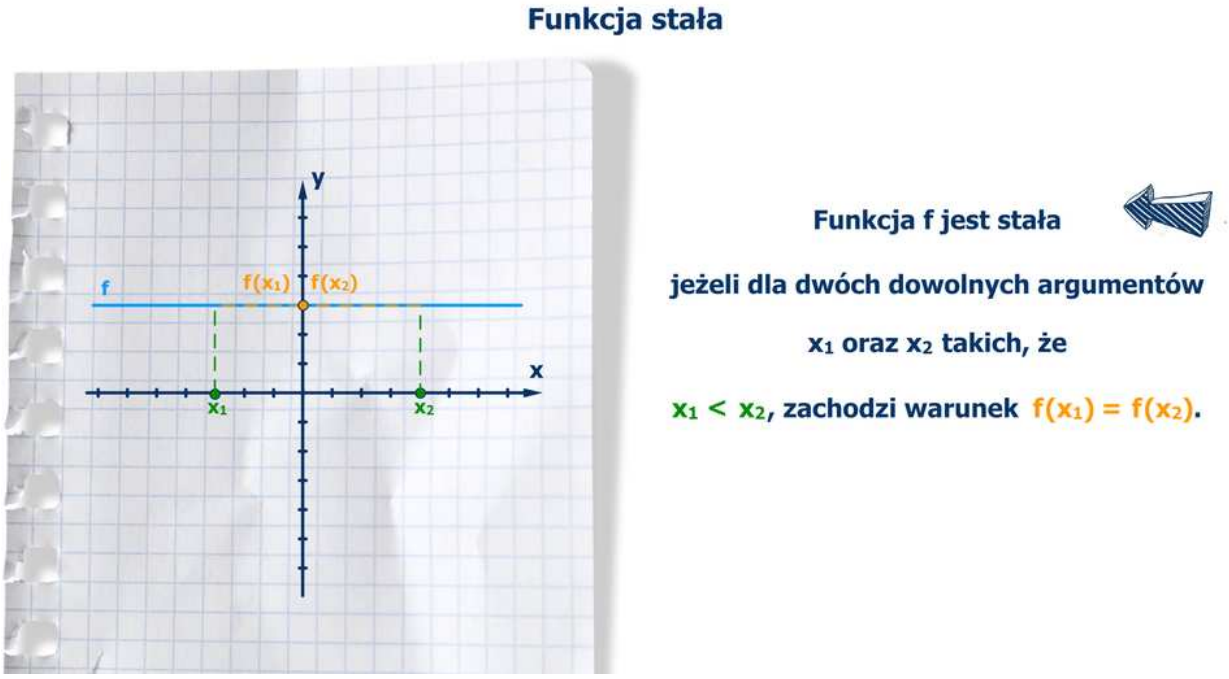
Animacja pokazuje wykres funkcji malejącej.

Definicja: Funkcja stała

Jeżeli dla dowolnych $x_1, x_2 \in \langle a; b\rangle$ takich, że $x_1 < x_2$ spełniony jest warunek:

$$f(x_1) = f(x_2),$$

to funkcję f nazywamy stałą w przedziale $\langle a, b\rangle$.



Film dostępny na portalu epodreczniki.pl

Animacja pokazuje wykres funkcji stałej.

Definicja: Funkcja niemalejąca

Jeżeli dla dowolnych $x_1, x_2 \in \langle a; b\rangle$ takich, że $x_1 < x_2$ spełniony jest warunek:

$$f(x_1) \leq f(x_2),$$

to mówimy, że funkcja f jest niemalejąca w przedziale $\langle a, b\rangle$.

Definicja: Funkcja nierosnąca

Jeżeli dla dowolnych $x_1, x_2 \in \langle a; b\rangle$ takich, że $x_1 < x_2$ spełniony jest warunek:

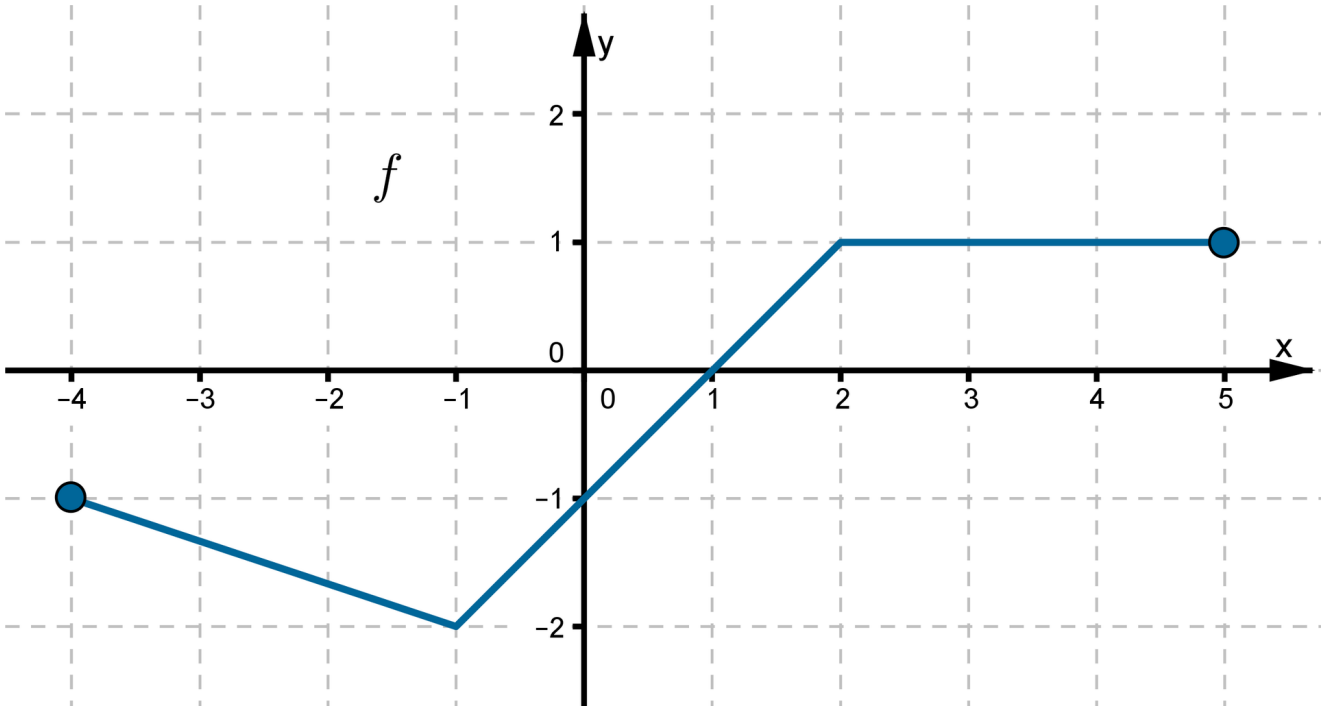
$$f(x_1) \geq f(x_2),$$

To mówimy, że funkcja f jest nierosnąca w przedziale $\langle a, b\rangle$.

Definicja: Funkcja monotoniczna przedziałami

Jeśli funkcja, której dziedzinę można podzielić na rozłączne przedziały tak, aby w każdym z nich funkcja ta była monotoniczna, to powiemy, że jest ona monotoniczna przedziałami.

Przykład 5



Z wykresu funkcji f odczytamy na przykład, że:

a. w przedziale $(0,\ 1\rangle$ funkcja f jest rosnąca,
b. w przedziale $(3, 4)$ funkcja f jest stała,
c. w przedziale $\langle -3,\ -2)$ funkcja f jest malejąca.

Zauważmy jednak, że:

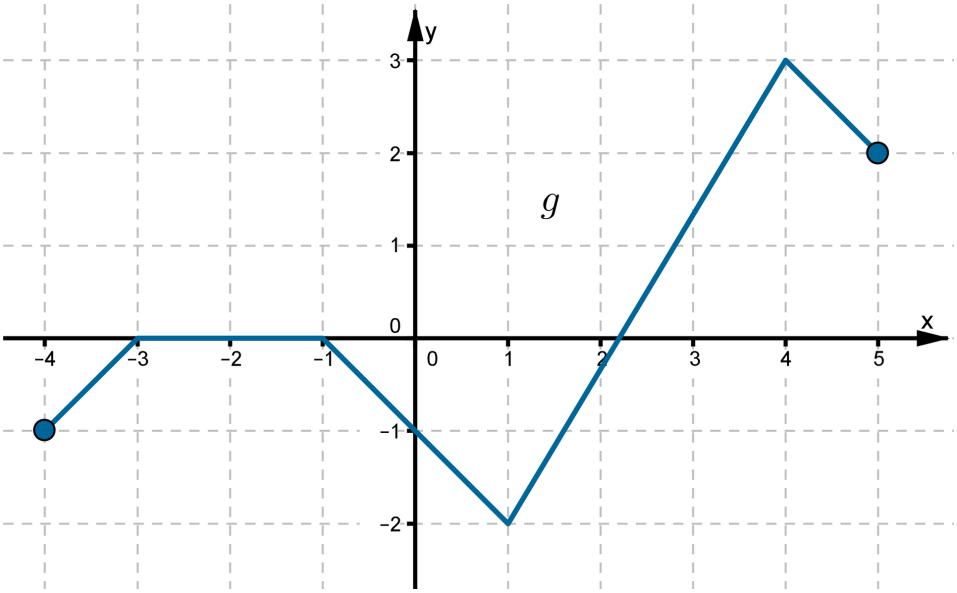
a. przedział $\langle -1, 2\rangle$ jest maksymalnym przedziałem, w którym funkcja f jest rosnąca,
b. przedział $\langle 2, 5\rangle$ jest maksymalnym przedziałem, w którym funkcja f jest stała,
c. przedział $\langle -4,\ -1\rangle$ jest maksymalnym przedziałem, w którym funkcja f jest malejąca,
d. przedział $\langle -1, 5\rangle$ jest maksymalnym przedziałem, w którym funkcja f jest niemalejąca.

Funkcja f jest monotoniczna przedziałami, ale nie jest monotoniczna w całym przedziale $\langle -4, 5\rangle$.

Monotoniczność. Przykłady

Przykład 1

Rysunek przedstawia wykres funkcji g.



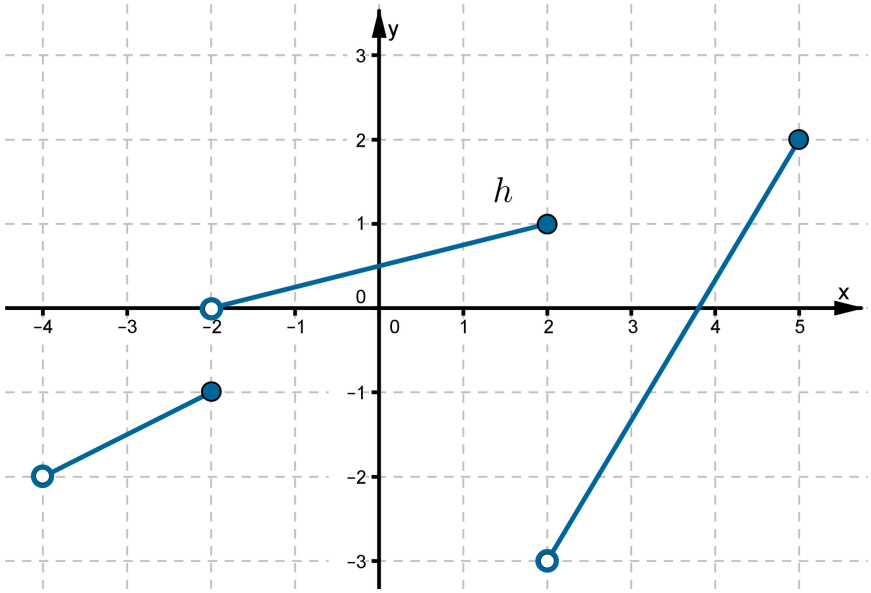
Z wykresu funkcji g odczytamy, że:

a. przedział $\langle 1, 4\rangle$ jest przedziałem, w którym funkcja g jest rosnąca,
b. przedział $\langle -1, 1\rangle$ jest przedziałem, w którym funkcja g jest malejąca,
c. przedział $\langle -3, -1\rangle$ jest maksymalnym przedziałem, w którym funkcja g jest stała,
d. przedział $\langle -4, -1\rangle$ jest przedziałem, w którym funkcja g jest niemalejąca,
e. przedział $\langle -3, 1\rangle$ jest przedziałem, w którym funkcja g jest nierosnąca.

Funkcja g jest monotoniczna przedziałami, ale nie jest monotoniczna w całym przedziale $\langle -4, 5\rangle$.

Przykład 2

Z wykresu funkcji h odczytamy, że:
przedział $\langle -4, 2\rangle$ jest przedziałem, w którym funkcja h jest rosnąca.
Funkcja h jest monotoniczna przedziałami, ale nie jest monotoniczna w całym przedziale $\langle -4, 5\rangle$.

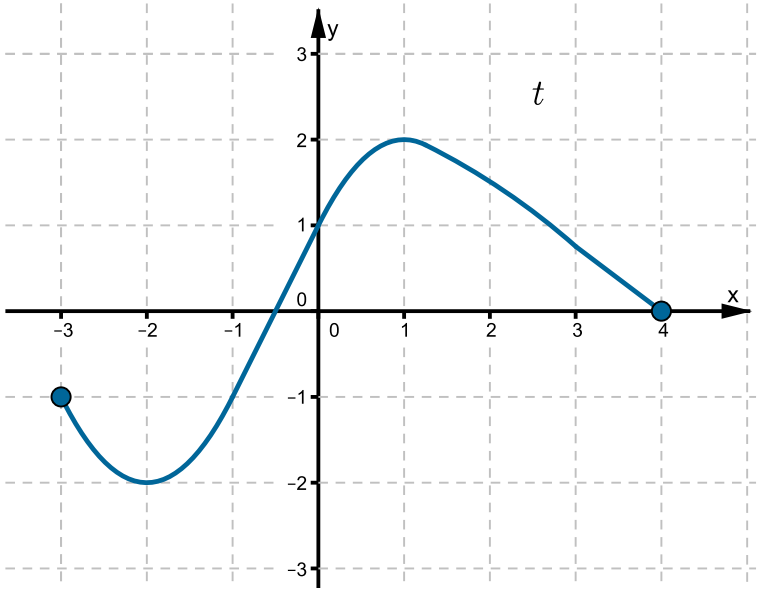


Przykład 3

Z wykresu funkcji t odczytamy, że:

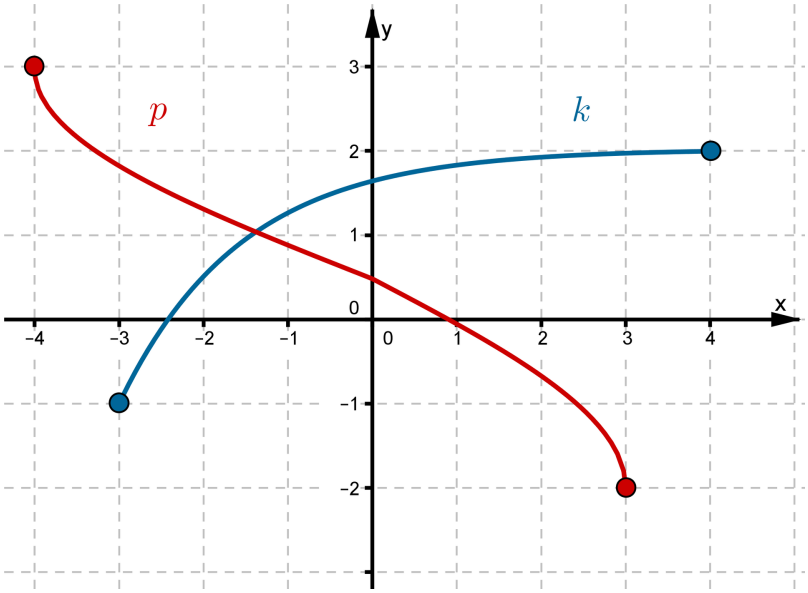
a. przedział $\langle -2, 1\rangle$ jest maksymalnym przedziałem, w którym funkcja t jest rosnąca,
b. przedział $\langle -3, -2\rangle$ jest przedziałem, w którym funkcja t jest malejąca,
c. przedział $\langle 1, 4\rangle$ jest przedziałem, w którym funkcja t jest malejąca.

Funkcja t jest monotoniczna przedziałami, ale nie jest monotoniczna w całym przedziale $\langle -4, 5\rangle$.



Przykład 4

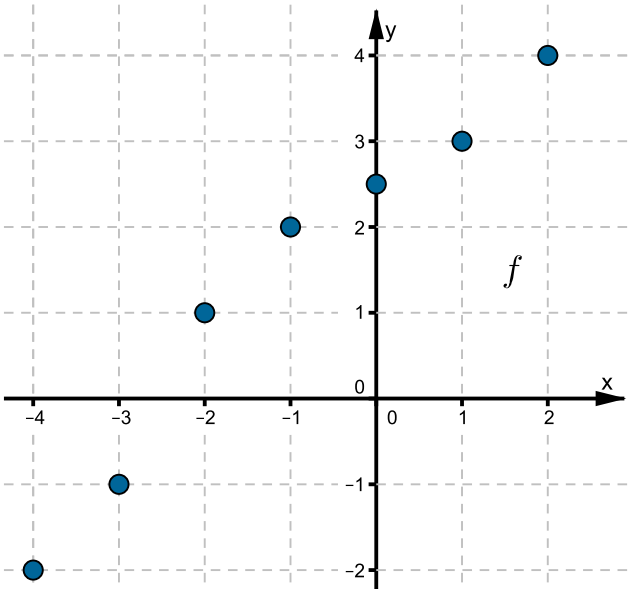
Na rysunku, w tym samym układzie współrzędnych, przedstawione są wykresy funkcji p oraz k. Dziedziną funkcji p jest przedział $\langle -4, 3\rangle$, a dziedziną funkcji k jest przedział $\langle -3, 4\rangle$.



Z wykresów funkcji k i p odczytamy, że:

a. funkcja k jest rosnąca (jako rosnąca w całej swojej dziedzinie),
b. funkcja p jest malejąca (jako malejąca w całej swojej dziedzinie).

Przykład 5



Dziedziną funkcji f, przedstawionej na rysunku, jest zbiór $\{-4, -3, -2, -1, 0, 1, 2\}$.
Z wykresu odczytujemy, że:

$$f(-4) = -2,\ f(-3) = -1,\ f(-2) = 1,\ f(-1) = 2,\ f(0) = 2\tfrac{1}{2},\ f(1) = 3,\ f(2) = 4.$$

Ponieważ

$$f(-4) < f(-3) < f(-2) < f(-1) < f(0) < f(1) < f(2),$$

więc funkcja f jest rosnąca.

Przykład 6

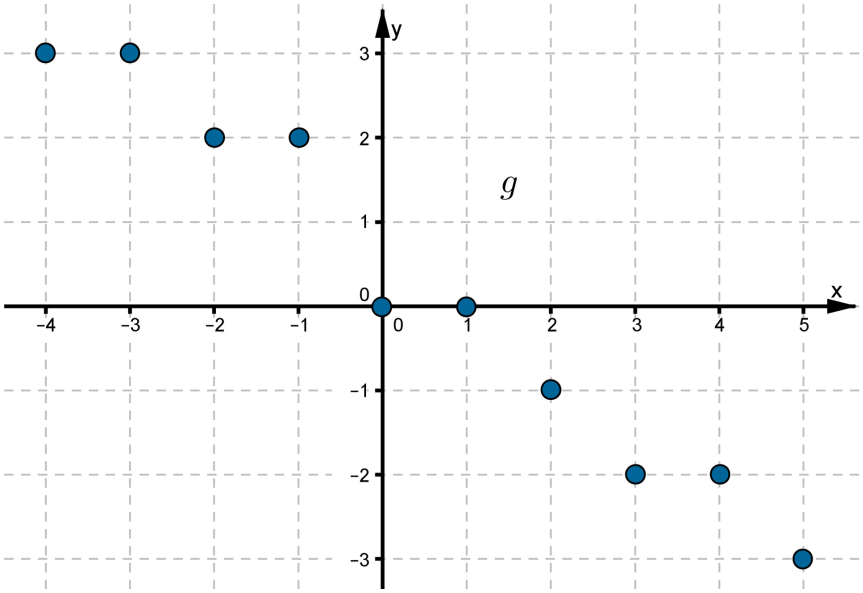
Dziedziną funkcji g jest zbiór $\{-4,\ -3,\ -2,\ -1, 0, 1, 2, 3, 4, 5\}$. Korzystając z przedstawionego na rysunku wykresu funkcji g, odczytamy, że:

$$f(-4) = \mathrm{f}(-3) = 3,\ \mathrm{f}(-2) = \mathrm{f}(-1) = 2,\ \mathrm{f}(0) = \mathrm{f}(1) = 0,\ \mathrm{f}(2) = -1,\ \mathrm{f}(3) = \mathrm{f}(4) = -2,\ \mathrm{f}(5) = -3.$$

Ponieważ

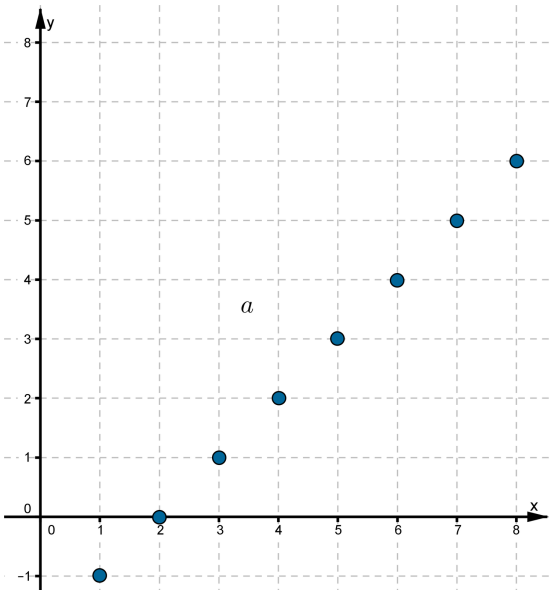
$$f(-4) \geq f(-3) > f(-2) \geq f(-1) > f(0) \geq f(1) > f(2) > f(3) \geq f(4) > f(5),$$

więc funkcja g jest nierosnąca.



Przykład 7

Dziedziną funkcji a, przedstawionej na rysunku, jest zbiór $\{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}$.
Przy zwiększaniu argumentu o 1 również o 1 rosną wartości funkcji a.
A zatem funkcja a jest rosnąca.



Z wykresu odczytujemy, że dla każdej liczby całkowitej dodatniej n ze zbioru $\{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}$ zachodzi zależność

$$a(n) = \mathrm{n} - 2.$$

Funkcja a jest przykładem ciągu – tak nazywa się funkcje, których dziedziną jest podzbiór zbioru liczb całkowitych dodatnich.
Dla wyróżnienia tych szczególnych funkcji:

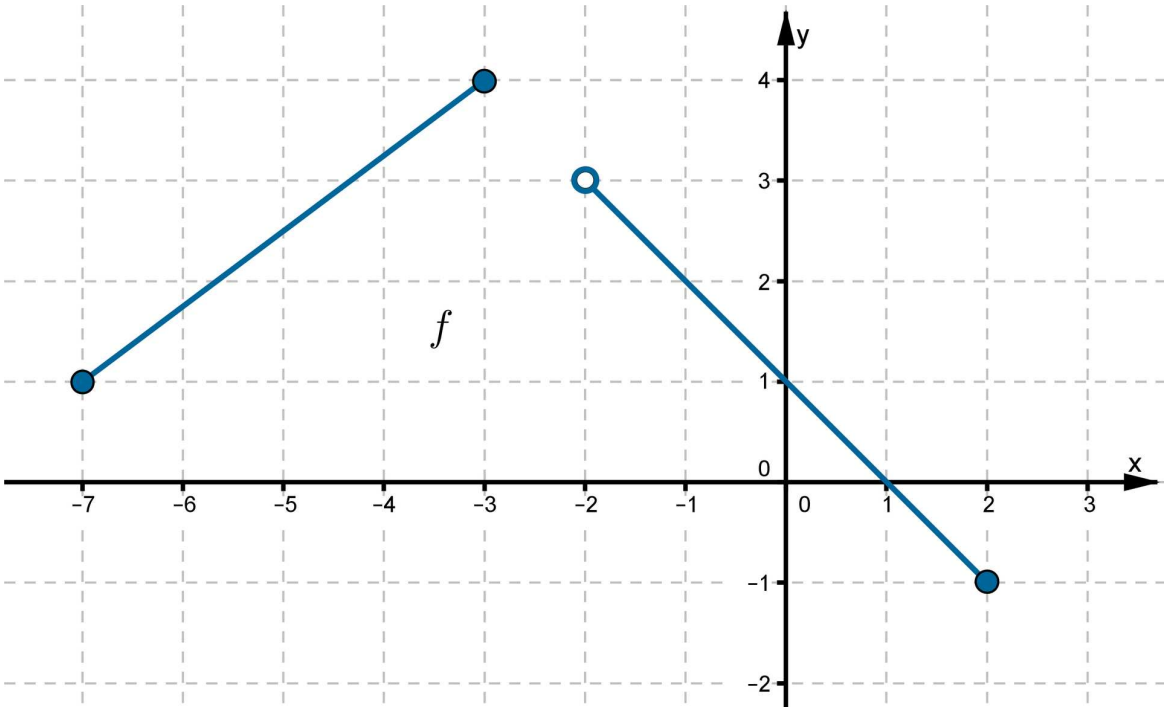
- zamiast tradycyjnego zapisu wartości $a(n)$ stosuje się zapis a_n,
- a_n nazywamy n–tym wyrazem ciągu, zaś n nazywamy indeksem (lub wskaźnikiem).

Ciąg o kolejnych wyrazach a_1, a_2, a_3,... oznaczamy symbolicznie (a_n).

Zadania. Część I

Ćwiczenie 1

Na rysunku przedstawiony jest wykres funkcji f.

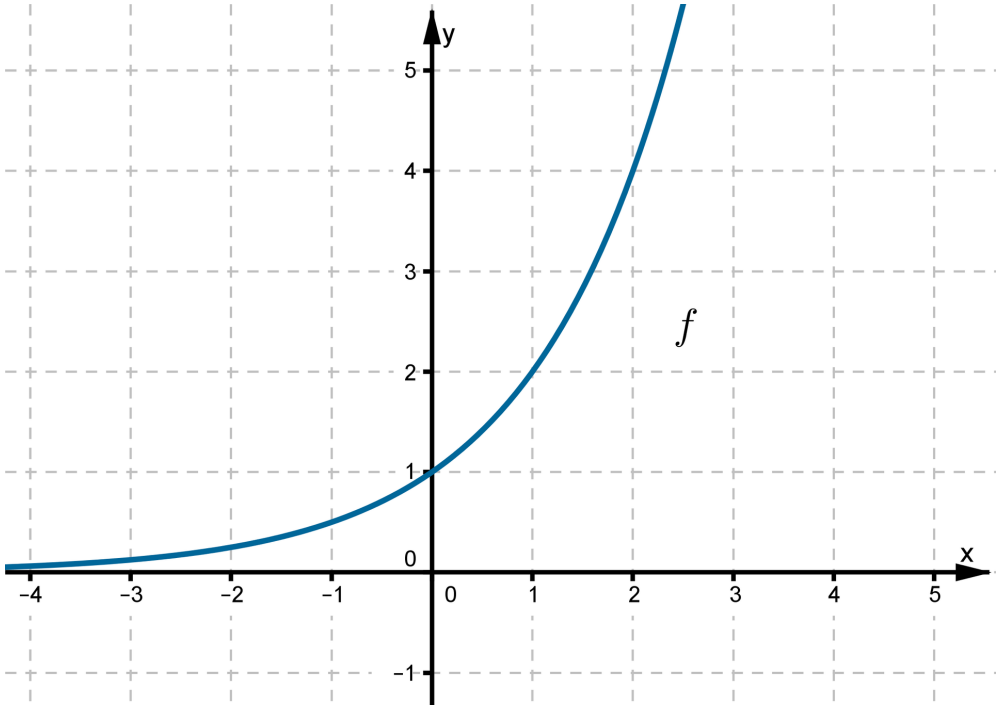


Jest to funkcja

- stała
- rosnąca
- niemonotoniczna
- malejąca

Ćwiczenie 2

Na rysunku przedstawiony jest wykres funkcji f.

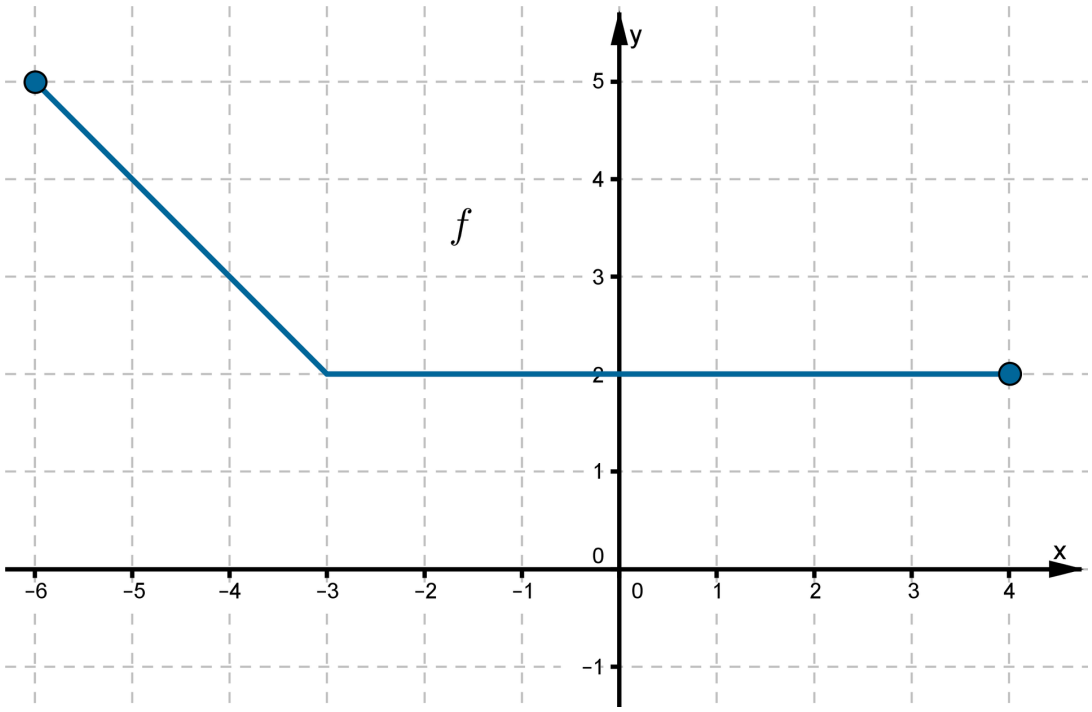


Jest to funkcja

- stała
- niemonotoniczna
- malejąca
- rosnąca

Ćwiczenie 3

Na rysunku przedstawiony jest wykres funkcji f.

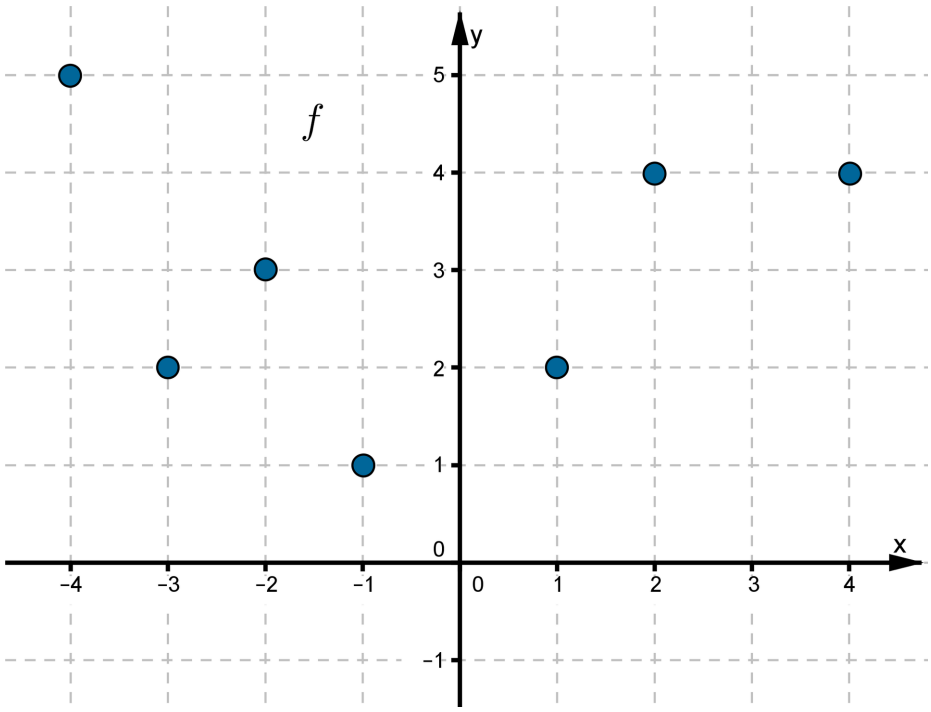


Jest to funkcja

- malejąca
- stała
- rosnąca
- niemonotoniczna
- niemalejąca
- nierosnąca

Ćwiczenie 4

Na rysunku przedstawiony jest wykres funkcji f.

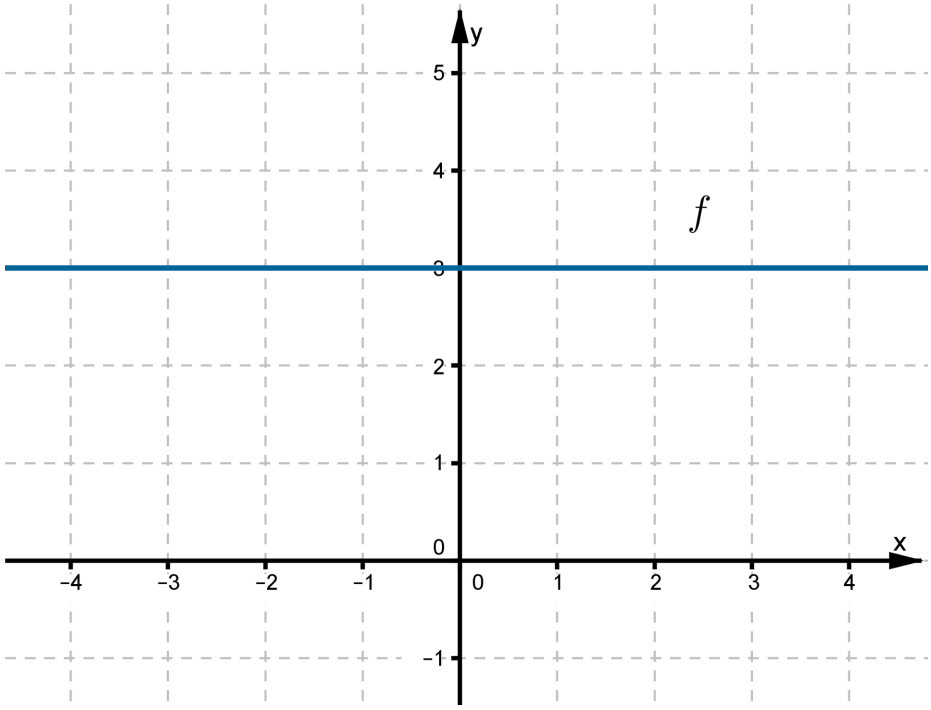


Jest to funkcja

- malejąca
- niemalejąca
- stała
- niemonotoniczna
- rosnąca
- nierosnąca

Ćwiczenie 5

Na rysunku przedstawiony jest wykres funkcji f.

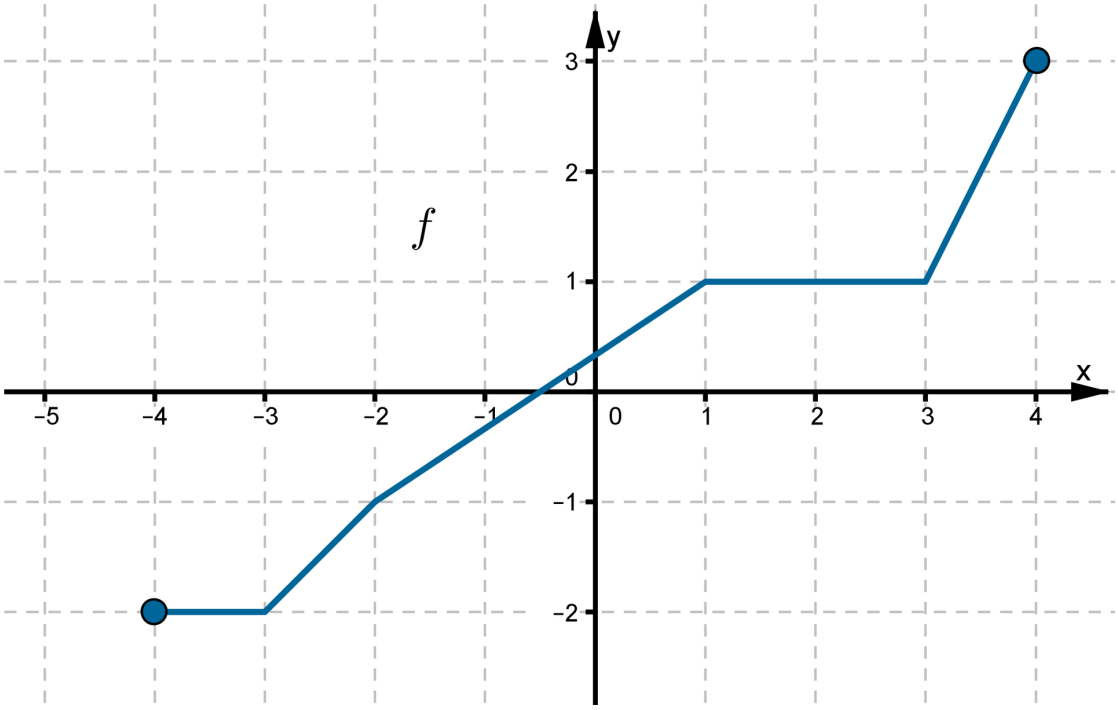


Jest to funkcja

- [ ] nierosnąca
- [ ] niemonotoniczna
- [ ] stała
- [ ] rosnąca
- [ ] malejąca
- [ ] niemalejąca

Ćwiczenie 6

Na rysunku przedstawiony jest wykres funkcji f.

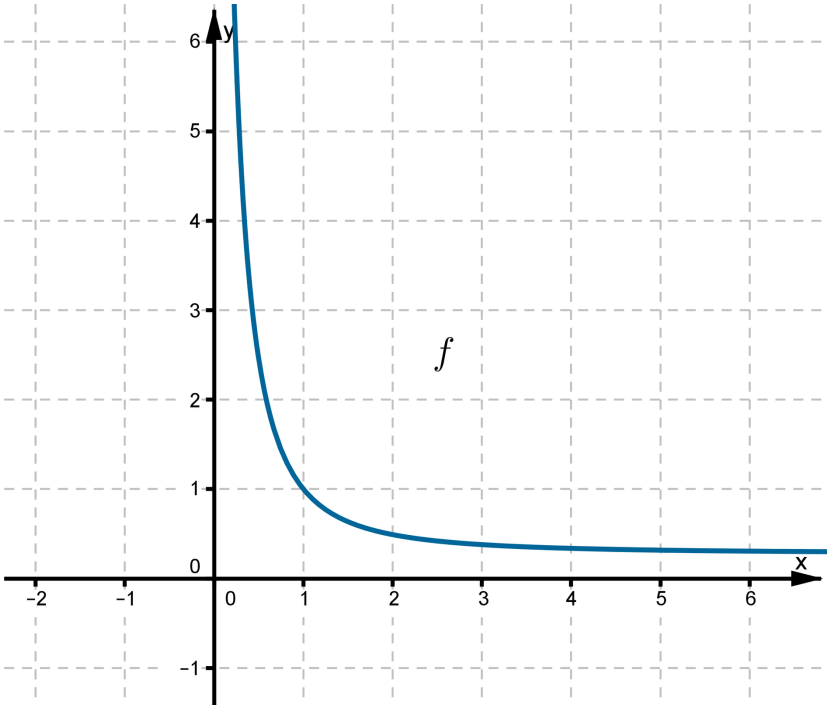


Jest to funkcja

- malejąca
- nierosnąca
- niemonotoniczna
- stała
- rosnąca
- niemalejąca

Ćwiczenie 7

Na rysunku przedstawiony jest wykres funkcji f.

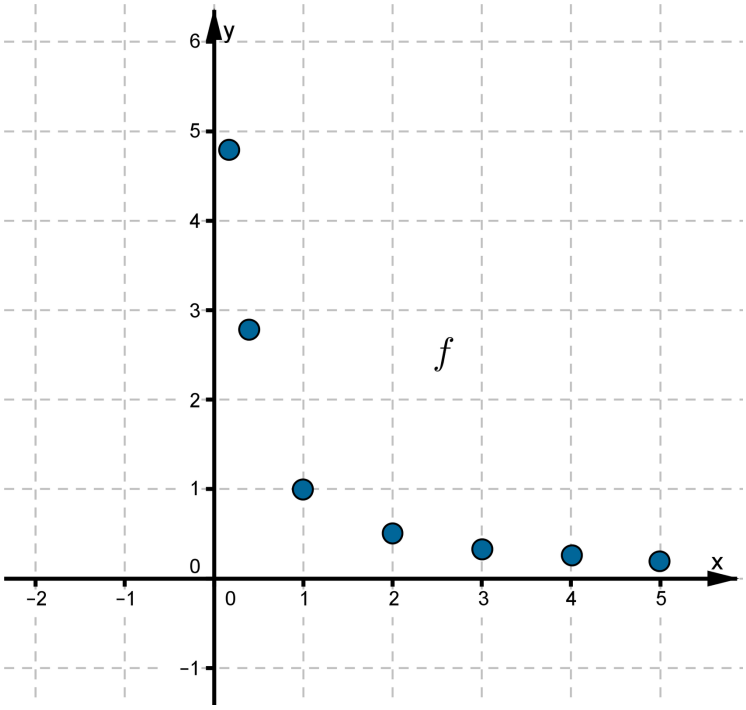


Jest to funkcja

- [ ] niemalejąca
- [ ] niemonotoniczna
- [ ] malejąca
- [ ] nierosnąca
- [ ] rosnąca
- [ ] stała

Ćwiczenie 8

Na rysunku przedstawiony jest wykres funkcji f.

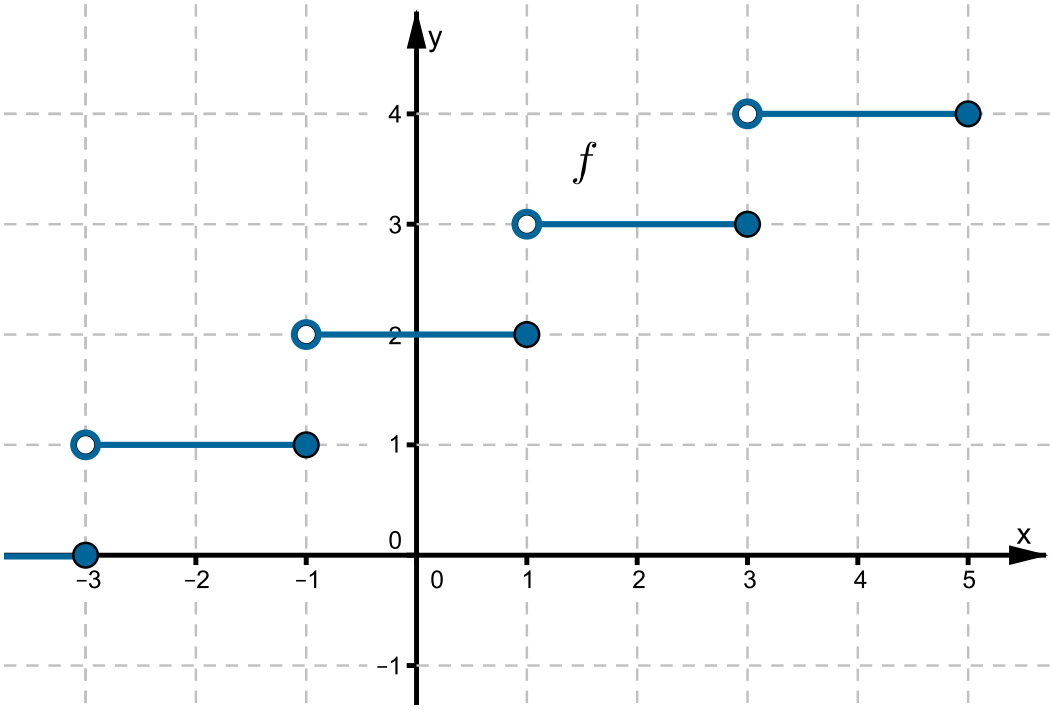


Jest to funkcja

- [ ] niemonotoniczna
- [ ] niemalejąca
- [ ] rosnąca
- [ ] stała
- [ ] nierosnąca
- [ ] malejąca

Ćwiczenie 9

Na rysunku przedstawiony jest wykres funkcji f.

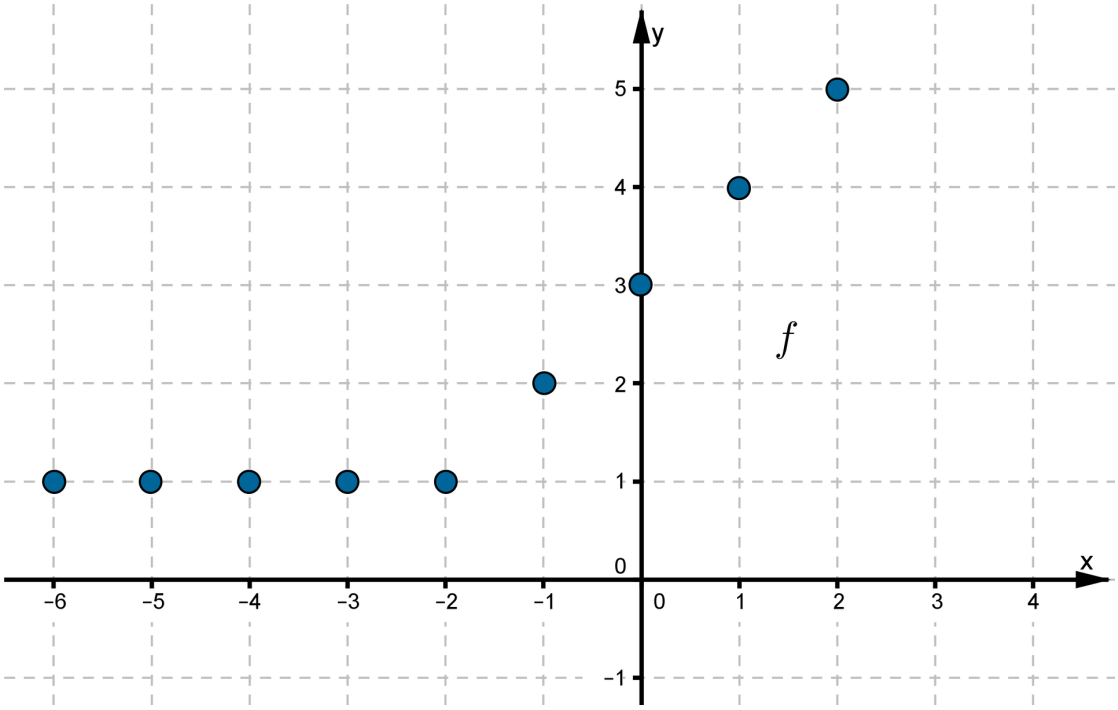


Jest to funkcja

- nierosnąca
- niemalejąca
- malejąca
- stała
- niemonotoniczna
- rosnąca

Ćwiczenie 10

Na rysunku przedstawiony jest wykres funkcji f.

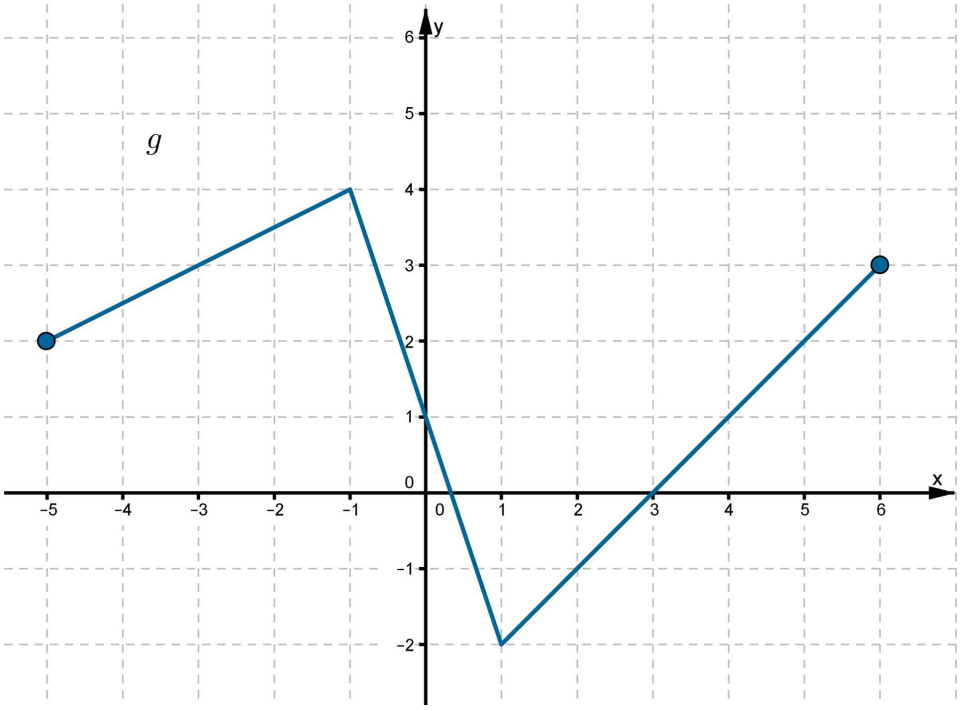


Jest to funkcja

- niemalejąca
- nierosnąca
- rosnąca
- niemonotoniczna
- malejąca
- stała

Ćwiczenie 11

Na rysunku przedstawiony jest wykres funkcji g.

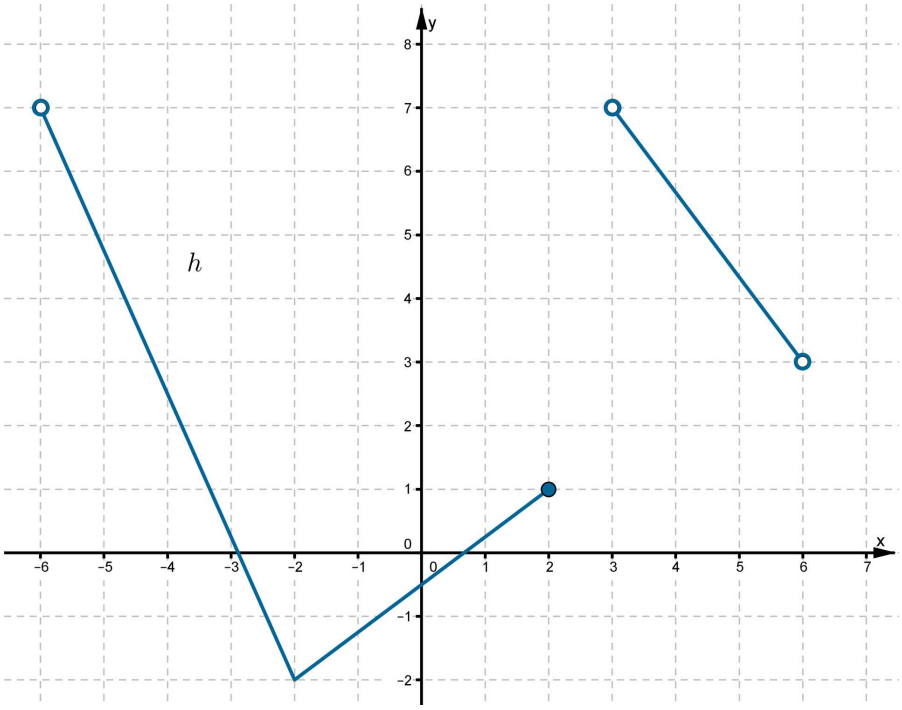


Funkcja g jest rosnąca w przedziale

- [ ] $\langle -1, 4 \rangle$
- [ ] $(-5, 0)$
- [ ] $\langle 1, 6 \rangle$
- [ ] $\langle -5, -1 \rangle$

Ćwiczenie 12

Na rysunku przedstawiony jest wykres funkcji h.

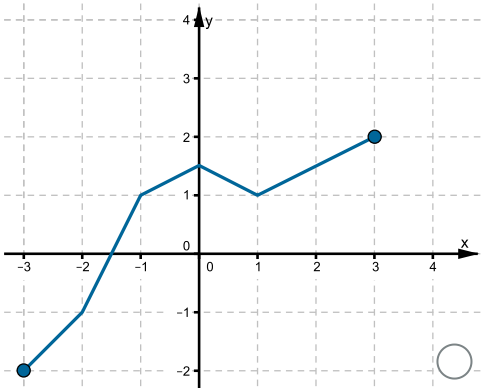


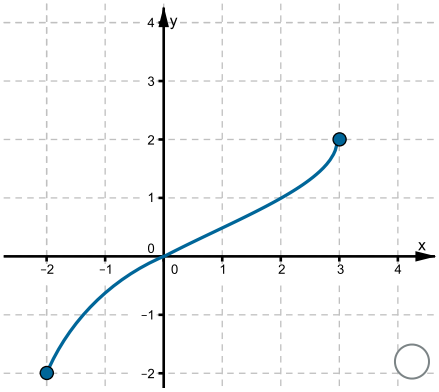
Funkcja h jest malejąca w przedziale

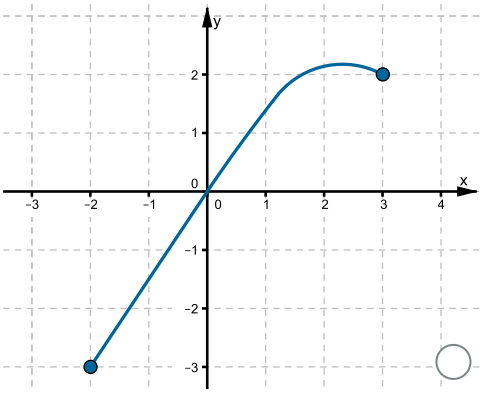
- [ ] $\langle -6, 2 \rangle$
- [ ] $(-4, -2)$
- [ ] $(3, 6)$
- [ ] $\langle -2, 2 \rangle$

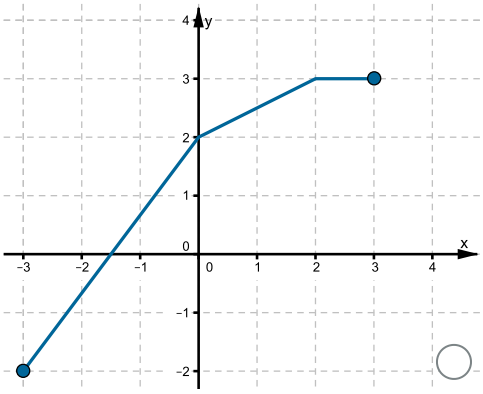
Ćwiczenie 13

Wskaż wykres funkcji rosnącej.



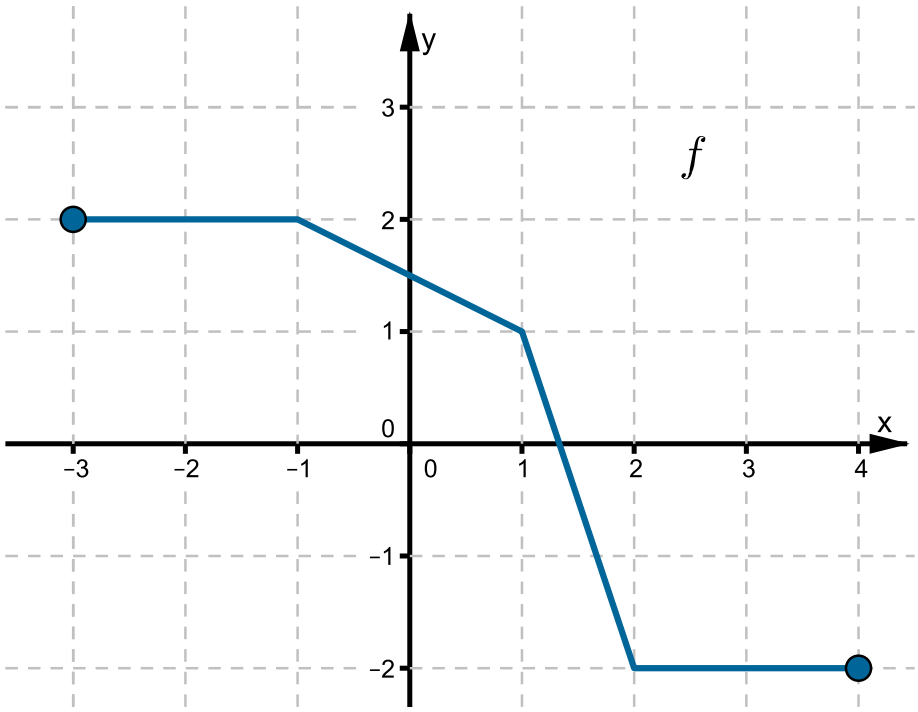






Ćwiczenie 14

Na rysunku przedstawiony jest wykres funkcji f.

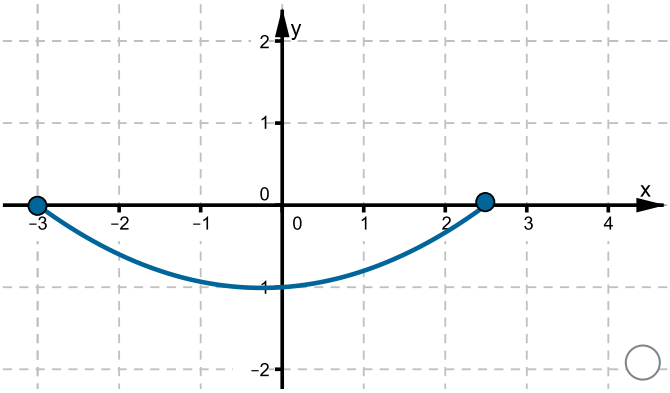


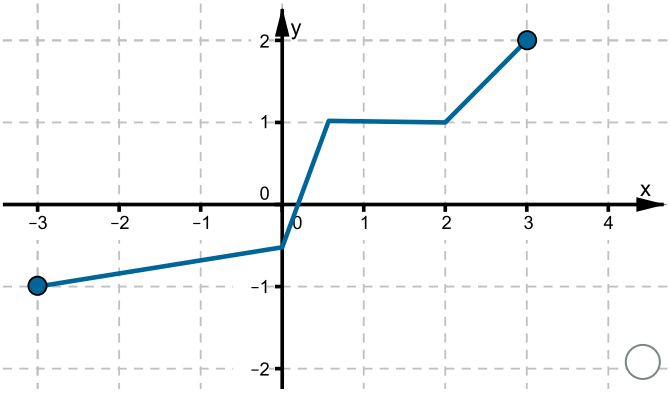
Maksymalnym przedziałem, w którym funkcja f jest malejąca, jest przedział

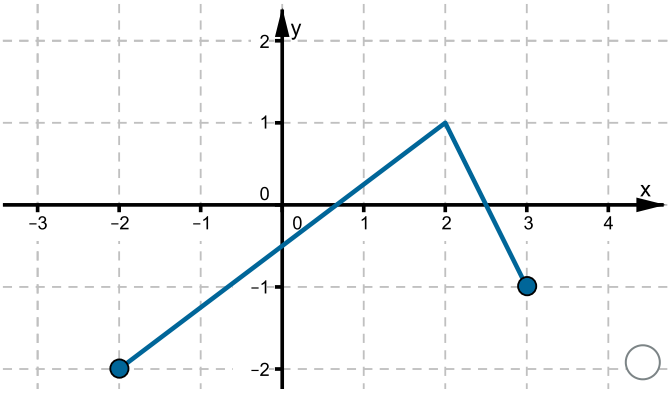
- ○ $\langle 1, 2 \rangle$
- ○ $\langle -3, 4 \rangle$
- ○ $(1, 2)$
- ○ $\langle -1, 2 \rangle$

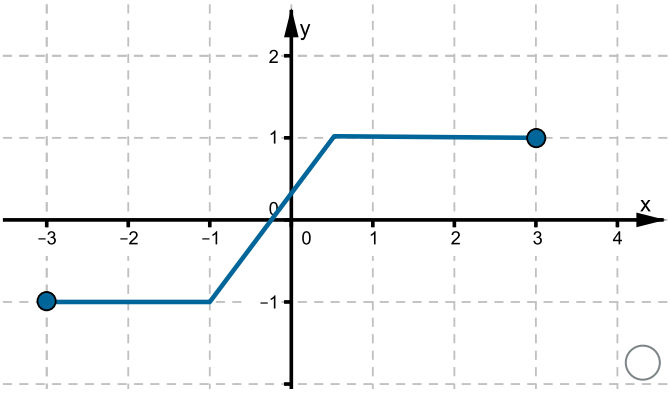
Ćwiczenie 15

Wskaż wykres funkcji, która rośnie w przedziale $\langle -1, 1 \rangle$.





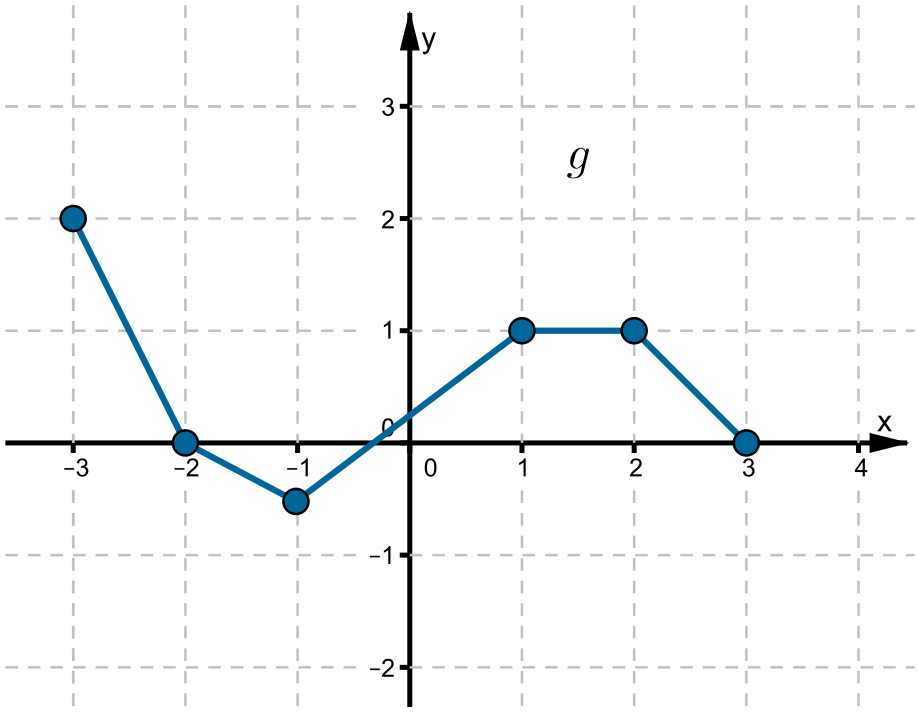




Zadania. Część II

Ćwiczenie 1

Na rysunku przedstawiono wykres funkcji g.

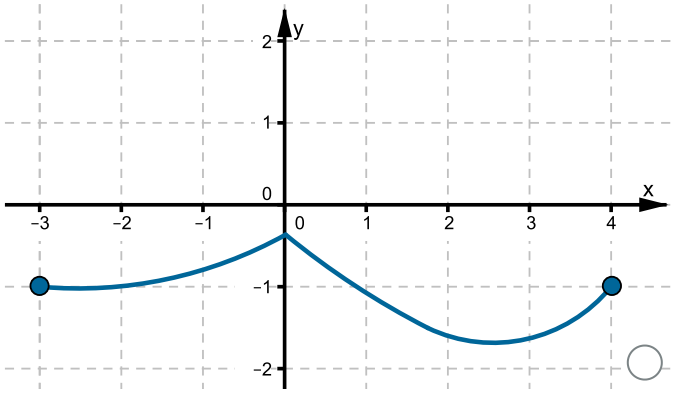


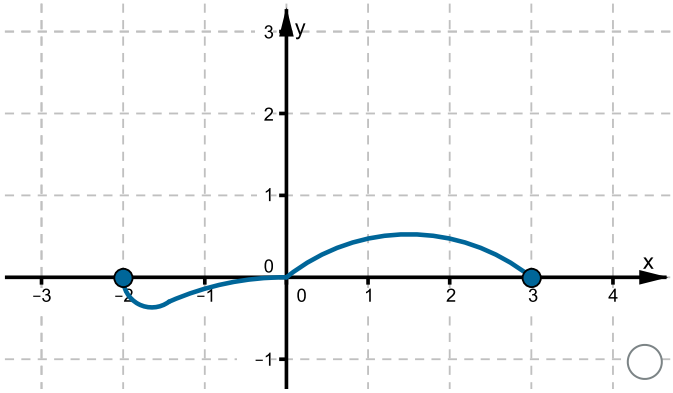
Maksymalny przedział, w którym funkcja g jest rosnąca, ma długość

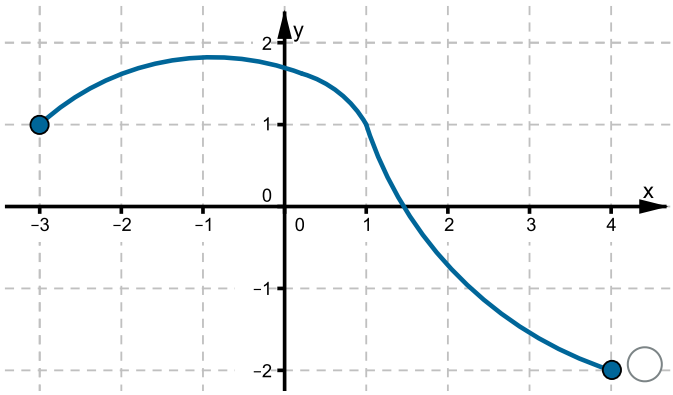
- $1{,}5$
- 2
- 3
- 1

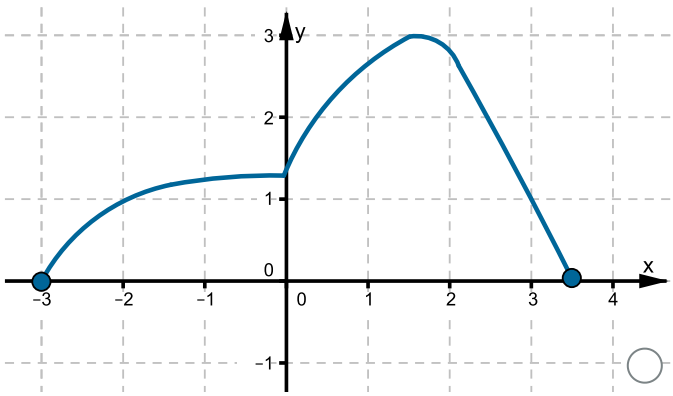
Ćwiczenie 2

Wskaż wykres funkcji, która jest malejąca w przedziale $\langle 0, 3 \rangle$.



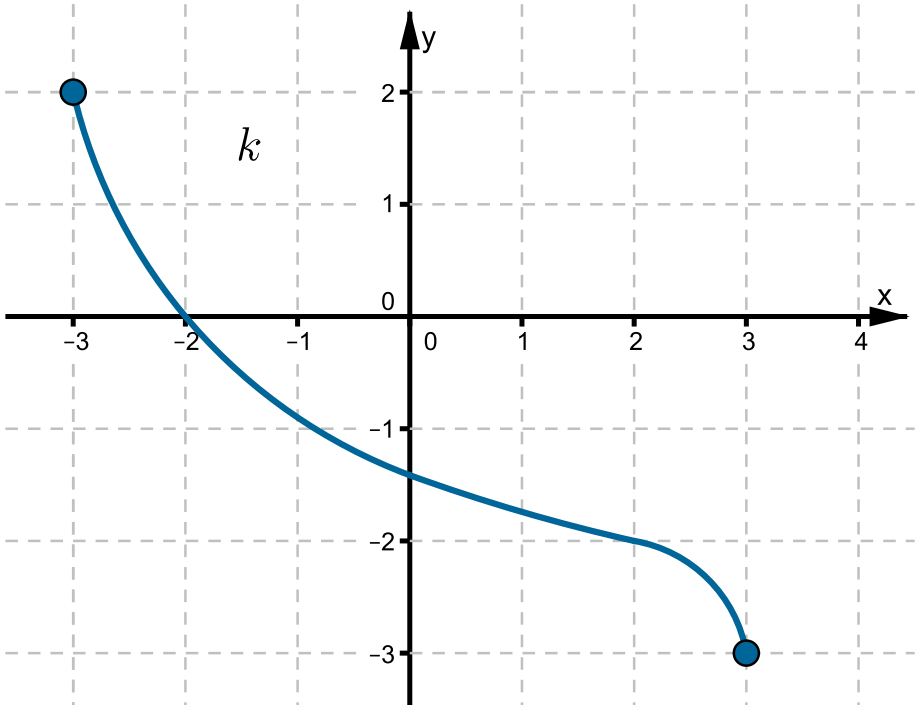






Ćwiczenie 3

Na rysunku przedstawiono wykres funkcji k.

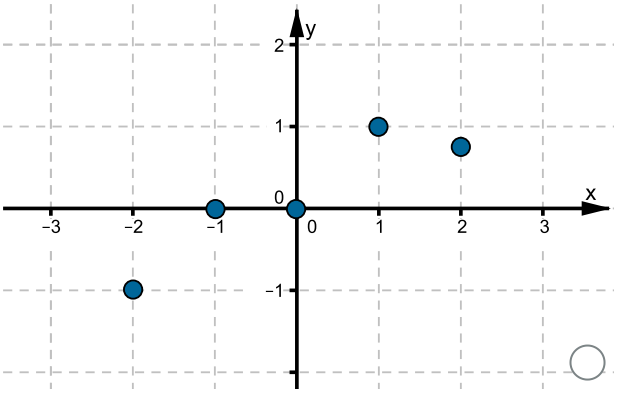


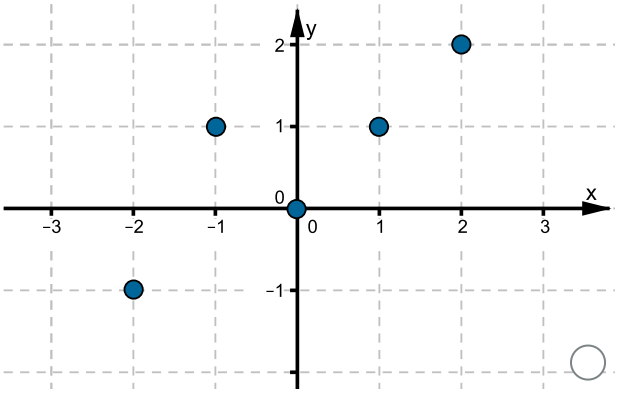
Maksymalny przedział, w którym funkcja k jest malejąca, to

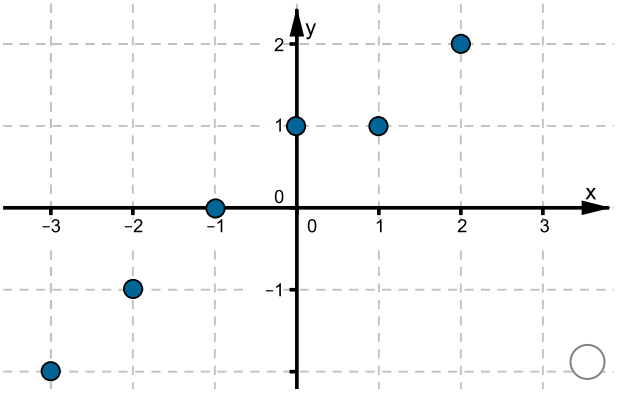
- $\langle -3, -2 \rangle$
- $\langle 2, 3 \rangle$
- $\langle -3, 3 \rangle$
- $\langle -3, 2 \rangle$

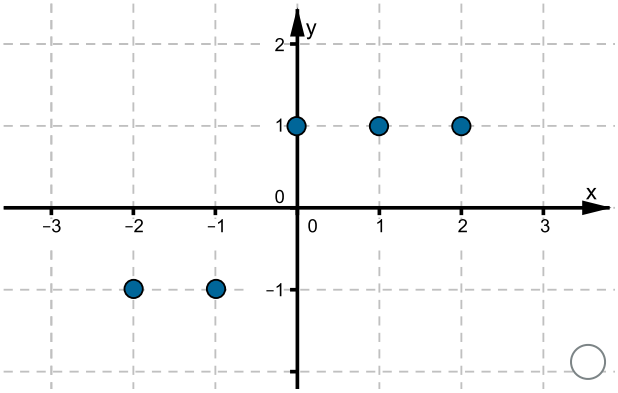
Ćwiczenie 4

Wskaż wykres funkcji niemalejącej, której dziedziną jest zbiór $\{-2, -1, 0, 1, 2\}$.



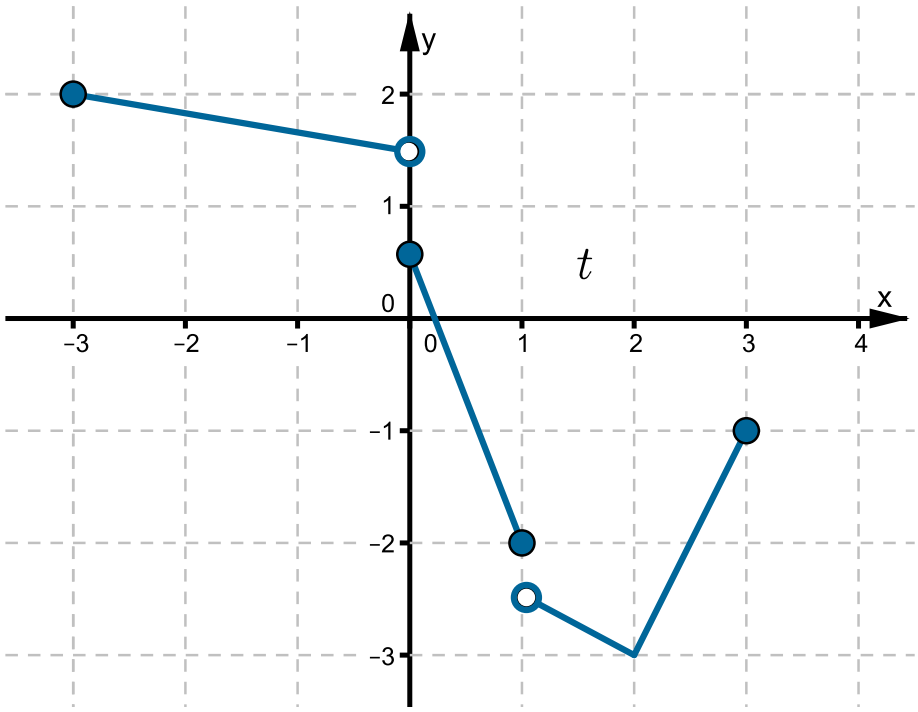






Ćwiczenie 5

Na rysunku przedstawiono wykres funkcji t.

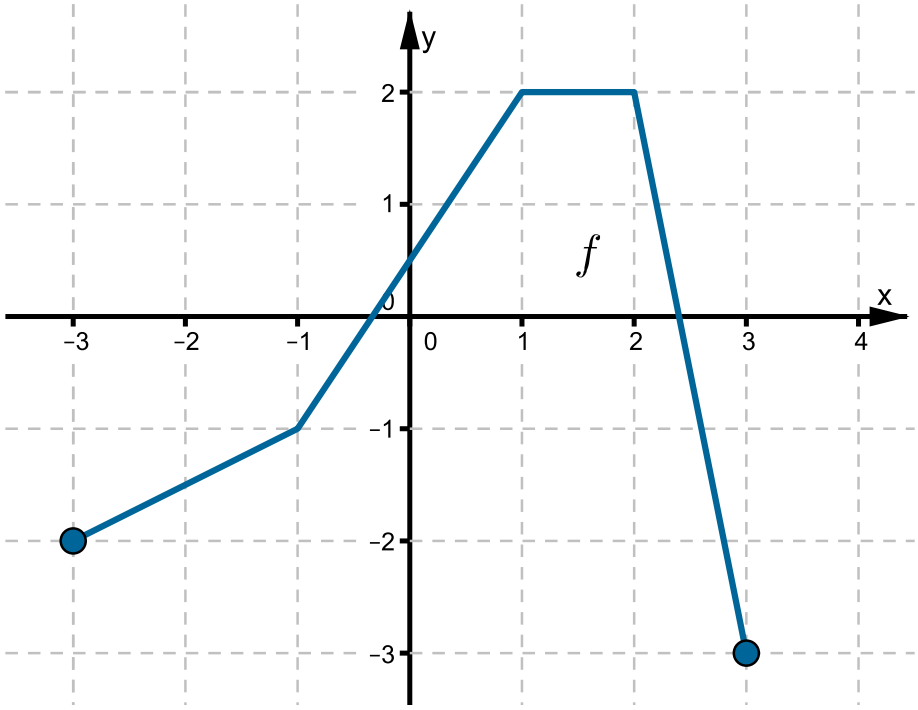


Maksymalny przedział, w którym funkcja t jest malejąca, ma długość

- 4
- 5
- 7
- 3

Ćwiczenie 6

Na rysunku przedstawiono wykres funkcji f.



Odczytaj z wykresu i zapisz:

a. maksymalny przedział, w którym funkcja f jest rosnąca,

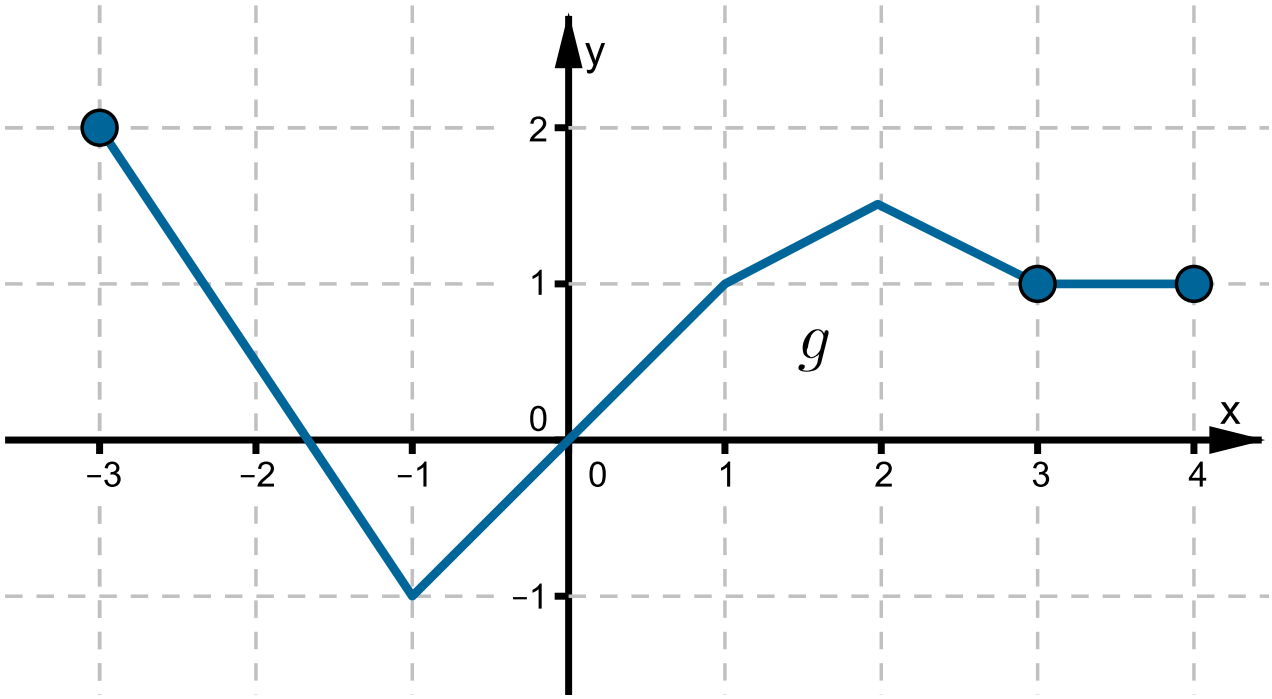
b. długość maksymalnego przedziału, w którym funkcja f jest malejąca.

Ćwiczenie 7

Na rysunku jest przedstawiony wykres funkcji g.

a. Podaj długość maksymalnego przedziału, w którym funkcja g jest rosnąca.

b. Podaj przedział o długości 2, w którym funkcja g jest malejąca.

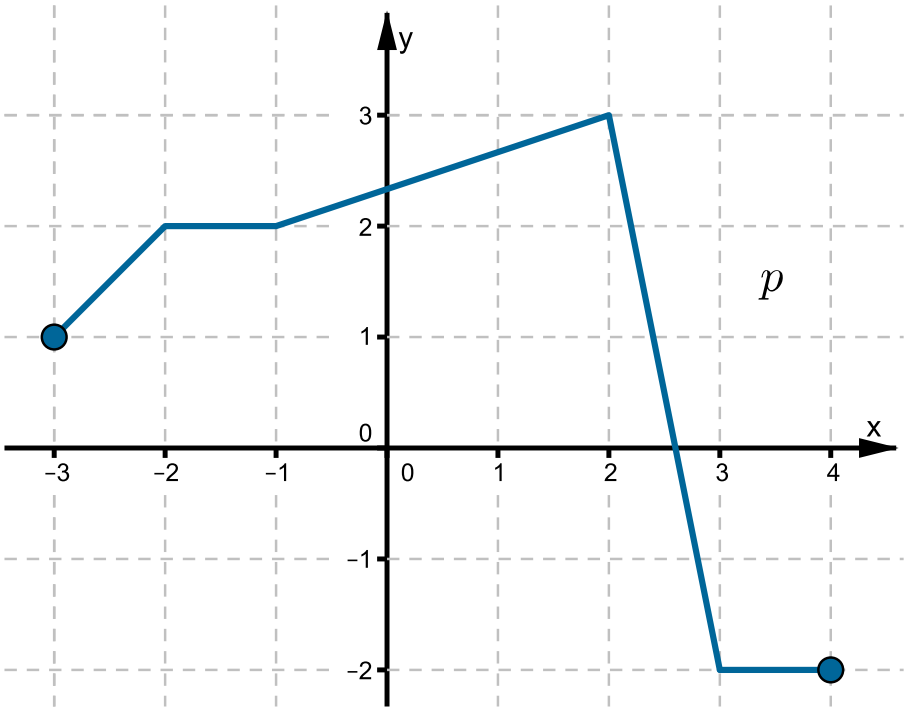


Ćwiczenie 8

Korzystając z wykresu funkcji p, który jest przedstawiony na rysunku, podaj:

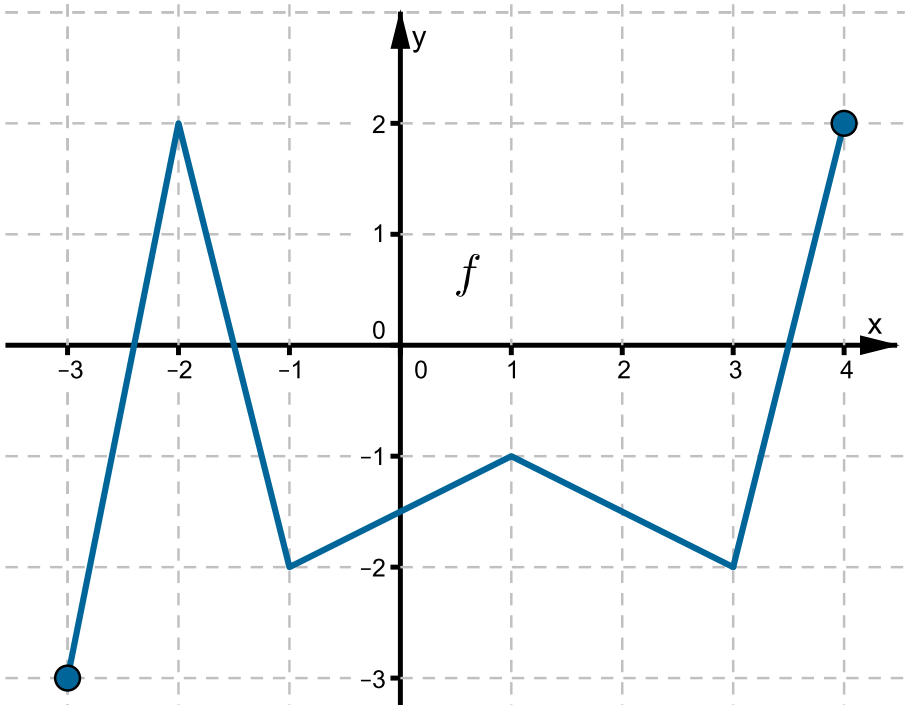
a. maksymalny przedział, w którym funkcja p jest niemalejąca,

b. maksymalny przedział, w którym funkcja p jest nierosnąca.



Ćwiczenie 9

Na rysunku przedstawiono wykres funkcji f.



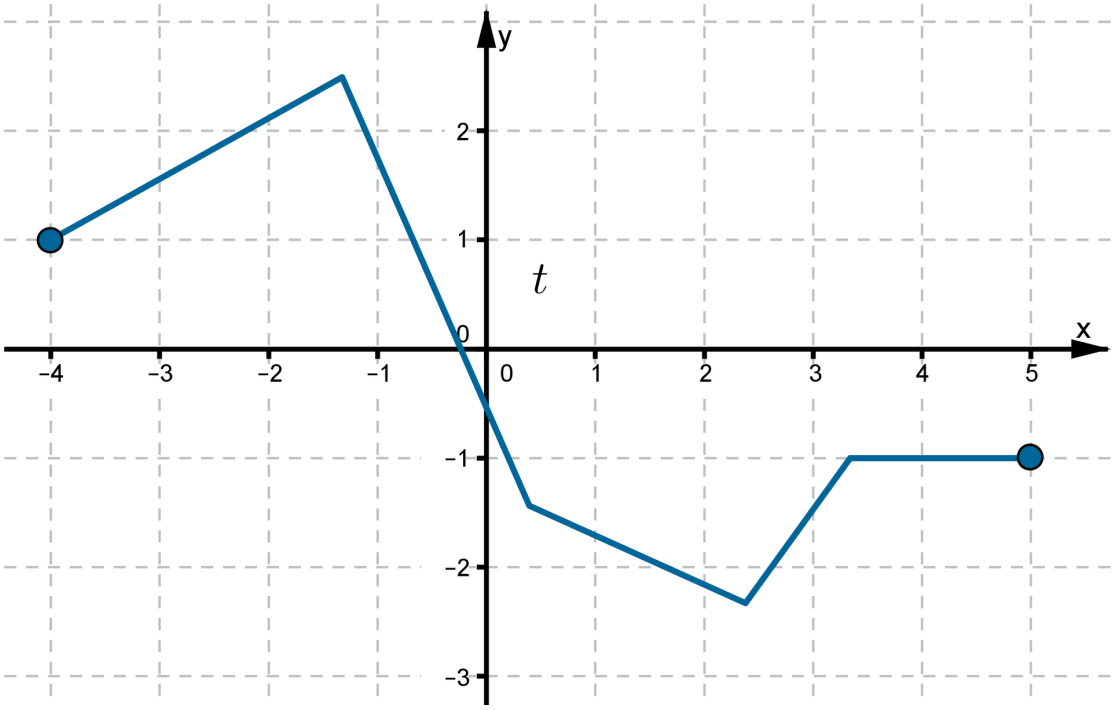
Odczytaj z wykresu i zapisz:

a. przedziały, w których funkcja f jest rosnąca,

b. przedziały, w których funkcja f jest malejąca.

Ćwiczenie 10

Wykres funkcji t przedstawiony jest na rysunku.



Ustal, czy funkcja t

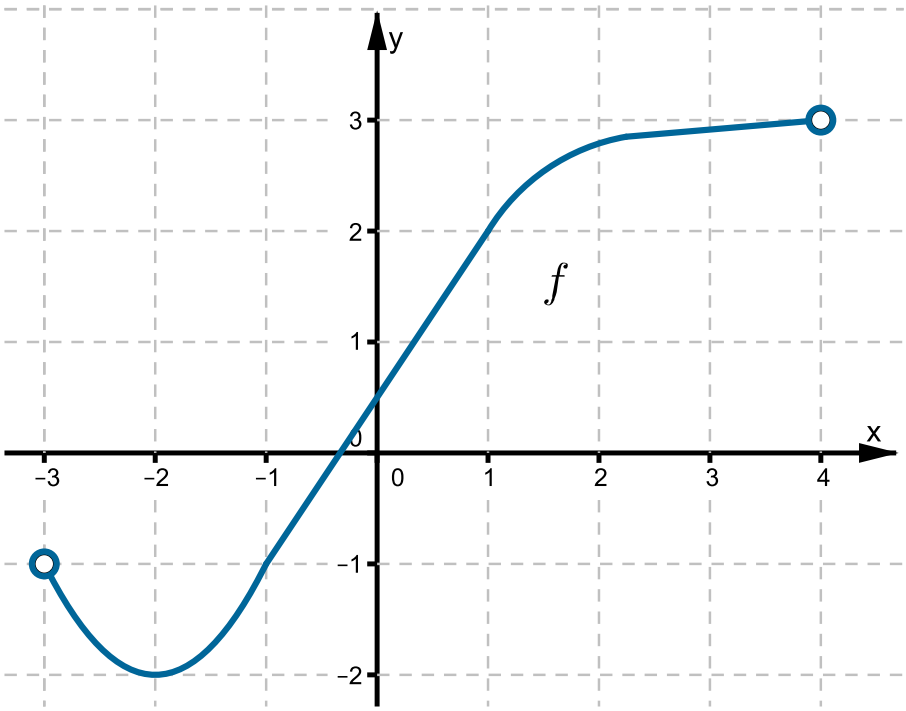
- [ ] w przedziale $\langle 3, 4\rangle$ jest niemalejąca
- [ ] w przedziale $\langle -4, -1\rangle$ jest rosnąca
- [ ] w przedziale $\langle -1, 0\rangle$ jest malejąca
- [ ] w przedziale $\langle 0, 2\rangle$ jest malejąca

Ćwiczenie 11

Z wykresu funkcji f odczytaj i zapisz:

a. maksymalny przedział, w którym funkcja f jest malejąca

b. maksymalny przedział, w którym funkcja f jest rosnąca

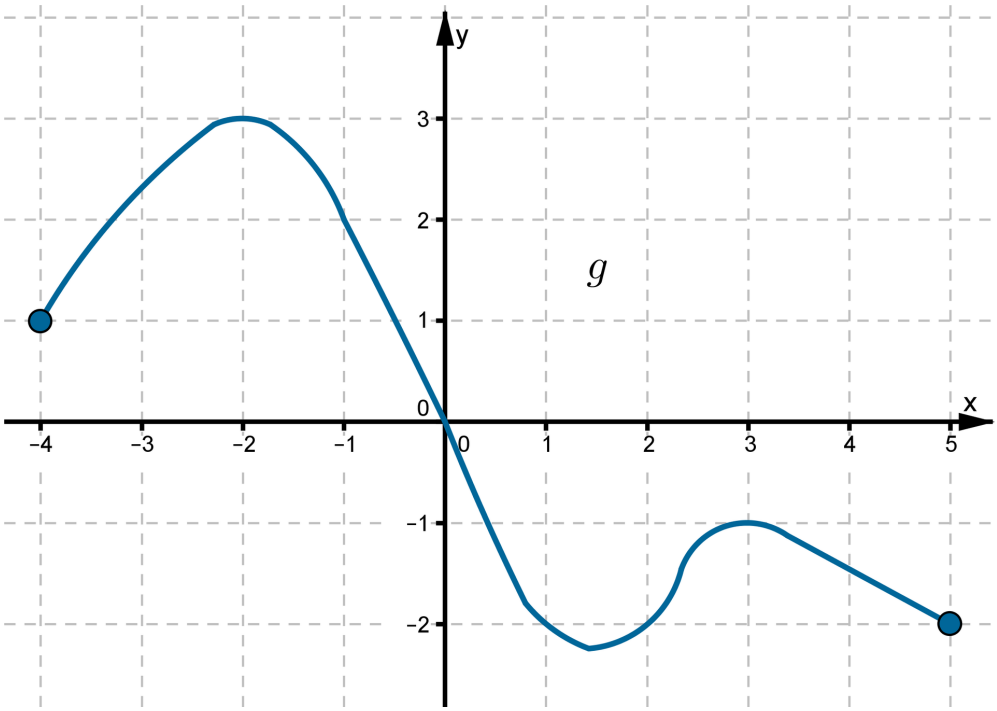


Ćwiczenie 12

Na rysunku przedstawiony jest wykres funkcji g.

a. Odczytaj maksymalny przedział o długości 2, w którym funkcja g jest rosnąca.

b. Odczytaj maksymalny przedział o długości 2, w którym funkcja g jest malejąca.

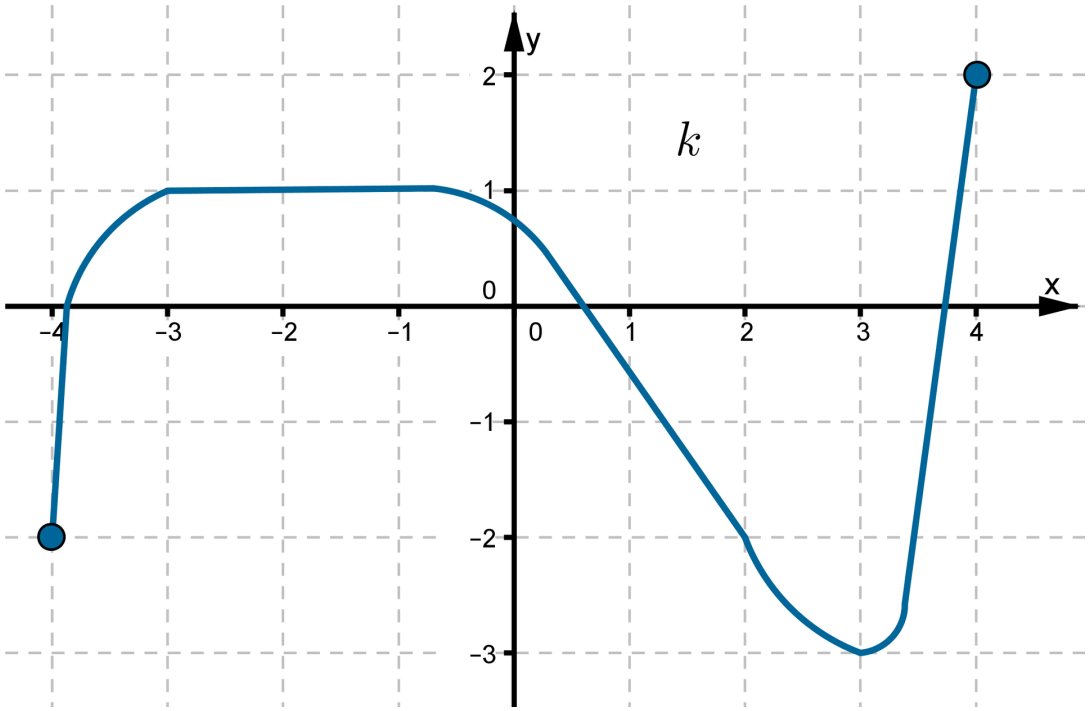


Ćwiczenie 13

Na rysunku przedstawiono wykres funkcji k. Odczytaj z wykresu i zapisz:

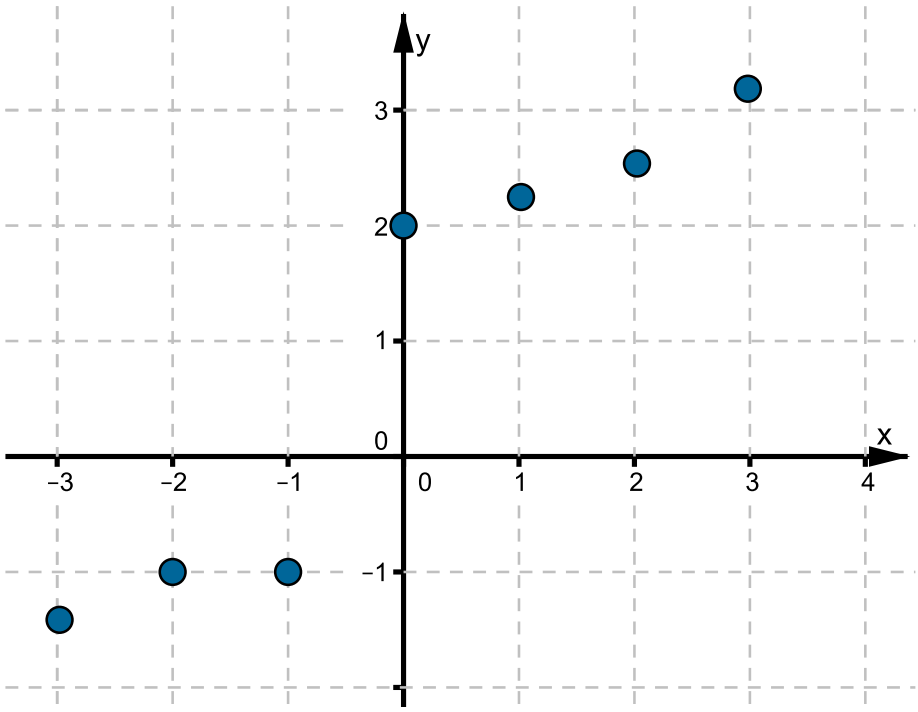
a. maksymalne przedziały, w których funkcja k jest nierosnąca,

b. maksymalne przedziały, w których funkcja k jest rosnąca.



Ćwiczenie 14

Rysunek przedstawia wykres funkcji t.



Ustal, czy

- funkcja t jest niemalejąca
- funkcja t jest malejąca
- funkcja t jest rosnąca
- funkcja t jest nierosnąca

Ćwiczenie 15

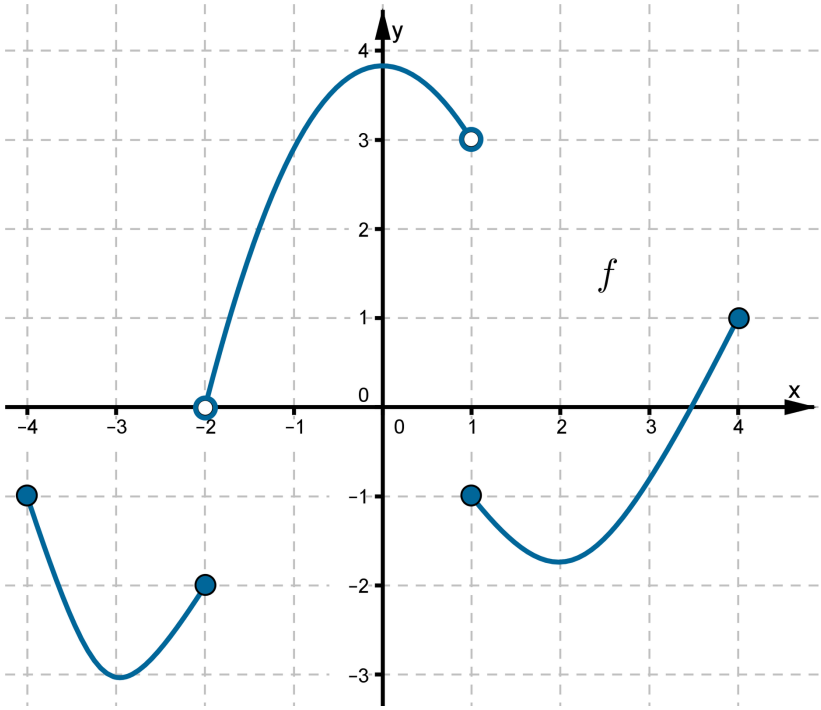
Odczytaj z przedstawionego na rysunku wykresu funkcji f

a. maksymalny przedział o długości 2, w którym funkcja jest rosnąca,

b. maksymalny przedział o długości 3, w którym funkcja jest rosnąca,

c. maksymalny przedział o długości 2, w którym funkcja jest malejąca,

d. maksymalny przedział o długości 1, w którym funkcja jest malejąca.



Ćwiczenie 16

Rysunek przedstawia wykres pewnej funkcji.
Określ maksymalne przedziały, w których ta funkcja jest malejąca, rosnąca, stała.

Zasób interaktywny dostępny pod adresem https://zpe.gov.pl/a/DPQAzplpy

Zadania generatorowe

Zadania generatorowe

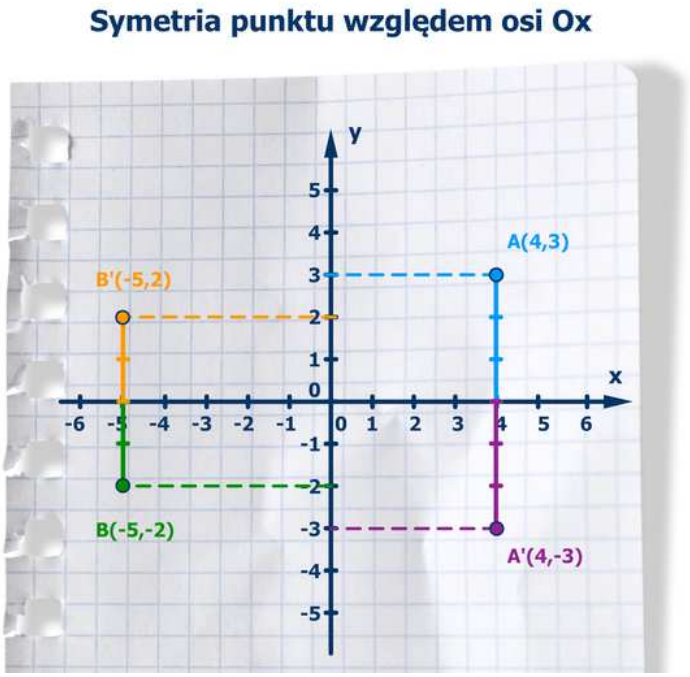
Ćwiczenie 1

Symetria punktu

Przykład 1

Spróbuj wyjaśnić, jak wyznaczyć współrzędne obrazu punktu w symetrii względem

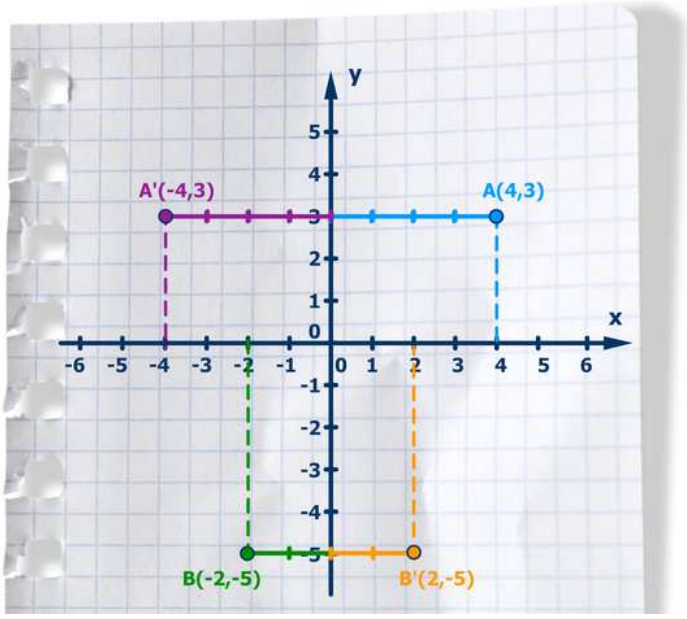
- osi Ox,
- osi Oy,
- początku układu współrzędnych.



Film dostępny na portalu epodreczniki.pl

Animacja pokazuje przekształcenie punktu A =(4 , 3) na punkt A prim =(4, -3) i punktu B =(-5, -2) na punkt B prim = (-5, 2) w symetrii względem osi OX. Prowadzimy prostą prostopadłą do osi OX przechodzącą przez dany punkt. Mierzymy liczbę jednostek między punktem i osią OX. Tę liczbę jednostek odkładamy na prostej po drugiej stronie osi OX. Otrzymany punkt jest symetryczny do danego punktu względem osi OX.

Symetria punktu względem osi Oy

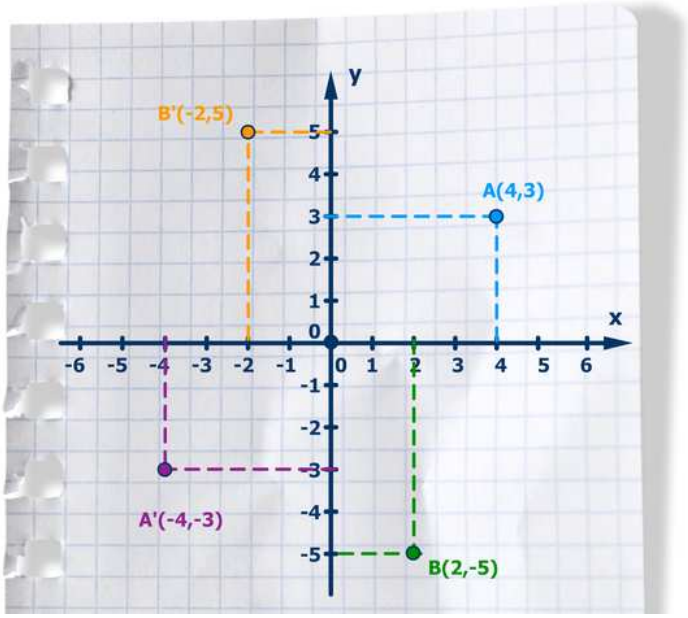


Film dostępny na portalu epodreczniki.pl

Animacja pokazuje przekształcenie punktu A =(4, 3) na punkt A prim =(−4, 3) i punktu B =(−2, −5) na punkt B prim =(2, −5) w symetrii względem osi OY. Prowadzimy prostą prostopadłą do osi OY przechodzącą przez dany punkt. Mierzymy liczbę jednostek między punktem i osią y. Tę liczbę jednostek odkładamy na prostej po drugiej stronie osi OY. Otrzymany punkt jest symetryczny do danego punktu względem osi OY.

Przykład 2

Symetria punktu względem początku układu współrzędnych



Film dostępny na portalu epodreczniki.pl

Animacja pokazuje przekształcenie punktu A =(4, 3) na punkt A prim =(-4, -3) i punktu B =(2, -5) na punkt B prim =(-2, 5) w symetrii względem początku układu współrzędnych. Prowadzimy prostą przechodzącą przez początek układu współrzędnych i dany punkt. Mierzymy cyrklem odległość pomiędzy tymi punktami. Nie zmieniając rozpiętości cyrkla odkładamy tę odległość po drugiej stronie początku układu współrzędnych. Otrzymany punkt jest symetryczny do danego punktu w symetrii względem początku układu współrzędnych.

Zapamiętaj!

- Przekształcając punkt $P = (x, y)$ w symetrii względem osi Ox, otrzymujemy punkt $P_1 = (x, -y)$. Oś Ox jest symetralną odcinka PP_1.
- Przekształcając punkt $P = (x, y)$ w symetrii względem osi Oy, otrzymujemy punkt $P_2 = (-x, \mathrm{y})$. Oś Oy jest symetralną odcinka PP_2.
- Punkt $P_3 = (-x, -y)$, symetryczny do punktu $P = (x, \mathrm{y})$ względem punktu $O = (0, 0)$, jest obrazem punktu $P_1 = (x, -y)$ w symetrii względem osi Oy i jednocześnie obrazem punktu $P_2 = (-x, \mathrm{y})$ w symetrii względem osi Ox.

Przykład 3

Rozpatrzmy trójkąt ABC o wierzchołkach

$$\mathrm{A} = (1, 2),\ \mathrm{B} = (5, 1),\ \mathrm{C} = (2, 7).$$

Przekształcając trójkąt ABC w symetrii względem osi Ox, otrzymujemy trójkąt o wierzchołkach

$$A_1 = (1, -2),\ B_1 = (5, -1),\ C_1 = (2, -7).$$

Przekształcając trójkąt ABC w symetrii względem osi Oy, otrzymujemy trójkąt o wierzchołkach

$$A_2 = (-1, 2),\ B_2 = (-5, 1),\ C_2 = (-2, 7).$$

Natomiast trójkąt $A_3B_3C_3$ o wierzchołkach

$$A_3 = (-1, -2),\ B_3 = (-5, -1),\ C_3 = (-2, -7)$$

jest zarówno obrazem trójkąta $A_1B_1C_1$ w symetrii względem osi Oy, jak i trójkąta $A_2B_2C_2$ w symetrii względem osi Ox, a także trójkąta ABC w symetrii względem punktu $O = (0, 0)$.

Zasób interaktywny dostępny pod adresem https://zpe.gov.pl/a/DRAWnR7Lq

Uwaga!

Rozpatrzmy okrąg o środku $S = (0,\ 0)$ i promieniu $r = 5$. Ponieważ każda prosta przechodząca przez punkt S jest osią symetrii tego okręgu, to w szczególności ten okrąg jest symetryczny względem obu osi układu współrzędnych.

Symetria wykresu funkcji

Rozpatrzmy wykres funkcji

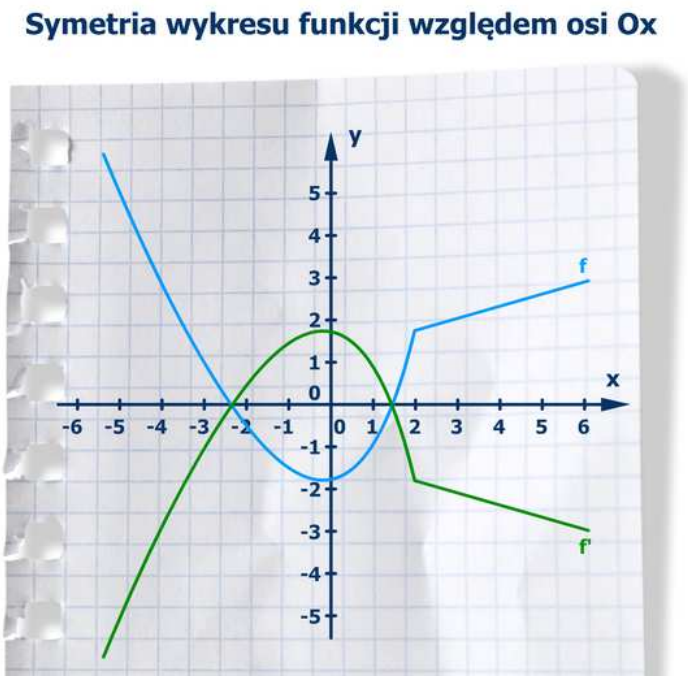
$$y = f(x),$$

określonej na pewnym podzbiorze zbioru liczb rzeczywistych. Punkt $P = (a, b)$, który leży na wykresie funkcji f ma współrzędne, które spełniają warunek $b = f(a)$.
Przekształcając wykres funkcji f w symetrii względem osi Ox, otrzymujemy wykres pewnej funkcji g, opisanej równaniem

$$y = g(x).$$

W symetrii względem osi Ox obrazem punktu P jest punkt o współrzędnych $(a, -b)$, leżący na wykresie funkcji g. Wynika z tego, że $g(a) = -b$, czyli $g(a) = -f(a)$. Punkt P wybraliśmy dowolnie, a zatem dla każdego x należącego do dziedziny funkcji f zachodzi zależność $g(x) = -f(x)$. Wobec tego, przekształcając wykres funkcji f w symetrii względem osi Ox, otrzymujemy wykres funkcji g opisanej wzorem

$$g(x) = -f(x).$$



Film dostępny na portalu epodreczniki.pl

Animacja pokazuje przekształcenie wykresu funkcji w symetrii względem osi OX.
Zaznaczamy na wykresie funkcji kilka punktów i przekształcamy je w symetrii względem osi

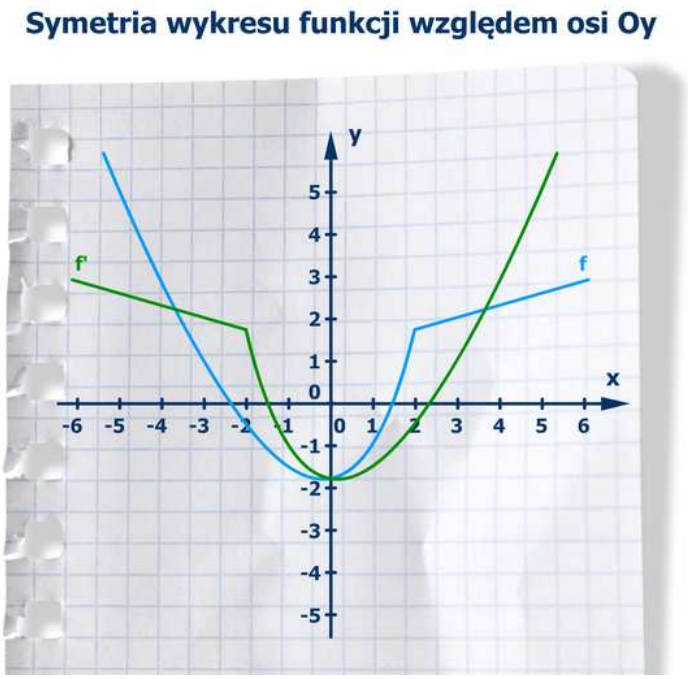
OX. Przekształcone punkty po połączeniu tworzą wykres funkcji symetrycznej do danej funkcji względem osi OX.

Przekształcając wykres funkcji f w symetrii względem osi Oy, otrzymujemy wykres funkcji h opisanej równaniem

$$y = h(x).$$

W symetrii względem osi Oy obrazem punktu P jest punkt o współrzędnych $(-a,\ b)$ leżący na wykresie funkcji h. Wynika z tego, że $h(-a) = b$, czyli $h(-a) = f(a)$. Punkt P wybraliśmy dowolnie, co oznacza, że jeśli argumenty funkcji h i f są liczbami przeciwnymi, to wartości tych funkcji są równe. Wobec tego, przekształcając wykres funkcji f w symetrii względem osi Oy, otrzymujemy wykres funkcji h, opisanej wzorem

$$h(x) = f(-x).$$



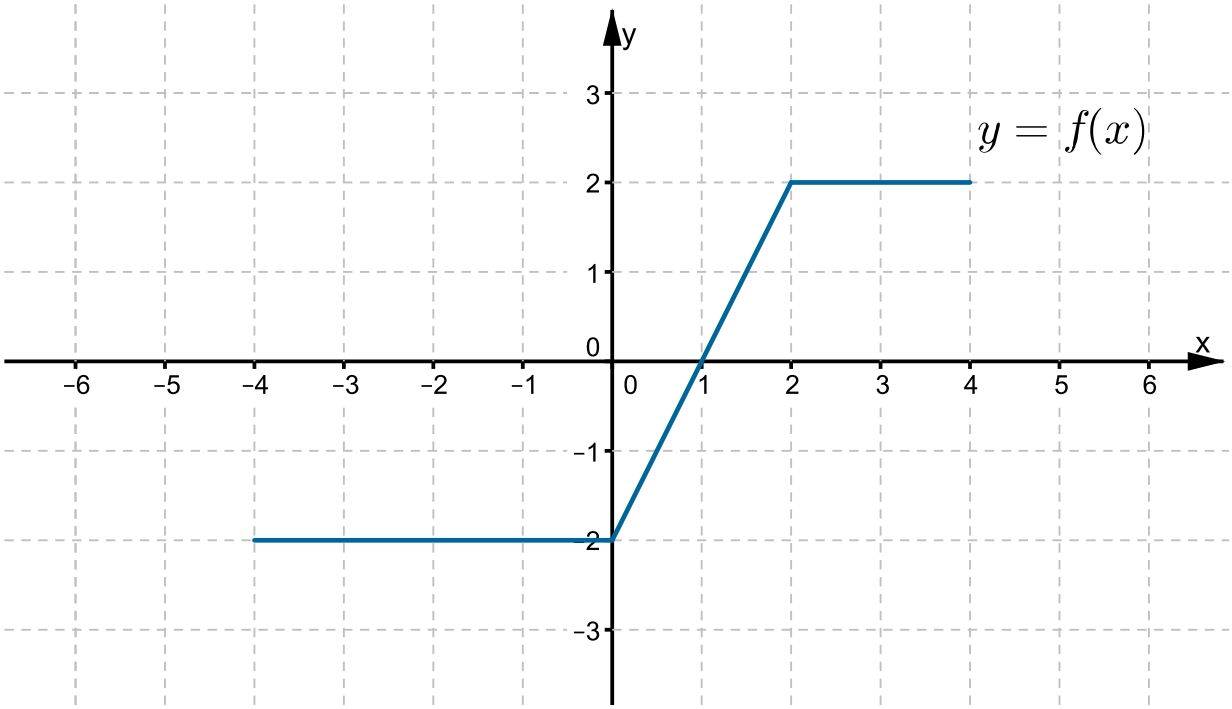
Film dostępny na portalu epodreczniki.pl

Animacja pokazuje przekształcenie wykresu funkcji w symetrii względem osi OY. Zaznaczamy na wykresie funkcji kilka punktów i przekształcamy je w symetrii względem osi OY. Przekształcone punkty po połączeniu tworzą wykres funkcji symetrycznej do danej funkcji względem osi OY.

Przykłady symetrii funkcji

Przykład 1

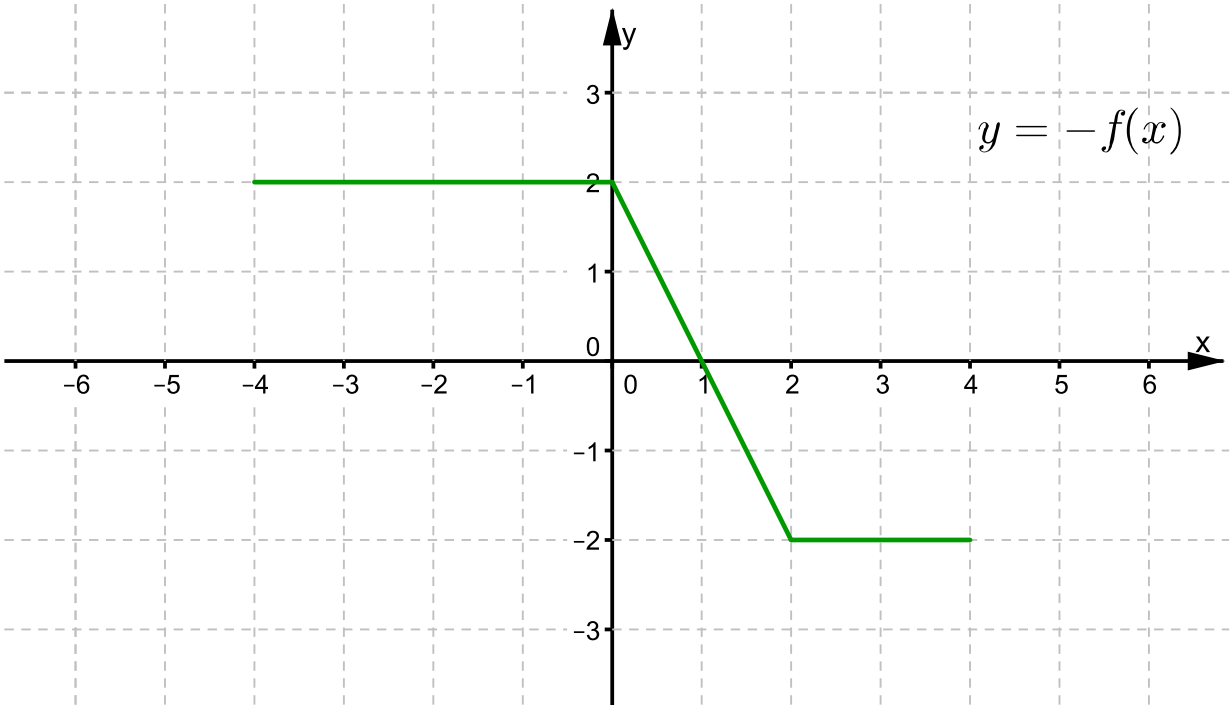
Na rysunku przedstawiony jest wykres funkcji f.



a. Wykres funkcji g określonej wzorem

$$g(x) = -f(x)$$

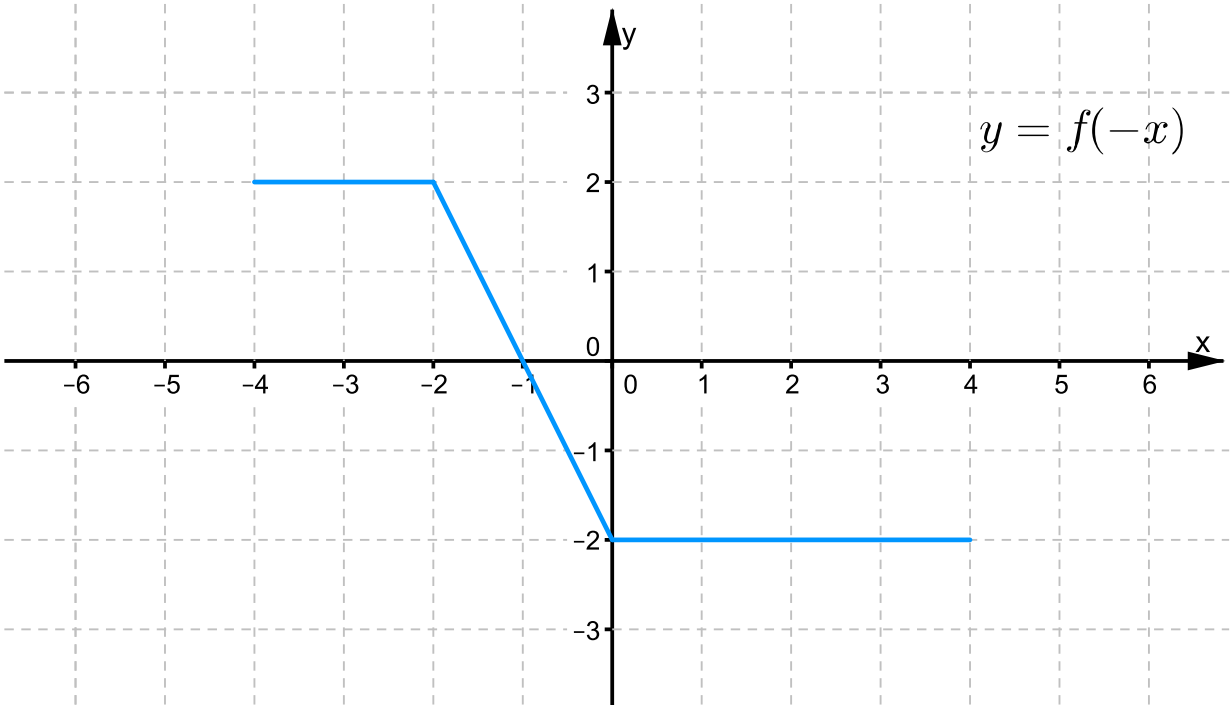
otrzymamy, przekształcając symetrycznie wykres funkcji f względem osi Ox.



a. Wykres funkcji h określonej wzorem

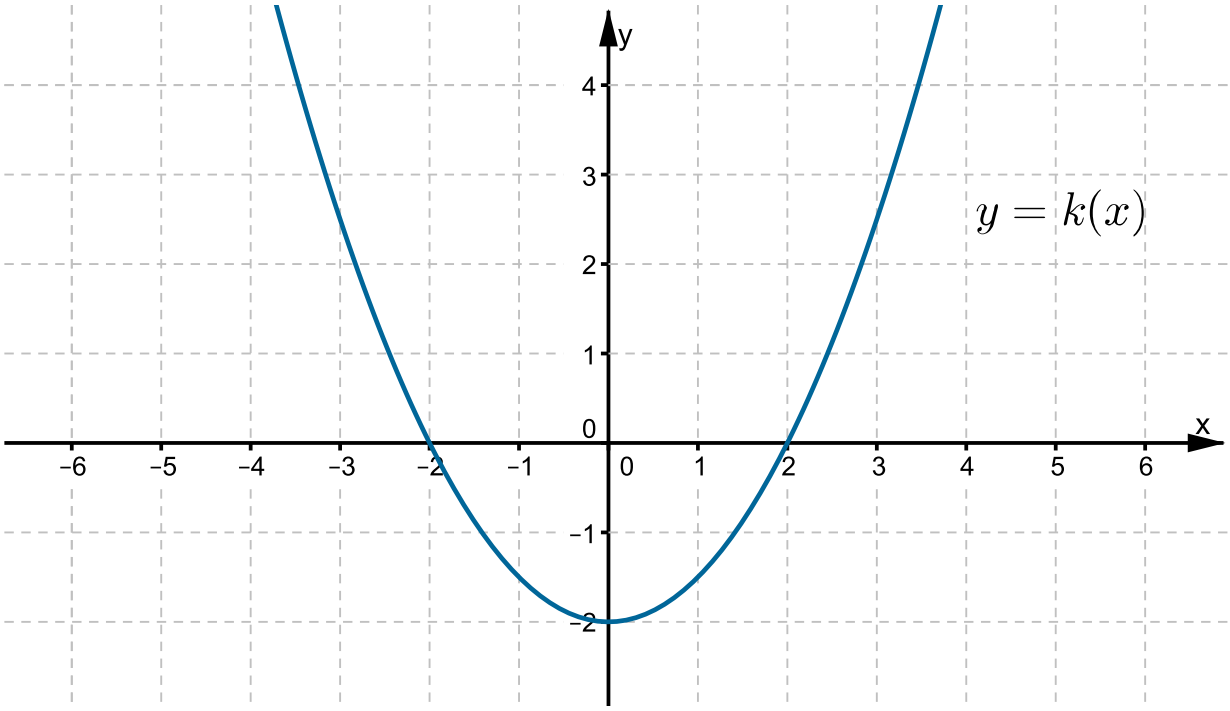
$$h(x) = f(-x)$$

otrzymamy, przekształcając symetrycznie wykres funkcji f względem osi Oy.



Przykład 2

Rysunek przedstawia wykres funkcji k.

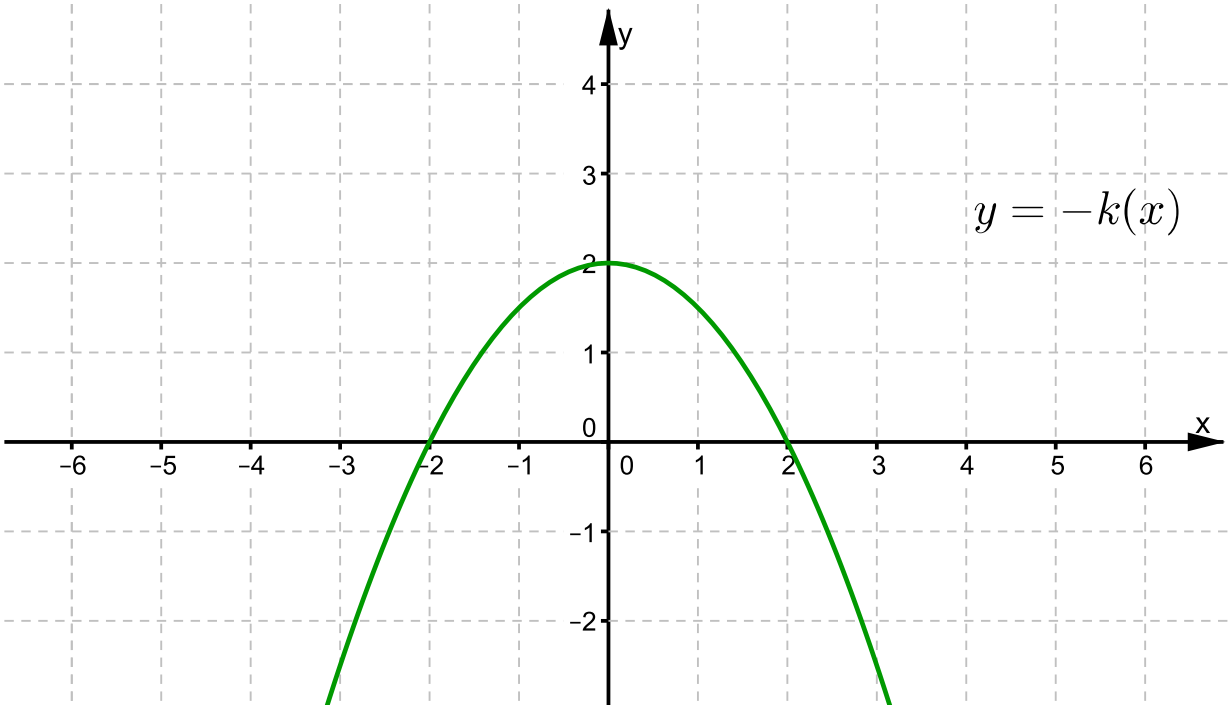


a. Przekształcając wykres funkcji k w symetrii względem osi Ox, otrzymamy krzywą

$$y = -k(x),$$

która jest wykresem funkcji g określonej wzorem

$$g(x) = -k(x).$$

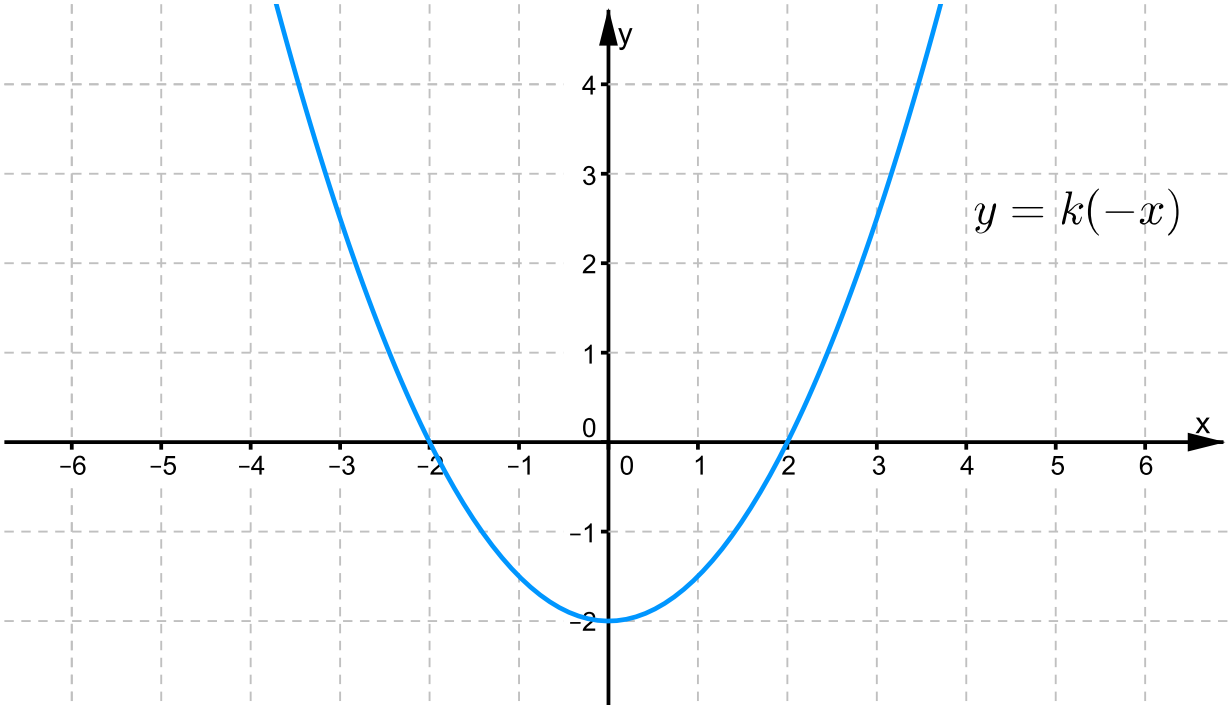


a. Przekształcając wykres funkcji k w symetrii względem osi Oy, otrzymamy krzywą

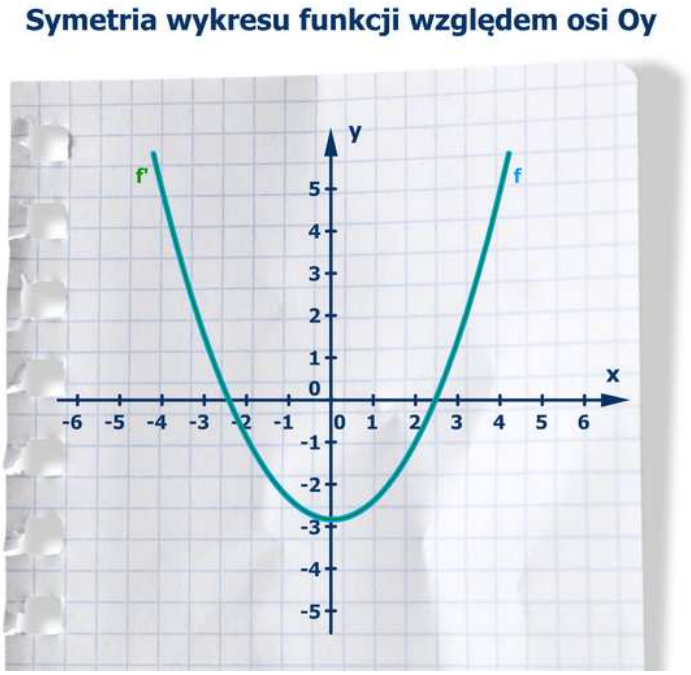
$$y = k(-x),$$

która jest wykresem funkcji h określonej wzorem

$$h(x) = k(-x).$$



Zauważmy, że wykresy funkcji k i h pokrywają się. A zatem funkcje k i h są równe, ponieważ ich dziedziną jest taki sam zbiór i dla każdego argumentu wartości obu tych funkcji są równe.

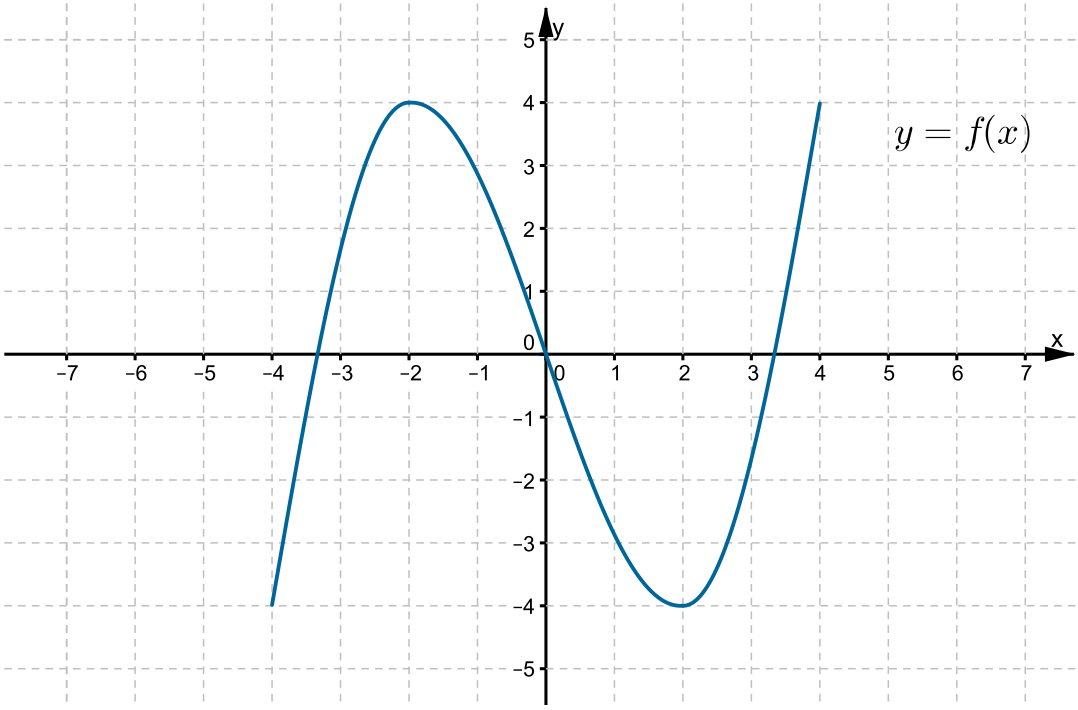


Film dostępny na portalu epodreczniki.pl

Animacja pokazuje przekształcenie wykresu funkcji w symetrii względem osi OY. Zaznaczamy na wykresie funkcji kilka punktów i przekształcamy je w symetrii względem osi OY. Przekształcone punkty po połączeniu tworzą wykres funkcji symetrycznej do danej funkcji względem osi OY.

Przykład 3

Na rysunku przedstawiony jest wykres funkcji f.

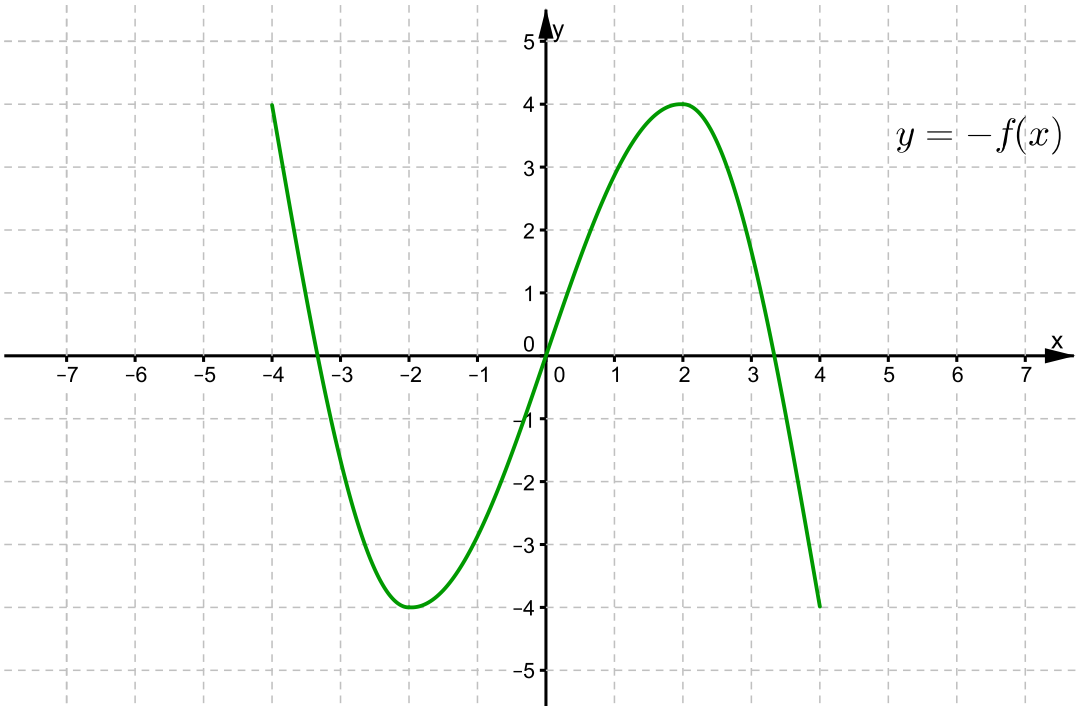


a. Przekształcając wykres tej funkcji w symetrii względem osi Ox, otrzymamy krzywą

$$y = -f(x),$$

która jest wykresem funkcji g określonej wzorem

$$g(x) = -f(x).$$

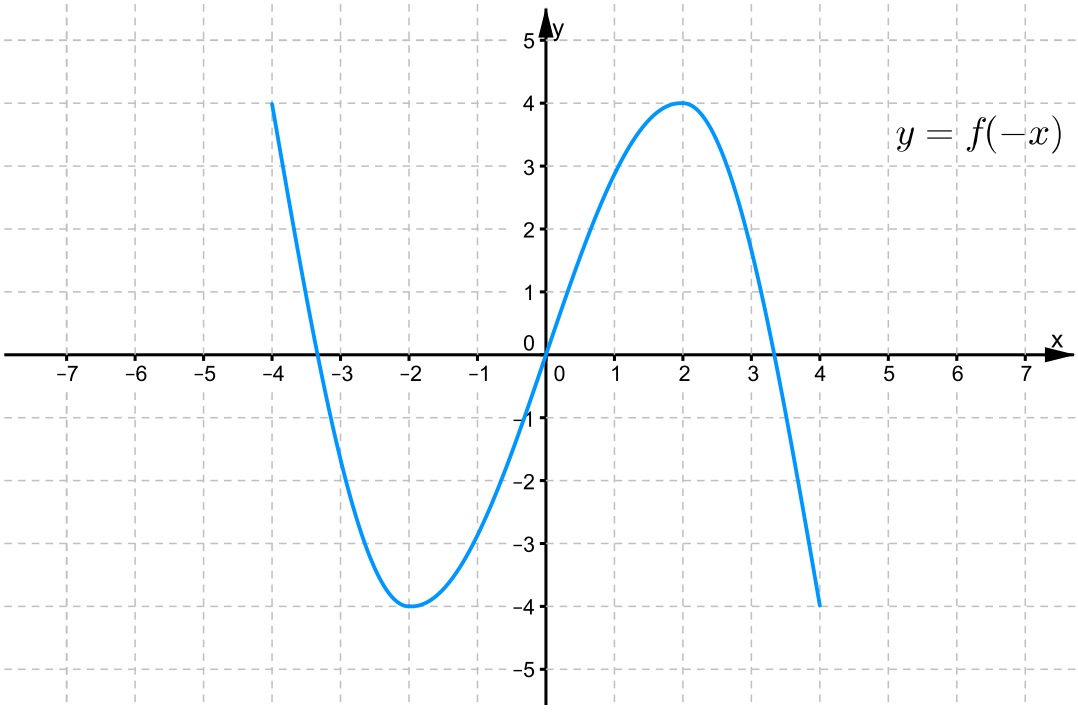


a. Przekształcając wykres funkcji f w symetrii względem osi Oy, otrzymamy krzywą

$$y = f(-x),$$

która jest wykresem funkcji h określonej wzorem

$$h(x) = f(-x).$$



Zauważmy, że wykresy funkcji g i h pokrywają się. Zatem funkcje g i h są równe.

Zadania. Część I

Ćwiczenie 1

Dane są punkty $A = (-3,\ 0)$ i $B = (2,\ 5)$. Przekształcając odcinek AB w symetrii względem osi Ox, otrzymamy

- [ ] odcinek, którego jednym z końców jest punkt $(-2,\ 5)$
- [ ] odcinek, którego jeden z końców leży na osi Ox
- [ ] odcinek, który ma jeden punkt wspólny z osią Oy

Ćwiczenie 2

Dane są punkty $\mathrm{A} = (-2,\ 3)$, $B = (-1,\ -1)$ i $C = (3,\ 0)$. Przekształcając trójkąt ABC w symetrii względem osi $\mathrm{Oy},$ otrzymamy trójkąt, którego jeden z wierzchołków

- ( ) leży na osi Ox
- ( ) ma obie współrzędne ujemne
- ( ) leży na osi Oy

Ćwiczenie 3

Punkt $S = (2, -4)$ jest środkiem okręgu o promieniu 4. Przekształcając ten okrąg w symetrii względem osi Ox, otrzymamy

- [ ] okrąg, który ma trzy punkty wspólne z osiami układu współrzędnych
- [ ] okrąg o promieniu 4
- [ ] okrąg, którego środkiem jest punkt $(2,\ 4)$

Ćwiczenie 4

Przeciągnij wzory funkcji z dolnej sekcji do górnej.

funkcje symetryczne względem osi Oy

funkcje symetryczne względem początku układu współrzędnych

$y = 2x$ $y = \frac{1}{2}$ $y = x^2$

$y = \sqrt[3]{x}$ $y = \sqrt{x^2}$ $y = \frac{1}{x}$

$y = -3x^2$ $y = 2^{\sqrt{x^2}}$

$y = x^4$ $y = -x^2$ $y = x^3$

$y = -3x$

Ćwiczenie 5

Osie Ox i Oy są osiami symetrii prostokąta ABCD, w którym $A = (7,\ -6)$. Wówczas

- [ ] pole tego prostokąta jest równe 168
- [ ] $C = (-7,\ 6)$
- [ ] obwód tego prostokąta wynosi 26

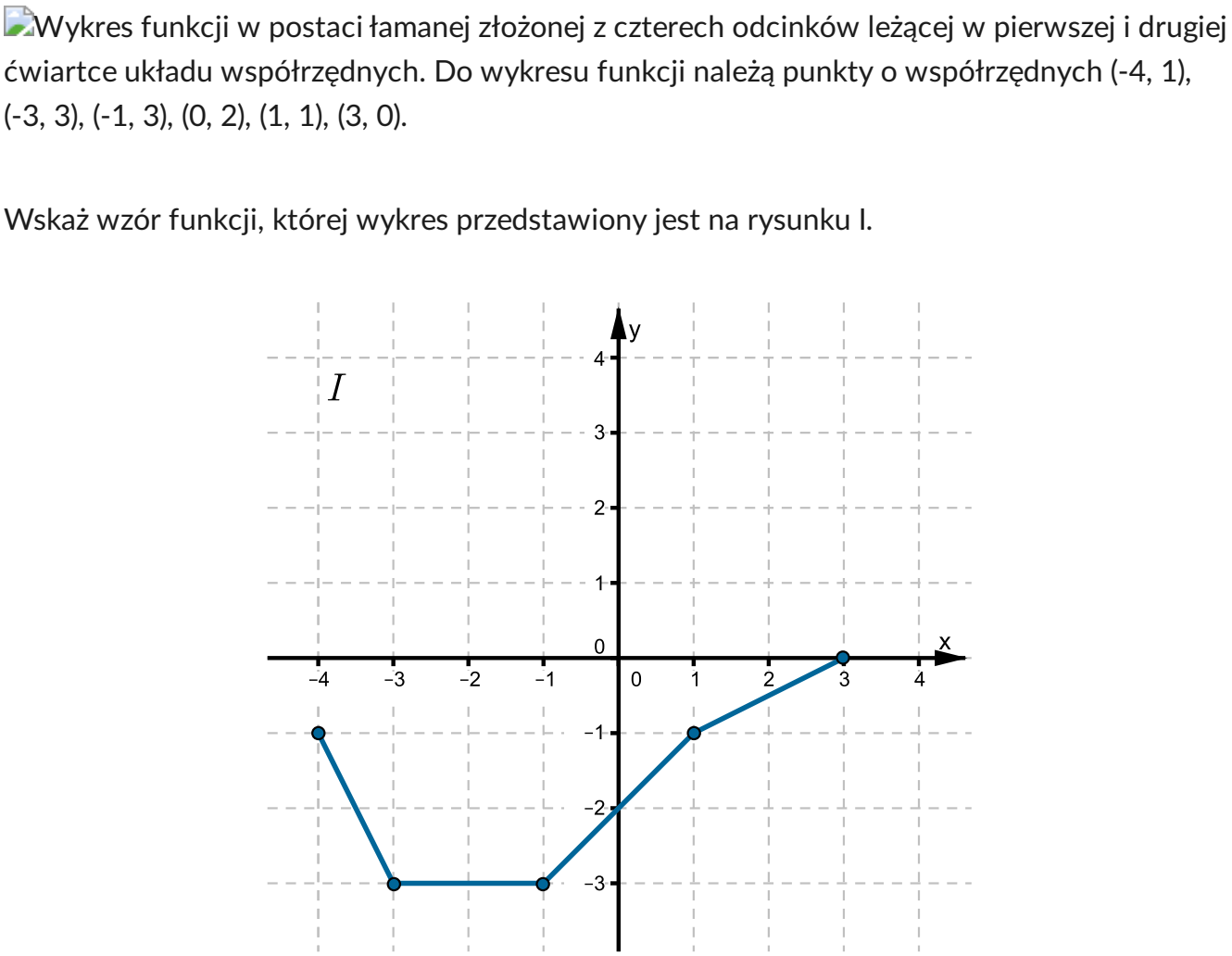
Ćwiczenie 6

Oś Oy jest osią symetrii trapezu KLMN, w którym $K = (-5,\ 11)$ oraz $L = (-8,\ -9)$. Wynika z tego, że

- [ ] pole trapezu jest równe 260
- [ ] $\mathrm{M}\ = (8,\ 9)$
- [ ] wysokość tego trapezu ma długość 20

Ćwiczenie 7

Na rysunku przedstawiony jest wykres funkcji f.

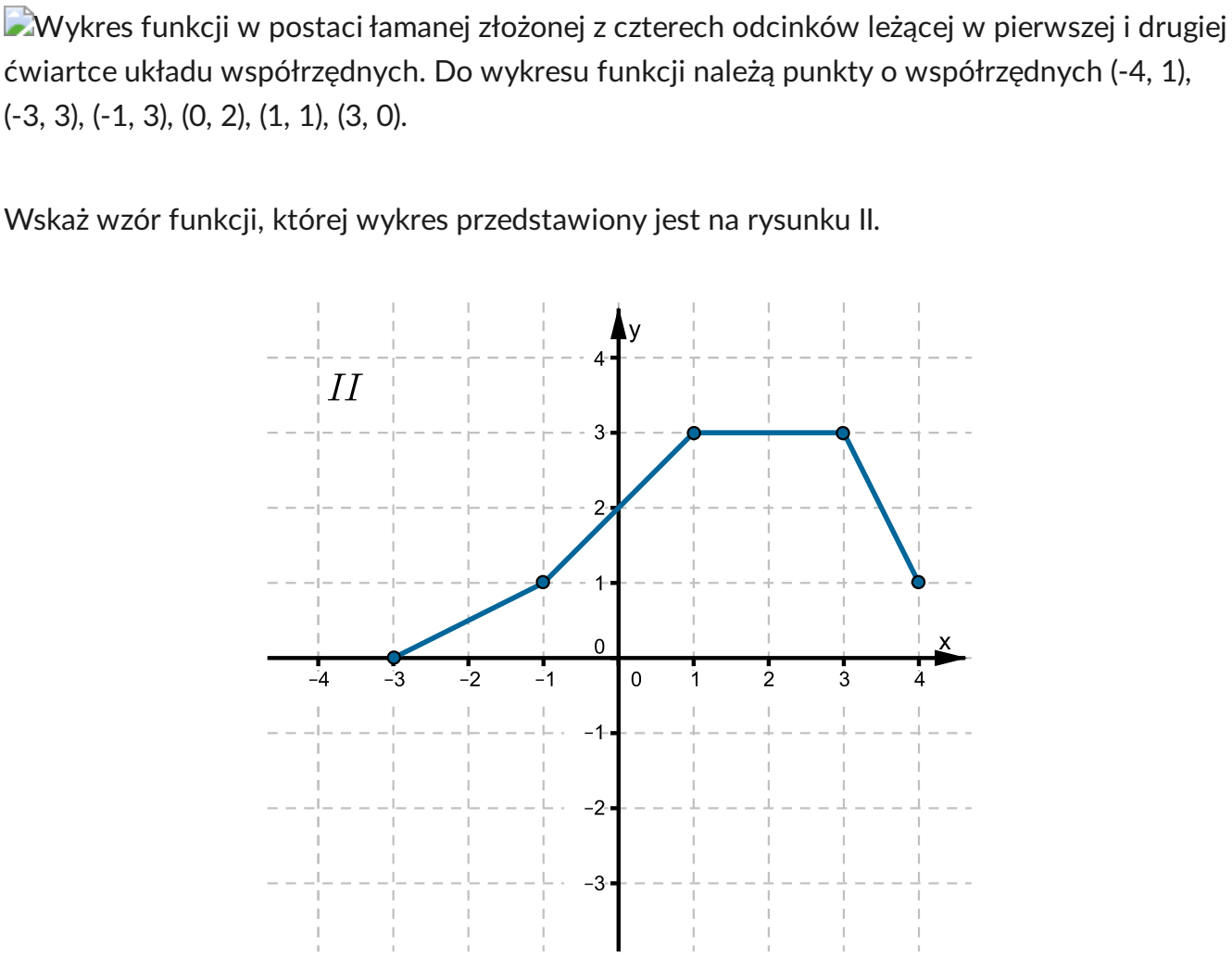


Wskaż wzór funkcji, której wykres przedstawiony jest na rysunku I.

- ○ $y = -f(-x)$
- ○ $y = f(-x)$
- ○ $y = -f(x)$

Ćwiczenie 8

Na rysunku przedstawiony jest wykres funkcji f.



Wykres funkcji w postaci łamanej złożonej z czterech odcinków leżącej w pierwszej i drugiej ćwiartce układu współrzędnych. Do wykresu funkcji należą punkty o współrzędnych (-4, 1), (-3, 3), (-1, 3), (0, 2), (1, 1), (3, 0).

Wskaż wzór funkcji, której wykres przedstawiony jest na rysunku II.

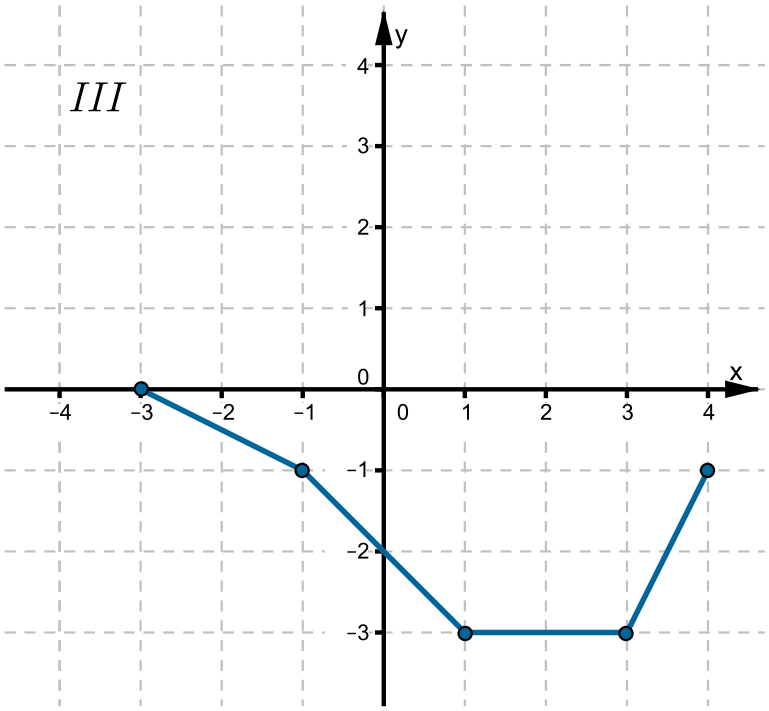
- $y = -f(x)$
- $y = -f(-x)$
- $y = f(-x)$

Ćwiczenie 9

Na rysunku przedstawiony jest wykres funkcji f.

Wykres funkcji w postaci łamanej złożonej z czterech odcinków leżącej w pierwszej i drugiej ćwiartce układu współrzędnych. Do wykresu funkcji należą punkty o współrzędnych (-4, 1), (-3, 3), (-1, 3), (0, 2), (1, 1), (3, 0).

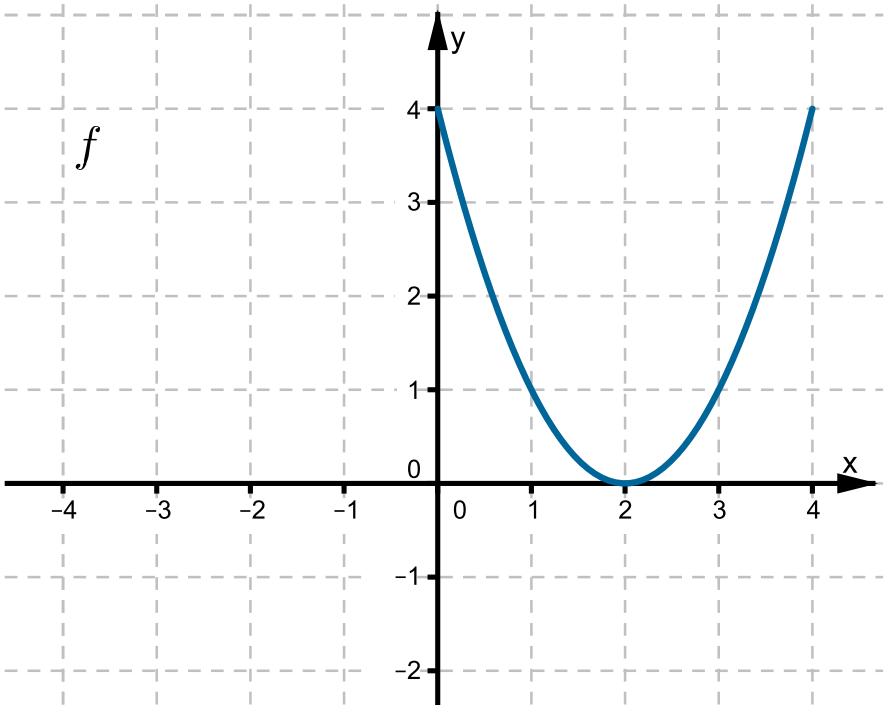
Wskaż wzór funkcji, której wykres przedstawiony jest na rysunku III.



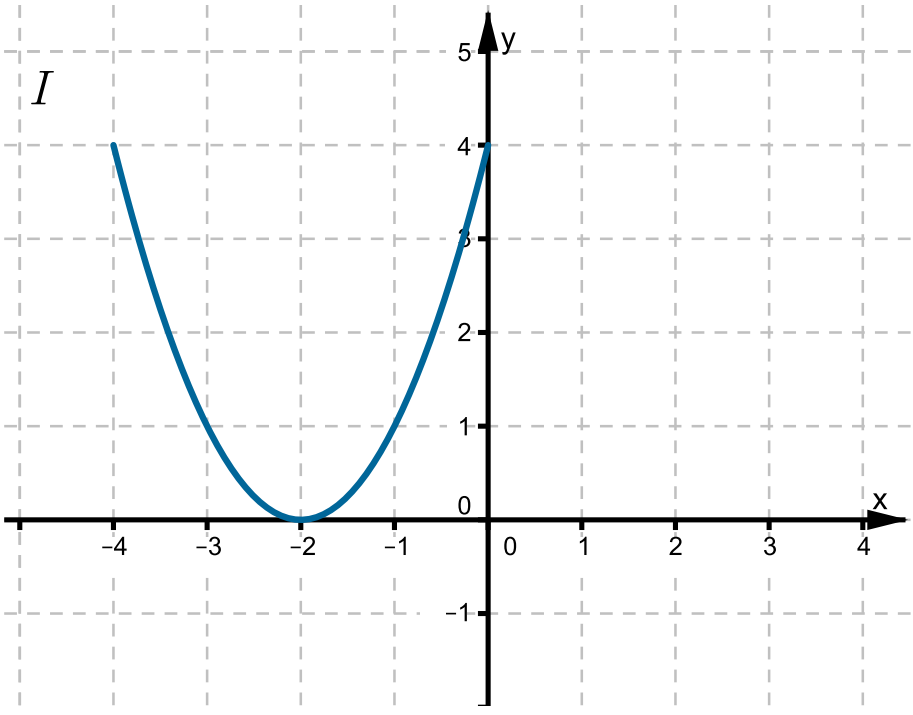
- $y = -f(x)$
- $y = -f(-x)$
- $y = f(-x)$

Ćwiczenie 10

Na rysunku przedstawiony jest wykres funkcji f.



Wskaż wzór funkcji, której wykres przedstawiony jest na rysunku I.

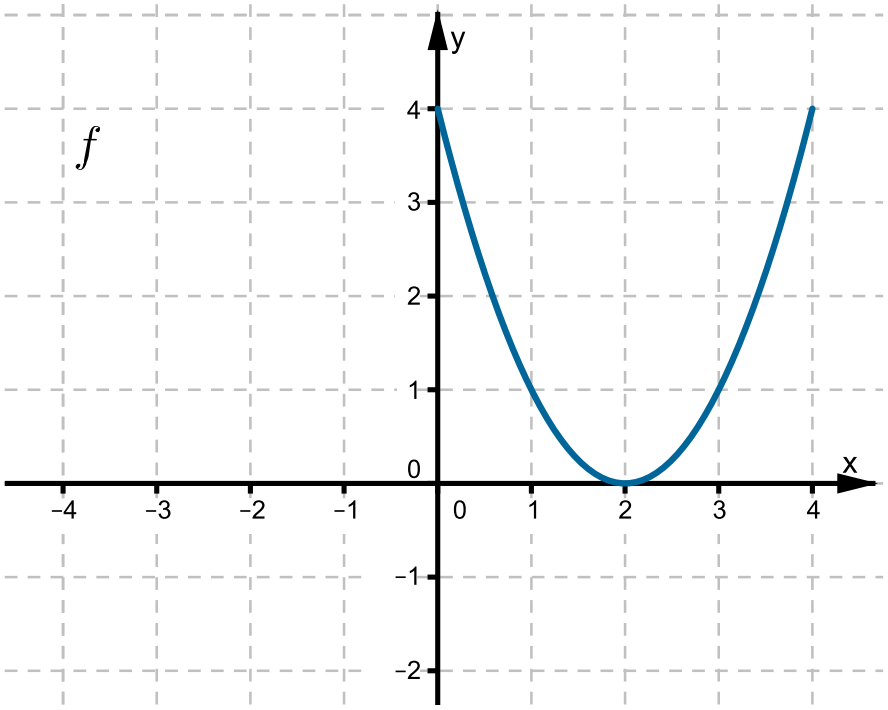


- ○ $y = -f(x)$
- ○

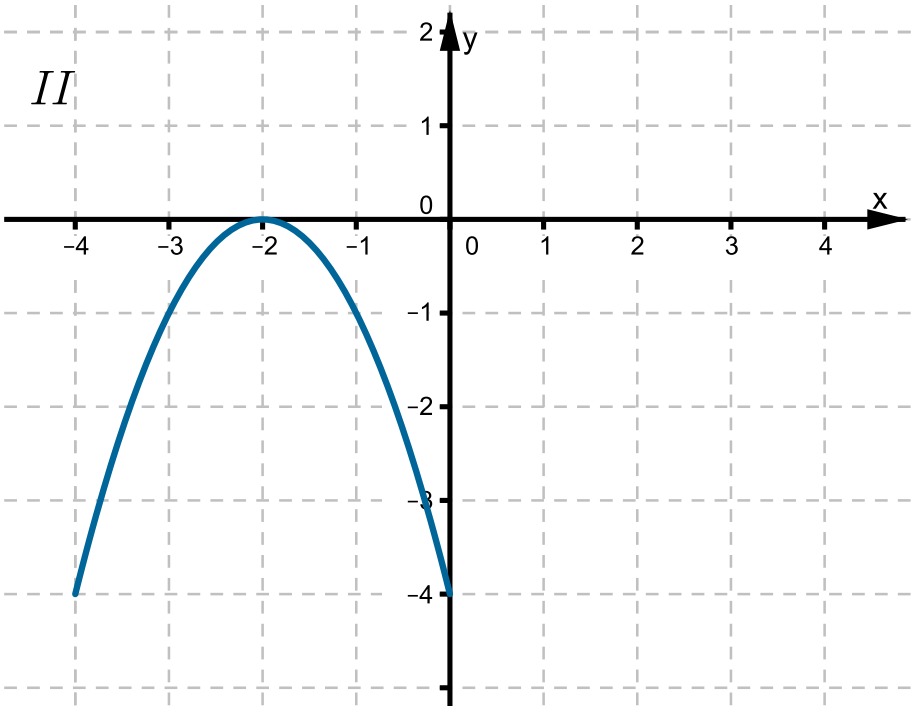
- $y = -f(-x)$
- $y = f(-x)$

Ćwiczenie 11

Na rysunku przedstawiony jest wykres funkcji f.



Wskaż wzór funkcji, której wykres przedstawiony jest na rysunku II.

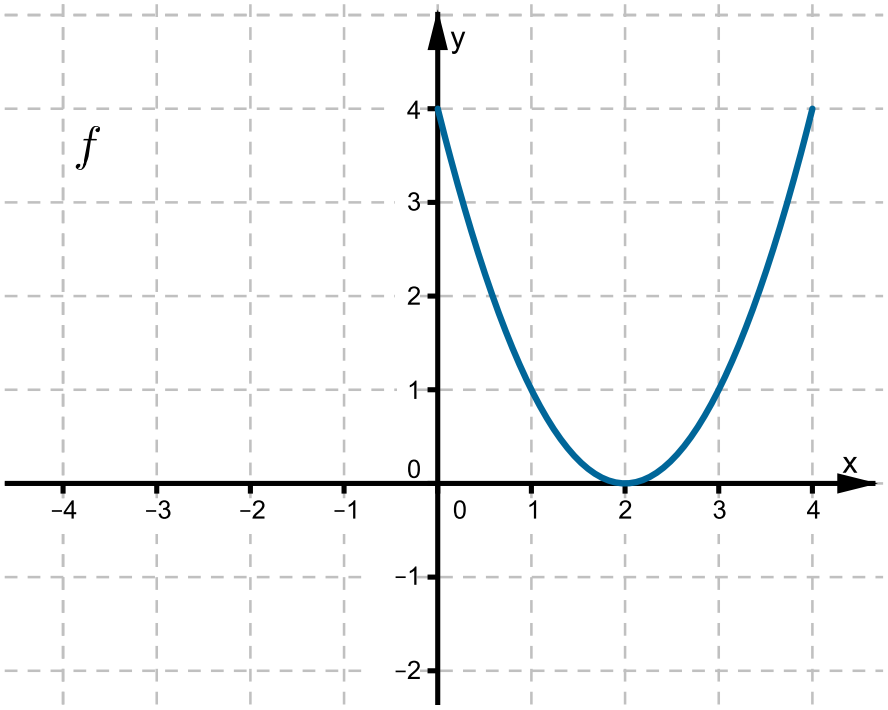


- ○ $y = -f(x)$

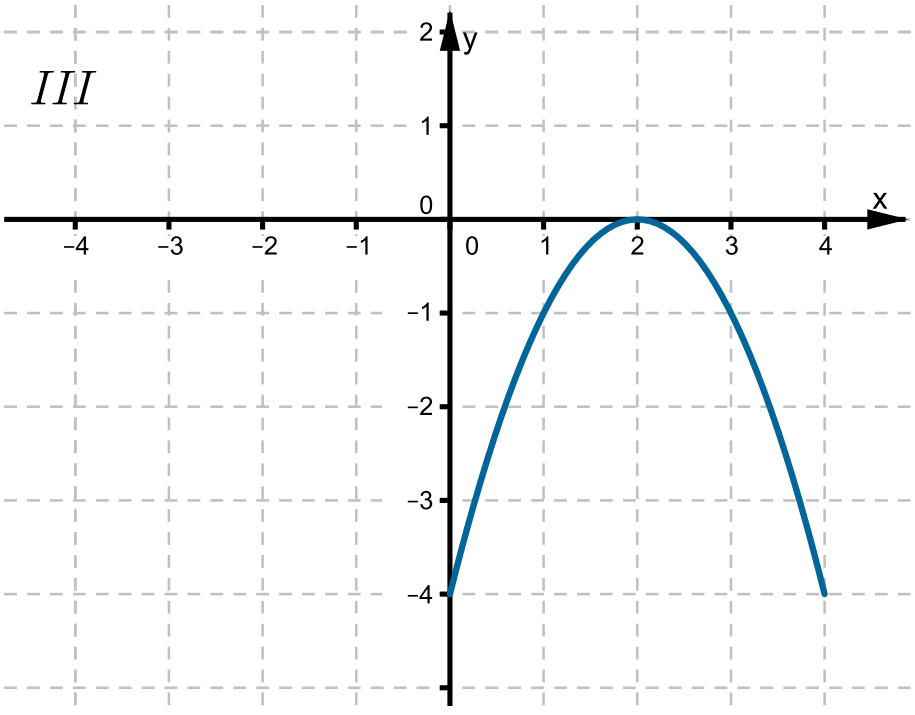
- $y = -f(-x)$
- $y = f(-x)$

Ćwiczenie 12

Na rysunku przedstawiony jest wykres funkcji f.



Wskaż wzór funkcji, której wykres przedstawiony jest na rysunku III.



- $y = -f(-x)$

- $y = f(-x)$
- $y = -f(x)$

Ćwiczenie 13

Funkcja f określona jest wzorem $f(x) = x^4 - 4x^3$.

- Przekształcając wykres funkcji f w symetrii względem osi Oy, otrzymamy wykres funkcji $h(x) = -x^4 - 4x^3$.
- Wykres funkcji f jest symetryczny względem osi Oy.
- Przekształcając wykres funkcji f w symetrii względem osi Ox, otrzymamy wykres funkcji $g(x) = -x^4 + 4x^3$.

Ćwiczenie 14

Wśród podanych niżej funkcji są takie, których wykres jest symetryczny względem osi Oy. Wskaż te funkcje.

- [ ] $f_3(x) = -x^5 + 2x^3$
- [ ] $f_4(x) = 2x - 5$
- [ ] $f_2(x) = \frac{1}{x^4+2}$
- [ ] $f_1(x) = x^2 + 2$

Ćwiczenie 15

Dana jest funkcja $f(x) = ax^3 + bx^2$.

- [ ] Istnieją takie wartości a i b, że wykres funkcji f nie ma punktów wspólnych z wykresem funkcji $y = f(-x)$.
- [ ] Istnieją takie wartości a i b, że wykres funkcji f jest symetryczny względem osi Oy.
- [ ] Istnieją takie wartości a i b, że wykres funkcji f jest symetryczny względem osi Ox.

Ćwiczenie 16

Dane są punkty $A = (1,\ 2)$, $B = (1,\ -2)$, $C = (-1,\ 2)$, $D = (-2,\ -1)$. Wskaż odcinek, którego osią symetrii jest oś Oy.

- ◯ DB
- ◯ CA
- ◯ AB
- ◯ BC

Ćwiczenie 17

Oś Oy jest osią symetrii trójkąta ABC, w którym $\mathrm{A} = (2,\ -5)$, $\mathrm{B} = (-2, -5)$. Wynika z tego, że wierzchołek C może mieć współrzędne

- ◯ $(2,\ 0)$
- ◯ $(0,\ 2)$
- ◯ $(-2,\ 0)$
- ◯ $(0,\ -5)$

Ćwiczenie 18

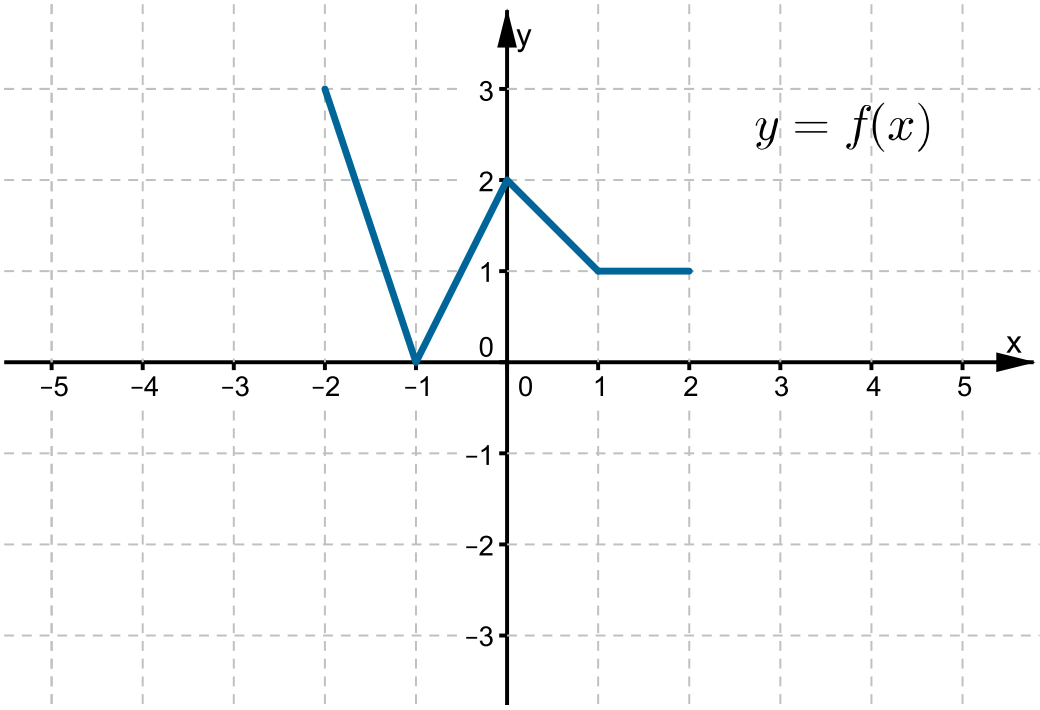
Wskaż okrąg symetryczny względem osi Ox.

- ◯ Okrąg o środku w punkcie $\mathrm{S} = (0,\ 3)$ i promieniu równym 3.
- ◯ Okrąg o środku w punkcie $\mathrm{S} = (0,\ 3)$ i promieniu równym 2.
- ◯ Okrąg o środku w punkcie $\mathrm{S} = (2,\ -2)$ i promieniu równym 2.
- ◯ Okrąg o środku w punkcie $\mathrm{S} = (-2,\ 0)$ i promieniu równym 2.

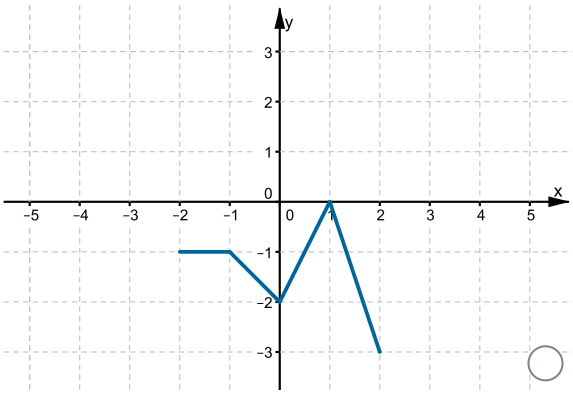
Zadania. Część II

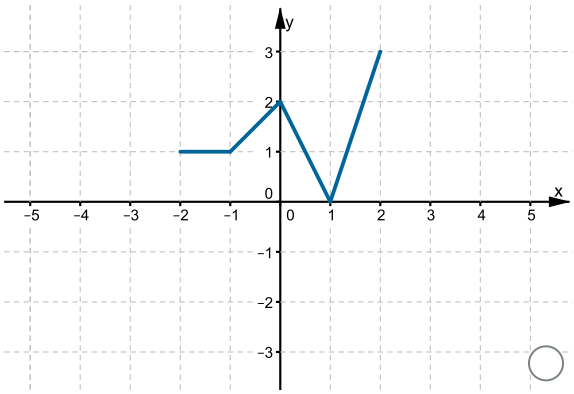
Ćwiczenie 1

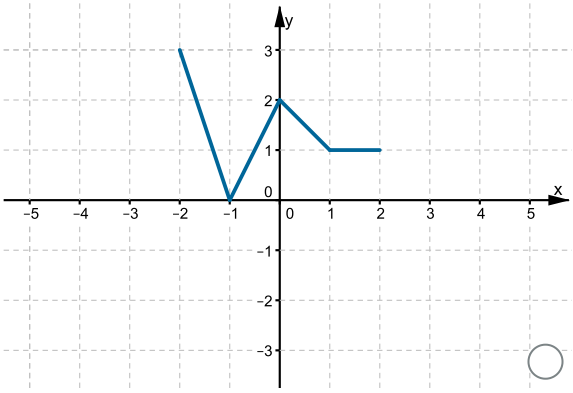
Rysunek przedstawia wykres funkcji $y = f(x)$.

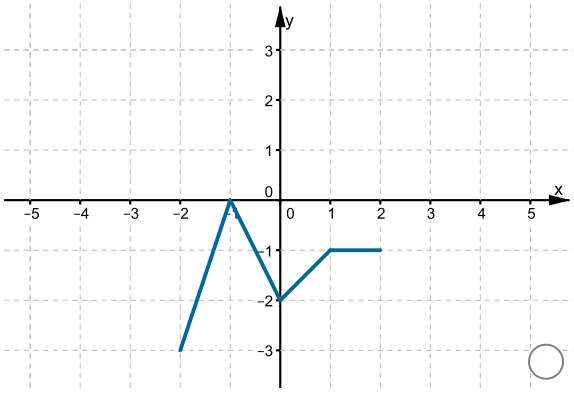


Wskaż rysunek, na którym przedstawiony jest wykres funkcji $y = -f(x)$.



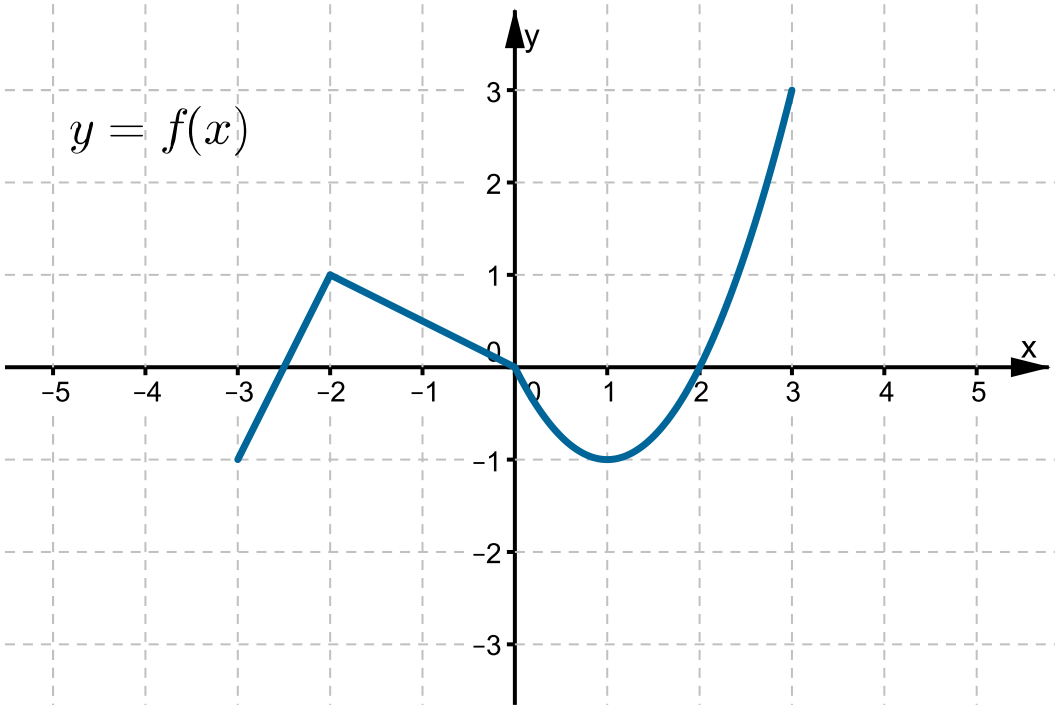




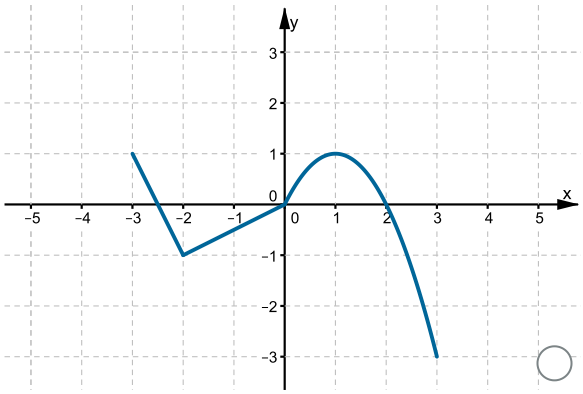


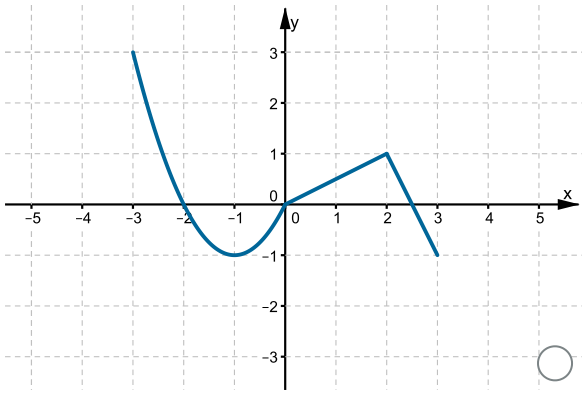
Ćwiczenie 2

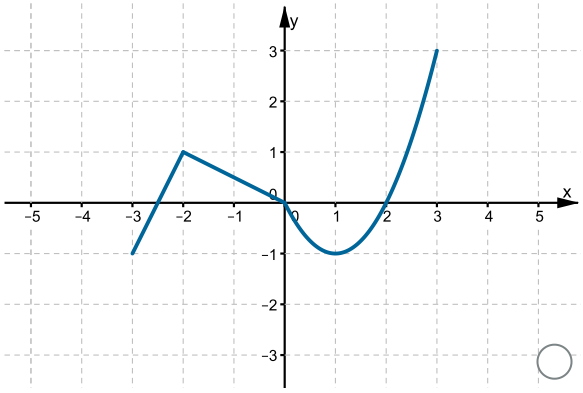
Na rysunku przedstawiony jest wykres funkcji $y = f(x)$.

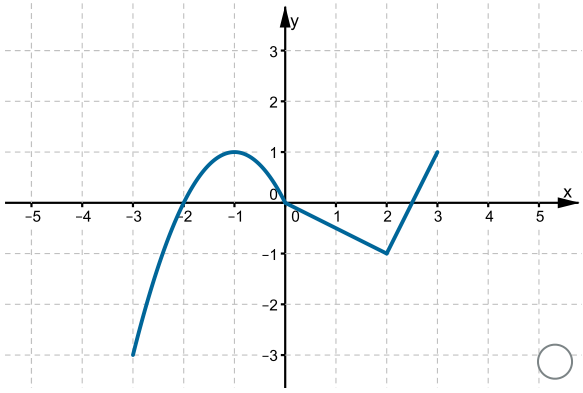


Wskaż rysunek, na którym przedstawiony jest wykres funkcji $y = f(-x)$.









Ćwiczenie 3

Dana jest funkcja $f(x) = 2x + 1$. Przekształcając wykres funkcji f w symetrii względem osi Ox, otrzymujemy wykres funkcji g. Funkcja g określona jest wzorem

- ◯ $g(x) = x^2 - 1$
- ◯ $g(x) = -2x - 1$
- ◯ $g(x) = 2x + 1$
- ◯ $g(x) = -x^2 - 1$

Ćwiczenie 4

Funkcja f określona jest wzorem $f(x) = x^2 - 1$. Przekształcając wykres funkcji f w symetrii względem osi Oy, otrzymujemy wykres funkcji g. Wskaż wzór funkcji g.

- ◯ $g(x) = x^2 + 1$
- ◯ $g(x) = -x^2 + 1$
- ◯ $g(x) = -x^2 - 1$
- ◯ $g(x) = x^2 - 1$

Ćwiczenie 5

Na rysunku przedstawiony jest wykres funkcji $y = f(x)$. Funkcja g określona jest wzorem $g(x) = -f(x)$.

Wykres funkcji f w postaci krzywej leżącej w pierwszej, drugiej, trzeciej i czwartej ćwiartce układu współrzędnych. Do wykresu funkcji należą punkty o współrzędnych (-1, 3), (0, -1), (2, 1).

Które równanie ma dokładnie trzy rozwiązania?

- ◯ $g(x) = 0$
- ◯ $g(x) = -1$
- ◯ $g(x) = -2$
- ◯ $g(x) = 1$

Ćwiczenie 6

Oś Ox jest symetralną odcinka AB, przy czym $\mathrm{A} = (-3,\ 5)$. Znajdź współrzędne punktu B.

Ćwiczenie 7

Oś Oy jest symetralną odcinka KL, przy czym $\mathrm{L} = (29,\ -51)$. Odcinek KL jest średnicą okręgu o środku S. Oblicz współrzędne punktu S i promień r tego okręgu.

Ćwiczenie 8

Dane są punkty $\mathrm{A} = (-7,\ 0)$ i $\mathrm{B} = (0,\ -4)$. Trójkąt $A\mathrm{BC}_1$ jest symetryczny względem osi Ox, a trójkąt ABC_2 jest symetryczny względem osi Oy.

a. Znajdź współrzędne wierzchołka C_1.

b. Ustal współrzędne wierzchołka C_2.

c. Wykaż, że pola trójkątów $A\mathrm{BC}_1$ i ABC_2 są równe.

Ćwiczenie 9

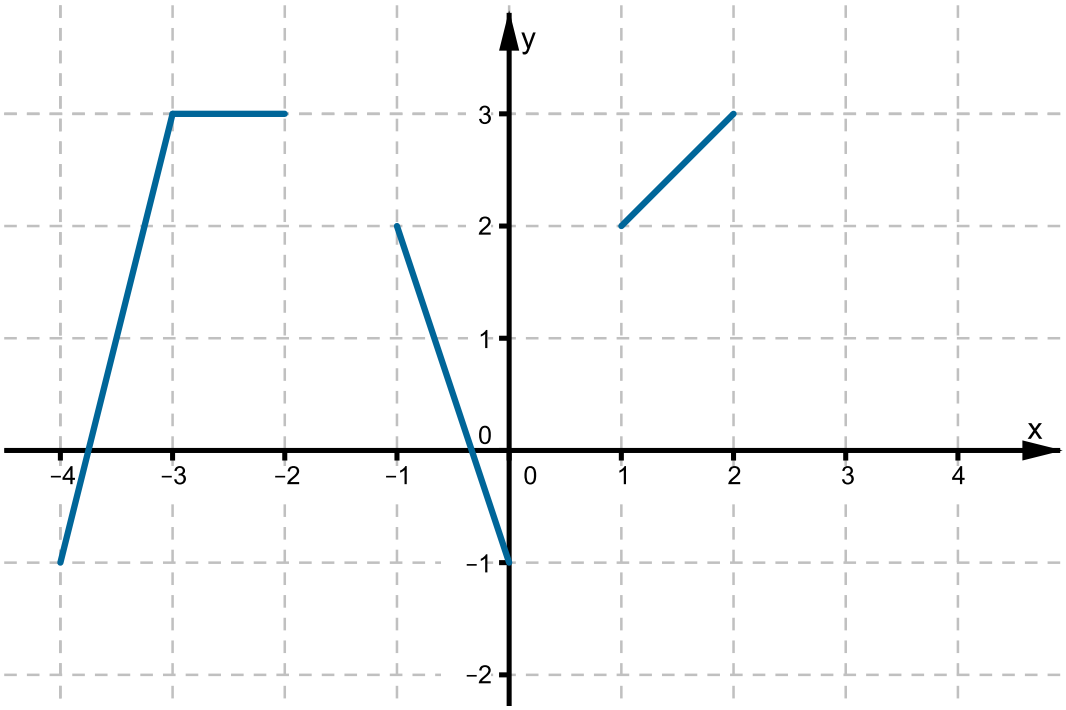
Obie osie układu współrzędnych są osiami symetrii ośmiokąta $\mathrm{ABCDEFGH}$, w którym $A = (2,\ -2)$ i $B = (3,\ -1)$. Oblicz.

a. współrzędne pozostałych wierzchołków tego ośmiokąta,

b. pole ośmiokąta $\mathrm{ABCDEFGH}$.

Ćwiczenie 10

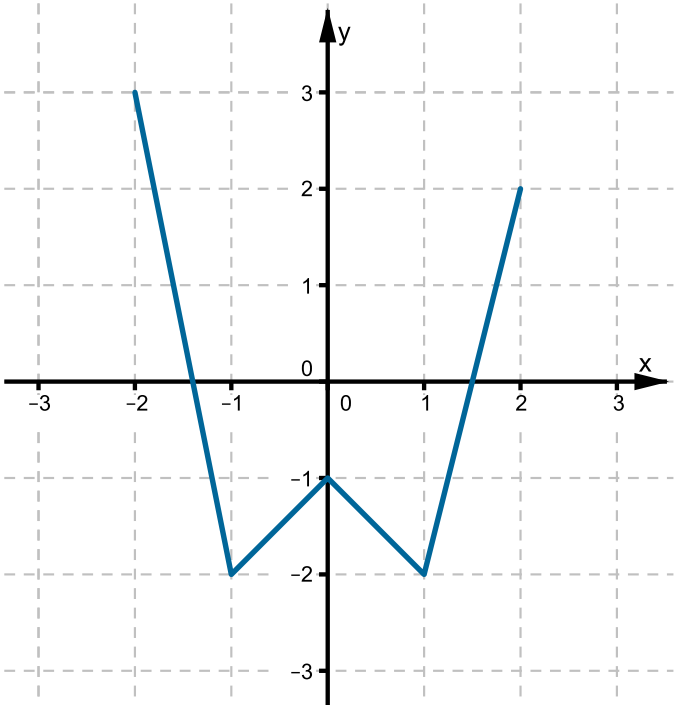
Dziedziną funkcji f jest przedział $\langle -4; 4 \rangle$, a jej wykres jest symetryczny względem osi Oy. Część wykresu funkcji f zaprezentowana jest na rysunku. Uzupełnij wykres funkcji f.



Ćwiczenie 11

Wykres funkcji f jest przedstawiony na rysunku.
Przekształcając wykres funkcji f w symetrii względem osi Ox, otrzymujemy wykres funkcji g.
Wykaż, że

$$g(-2)+g(-1)+g(0)+g(1)+g(2)=f(-2)+f(-1)+f(0)+f(1)+f(2).$$

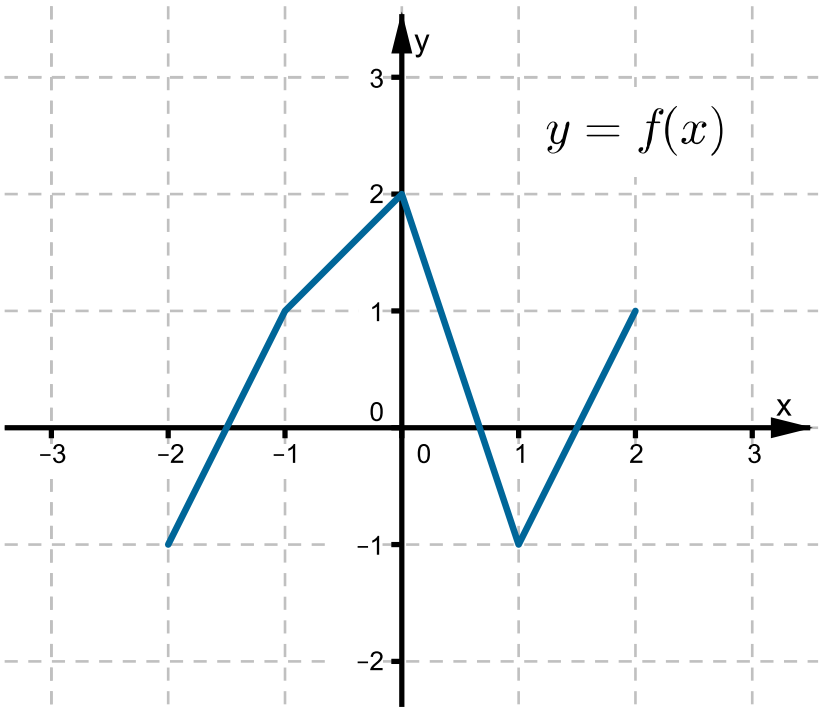


Ćwiczenie 12

Dziedziną funkcji f jest przedział $\langle -2;2\rangle$, a jej wykres jest symetryczny względem osi Ox.
Naszkicuj wykres funkcji f.

Ćwiczenie 13

Wykres funkcji f jest przedstawiony na rysunku.



Naszkicuj wykresy funkcji

a. $y = f(-x)$

b. $y = -f(x)$

Ćwiczenie 14

Podaj wzór funkcji h, której wykres jest symetryczny do wykresu funkcji f względem osi Ox.

a. $f(x) = 5x - 1$

b. $f(x) = 4 - 3x$

c. $f(x) = x^2 + 3x$

d. $f(x) = \frac{1}{x+3}$

Ćwiczenie 15

Podaj wzór funkcji t, której wykres jest symetryczny do wykresu funkcji f względem osi Oy.

a. $f(x) = 2x + 9$

b. $f(x) = -x + 7$

c. $f(x) = x^2 - x$

d. $f(x) = \frac{x^3 - 2}{5 - x^2}$

Ćwiczenie 16

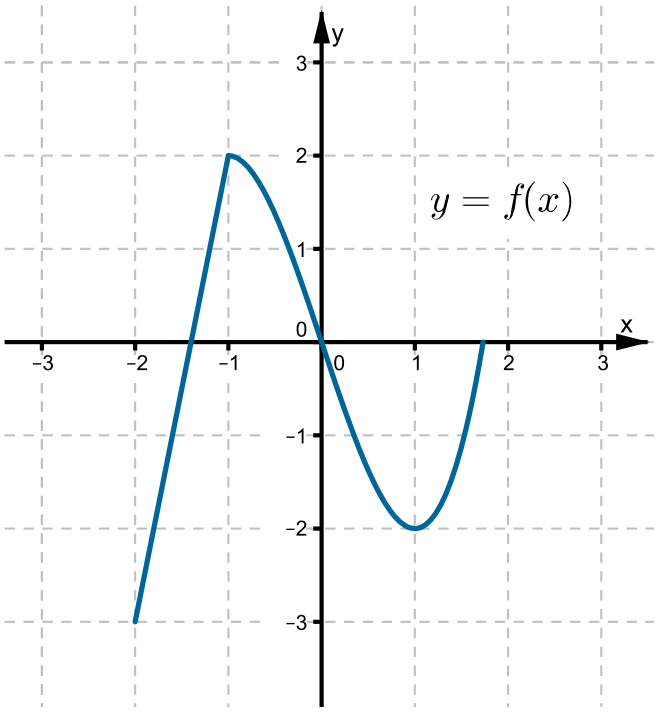
Wykres funkcji f jest przedstawiony na rysunku.
Funkcje g i h określone są wzorami $g(x) = -f(x)$ oraz $h(x) = f(-x)$.

a. Ile rozwiązań ma równanie $g(x) = 1$?

b. Ile rozwiązań ma równanie $g(x) = -1$?

c. Ile dodatnich rozwiązań ma równanie $h(x) = 1$?

d. Ile ujemnych rozwiązań ma równanie $h(x) = -1$?



Ćwiczenie 17

Funkcja f jest określona dla każdego x rzeczywistego. Uzasadnij, że jeżeli wykres funkcji f przekształcimy symetrycznie względem osi Ox, a następnie otrzymaną w ten sposób krzywą przekształcimy jeszcze raz względem osi Ox, to ponownie otrzymamy wykres funkcji f.

Zadania generatorowe

Zadania generatorowe

Ćwiczenie 1

Ćwiczenie 2

Ćwiczenie 3

Przesunięcie punktu w układzie współrzędnych

W prostokątnym układzie współrzędnych na płaszczyźnie zaznaczmy punkt $A = (2, -3)$ i wyznaczmy współrzędne punktów:
B_1 – otrzymanego w wyniku przesunięcia punktu A o 3 jednostki w lewo równolegle do osi Ox,
B_2 – otrzymanego w wyniku przesunięcia punktu A o 2 jednostki w prawo równolegle do osi Ox,
C_1 – otrzymanego w wyniku przesunięcia punktu A o 5 jednostek w górę równolegle do osi Oy,
C_2 – otrzymanego w wyniku przesunięcia punktu A o 3 jednostkę w dół równolegle do osi Oy.

Przyjmujemy, że „przesunięcie o ujemną liczbę jednostek", oznaczać będzie przesunięcie w przeciwną stronę niż wskazuje strzałka na osi liczbowej, np.:

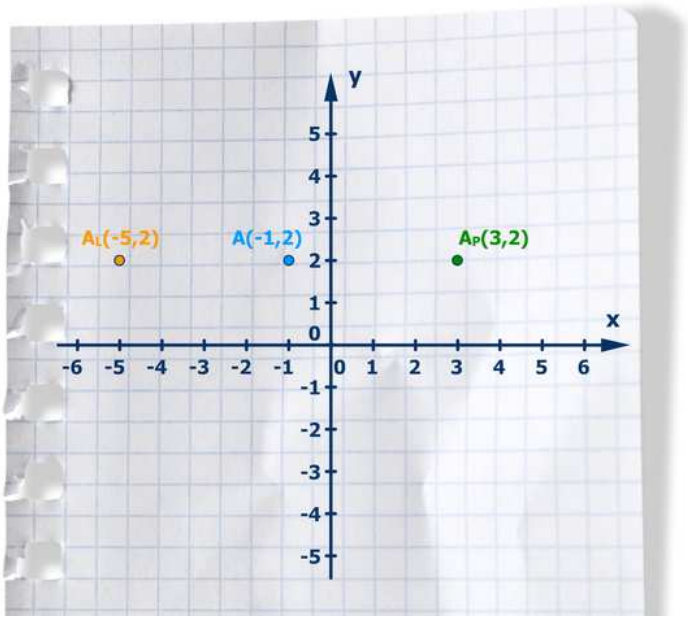
- zamiast pisać, że przesuwamy punkt o 3 jednostki wzdłuż osi Ox w lewo, zapiszemy, że przesuwamy o -3 jednostki wzdłuż osi Ox,
- zamiast pisać, że przesuwamy punkt o 3 jednostki wzdłuż osi Oy w dół, zapiszemy, że przesuwamy o -3 jednostki wzdłuż osi Oy.

Zasób interaktywny dostępny pod adresem https://zpe.gov.pl/a/DuxUIkVoK

W wyniku przesunięcia punktu $A = (x, y)$ o p jednostek wzdłuż osi Ox otrzymujemy punkt o współrzędnych

$$B = (x + p,\ y).$$

Przesunięcie punktu A o cztery jednostki wzdłuż osi Ox



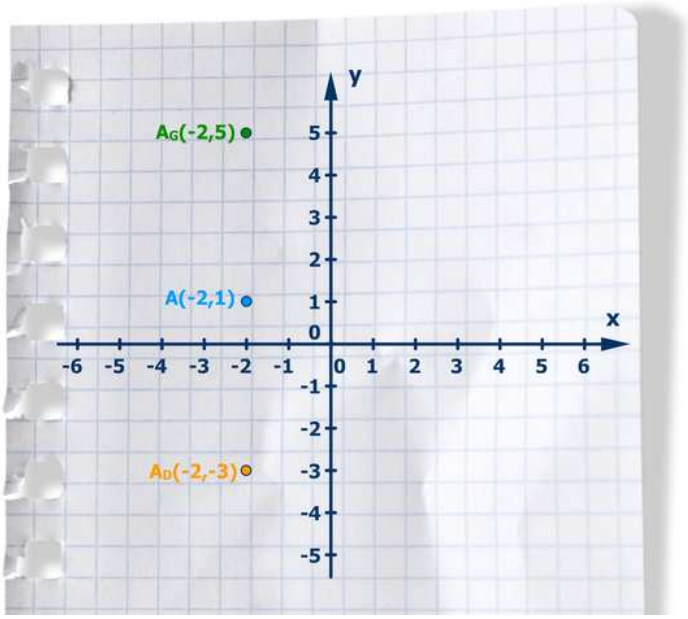
Film dostępny na portalu epodreczniki.pl

Animacja pokazuje przesunięcie punktu A =(-1, 2) wzdłuż osi OX o 4 jednostki. Po przesunięciu w prawo otrzymamy punkt A indeks dolny P =(3, 2). Po przesunięciu w lewo otrzymamy punkt A indeks dolny L =(-5, 2).

W wyniku przesunięcia punktu $A = (x, y)$ o q jednostek wzdłuż osi Oy otrzymujemy punkt

$$C = (x,\ y + q).$$

Przesunięcie punktu A o cztery jednostki wzdłuż osi Oy



Film dostępny na portalu epodreczniki.pl

Animacja pokazuje przesunięcie punktu A =(-2, 1) wzdłuż osi OY o 4 jednostki. Po przesunięciu w górę otrzymamy punkt A indeks dolny G =(- 2, 5). Po przesunięciu w dół otrzymamy punkt A indeks dolny D =(- 2, -3).

Przykłady

Przykład 1

W prostokątnym układzie współrzędnych na płaszczyźnie zaznaczmy punkt $A = (1,\ 1)$. W wyniku przesunięcia tego punktu o 3 jednostki wzdłuż osi Ox i o 5 jednostek wzdłuż osi Oy, otrzymujemy punkt

$$B = (4,\ 6).$$

Stosując pojęcie wektora, powiemy, że po przesunięciu punktu A o wektor $[3,\ 5]$, otrzymamy punkt

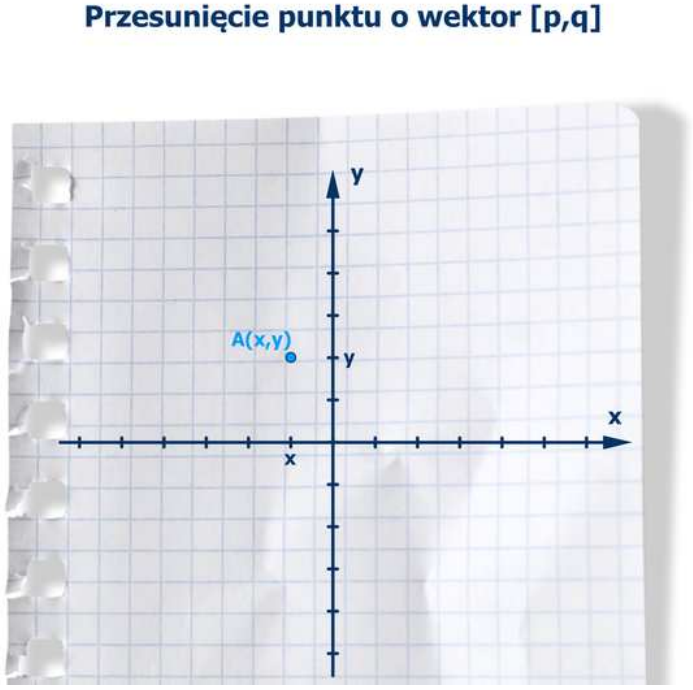
$$B = (4,\ 6).$$

Po przesunięciu punktu $A = (x, y)$ o p jednostek wzdłuż osi Ox i o q jednostek wzdłuż osi Oy, otrzymujemy punkt

$$B = (x + p, y + q).$$

Stosując pojęcie wektora, po przesunięciu punktu A o wektor $[p, q]$, otrzymamy punkt

$$B = (x + p, y + q).$$



Film dostępny na portalu epodreczniki.pl

Animacja pokazuje przesunięcie punktu A = (x, y) na punkt A prim =(x +p, y +q) o wektor [p, q]. Wektor jest przekątną prostokąta o bokach długości p i q.

Przykład 2

Zasób interaktywny dostępny pod adresem https://zpe.gov.pl/a/D12BKweq8

Przykład 3

Rozpatrzmy trójkąt ABC o wierzchołkach:

$$A = (-3,\ 7),\ \mathrm{B} = (2,\ 4),\ \mathrm{C} = (-1,\ -1).$$

W wyniku przesunięcia trójkąta ABC o 3 jednostki wzdłuż osi Ox i o (-7) jednostek wzdłuż osi Oy, otrzymujemy trójkąt $A_1B_1C_1$ o wierzchołkach:

$$A_1 = (0,\ 0),\ B_1 = (5,\ -3),\ C_1 = (2,\ -8).$$

Obrazem trójkąta ABC w przesunięciu o wektor $[3,\ -7]$ jest trójkąt $A_1B_1C_1$

Zasób interaktywny dostępny pod adresem https://zpe.gov.pl/a/D12BKweq8

Zasób interaktywny dostępny pod adresem https://zpe.gov.pl/a/D12BKweq8

Przykład 4

W równoległoboku $ABCD$ dane są wierzchołki:

$$A = (-3,\ -1),\ \mathrm{B} = (-1,\ 4),\ \mathrm{C} = (5,\ 5).$$

Chcemy znaleźć współrzędne punktu D. Z własności równoległoboku wiemy, że odcinki AD i BC są równe i równoległe. Zatem, jeżeli obrazem punktu B będzie punkt C w pewnym przesunięciu, to w tym samym przesunięciu obrazem punktu A będzie punkt D.

Przesuwając punkt B o 6 jednostek w prawo wzdłuż osi Ox i o 1 jednostkę w górę wzdłuż osi Oy, otrzymujemy punkt C. Aby otrzymać punkt D, należy w podobny sposób przesunąć punkt A. Stąd $D = (-3+6,\ -1+1) = (3,0)$.

Uwaga. Współrzędne punktu D można również obliczyć, korzystając z tego, że punkt przecięcia przekątnych AC i BD jest środkiem każdej z nich.

W wyniku przesunięcia punktu $A = (x_A, y_A)$ o $x_B - x_A$ jednostek wzdłuż osi Ox i o $y_B - y_A$ jednostek wzdłuż osi Oy otrzymujemy punkt $B = (x_B, y_B)$.

Przesunięcie wykresów funkcji

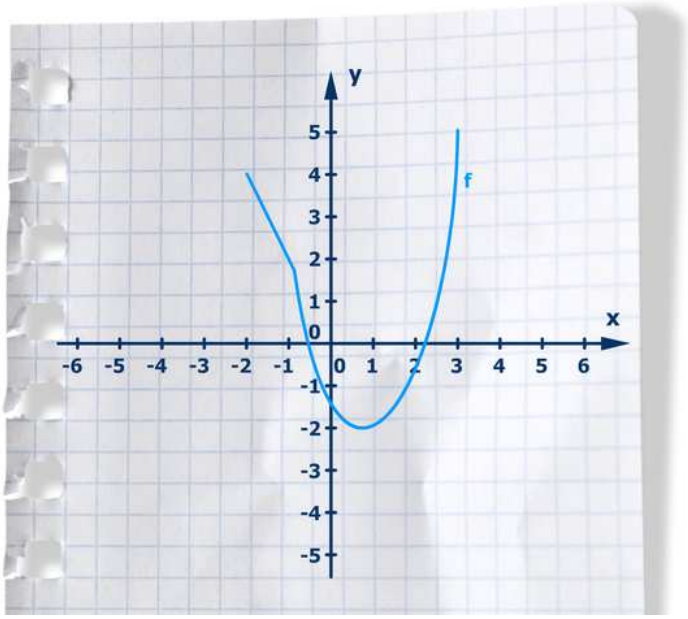
Funkcja f określona jest na pewnym podzbiorze zbioru liczb rzeczywistych. Punkt $P=(a,b)$ leżący na wykresie funkcji f ma współrzędne, które spełniają warunek $b=f(a)$. Przesuwając wykres funkcji f o p jednostek wzdłuż osi Ox, otrzymujemy wykres pewnej funkcji g opisany równaniem $y=g(x)$. W przesunięciu o p jednostek wzdłuż osi Ox obrazem punktu P jest punkt o współrzędnych $(a+p,b)$ leżący na wykresie funkcji g. Wynika z tego, że $g(a+p)=b$, czyli $g(a+p)=f(a)$. Jeśli $x=a+p$, to $a=x-p$, stąd

$$g(x)=f(x-p).$$

Wobec tego, przesuwając wykres funkcji f o p jednostek wzdłuż osi Ox, otrzymujemy wykres funkcji g opisanej wzorem

$$g(x)=f(x-p).$$

Przesunięcie wykresu funkcji o trzy jednostki wzdłuż osi Ox



Film dostępny na portalu epodreczniki.pl

Animacja pokazuje przesunięcie wykresu funkcji o 3 jednostki wzdłuż osi OX. Należy na wykresie wybrać kilka punktów i przesunąć je o 3 jednostki w prawo lub w lewo. Punkty po połączeniu tworzą wykres funkcji przesuniętej o 3 jednostki do danej funkcji wzdłuż osi OX.

Przesuwając wykres funkcji f o q jednostek wzdłuż osi Oy, otrzymujemy wykres pewnej funkcji h. Tak otrzymaną krzywą opiszemy równaniem

$$y=h(x).$$

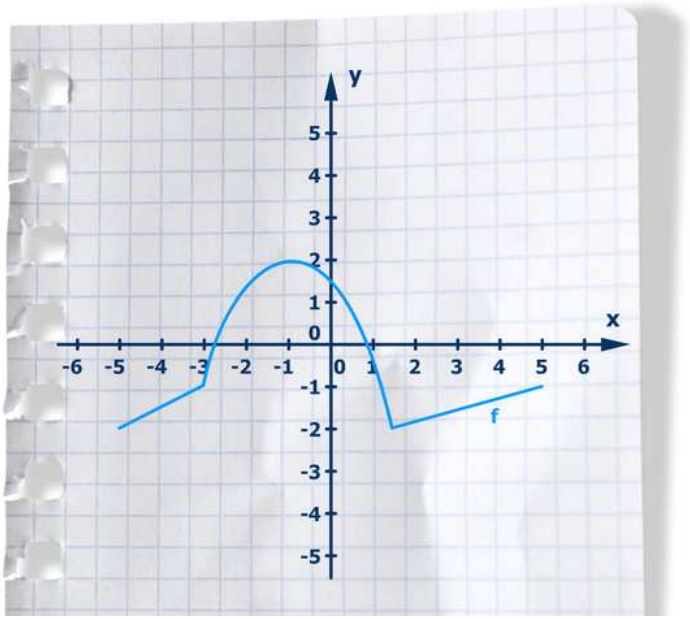
W przesunięciu o q jednostek wzdłuż osi Oy obrazem punktu $P = (a,\ \mathrm{b})$ jest punkt o współrzędnych $(a, b + q)$, który leży na wykresie funkcji h. Wynika z tego, że $h(a) = b + q$, czyli $h(a) = f(a) + q$. Punkt P wybraliśmy dowolnie, co oznacza, że dla każdego x należącego do dziedziny funkcji f zachodzi zależność

$$h(x) = f(x) + q.$$

Wobec tego, przesuwając wykres funkcji f o q jednostek wzdłuż osi Oy, otrzymujemy wykres funkcji h opisanej wzorem

$$h(x) = f(x) + q.$$

Przesunięcie wykresu funkcji o trzy jednostki wzdłuż osi Oy



Film dostępny na portalu epodreczniki.pl

Animacja pokazuje przesunięcie wykresu funkcji o 3 jednostki wzdłuż osi OY. Należy na wykresie wybrać kilka punktów i przesunąć je o 3 jednostki w górę lub w dół. Punkty po połączeniu tworzą wykres funkcji przesuniętej o 3 jednostki do danej funkcji wzdłuż osi OY.

Przesuwając wykres funkcji f o p jednostek wzdłuż osi Ox i o q jednostek wzdłuż osi Oy, otrzymujemy wykres pewnej funkcji k. Tak otrzymaną krzywą opiszemy równaniem

$$y = k(x).$$

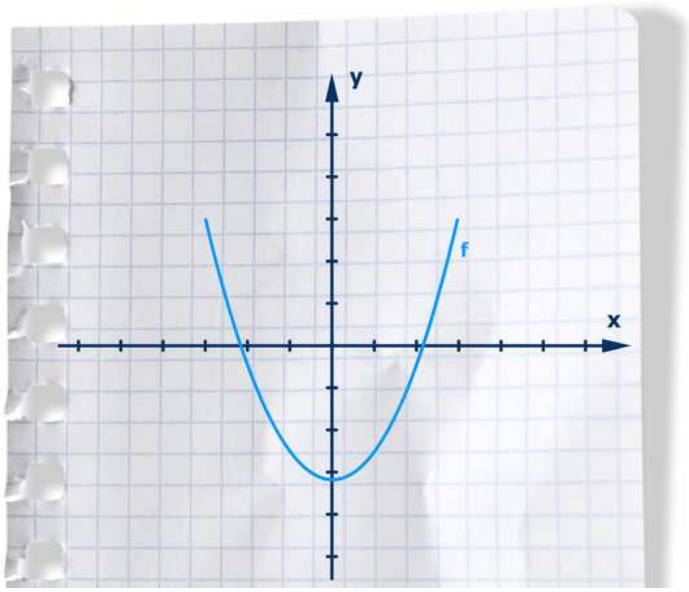
W przesunięciu o p jednostek wzdłuż osi Ox i o q jednostek wzdłuż osi Oy, obrazem punktu P jest punkt o współrzędnych $(a + p, b + q)$ leżący na wykresie funkcji k. Wynika z tego, że $k(a + p) = b + q$, czyli $k(a + p) = f(a) + q$. Punkt P wybraliśmy dowolnie, co oznacza, że dla każdego x należącego do dziedziny funkcji f zachodzi zależność

$$k(x) = f(x - p) + q.$$

Wobec tego, przesuwając wykres funkcji f o p jednostek wzdłuż osi Ox i o q jednostek wzdłuż osi Oy, otrzymujemy wykres funkcji k opisanej wzorem

$$k(x) = f(x - p) + q.$$

Przesunięcie wykresu funkcji o wektor [p,q]



Film dostępny na portalu epodreczniki.pl

Animacja pokazuje przesunięcie wykresu funkcji o wektor [p, q]. Należy na wykresie wybrać kilka punktów i przesunąć je o podany wektor. Po połączeniu punkty tworzą wykres funkcji przesuniętej o podany wektor do danej funkcji wzdłuż osi układu współrzędnych. Rozpatrzono różne wartości p i q.

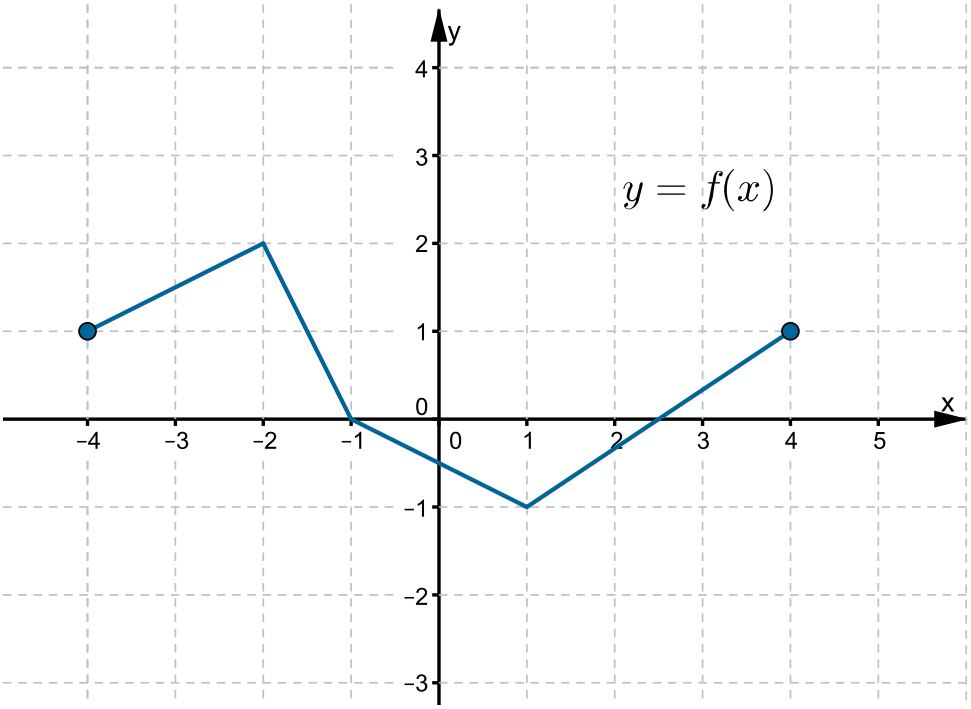
Przykład 1

Zasób interaktywny dostępny pod adresem https://zpe.gov.pl/a/DsJfXWbDI

Przykłady

Przykład 1

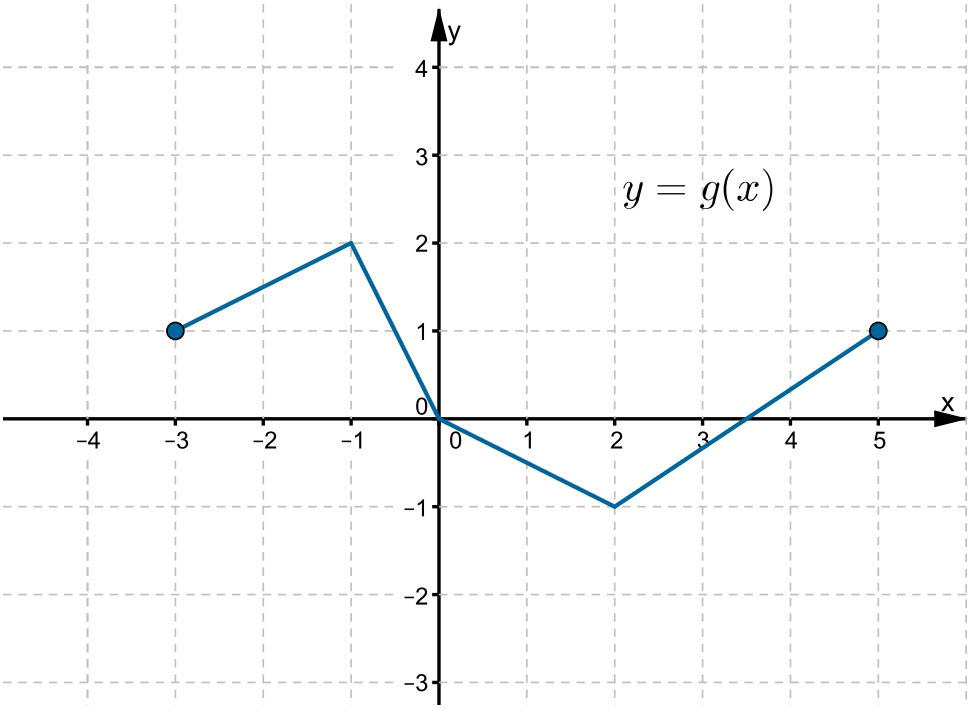
Na rysunku przedstawiony jest wykres funkcji f .



- Wykres funkcji g określonej wzorem

$$g(x) = f(x - 1)$$

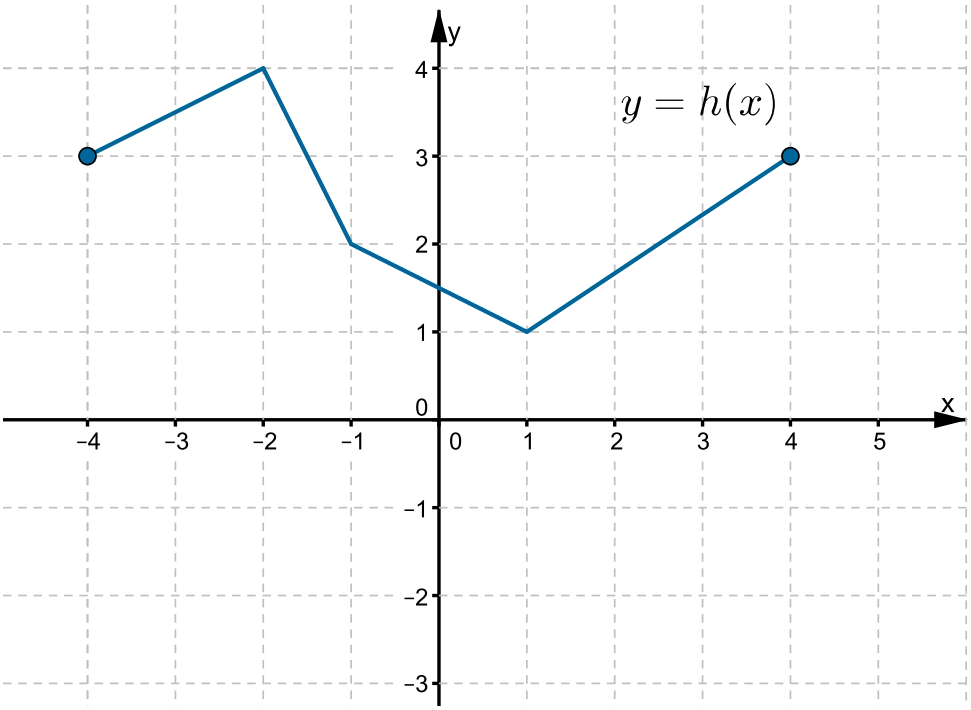
otrzymamy, przesuwając krzywą o równaniu $y = f(x)$ o 1 jednostkę w prawo wzdłuż osi Ox.



- Wykres funkcji h określonej wzorem

$$h(x) = f(x) + 2$$

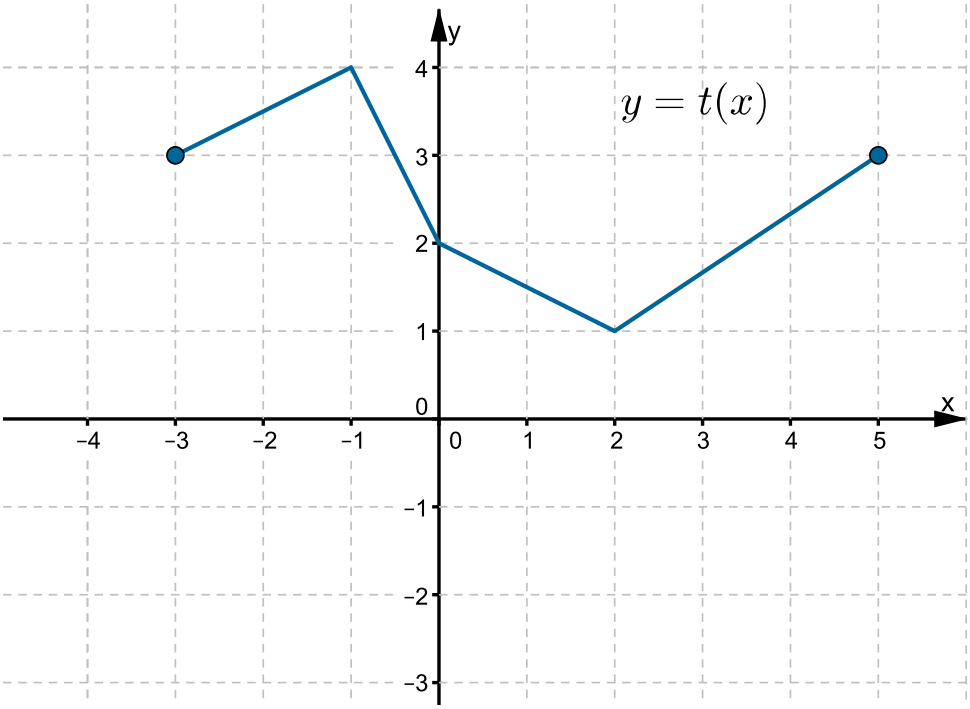
otrzymamy, przesuwając krzywą o równaniu $y = f(x)$ o 2 jednostki w górę wzdłuż osi Oy
.



- Wykres funkcji t określonej wzorem

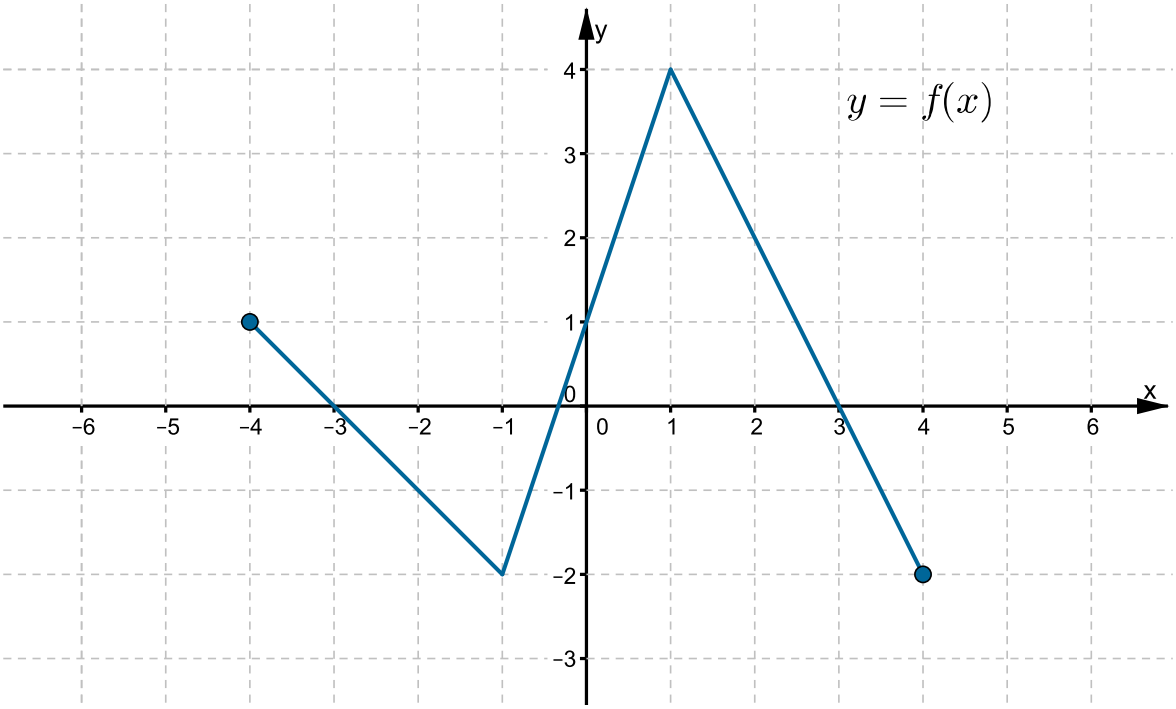
$$t(x) = f(x - 1) + 2$$

otrzymamy, przesuwając krzywą o równaniu $y = f(x)$ o 1 jednostkę w prawo wzdłuż osi Ox i o 2 jednostki w górę wzdłuż osi Oy.



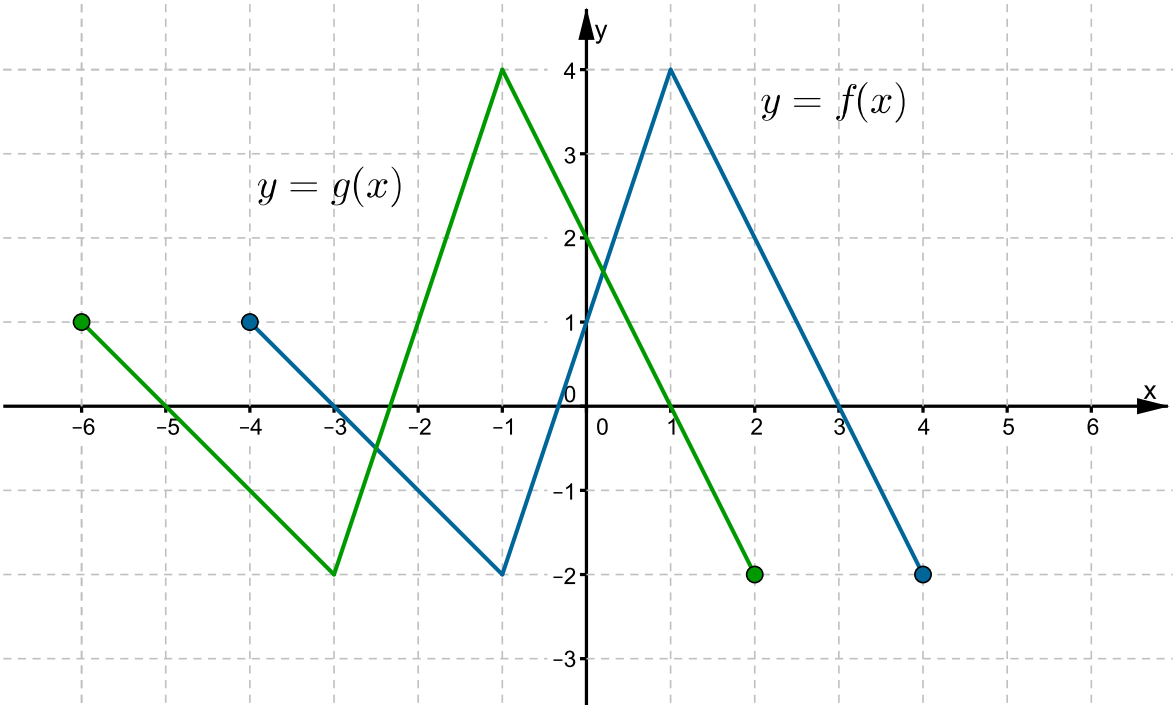
Przykład 2

Na rysunku przedstawiony jest wykres funkcji f.



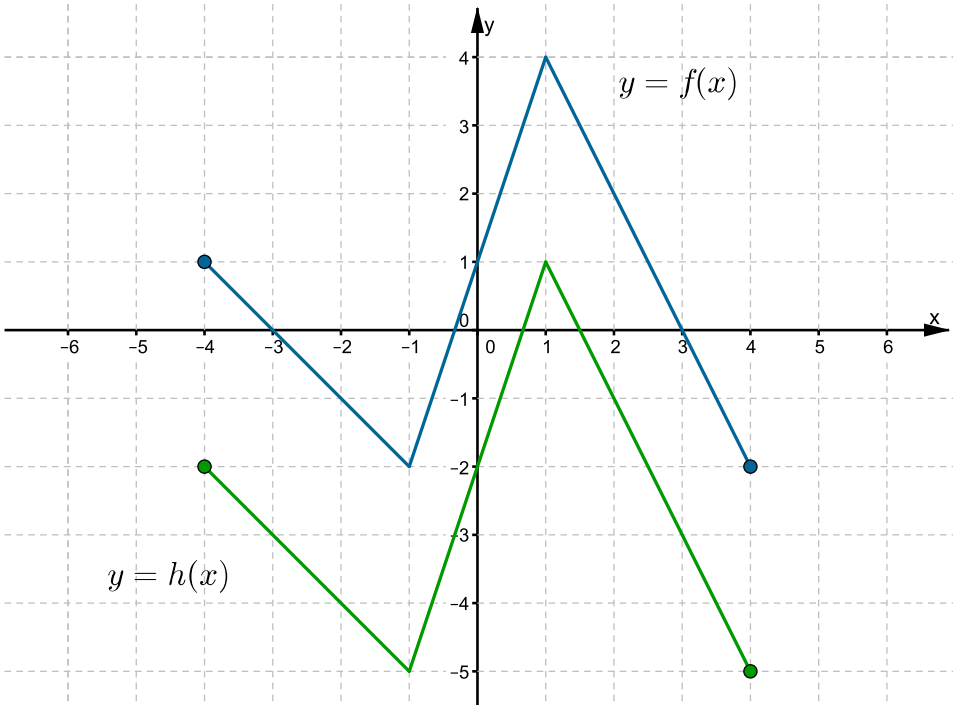
- Na rysunku przedstawiony jest wykres funkcji f oraz wykres funkcji g opisanej wzorem

$$g(x) = f(x+2).$$



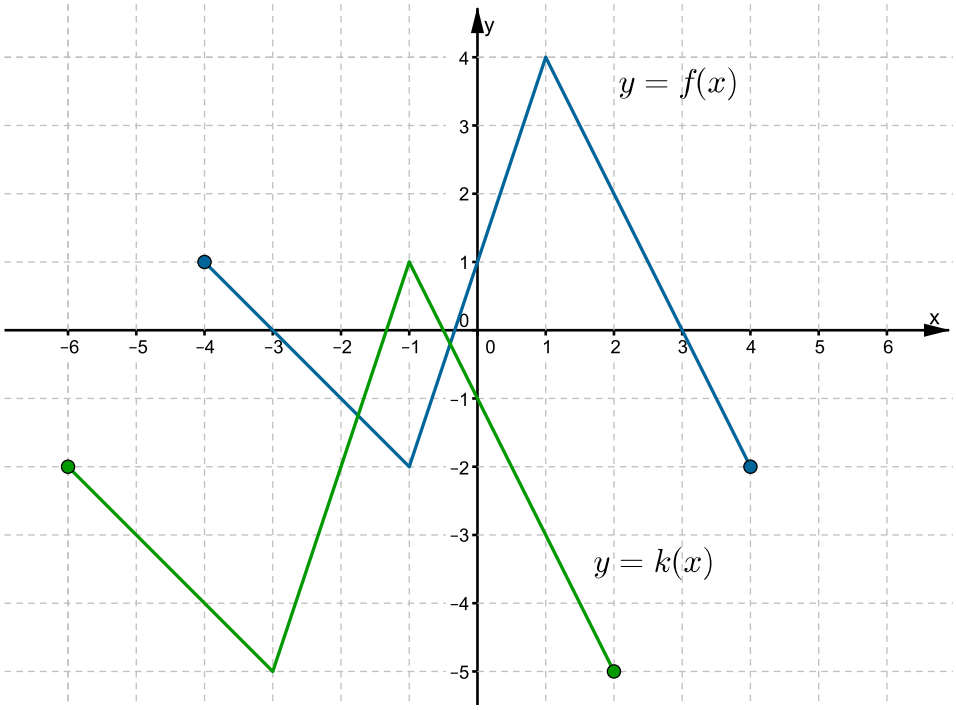
- Na rysunku przedstawiony jest wykres funkcji f oraz wykres funkcji h opisanej wzorem

$$h(x) = f(x) - 3.$$



- Na rysunku przedstawiony jest wykres funkcji f oraz wykres funkcji k opisanej wzorem

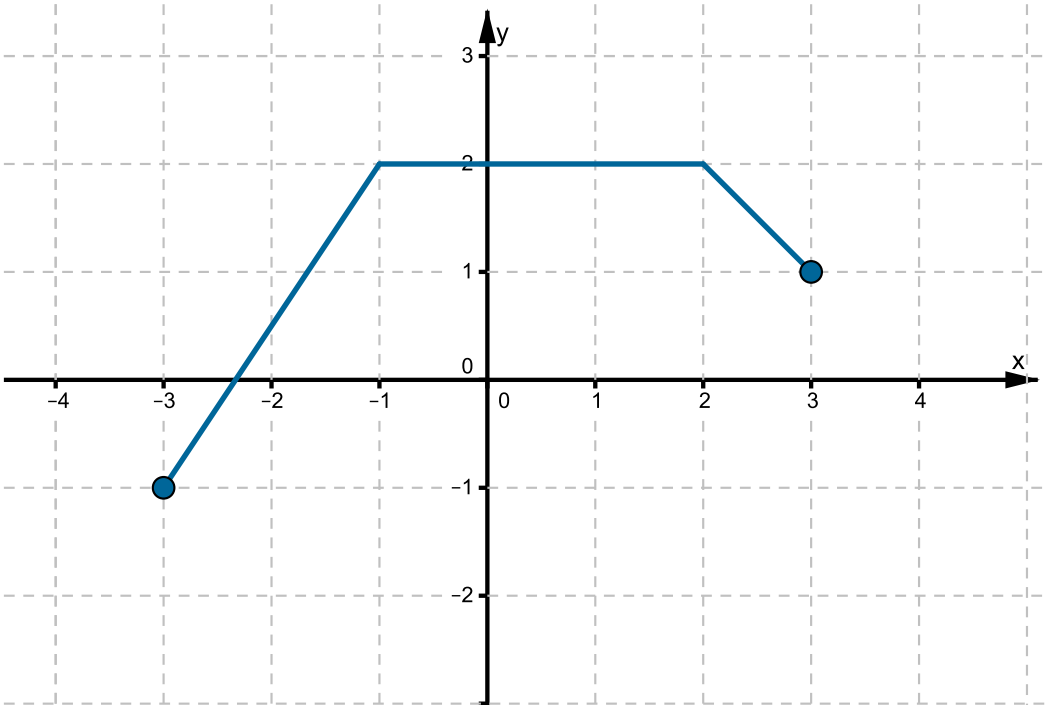
$$k(x) = f(x + 2) - 3.$$



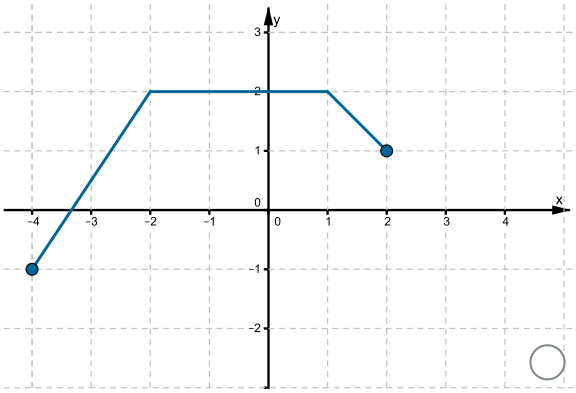
Zadania

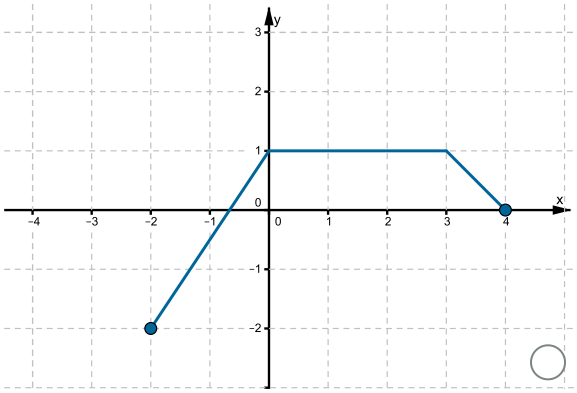
Ćwiczenie 1

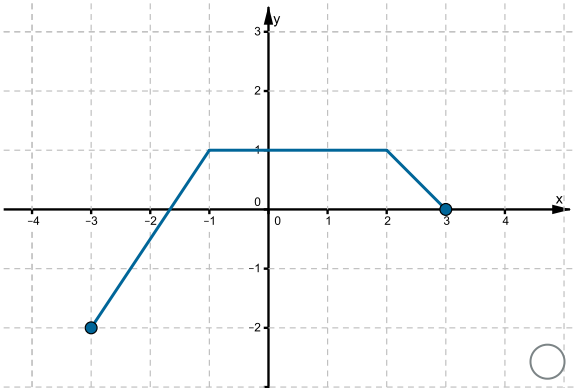
Na rysunku przedstawiono wykres funkcji f .

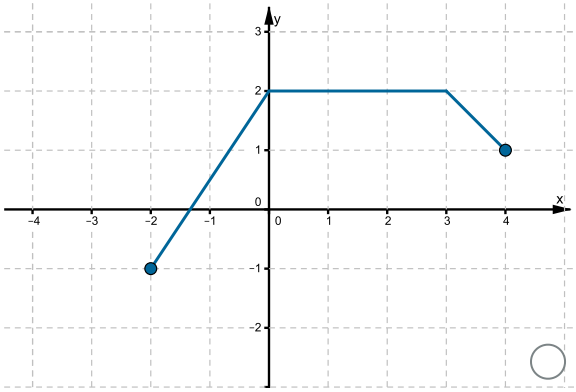


Wybierz rysunek, na którym jest przedstawiony wykres funkcji $y = f(x + 1)$.



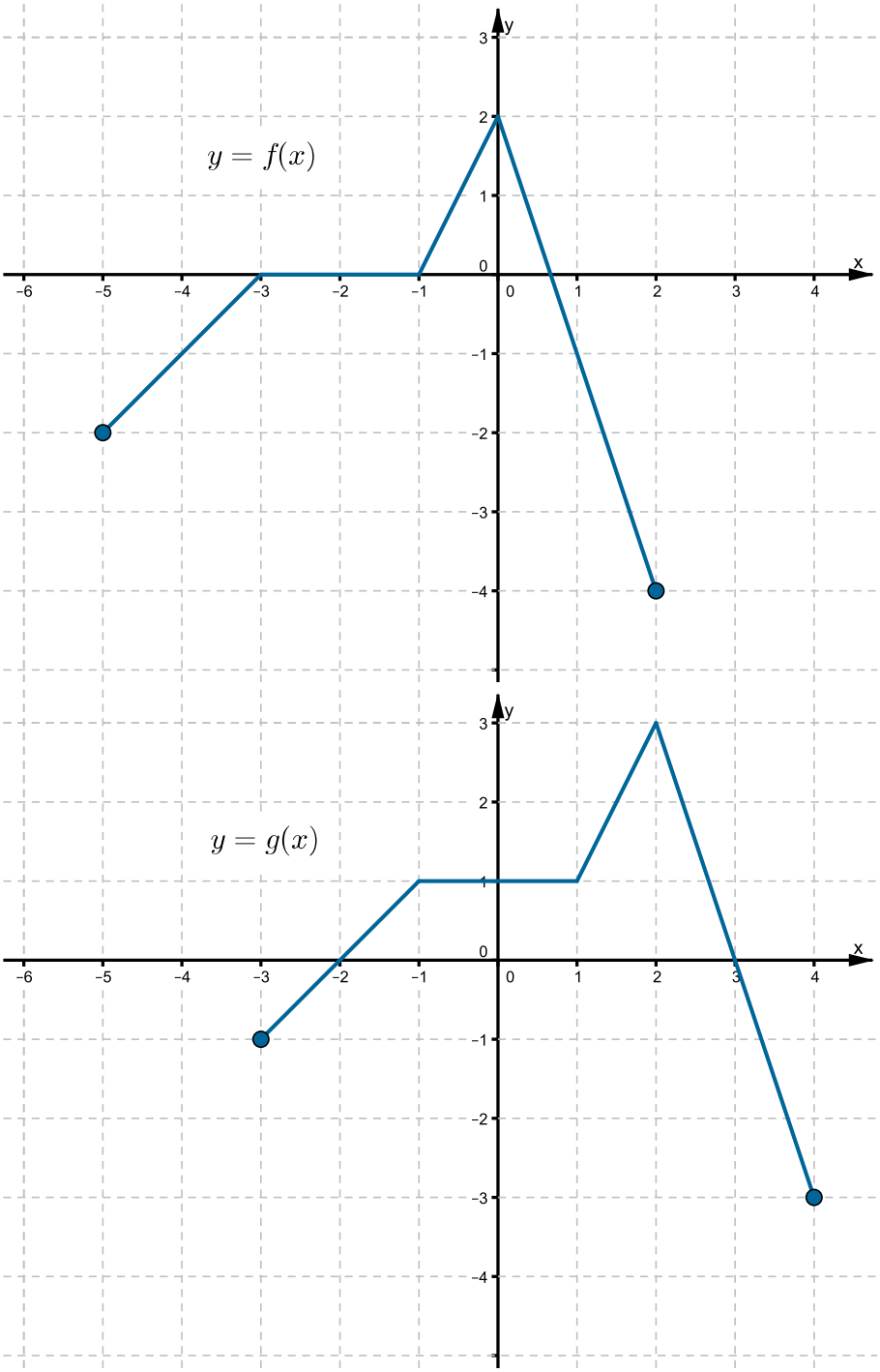






Ćwiczenie 2

Wykresy funkcji f i g przedstawione są na rysunkach.



Jak należy przekształcić wykres funkcji f, żeby otrzymać wykres funkcji g?

- ◯ przesunąć o 1 jednostkę wzdłuż osi Ox i o 2 jednostki wzdłuż osi Oy
- ◯ przesunąć o 2 jednostki wzdłuż osi Ox i o 1 jednostkę wzdłuż osi Oy

- ◯ przesunąć o 1 jednostkę wzdłuż osi Ox i o 1 jednostkę wzdłuż osi Oy
- ◯ przesunąć o 2 jednostki wzdłuż osi Ox i o 2 jednostki wzdłuż osi Oy

Ćwiczenie 3

Dana jest funkcja $f(x) = \frac{2}{x}$ dla $x \neq 0$.

- ☐ Jeżeli przesuniemy wykres funkcji f o 5 jednostek wzdłuż osi Oy, to otrzymamy wykres funkcji $y = \frac{2}{x+5}$ dla $x \neq -5$.
- ☐ Jeżeli przesuniemy wykres funkcji f o (-3) jednostki wzdłuż osi Ox i o (-2) jednostki wzdłuż osi Oy, to otrzymamy wykres funkcji $y = \frac{2}{x-3} - 2$ dla $x \neq 3$.
- ☐ Jeżeli przesuniemy wykres funkcji f o 4 jednostki wzdłuż osi Ox, to otrzymamy wykres funkcji $y = \frac{2}{x-4}$ dla $x \neq 4$.
- ☐ Jeżeli przesuniemy wykres funkcji f o 2 jednostki wzdłuż osi Ox i o 1 jednostkę wzdłuż osi Oy, to otrzymamy wykres funkcji $y = \frac{2}{x-2} + 1$ dla $x \neq 2$.

Ćwiczenie 4

Dana jest funkcja $f(x) = x^2$. Jeżeli jej wykres przesuniemy o 3 jednostki wzdłuż osi Ox i o (-2) jednostki wzdłuż osi Oy, to otrzymamy wykres funkcji g. Wskaż wzór funkcji g.

- ◯ $g(x) = (x-3)^2 - 2$
- ◯ $g(x) = (x+3)^2 + 2$
- ◯ $g(x) = (x-3)^2 + 2$
- ◯ $g(x) = (x+3)^2 - 2$

Ćwiczenie 5

Dana jest funkcja $f(x) = x^2$.

- [ ] Aby otrzymać wykres funkcji $k(x) = (x-2)^2 + 4$, należy przesunąć wykres funkcji f o 2 jednostki wzdłuż osi Ox i o 4 jednostki wzdłuż osi Oy.
- [ ] Aby otrzymać wykres funkcji $h(x) = x^2 + 4$, należy przesunąć wykres funkcji f o 4 jednostki wzdłuż osi Oy.
- [ ] Aby otrzymać wykres funkcji $g(x) = (x-3)^2 + 5$, należy przesunąć wykres funkcji f o 3 jednostki wzdłuż osi Ox i o 5 jednostek wzdłuż osi Oy.
- [ ] Aby otrzymać wykres funkcji $t(x) = (x+1)^2 - 3$, należy przesunąć wykres funkcji f o 1 jednostkę wzdłuż osi Ox i o (-3) jednostki wzdłuż osi Oy.

Ćwiczenie 6

Dane są funkcje $f(x) = 2x$ oraz $g(x) = 2x - 3$. Jak należy przekształcić wykres funkcji f, żeby otrzymać wykres funkcji g?

- [ ] przesunąć o (-2) jednostki wzdłuż osi Ox
- [ ] przesunąć o 2 jednostki wzdłuż osi Ox i o 1 jednostkę wzdłuż osi Oy
- [ ] przesunąć o 1 jednostkę wzdłuż osi Ox i o (-2) jednostki wzdłuż osi Oy
- [ ] przesunąć o 2 jednostki wzdłuż osi Ox

Ćwiczenie 7

Dane są funkcje $f(x) = x^2$ oraz $g(x) = x^2 - 2x$. Jak należy przekształcić wykres funkcji f, żeby otrzymać wykres funkcji g?

- ◯ przesunąć o (-1) jednostkę wzdłuż osi Ox i o 1 jednostkę wzdłuż osi Oy
- ◯ przesunąć o 2 jednostki wzdłuż osi Ox
- ◯ przesunąć o 1 jednostkę wzdłuż osi Ox i o (-1) jednostkę wzdłuż osi Oy
- ◯ przesunąć o (-2) jednostki wzdłuż osi Ox

Ćwiczenie 8

Po przesunięciu punktu $A = (-1, -1)$ o (-7) jednostek wzdłuż osi Ox i o 12 jednostek wzdłuż osi Oy otrzymamy punkt o współrzędnych

- ◯ $(-8, -13)$
- ◯ $(6, -13)$
- ◯ $(6, 11)$
- ◯ $(-8, 11)$

Ćwiczenie 9

Punkt $P = (5, -2)$ jest środkiem odcinka AB, w którym $A = (3, 6)$. Punkt B ma współrzędne

- ◯ $(1, 14)$
- ◯ $(7, -10)$
- ◯ $(4, 2)$
- ◯ $(-1, -14)$

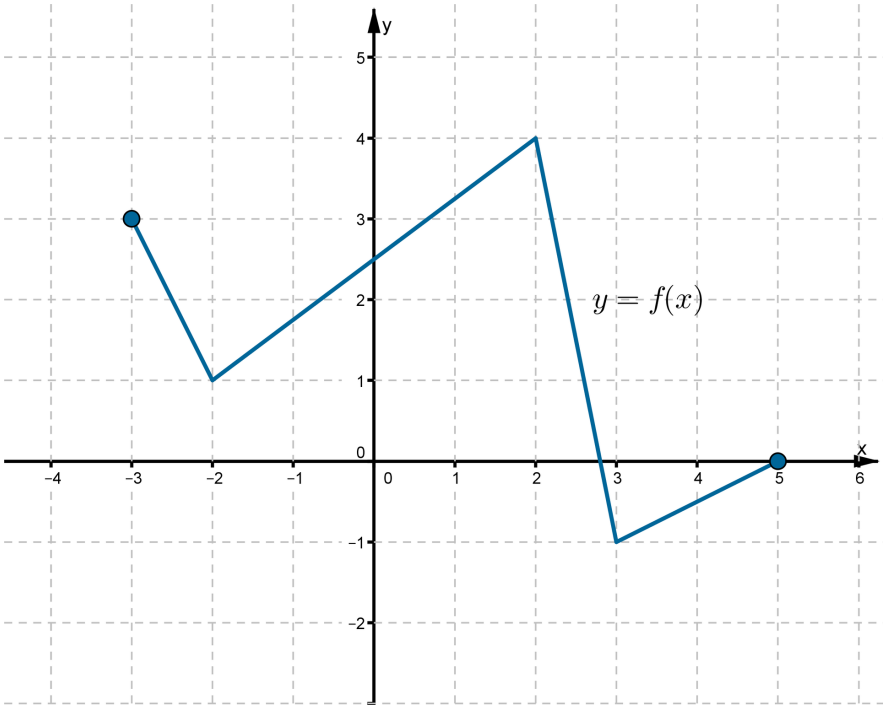
Ćwiczenie 10

W równoległoboku ABCD dane są wierzchołki: $A = (0, 0)$, $B = (5, 2)$, $C = (6, 5)$. Wierzchołek D ma współrzędne

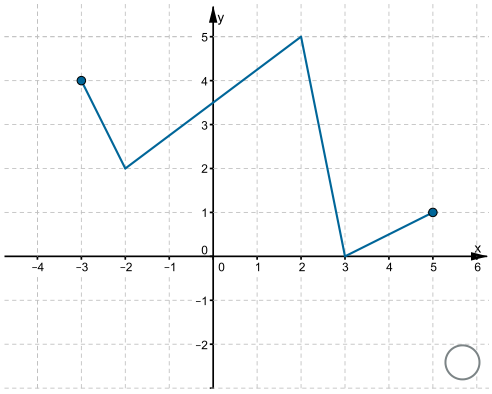
- ◯ $(-1, -3)$
- ◯ $(0, 3)$
- ◯ $(4, -1)$
- ◯ $(1, 3)$

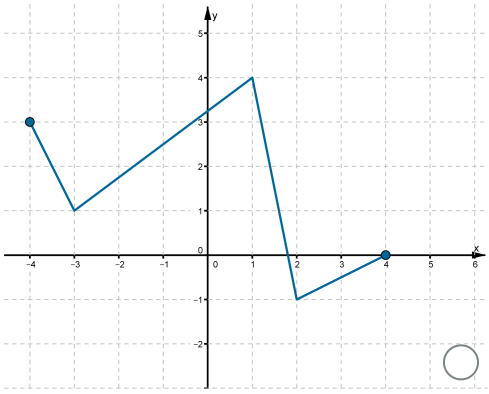
Ćwiczenie 11

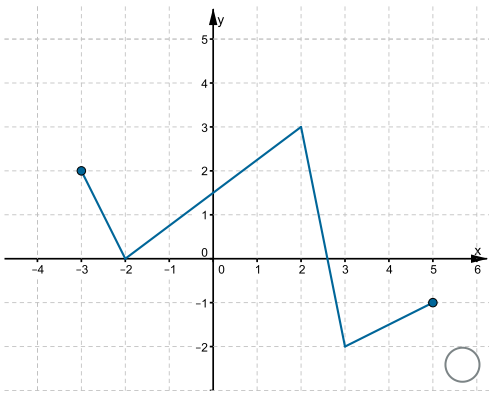
Rysunek przedstawia wykres funkcji f.

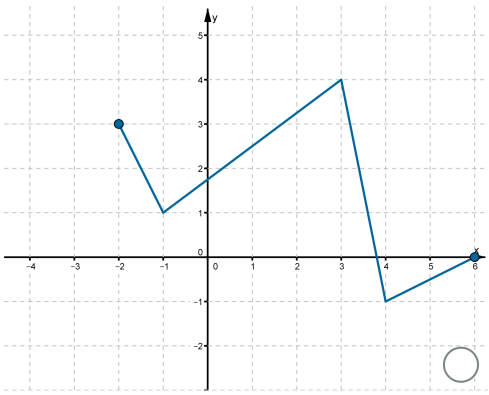


Wskaż rysunek, na którym przedstawiony jest wykres funkcji g określonej wzorem $g(x) = f(x) + 1$.



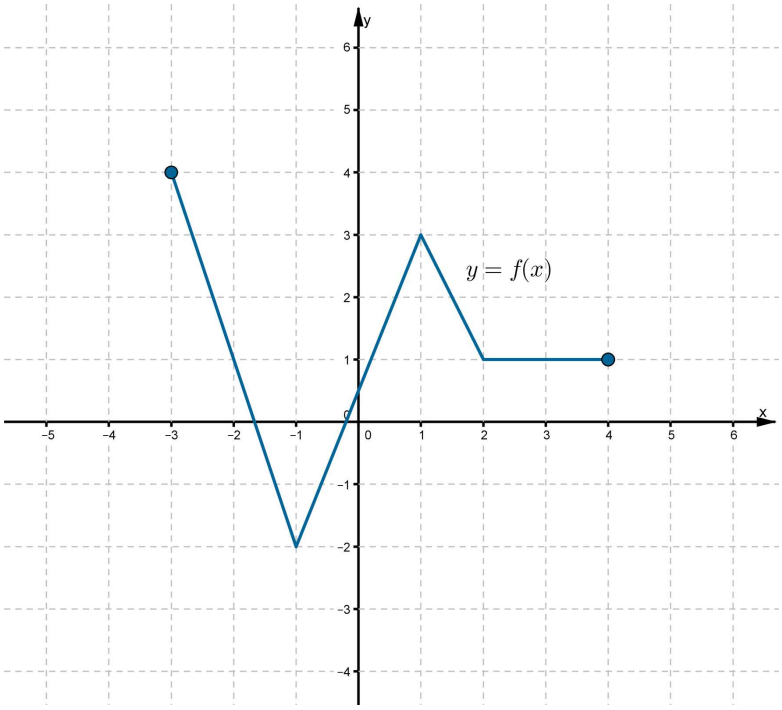




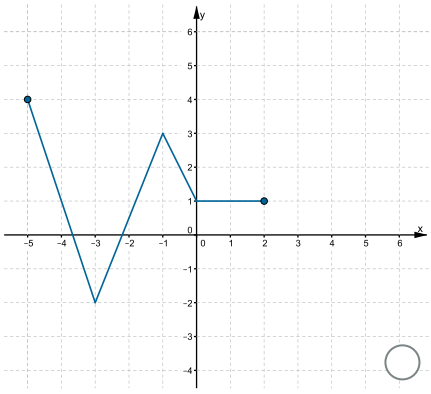


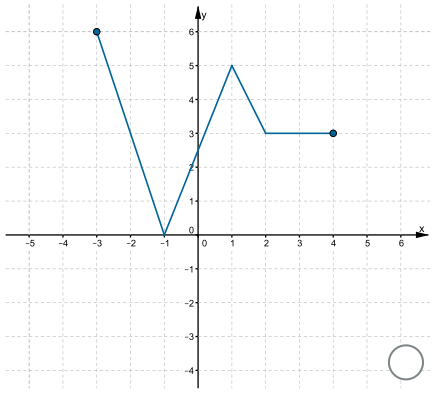
Ćwiczenie 12

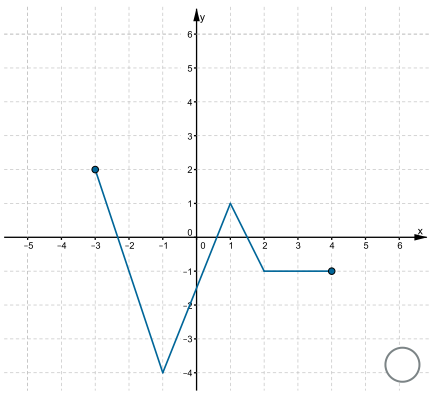
Rysunek przedstawia wykres funkcji $y = f(x)$.

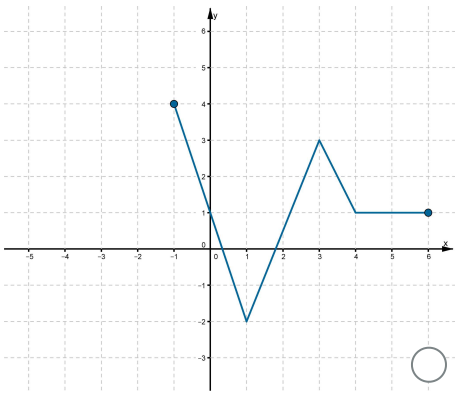


Wskaż rysunek, na którym przedstawiony jest wykres funkcji g określonej wzorem $g(x) = f(x + 2)$.



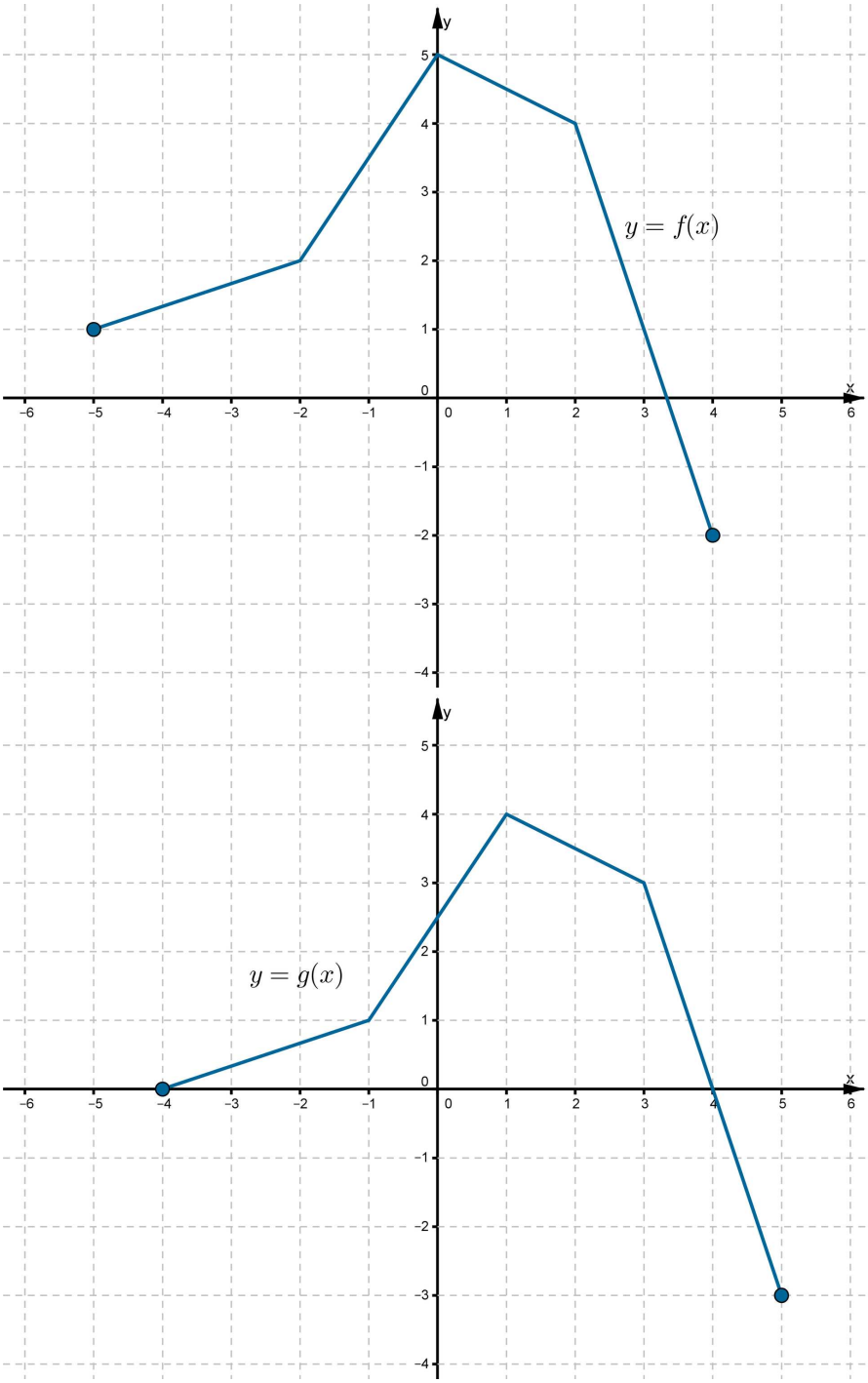






Ćwiczenie 13

Na rysunkach przedstawione są wykresy funkcji $y = f(x)$ i $y = g(x)$.



Funkcja g jest określona wzorem

- ◯ $g(x) = f(x+1) + 1$
- ◯ $g(x) = f(x-1) - 1$

- ◯ $g(x) = f(x-1) + 1$
- ◯ $g(x) = f(x+1) - 1$

Ćwiczenie 14

Funkcja f jest określona wzorem $f(x) = x$. Po przesunięciu wykresu funkcji f o 6 jednostek wzdłuż osi Ox i o (-4) jednostki wzdłuż osi Oy, otrzymujemy wykres funkcji g. Funkcja g określona jest wzorem:

- ◯ $g(x) = x - 2$
- ◯ $g(x) = x + 10$
- ◯ $g(x) = x - 10$
- ◯ $g(x) = x + 2$

Ćwiczenie 15

Funkcja f określona jest wzorem $f(x) = x^2$. Po przesunięciu wykresu funkcji f o (-3) jednostki wzdłuż osi Ox i o 2 jednostki wzdłuż osi Oy, otrzymujemy wykres funkcji h. Wskaż wzór funkcji h.

- ◯ $h(x) = (x+3)^2 + 2$
- ◯ $h(x) = (x-3)^2 - 2$
- ◯ $h(x) = (x-3)^2 + 2$
- ◯ $h(x) = (x+3)^2 - 2$

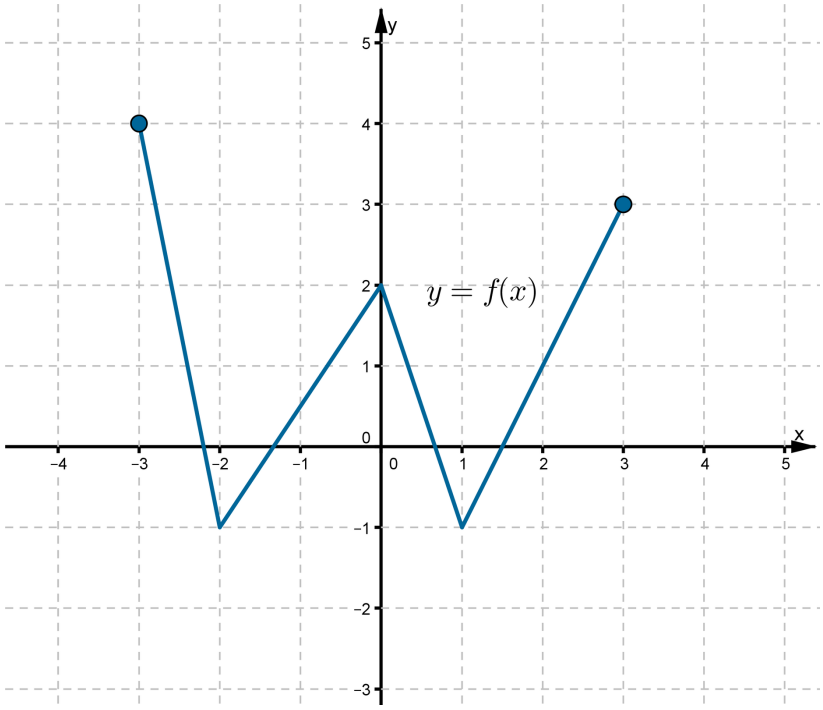
Ćwiczenie 16

Funkcja f określona jest wzorem $f(x)=\frac{1}{x}$ dla $x \neq 0$. Po przesunięciu wykresu funkcji f o 4 jednostki wzdłuż osi Ox i o (-1) jednostkę wzdłuż osi Oy, otrzymujemy wykres funkcji t. Funkcja t określona jest wzorem

- $t(x)=\frac{1}{x+4}+1$ dla $x \neq -4$
- $t(x)=\frac{1}{x-4}-1$ dla $x \neq 4$
- $t(x)=\frac{1}{x+4}-1$ dla $x \neq -4$
- $t(x)=\frac{1}{x-4}+1$ dla $x \neq 4$

Ćwiczenie 17

Na rysunku jest przedstawiony wykres funkcji f.



Która funkcja ma dokładnie trzy miejsca zerowe?

- $y = f(x) - 2$
- $y = f(x - 2)$
- $y = f(x) + 2$
- $y = f(x + 2)$

Ćwiczenie 18

Ćwiczenie 19

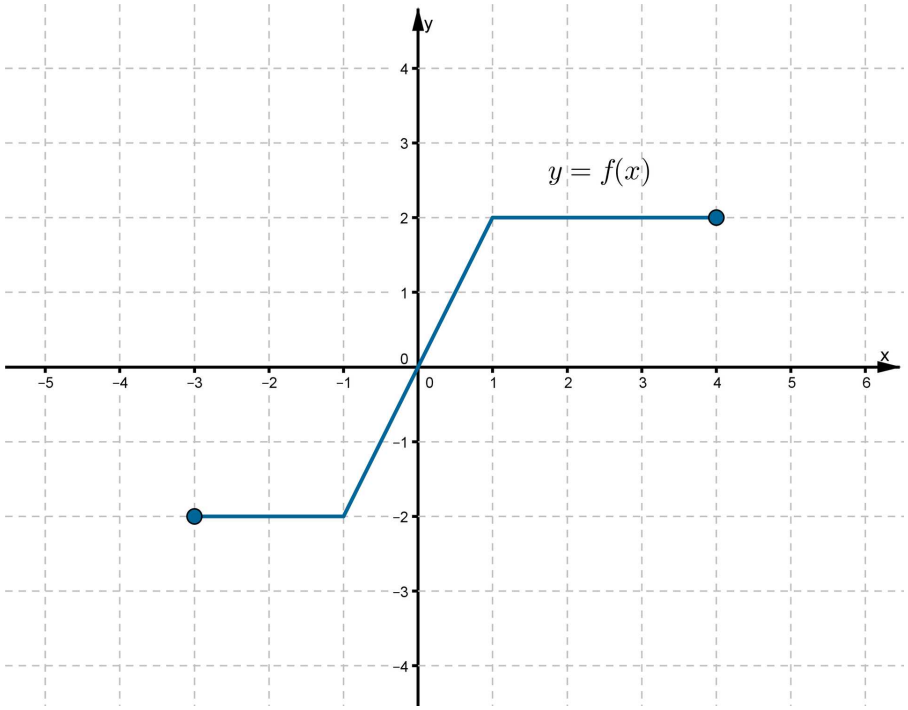
Dany jest punkt $A = (-2, \ -3)$. Po przesunięciu punktu A o 6 jednostek wzdłuż osi Ox, otrzymujemy punkt B, a po przesunięciu punktu B o 4 jednostki wzdłuż osi Oy, otrzymujemy punkt C. Oblicz współrzędne punktów B i C oraz pole trójkąta ABC.

Ćwiczenie 20

Dany jest czworokąt ABCD, o wierzchołkach w punktach: $A = (0, 0)$, $B = (4, 3)$, $C = (1, 5)$, $D = (-3, 2)$. Sprawdź, czy czworokąt ABCD jest równoległobokiem.

Ćwiczenie 21

Na rysunku jest przedstawiony wykres funkcji f.



Narysuj wykresy funkcji określonych wzorami

a. $y = f(x) + 2$

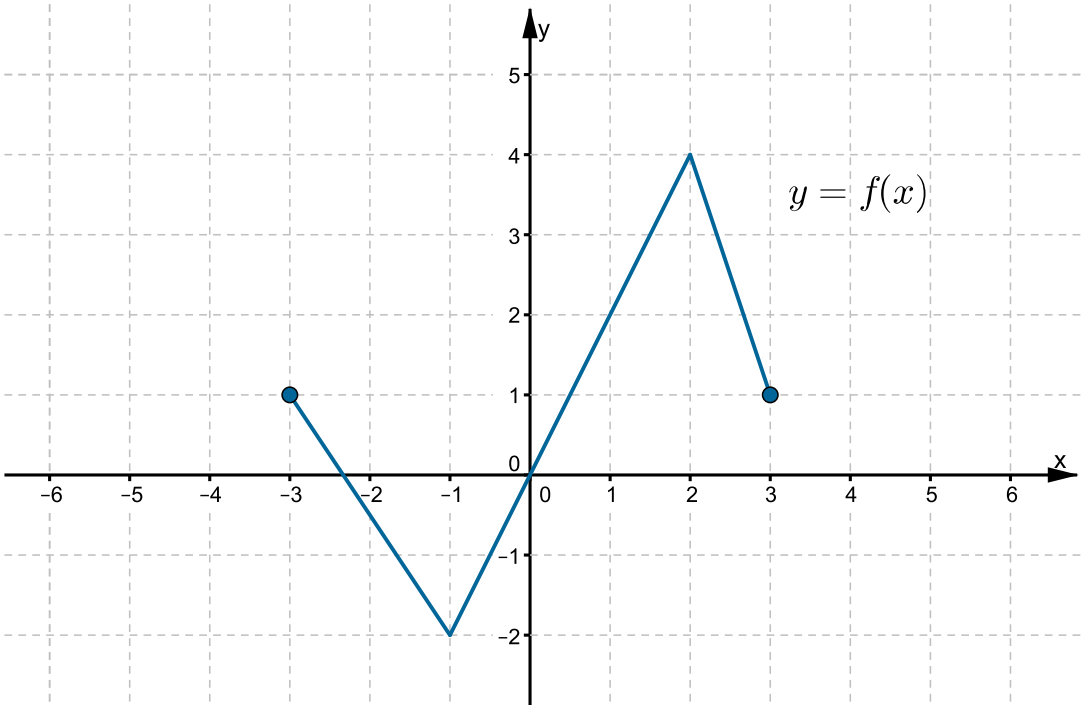
b. $y = f(x) - 2$

c. $y = f(x - 2)$

d. $y = f(x + 2)$

Ćwiczenie 22

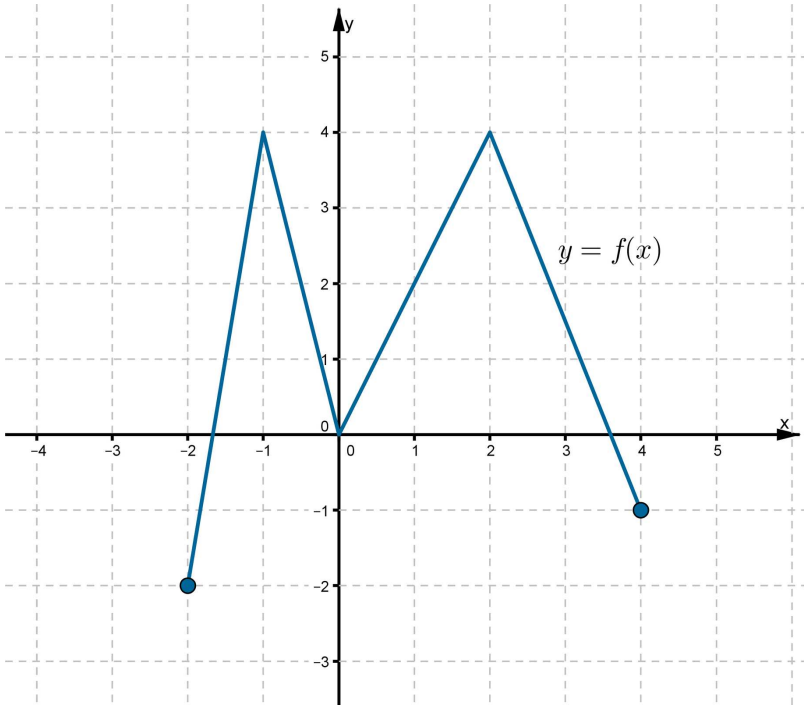
Na rysunku jest przedstawiony wykres funkcji f.



Narysuj w tym samym układzie współrzędnych wykresy funkcji określonych wzorami $y = f(x + 6)$ i $y = f(x - 6)$.

Ćwiczenie 23

Na rysunku jest przedstawiony wykres funkcji f.



Ustal, ile miejsc zerowych ma funkcja określona wzorem

a. $y = f(x) - 3$

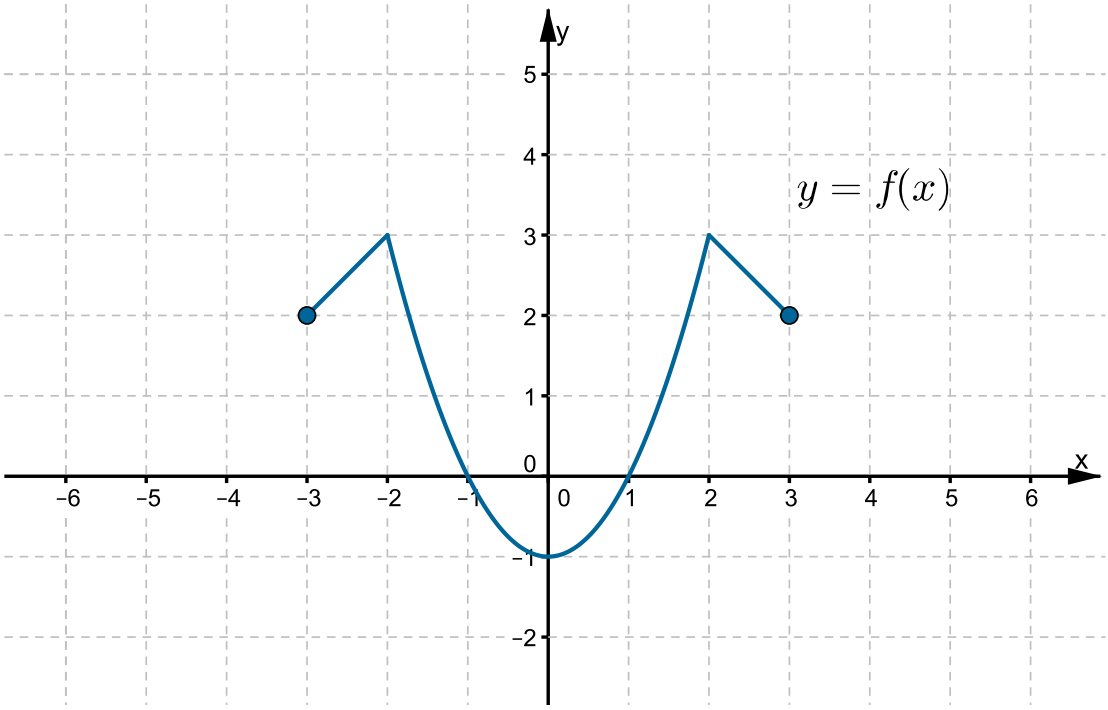
b. $y = f(x) + 1$

c. $y = f(x - 2)$

d. $y = f(x + 4)$

Ćwiczenie 24

Na rysunku jest przedstawiony wykres funkcji f.



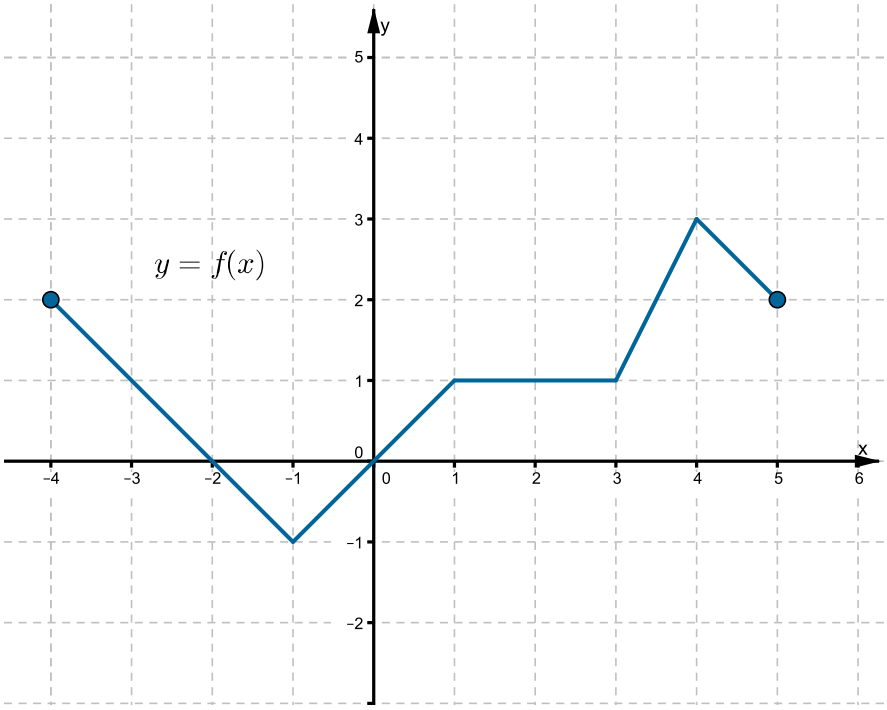
Narysuj wykresy funkcji określonych wzorami

a. $g(x) = f(x - 1) + 2$

b. $h(x) = f(x + 2) - 1$

Ćwiczenie 25

Wykres funkcji f jest przedstawiony na rysunku.



Funkcje g i h określone są wzorami $g(x) = f(x-1) + 2$ oraz $h(x) = f(x+2) - 1$.

a. Jaka jest największa wartość funkcji g?

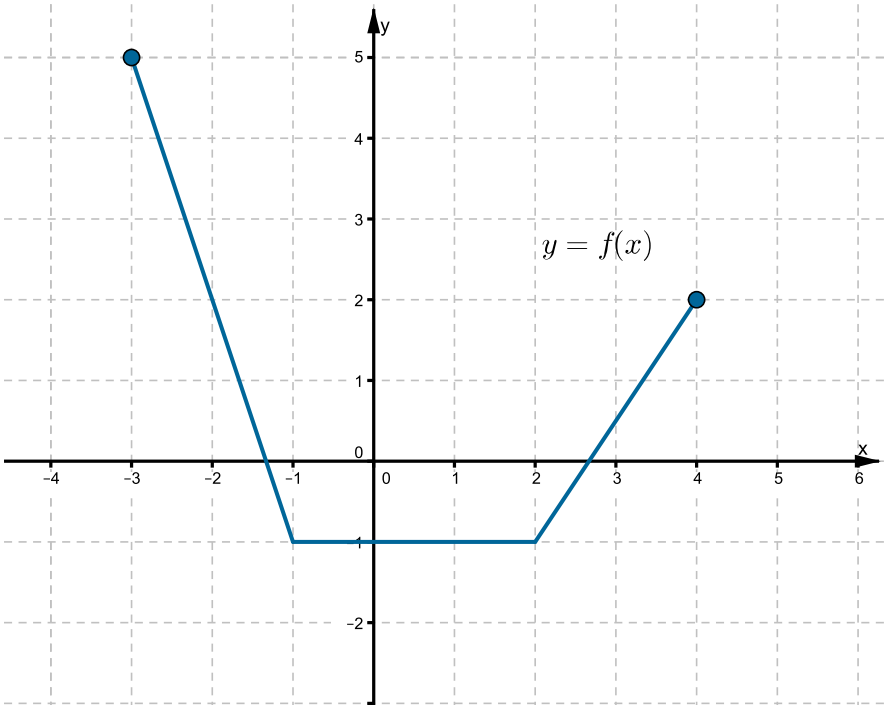
b. Jaka jest największa wartość funkcji h?

c. Jaka jest najmniejsza wartość funkcji g?

d. Jaka jest najmniejsza wartość funkcji h?

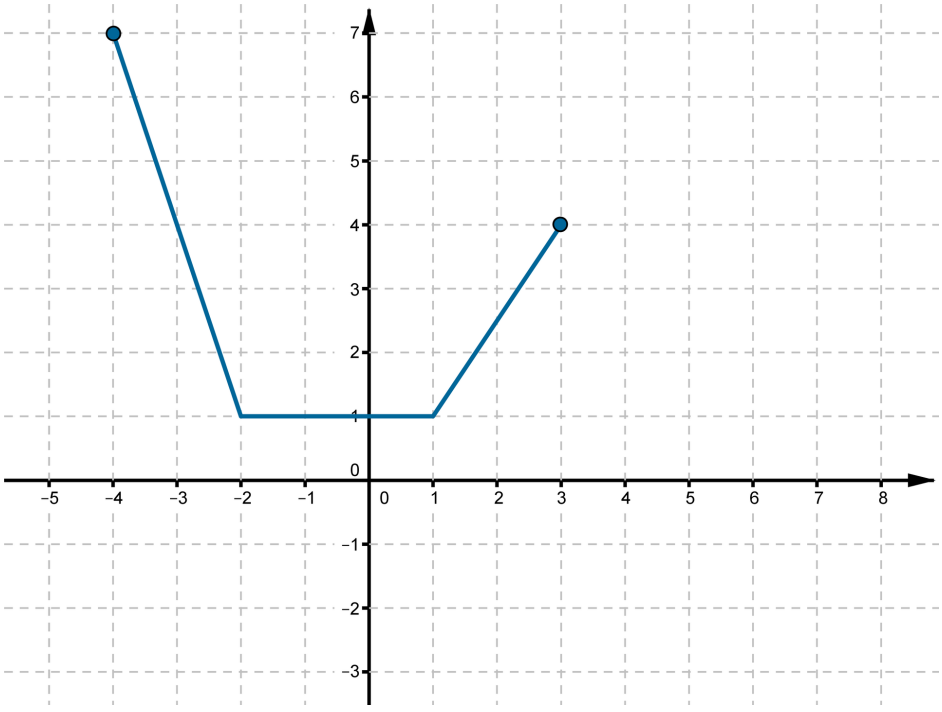
Ćwiczenie 26

Wykres funkcji f jest przedstawiony na rysunku.

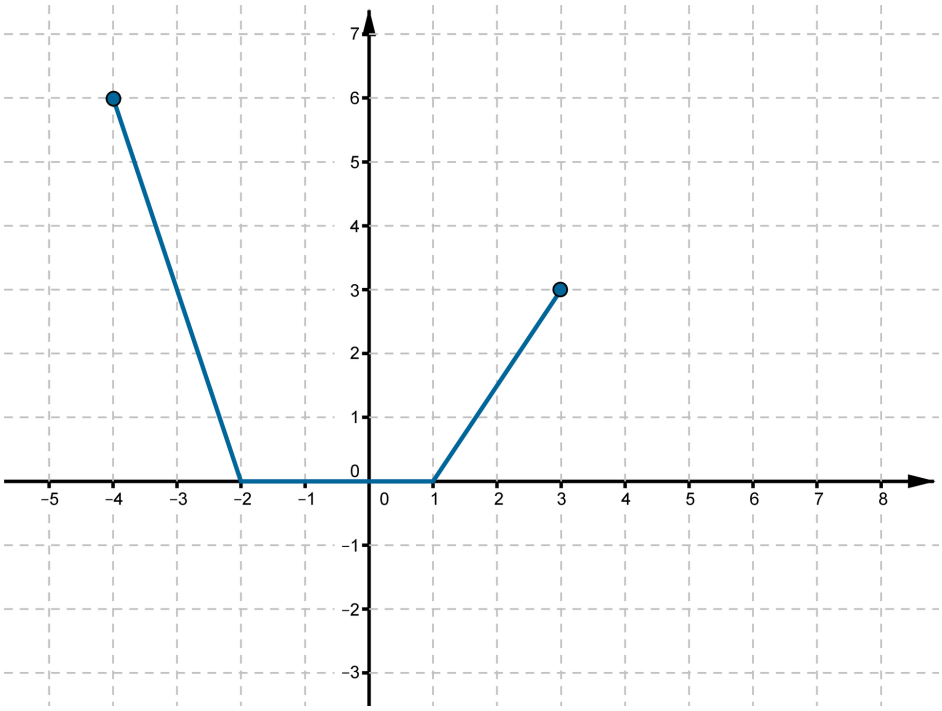


Funkcje g, h oraz k określone są wzorami: $g(x) = f(x-1) + 2$, $h(x) = f(x+1) + 1$, $k(x) = f(x-2) + 1$.
Wskaż na poniższych rysunkach wykresy tych funkcji.

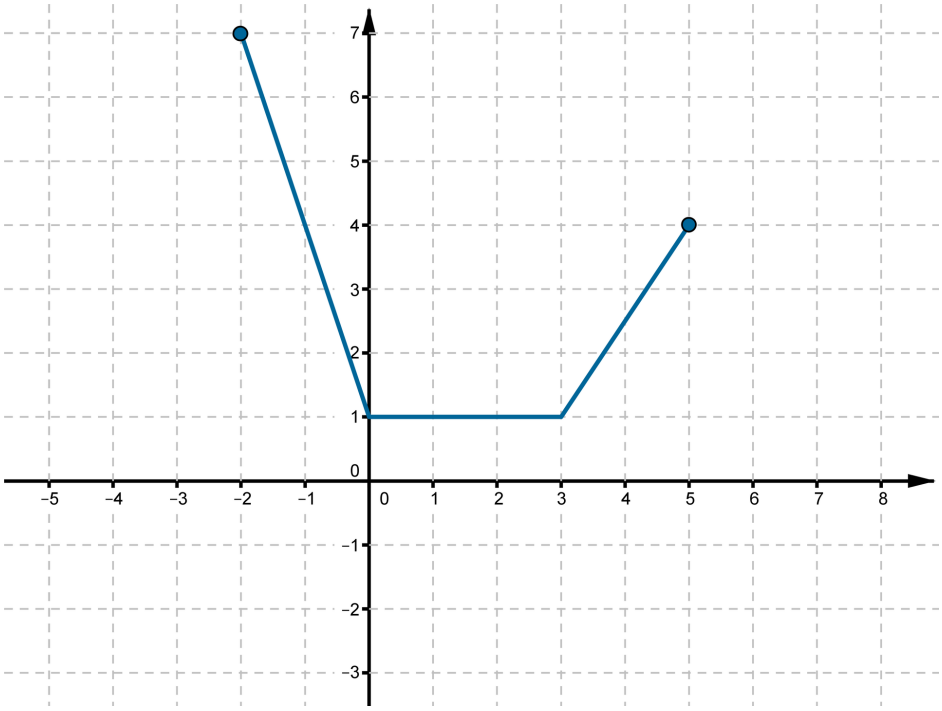
a.



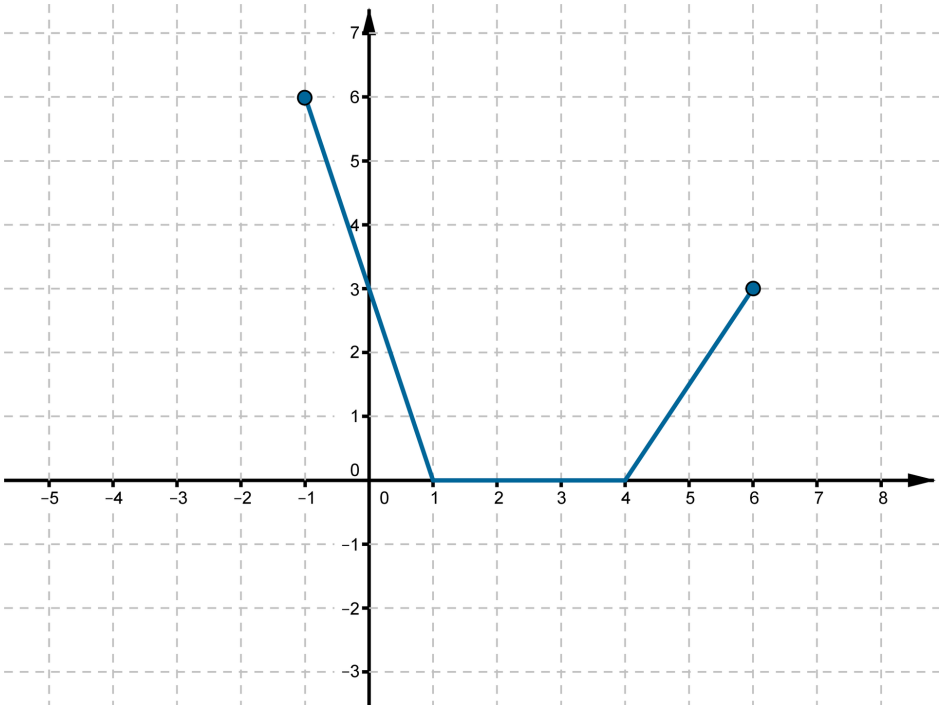
b.


7
6
5
4
3
2
1
0
-1
-2
-3
-5 -4 -3 -2 -1 0 1 2 3 4 5 6 7 8

c.


7
6
5
4
3
2
1
0
-1
-2
-3
-5 -4 -3 -2 -1 0 1 2 3 4 5 6 7 8

d.



Ćwiczenie 27

Funkcja f jest określona wzorem $f(x) = -3x + 2$. Jeżeli jej wykres przesuniemy o p jednostek wzdłuż osi Ox i o q jednostek wzdłuż osi Oy, to otrzymamy wykres funkcji g. Ustal wzór funkcji g, gdy

a. $p = 3, q = -5$

b. $p = 2, q = -2$

c. $p = -1, q = 7$

d. $p = -2, q = 10$

Ćwiczenie 28

Funkcja f jest określona wzorem $f(x) = \frac{2}{x}, x \neq 0$. Zapisz wzór funkcji, której wykres powstał w wyniku
przekształcenia opisanego poniżej.

a. Wykres funkcji f przesuwamy o 2 jednostki wzdłuż osi Ox i o 3 jednostki wzdłuż osi Oy.

b. Wykres funkcji f przesuwamy o (-1) jednostkę wzdłuż osi Ox i o 1 jednostkę wzdłuż osi Oy.

c. Wykres funkcji f przesuwamy o (-4) jednostki wzdłuż osi Ox i o (-2) jednostki wzdłuż osi Oy.

d. Wykres funkcji f przesuwamy o 3 jednostki wzdłuż osi Ox i o (-4) jednostki wzdłuż osi Oy.

Ćwiczenie 29

Funkcja f jest określona wzorem $f(x) = x^2$. Wykres funkcji g otrzymujemy po przesunięciu wykresu funkcji f o 3 jednostki wzdłuż osi Ox i o 2 jednostki wzdłuż osi Oy. Uzasadnij, że funkcja g określona jest wzorem $g(x) = x^2 - 6x + 11$.

Zadania generatorowe

Zadania generatorowe

Ćwiczenie 1

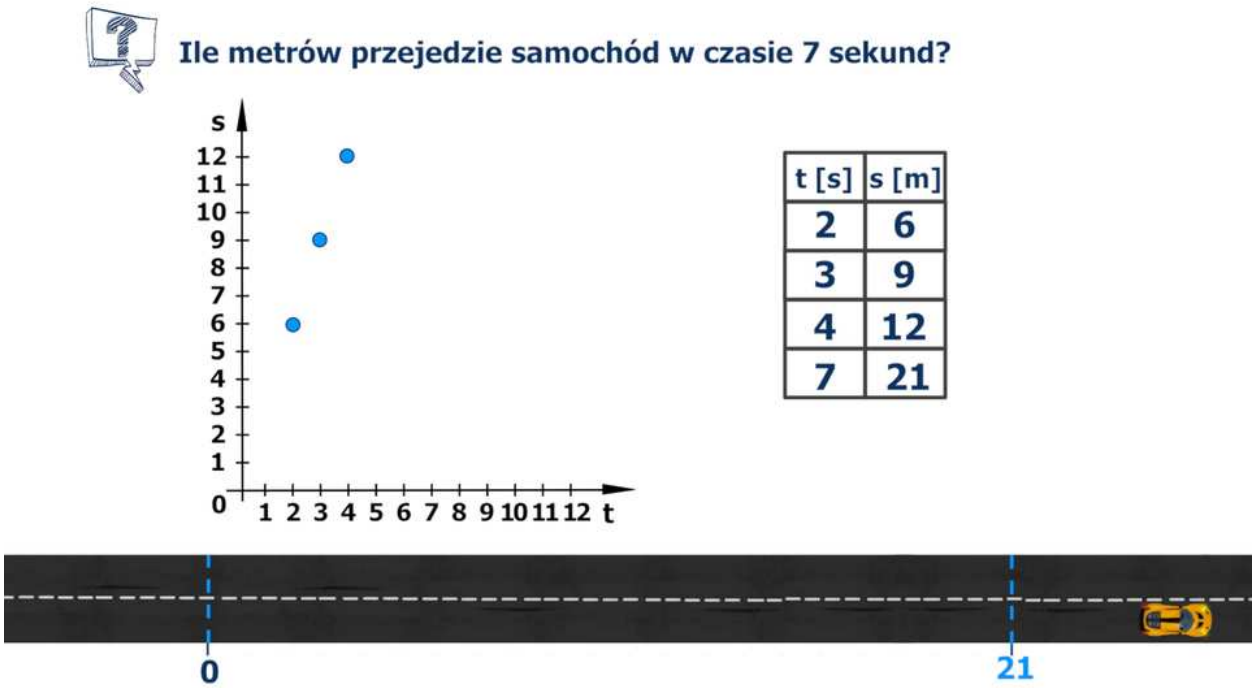
Ćwiczenie 2

Ćwiczenie 3

Proporcjonalność prosta

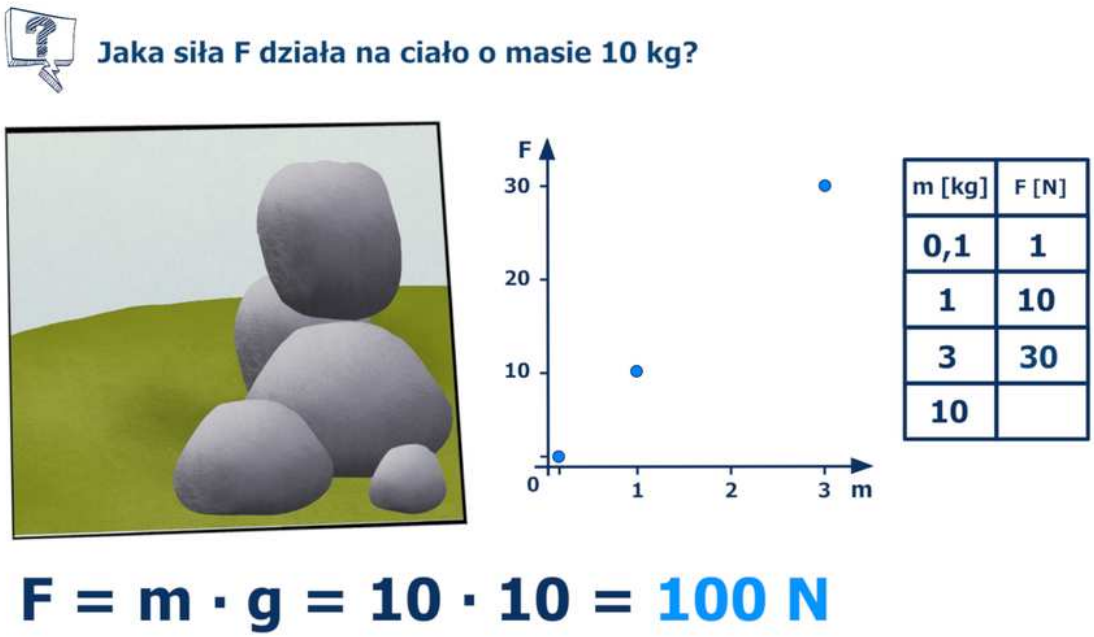
W dziale dotyczącym funkcji zostały podane różne zależności między dwiema dodatnimi wielkościami.
Niektóre z wielkości są wprost proporcjonalnymi, np.:

- droga s, jaką pokonuje samochód jadący ze stałą prędkością v, jest wprost proporcjonalna do czasu jazdy t,
- siła grawitacji F działająca na Ziemi na ciało jest wprost proporcjonalna do masy m tego ciała.



Film dostępny na portalu epodreczniki.pl

Animacja pokazuje, że droga S jaką pokonuje samochód jadący ze stałą prędkością v, jest wprost proporcjonalna do czasu jazdy t. Samochód jadący ze stałą prędkością w czasie 2 sekund pokonuje drogę 6 metrów, w czasie 3 sekund 9 metrów, a w czasie 4 sekund pokonuje 12 metrów. Dane zebrane w tabeli i przedstawione na wykresie w postaci punktów. Należy odpowiedzieć na pytanie, jaką drogę przejedzie samochód w czasie 7 sekund? Odpowiedź: 21 metrów.



Film dostępny na portalu epodreczniki.pl

Animacja pokazuje, że siła grawitacji F działająca na Ziemi na ciało jest wprost proporcjonalna do masy m tego ciała. Siła grawitacji F w niutonach działająca na Ziemi na ciało jest równa iloczynowi masy m tego ciała w kilogramach i przyspieszenia ziemskiego g w metrach na sekundę kwadrat, zgodnie z wzorem F=mg. Do obliczeń przyjęto, że g =10 metrów na sekundę kwadrat. Wstawiając do wzoru obliczono, że dla spadającego liścia o masie 0, 1 kilograma siłą grawitacji wynosi 1 niuton, dla spadającej z półki książki o masie 1 kilograma wynosi 10 niutonów, spadającego kamienia o masie 3 kilogramów wynosi 30 niutonów. Dane zebrano w tabeli i przedstawiono na wykresie w postaci punktów. Należy odpowiedzieć, jaka będzie siła grawitacji dla spadającego dużego kamienia o masie 10 kilogramów? Odpowiedź: 100 niutonów.

Definicja: Wielkości wprost proporcjonalne

Dwie zmienne wielkości dodatnie nazywamy wprost proporcjonalnymi, jeżeli iloraz tych wielkości jest stały.

Definicja: Proporcjonalność prosta

Funkcja f, opisująca zależność między dodatnimi wielkościami wprost proporcjonalnymi x i y nazywana jest proporcjonalnością prostą, a iloraz $\frac{y}{x}$ nazywamy współczynnikiem tej proporcjonalności. Oznaczając ten współczynnik przez a, zapisujemy funkcję f wzorem

$$f(x) = \mathrm{ax},$$

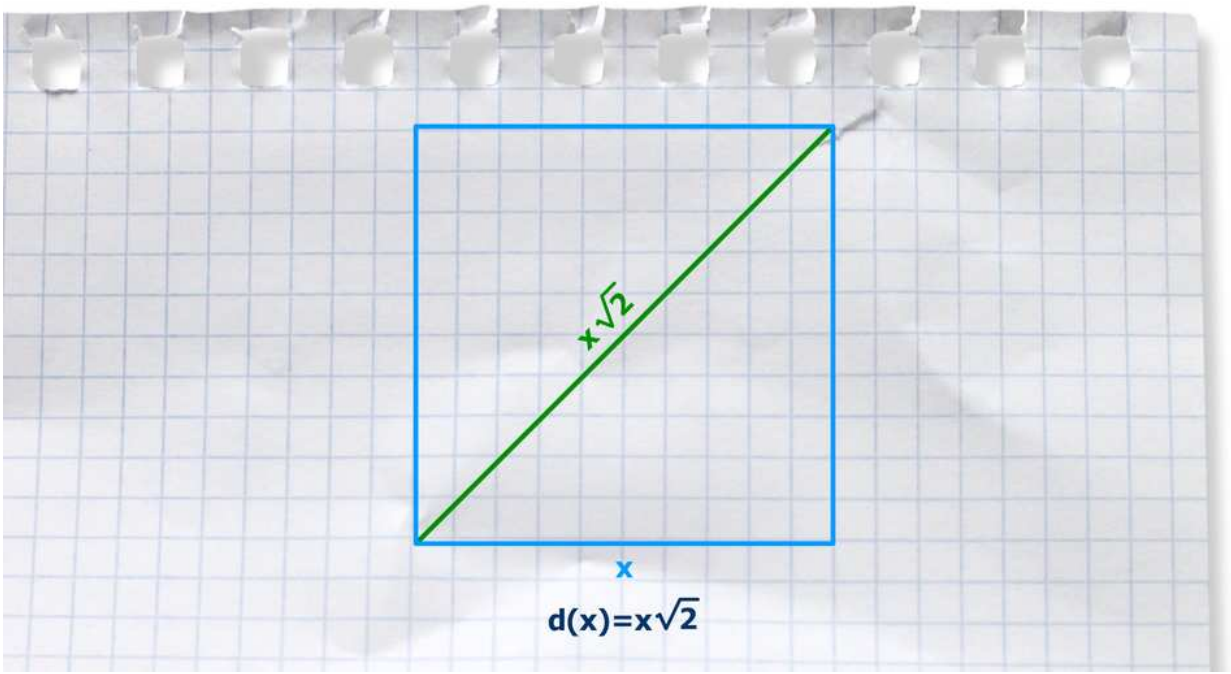
gdzie $x > 0$.
Uwaga: Wprost z definicji wynika, że $a > 0$.

Przykłady

Przykład 1

Zależność między długością d przekątnej kwadratu a długością x jego boku jest określona wzorem

$$d(x) = x\sqrt{2}$$



Film dostępny na portalu epodreczniki.pl

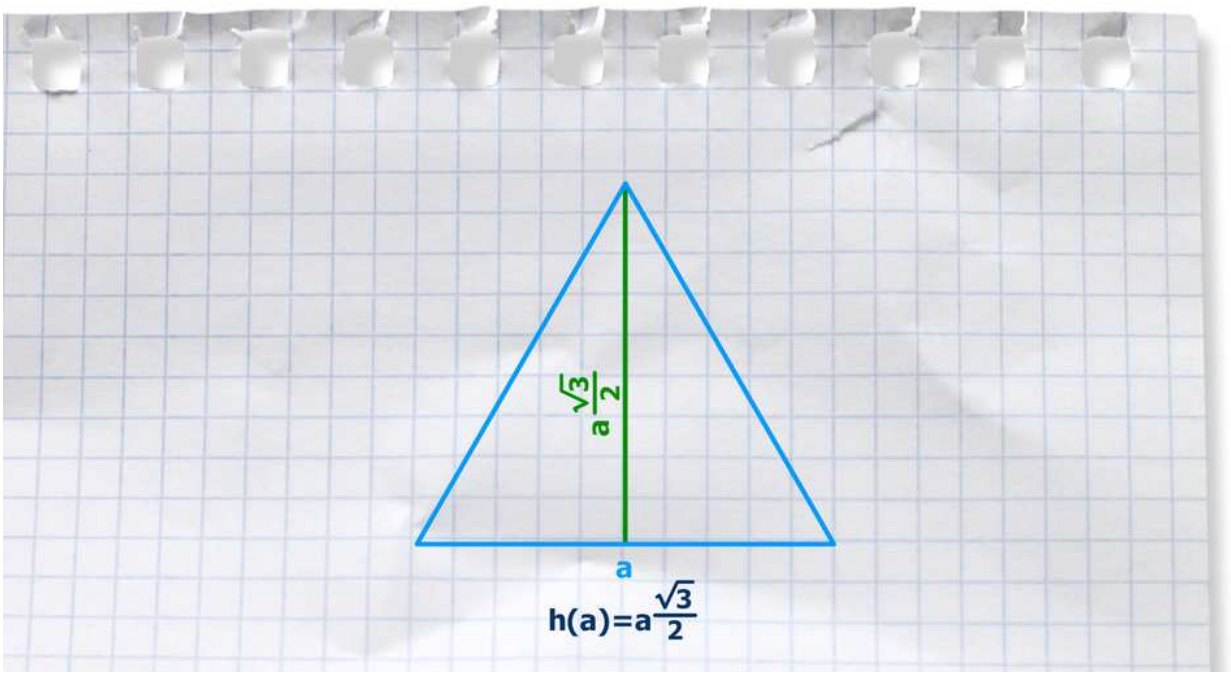
Animacja pokazuje, że ze wzrostem długości boku kwadratu wzrasta długość jego przekątnej, zgodnie ze wzorem d(x) = x razy pierwiastek z dwóch.

Jest to proporcjonalność prosta, a współczynnikiem tej proporcjonalności jest $\sqrt{2}$.

Przykład 2

Zależność między wysokością h trójkąta równobocznego a długością a jego boku jest określona wzorem:

$$h(a) = \frac{a\sqrt{3}}{2}.$$



Film dostępny na portalu epodreczniki.pl

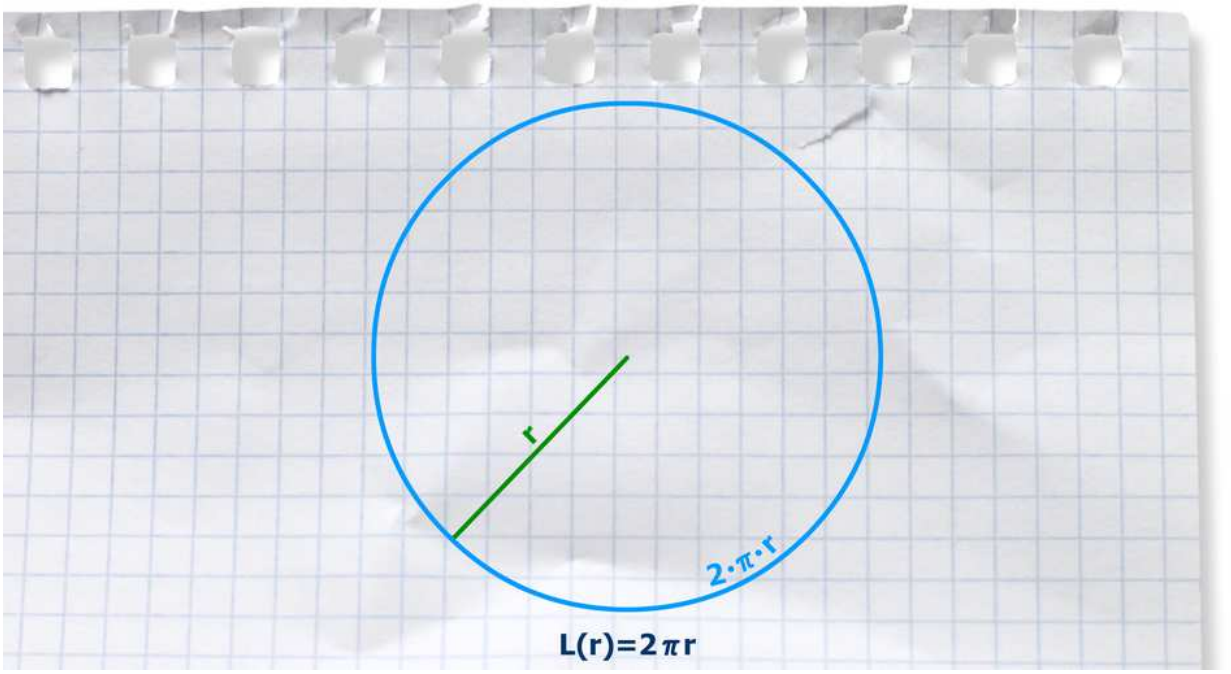
Animacja pokazuje, że ze wzrostem długości boku trójkąta równobocznego wzrasta wysokość trójkąta, zgodnie ze wzorem h(a) = a pierwiastek z trzech dzielone przez dwa.

Zależność ta to proporcjonalność prosta, a współczynnikiem tej proporcjonalności jest $\frac{\sqrt{3}}{2}$.

Przykład 3

Zależność między obwodem L koła a promieniem tego koła jest określona wzorem:

$$L(r) = 2\pi r.$$



Film dostępny na portalu epodreczniki.pl

Animacja pokazuje, że ze wzrostem długości promienia okręgu wzrasta jego obwód, zgodnie ze wzorem L(r) = 2 pi r.

Zależność ta to proporcjonalność prosta, a współczynnikiem tej proporcjonalności jest 2π .

Funkcja liniowa
Przejdźmy teraz do funkcji opisanych tym samym wzorem co proporcjonalność prosta, a więc $f(x) = \text{ax}$, ale określonych dla dowolnej liczby rzeczywistej x. O liczbie a nie będziemy już zakładać, że musi być dodatnia. Zastanówmy się, jak wygląda wykres takiej funkcji.

Twierdzenie: Wykres funkcji $f(x) = \text{ax}$

Wykresem funkcji $f(x) = \text{ax}$, gdzie a to ustalona liczba rzeczywista, jest prosta o równaniu $y = \text{ax}$.

Wykres funkcji $f(x) = \text{ax}$, gdzie $x \in R$ to prosta, która przechodzi przez każdy z punktów postaci $(x, a \cdot x)$.
W praktyce do jej narysowania wystarczy zaznaczyć punkt $(0,\ 0)$ i odpowiednio dobrany inny punkt $(x, a \cdot x)$.

Przykład 4

- Wykresem funkcji

$$f(x) = 2x$$

jest prosta przechodząca przez punkty $(0,\ 0)$ i $(1,\ 2)$. Wykres ten jest zbiorem punktów (x, y), które spełniają równanie $y = 2x$, czyli prostą opisaną równaniem $y = 2x$.

- Wykresem funkcji

$$f(x) = -3x$$

jest prosta opisana równaniem $y = -3x$, przechodząca przez punkty $(0,\ 0)$ i $(1,\ -3)$.

- Wykresem funkcji

$$f(x) = \frac{5}{4}x$$

jest prosta opisana równaniem $y = \frac{5}{4}x$, przechodząca przez punkty $(0,\ 0)$ i $(4,\ 5)$.

- Wykresem funkcji

$$f(x) = -1{,}4 \cdot x$$

jest prosta opisana równaniem $y = -1{,}4 \cdot x$, przechodząca przez punkty $(0,\ 0)$ i $(5,\ -7)$.

Zasób interaktywny dostępny pod adresem https://zpe.gov.pl/a/DP1rbnVyH

W dalszej części tego rozdziału będziemy zajmować się funkcjami określonymi wzorem $f(x)\mathrm{ax} + b$, gdzie a, b są ustalonymi liczbami rzeczywistymi.
Zauważmy, że po przesunięciu wykresu funkcji $f(x) = \mathrm{ax}$ o b jednostek wzdłuż osi Oy otrzymamy wykres funkcji określonej wzorem

$$g(x) = f(x) + b$$

a więc

$$g(x) = \mathrm{ax} + b.$$

Zatem wykresem funkcji g jest prosta równoległa do prostej o równaniu

$$y = \mathrm{ax}.$$

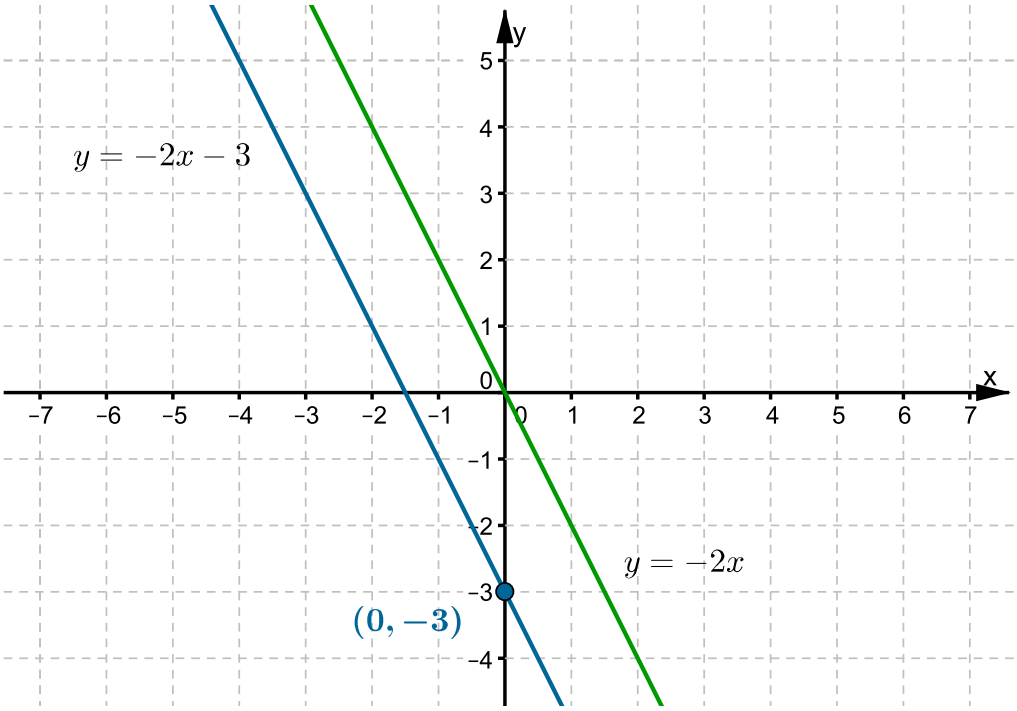
Przykład 5

- Wykresem funkcji

$$f(x) = 2x - 3$$

jest prosta równoległa do prostej o równaniu $y = 2x$ i przechodząca przez punkt $(0,\ -3)$, czyli prosta o równaniu

$$y = 2x - 3.$$

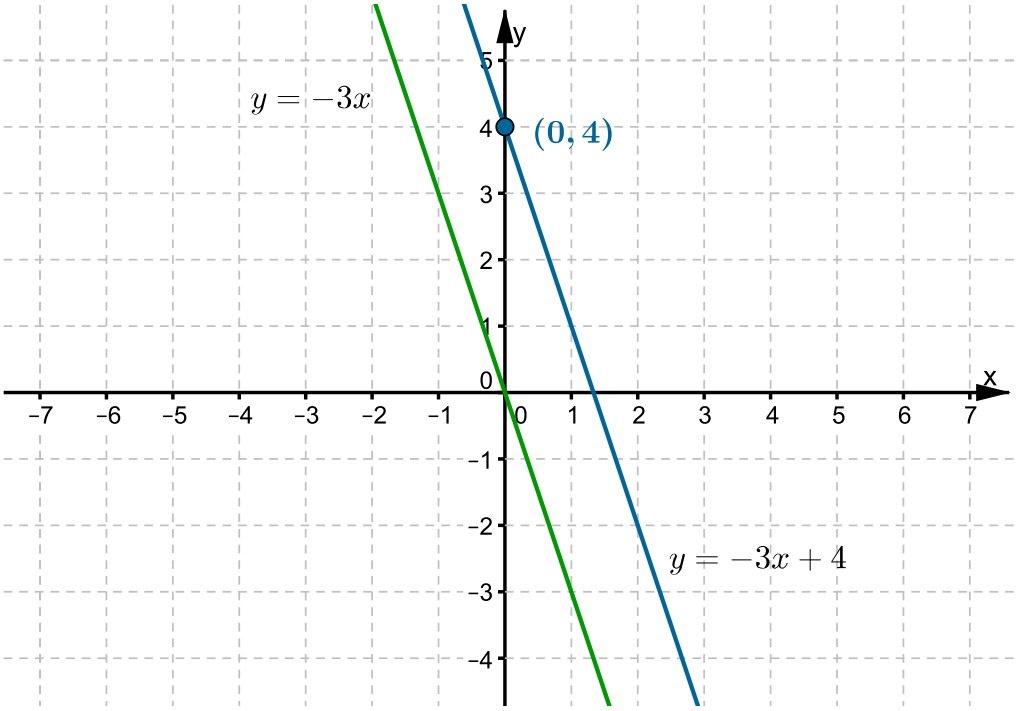


- Wykresem funkcji

$$f(x) = -3x + 4$$

jest prosta równoległa do prostej o równaniu $y = -3x$ i przechodząca przez punkt $(0,\ 4)$, czyli prosta o równaniu

$y = -3x + 4.$

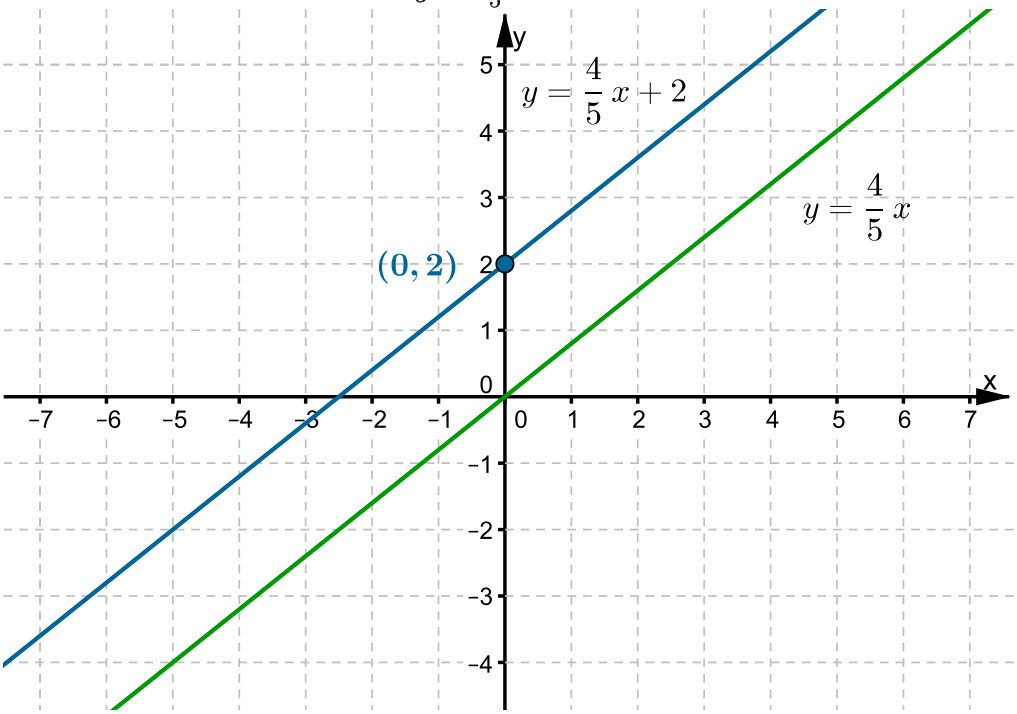


- Wykresem funkcji

$$f(x) = \frac{4}{5}x + 2$$

jest prosta równoległa do prostej o równaniu $y = \frac{4}{5}x$ i przechodząca przez punkt $(0,\ 2)$, czyli prosta o równaniu

$$y = \frac{4}{5}x + 2.$$

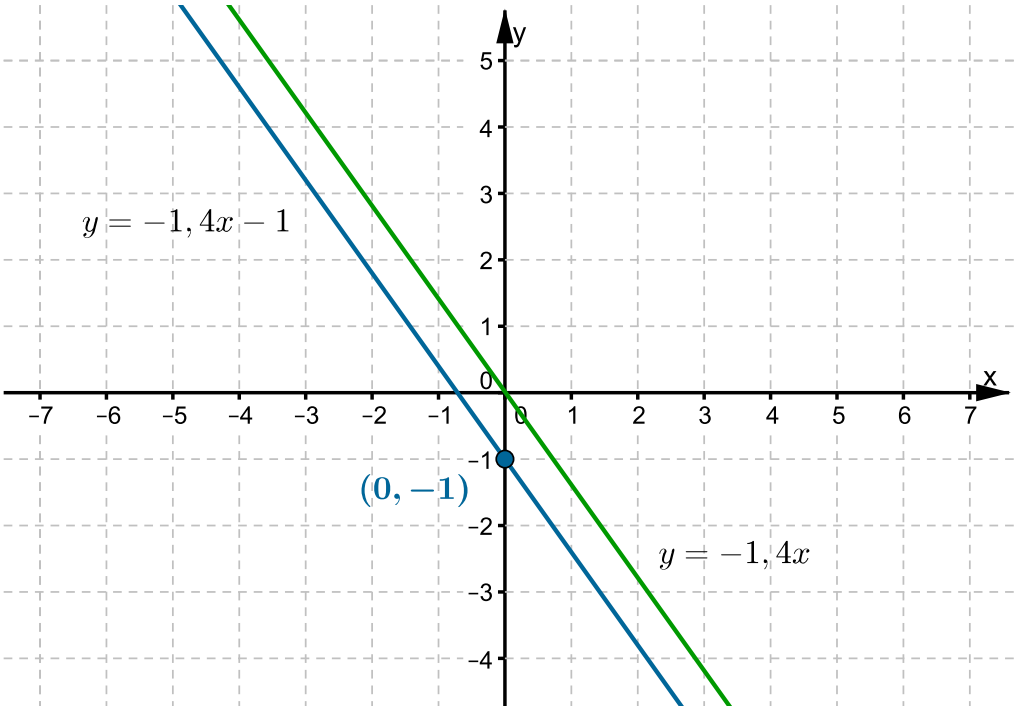


- Wykresem funkcji

$$f(x) = -1{,}4 \cdot x - 1$$

jest prosta równoległa do prostej o równaniu $y = -1{,}4 \cdot x$ i przechodząca przez punkt $(0,\ -1)$, czyli prosta o równaniu

$$y = -1{,}4 \cdot x - 1.$$



Definicja funkcji liniowej

Definicja: Funkcja liniowa

Funkcję f zmiennej x określoną wzorem

$$f(x) = \mathrm{a}x + b,$$

gdzie a i b są ustalonymi liczbami rzeczywistymi, nazywamy funkcją liniową.
Wykresem funkcji liniowej

$$f(x) = \mathrm{a}x + b$$

jest prosta o równaniu $y = \mathrm{a}x + b$. Prosta ta jest równoległa do prostej o równaniu $y = \mathrm{a}x$ oraz przecina oś Oy w punkcie o współrzędnych $(0, b)$.

Zasób interaktywny dostępny pod adresem https://zpe.gov.pl/a/Da5cnrfSV

Zadania

Ćwiczenie 1

Za trzy kostki masła trzeba zapłacić $12{,}60$ zł. Wynika z tego, że

- [ ] za 6 kostek zapłacimy więcej niż $20\ zł$
- [ ] za 4 kostki zapłacimy $16{,}80\ zł$
- [ ] za 1 kostkę zapłacimy $6{,}30\ zł$

Ćwiczenie 2

W poniższej tabeli prezentowane są wprost proporcjonalne wielkości x i y.

Funkcja liniowa. Tabela 01

x	$x_1 = 1$	$x_2 = 2$	x_3	$x_4 = 10$
y	y_1	$y_2 = 3$	$y_3 = 9$	y_4

Wówczas

- [ ] $x_3 = 3$
- [ ] $\frac{y}{x} = \frac{3}{2}$
- [ ] $y_1 = 2$
- [ ] $y_4 = 15$

Ćwiczenie 3

Które spośród poniższych par wielkości są wprost proporcjonalne?

- [ ] bok trójkąta równobocznego i promień koła wpisanego w ten trójkąt
- [ ] obwód i średnica koła
- [ ] pole kwadratu i pole koła na nim opisanego
- [ ] krawędź sześcianu i jego objętość

Ćwiczenie 4

Samochód jedzie ze stałą prędkością $70\frac{\mathrm{km}}{h}$. Wówczas

- [ ] w ciągu 30 minut przejedzie $30\ \mathrm{km}$
- [ ] w ciągu 5 minut przejedzie więcej niż $5\ \mathrm{km}$
- [ ] w ciągu 2 godzin przejedzie $140\ \mathrm{km}$
- [ ] w ciągu 10 minut przejedzie $7\ \mathrm{km}$

Ćwiczenie 5

Wykres funkcji $f(x) = \sqrt{2}x + 2$

- [ ] przecina wykres funkcji $g(x) = -3x + 2$ w punkcie leżącym na osi Oy
- [ ] jest równoległy do prostej o równaniu $y = 2$
- [ ] przechodzi przez punkt $\left(\sqrt{2}, 4\right)$

Ćwiczenie 6

Przyporządkuj podane wzory funkcji liniowych do odpowiednich wykresów.

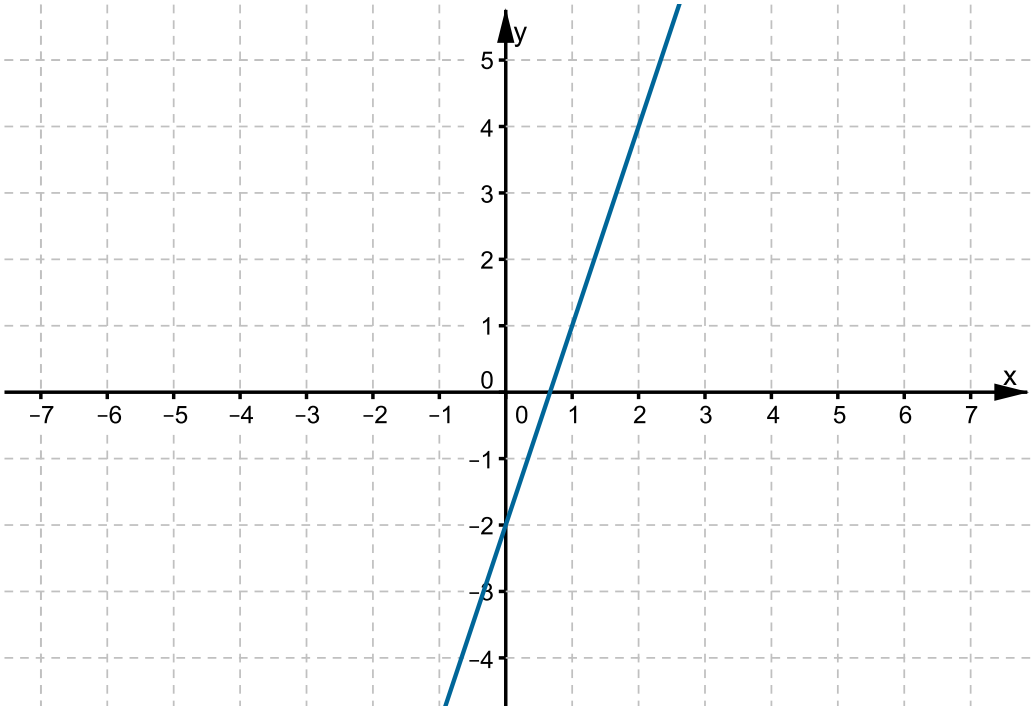
a. $y = 3x + 2$

b. $y = -3x + 2$

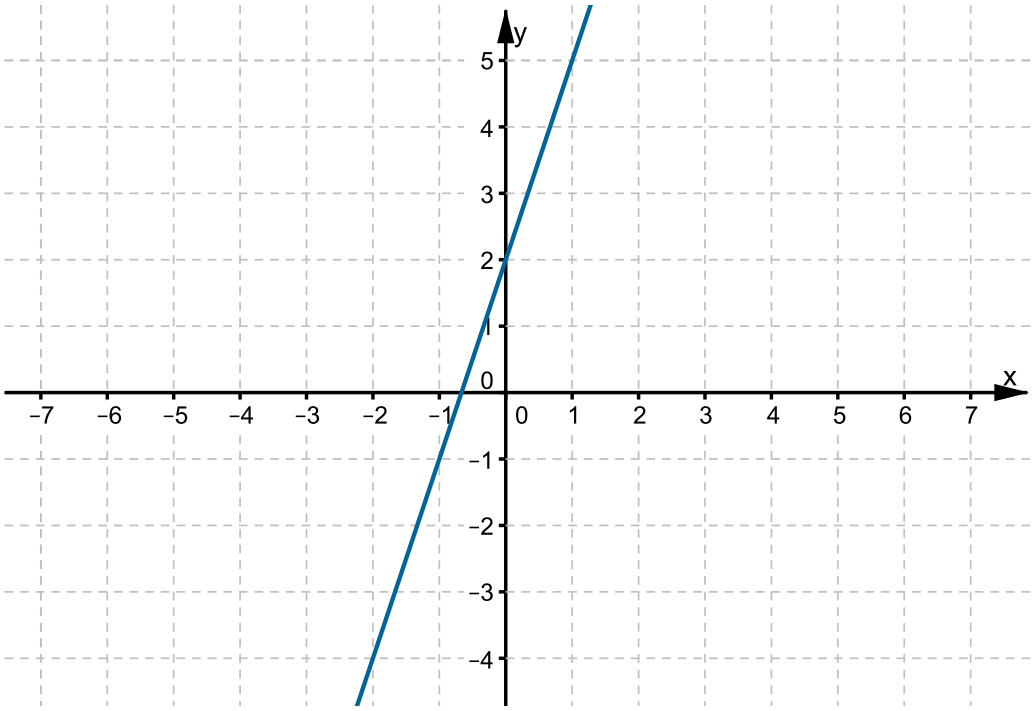
c. $y = 3x - 2$

d. $y = -3x - 2$

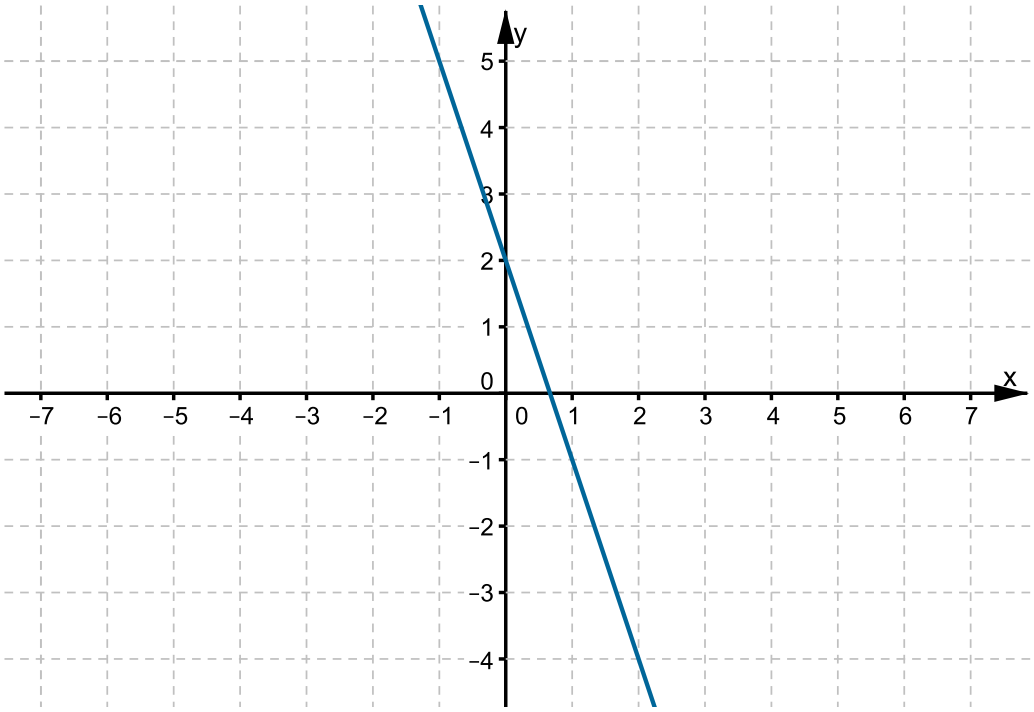
I.



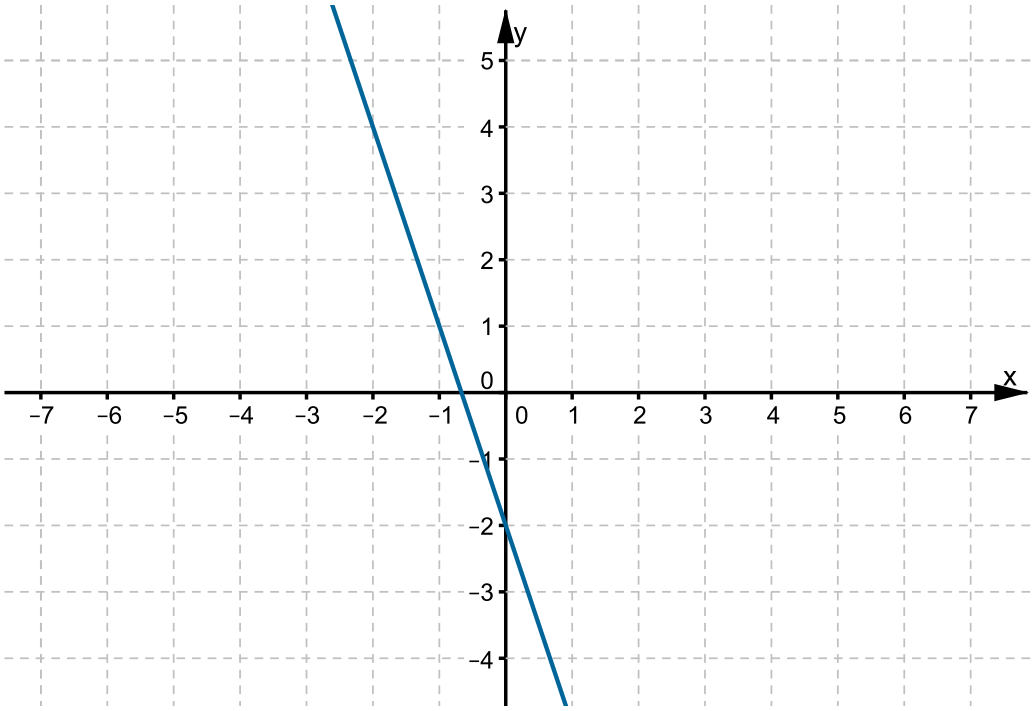
II.


y
x
5
4
3
2
1
0
−1
−2
−3
−4
−7
−6
−5
−4
−3
−2
−1
0
1
2
3
4
5
6
7

III.


y
x
5
4
3
2
1
0
−1
−2
−3
−4
−7
−6
−5
−4
−3
−2
−1
0
1
2
3
4
5
6
7

IV.



Ćwiczenie 7

Rozstrzygnij, czy punkty A, B, C leżą na wykresie tej samej funkcji liniowej.

- [ ] A = <mfenced separators="|"> 0 , - 1 , B = <mfenced separators="|"> - 1 , - 3 , C = <mfenced separators="|"> - 2 , - 5
- [ ] A = <mfenced separators="|"> 0 , 1 , B = <mfenced separators="|"> 1 , 2 , C = <mfenced separators="|"> 2 , 4
- [ ] A = <mfenced separators="|"> 0 , 1 , B = <mfenced separators="|"> 1 , 11 , C = <mfenced separators="|"> 2 , 21
- [ ] A = <mfenced separators="|"> 0 , 2 , B = <mfenced separators="|"> 20 , 2 , C = <mfenced separators="|"> - 20 , 2

Ćwiczenie 8

Wskaż punkt, który leży na wykresie funkcji f określonej wzorem $f(x) = \sqrt{3}x$.

- [ ] $\left(-\sqrt{3},\ -1\right)$
- [ ] $\left(-\sqrt{3},\ -3\right)$
- [ ] $\left(-\sqrt{3}, 1\right)$
- [ ] $\left(-\sqrt{3}, 0\right)$

Ćwiczenie 9

Na wykresie funkcji $f(x) = \mathrm{ax}$ leży punkt $\mathrm{A} = (1,\ 3)$. Wtedy liczba $f(-2)$ jest równa

- ◯ -9
- ◯ -6
- ◯ 0
- ◯ -3

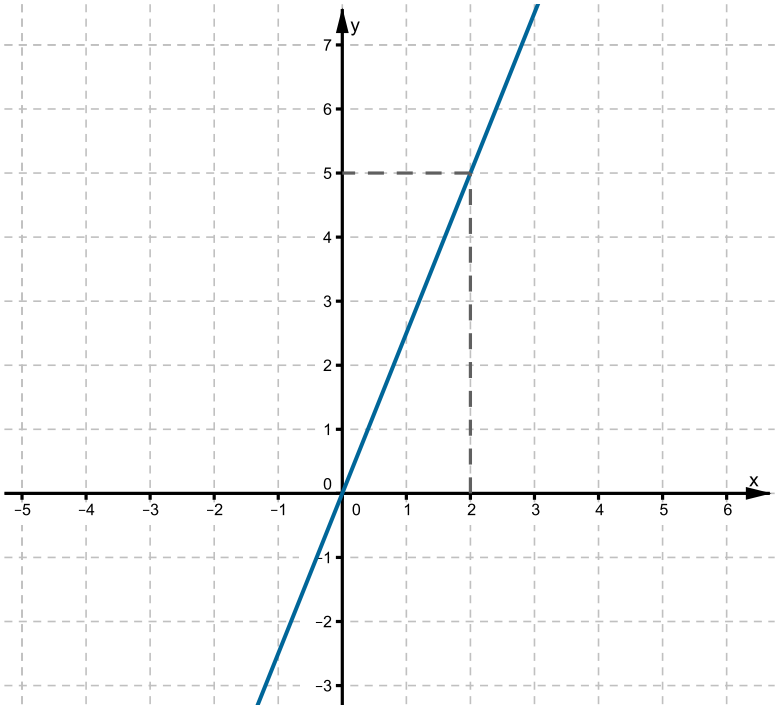
Ćwiczenie 10

Jeżeli za 3 takie same zeszyty w kratkę trzeba zapłacić w szkolnym sklepiku 7 zł 20 gr, to za 7 takich zeszytów zapłacimy

- ◯ 16 zł 80 gr
- ◯ 14 zł 20 gr
- ◯ 11 zł 20 gr
- ◯ 24 zł

Ćwiczenie 11

Przedstawiona na rysunku prosta jest wykresem funkcji f.



Funkcja ta określona jest wzorem

- $f(x) = \frac{5}{2}x$
- $f(x) = \frac{2}{5}x$
- $f(x) = 5x$
- $f(x) = 2x$

Ćwiczenie 12

Do wykresu funkcji liniowej określonej wzorem $f(x) = -2x + 3$ należy punkt

- $\left(\frac{1}{2}, 3\right)$
- $\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$
- $\left(\frac{1}{2}, 2\right)$
- $\left(\frac{1}{2}, 1\frac{1}{2}\right)$

Ćwiczenie 13

Wykres funkcji liniowej f przecina oś Oy w punkcie $(0,\ -2)$ i przechodzi przez punkt $(-1,\ 3)$. Funkcja ta określona jest wzorem

- $f(x) = 5x - 2$
- $f(x) = 3x - 2$
- $f(x) = -5x - 2$
- $f(x) = -3x - 2$

Ćwiczenie 14

Wykres funkcji liniowej f określonej wzorem $f(x) = 2x$ przesunięto o 3 jednostki w prawo, wzdłuż osi Ox. Otrzymana prosta jest wykresem funkcji g danej wzorem

- ◯ $g(x) = 2x + 6$
- ◯ $g(x) = 2x - 6$
- ◯ $g(x) = 2x - 3$
- ◯ $g(x) = 2x + 3$

Ćwiczenie 15

Wskaż liczbę m, dla której wykres funkcji liniowej f określonej wzorem $f(x) = (m-2)x + 3$ przecina oś Ox w punkcie $(-1,\ 0)$.

- ◯ $m = 3$
- ◯ $m = -2$
- ◯ $m = 5$
- ◯ $m = -3$

Ćwiczenie 16

Uzupełnij tabelę, wiedząc, że x jest argumentem funkcji $f(x) = \mathrm{ax}$, natomiast y odpowiadającą mu wartością.

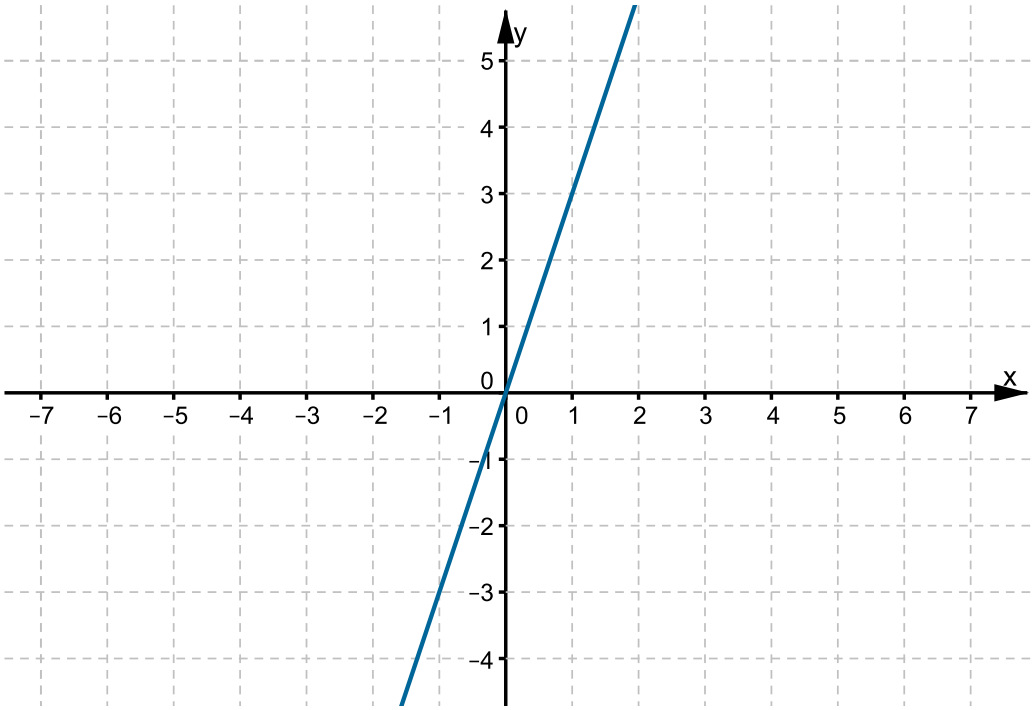
Funkcja liniowa. Tabela 02

x	-6	-3	-2	-1	0	1	2	3	6	15	33
y	10										

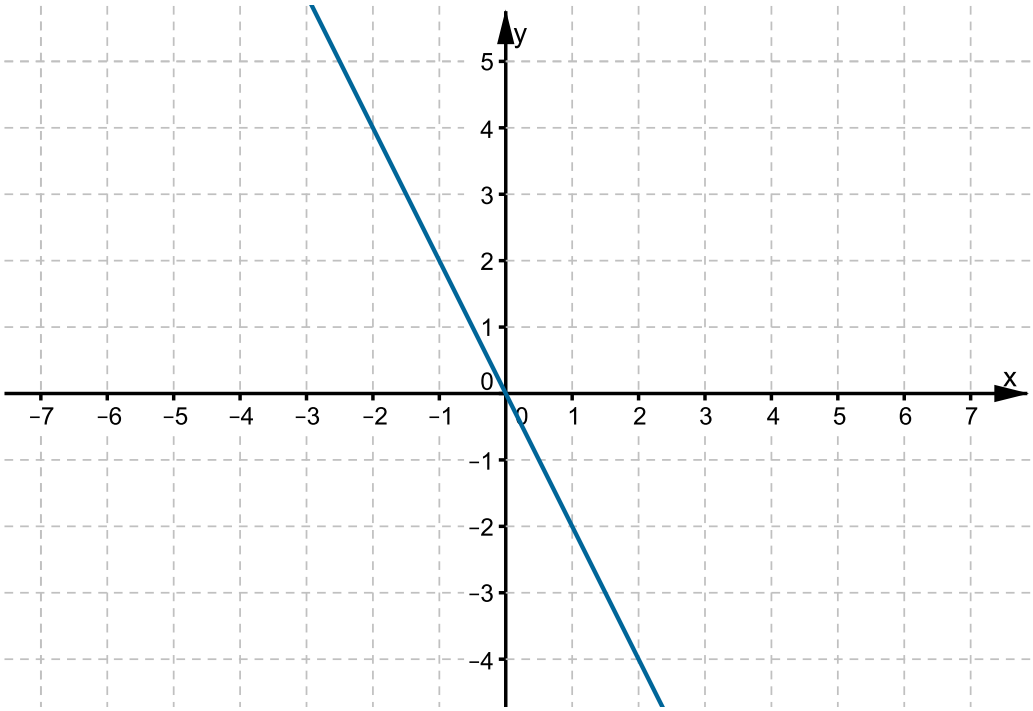
Ćwiczenie 17

Każda z prostych prezentowanych na rysunkach określona jest równaniem $y = \mathrm{ax}$. Wyznacz a .

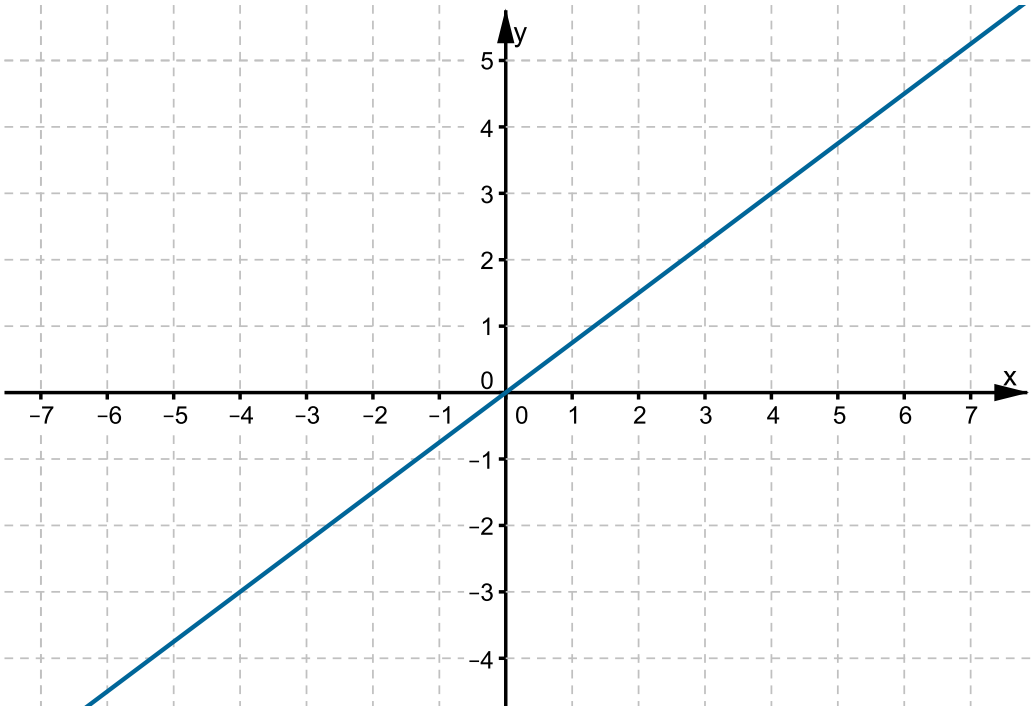
a.



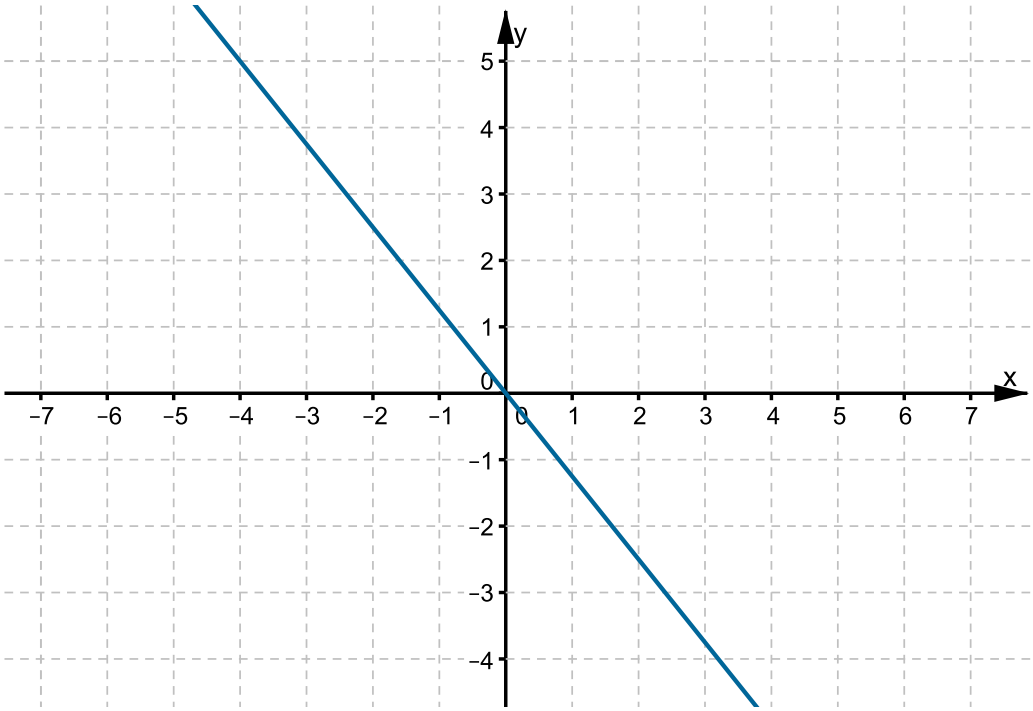
b.



c.



d.



Ćwiczenie 18

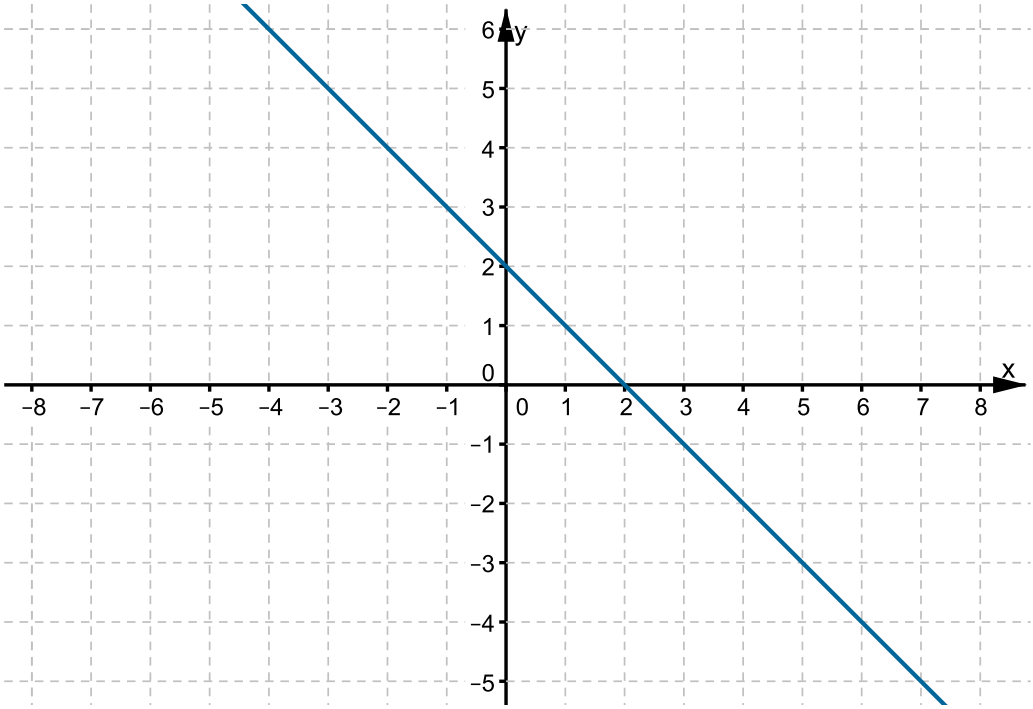
Wykres funkcji $f(x) = -\frac{1}{3}x$ przesunięto o 3 jednostki, wzdłuż osi Ox. Podaj równanie otrzymanej prostej.

Ćwiczenie 19

Wykres funkcji $f(x) = -\frac{1}{3}x$ przesunięto o 3 jednostki, wzdłuż osi Oy. Podaj równanie otrzymanej prostej.

Ćwiczenie 20

Na rysunku prezentowany jest wykres funkcji liniowej f. Uzupełnij tabelę.



Funkcja liniowa. Tabela 03

x	-4	-3	-2	4	5	6	7
$f(x)$							

Ćwiczenie 21

Uzupełnij tabelę, wiedząc, że funkcja f jest liniowa.

Funkcja liniowa. Tabela 04

x	-2	-1	0	1	2	3	4
$f(x)$			2	-1			

Ćwiczenie 22

Przyporządkuj podane wzory funkcji liniowych do odpowiednich wykresów.

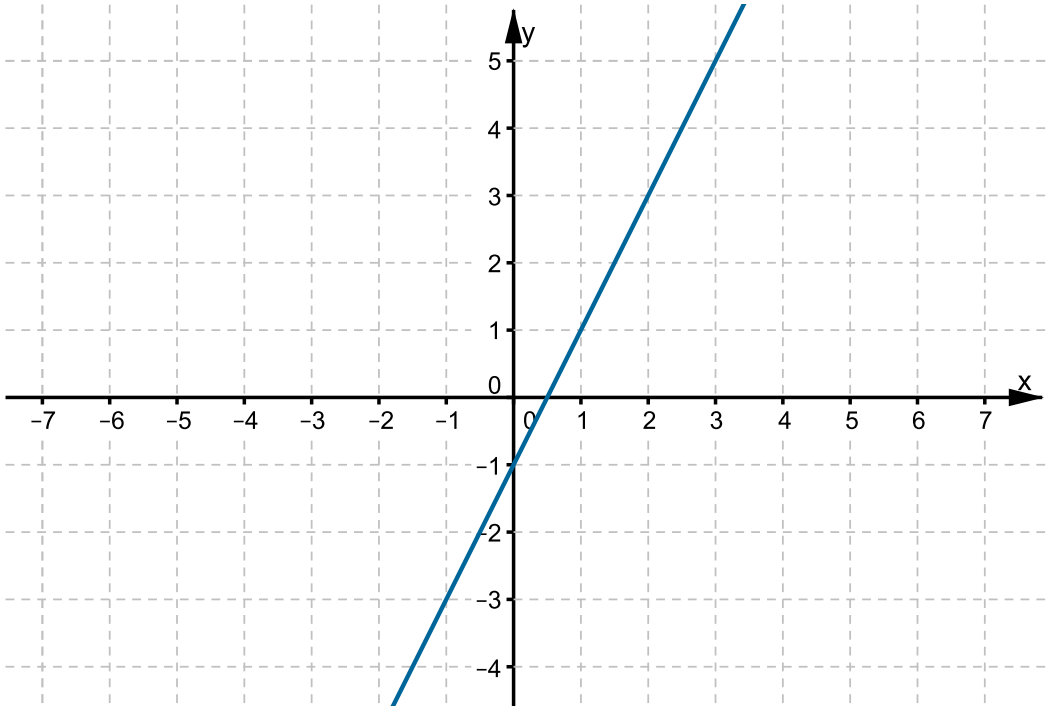
a. $y = x - 2$

b. $y = -\frac{1}{2}x - 2$

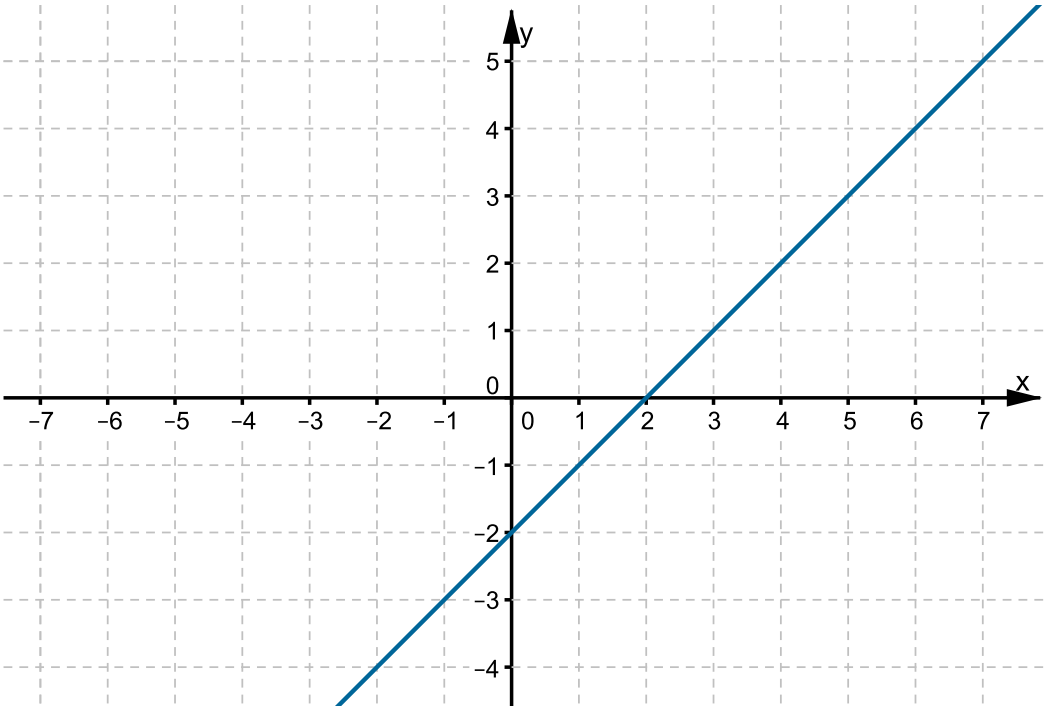
c. $y = 2x - 1$

d. $y = \frac{1}{2}x - 1$

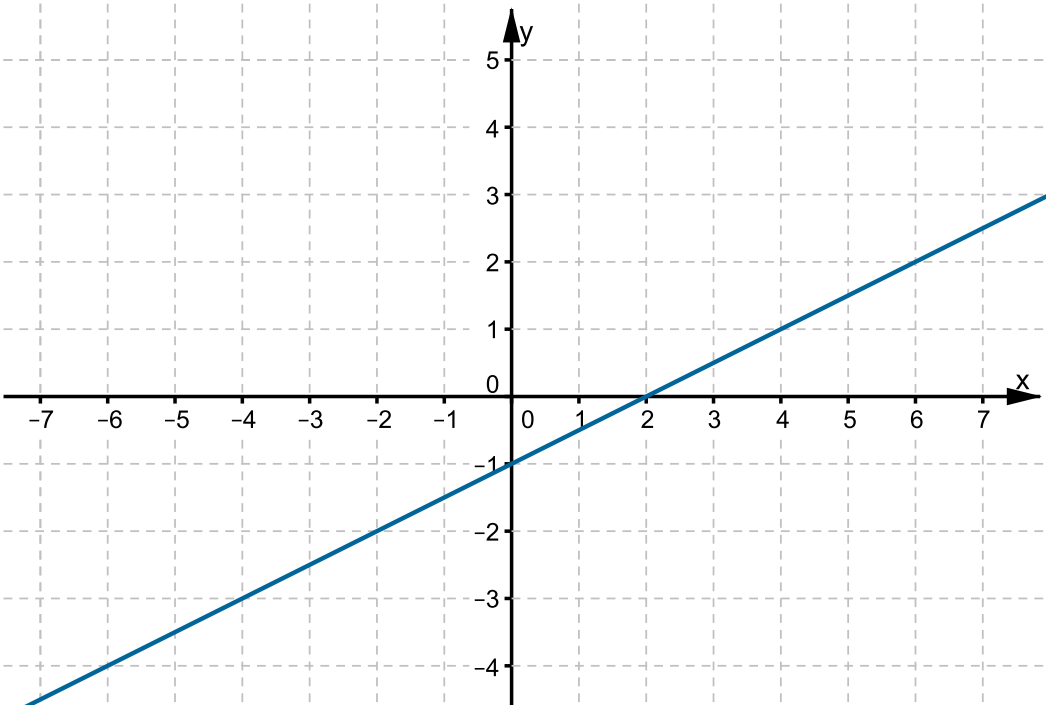
I.



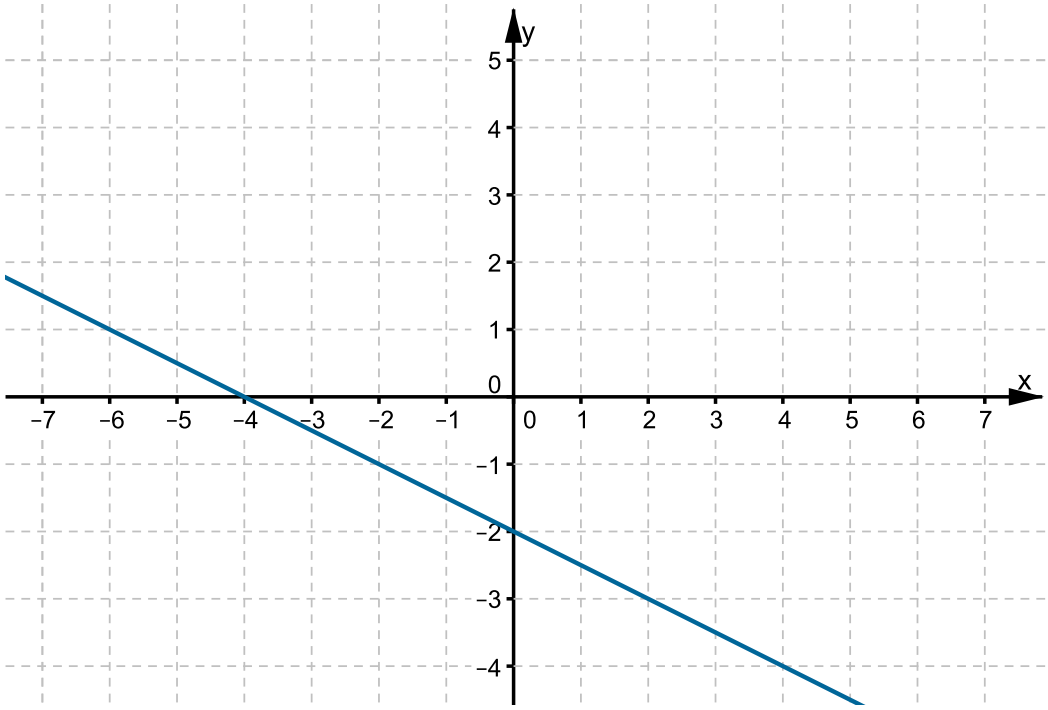
II.


y
x
5
4
3
2
1
0
−1
−2
−3
−4
−7
−6
−5
−4
−3
−2
−1
0
1
2
3
4
5
6
7

III.

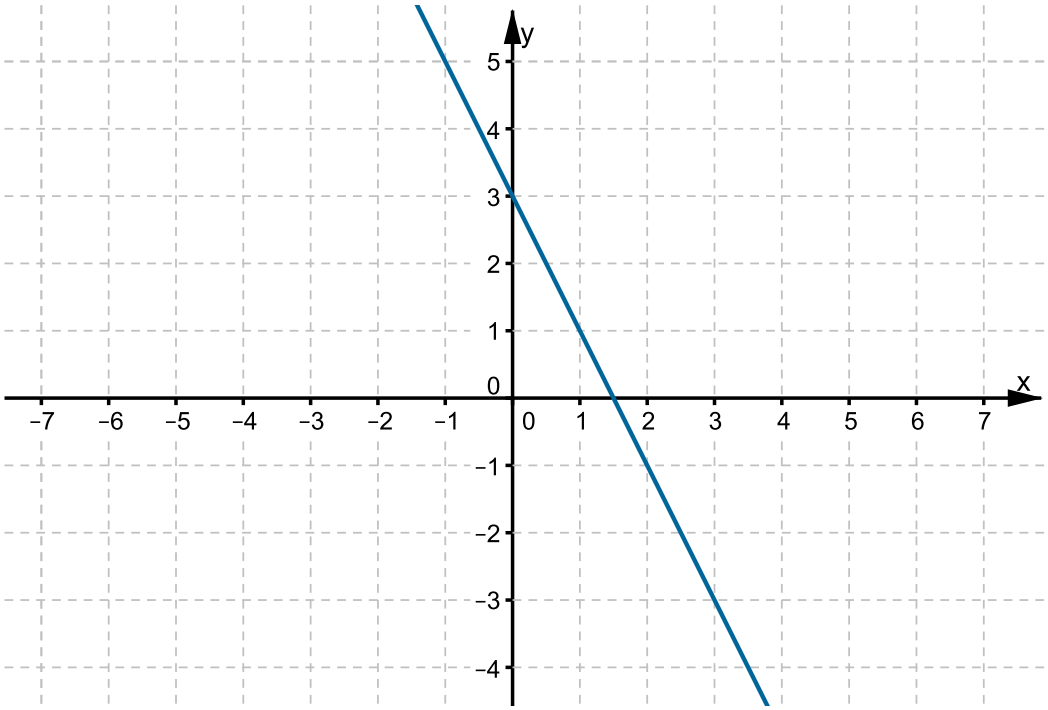

y
x
5
4
3
2
1
0
−1
−2
−3
−4
−7
−6
−5
−4
−3
−2
−1
0
1
2
3
4
5
6
7

IV.


y
x
5
4
3
2
1
0
−1
−2
−3
−4
−7
−6
−5
−4
−3
−2
−1
0
1
2
3
4
5
6
7

Ćwiczenie 23

Na rysunku przedstawiono fragment wykresu funkcji liniowej f określonej wzorem $f(x) = \mathrm{a}\mathrm{x} + b$.



Oceń, czy poniższe stwierdzenia są prawdziwe.

- [ ] $a < 0$
- [ ] punkt $(-1,\ 5)$ należy do wykresu funkcji f
- [ ] $a > 2$
- [ ] $b = 3$

Ćwiczenie 24

Dane są funkcje $f(x) = 2x$, $g(x) = 2x + 3$, $h(x) = -2x + 3$. Oceń, czy poniższe stwierdzenia są prawdziwe.

- ◯ Wykresy funkcji g i h przecinają się w punkcie $(0,\ 3)$.
- ◯ Wykresy funkcji f i h są prostymi równoległymi.
- ◯ Wykresy funkcji f i g przecinają się w punkcie $(0,\ 0)$.

Zadania generatorowe

Ćwiczenie 1

Ćwiczenie 2

Ćwiczenie 3

Ćwiczenie 4

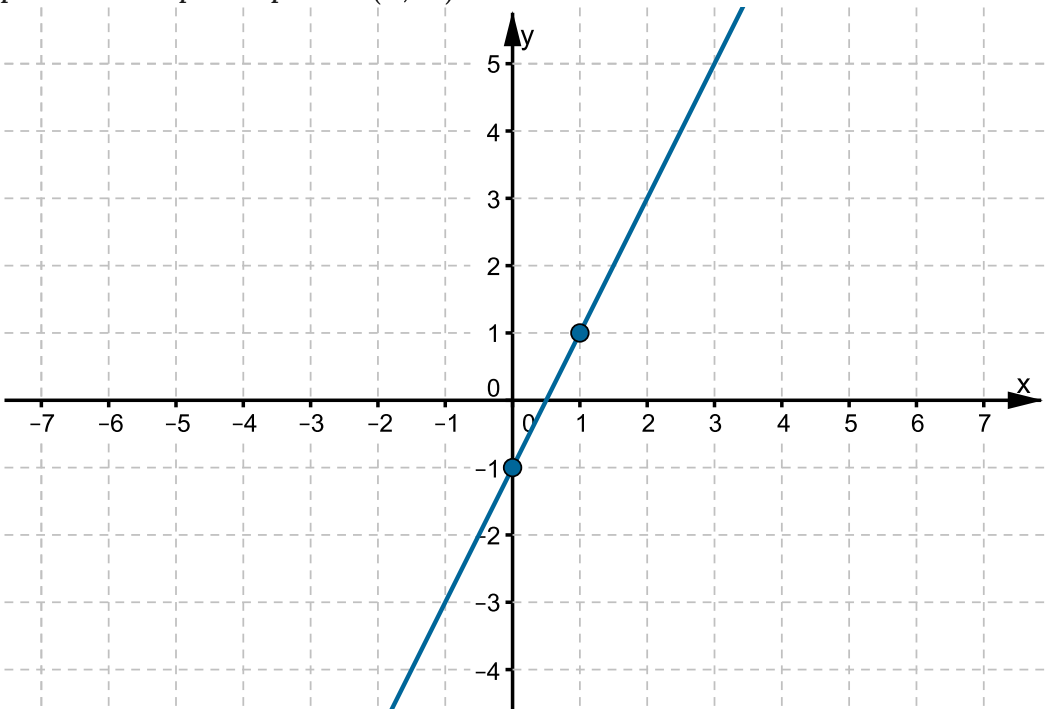
Współczynnik kierunkowy funkcji liniowej

Przykład 1

Rozpatrzmy funkcję liniową określoną wzorem

$$f(x) = 2x - 1.$$

Ponieważ $f(0) = -1$ oraz $f(1) = 1$, zatem wykres funkcji przecina oś Oy w punkcie $(0,\ -1)$ i przechodzi przez punkt $(1,\ 1)$.



Pokażemy, że przy zwiększaniu argumentu o 1 odpowiadająca mu wartość funkcji f zwiększa się o 2.
Weźmy dowolną liczbę rzeczywistą x_1. Wtedy

$$f(x_1) = 2x_1 - 1,$$

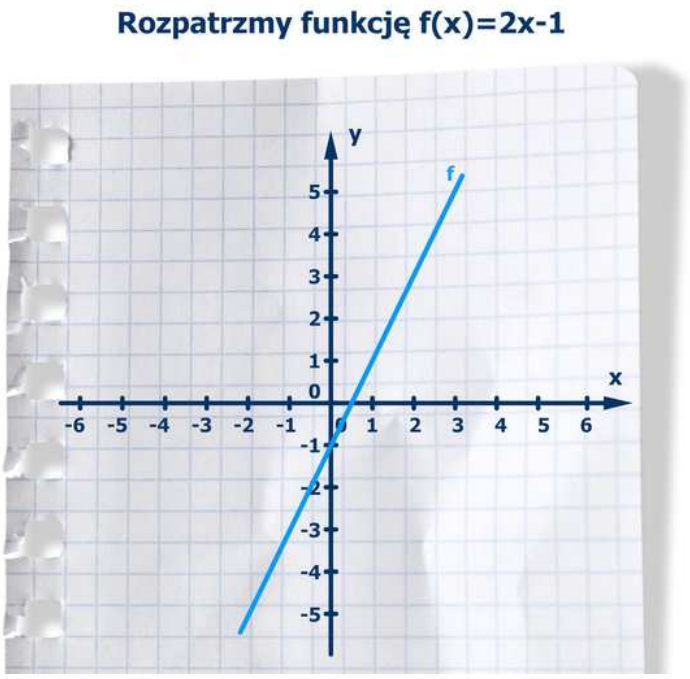
a także

$$f(x_1 + 1) = 2(x_1 + 1) - 1 = 2x_1 + 2 - 1 = 2x_1 + 1.$$

Obliczamy różnicę tych dwóch wartości

$$f(x_1 + 1) - f(x_1) = 2x_1 + 1 - (2x_1 - 1) = 2x_1 + 1 - 2x_1 + 1 = 2.$$

Punkt A jest dowolnym punktem należącym do wykresu funkcji f. Aby znaleźć punkt B, którego pierwsza współrzędna jest o 1 większa od pierwszej współrzędnej punktu A, przesuwamy się, o 1 jednostkę, wzdłuż osi Ox i o 2 jednostki, wzdłuż osi Oy.



Film dostępny na portalu epodreczniki.pl

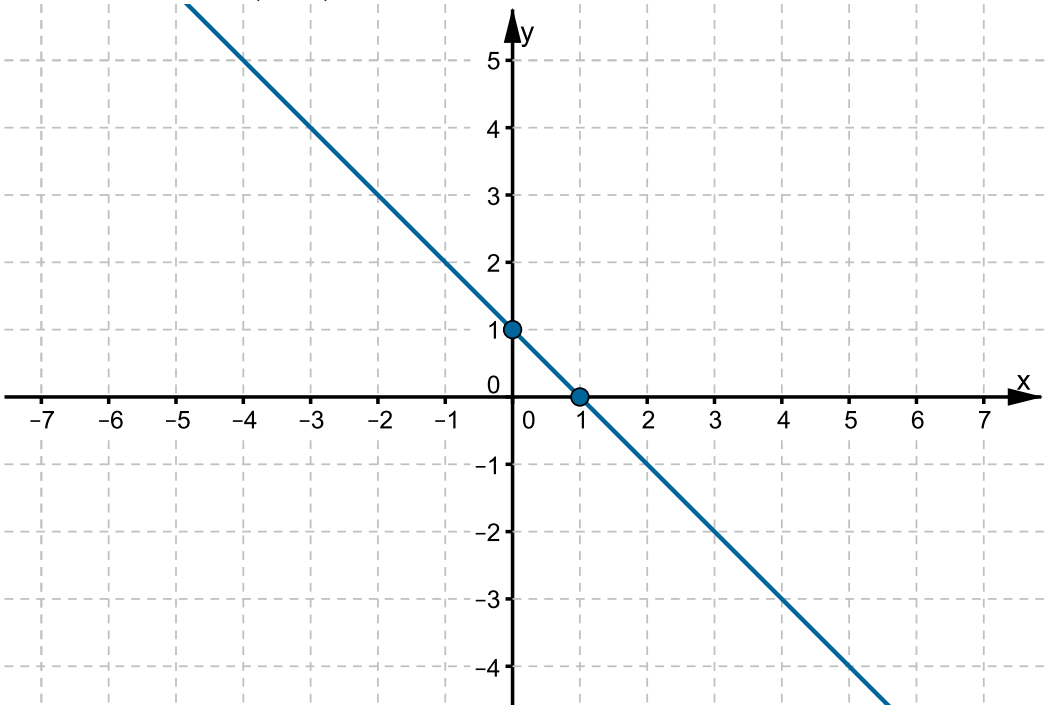
Animacja pokazuje na wykresie funkcji f(x) = 2x -1, że zwiększając argument o 1 zwiększa się odpowiadająca mu wartość funkcji f o 2.

Przykład 2

Rozpatrzmy funkcję liniową określoną wzorem

$$f(x) = -x + 1.$$

Ponieważ $f(0) = 1$ oraz $f(1) = 0$, to wykres funkcji przecina oś Oy w punkcie $(0,\ 1)$ i przechodzi przez punkt $(1,\ 0)$.



Pokażemy, że przy zwiększaniu argumentu o 1 odpowiadająca mu wartość funkcji f zmniejsza się o 1.
Weźmy dowolną liczbę rzeczywistą x_1. Wtedy

$$f(x_1) = -x_1 + 1,$$

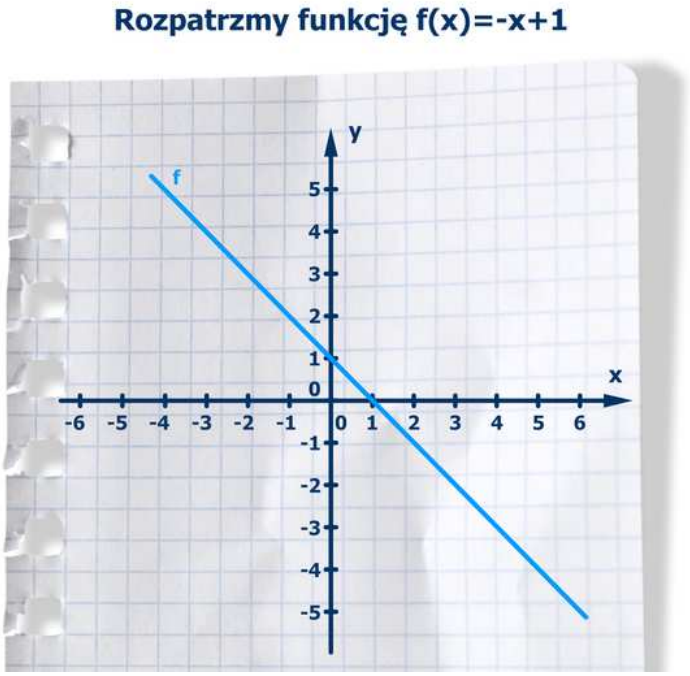
a także

$$f(x_1 + 1) = -(x_1 + 1) + 1 = -x_1 - 1 + 1 = -x_1.$$

Obliczamy różnicę tych dwóch wartości

$$f(x_1 + 1) - f(x_1) = -x_1 - (-x_1 + 1) = -x_1 + x_1 - 1 = -1.$$

Wobec tego, wybierając dowolny punkt A na wykresie funkcji f, znajdziemy na wykresie inny punkt, który powstaje z przesunięcia punktu A o 1 jednostkę, wzdłuż osi Ox i o (-1) jednostkę, wzdłuż osi Oy.



Film dostępny na portalu epodreczniki.pl

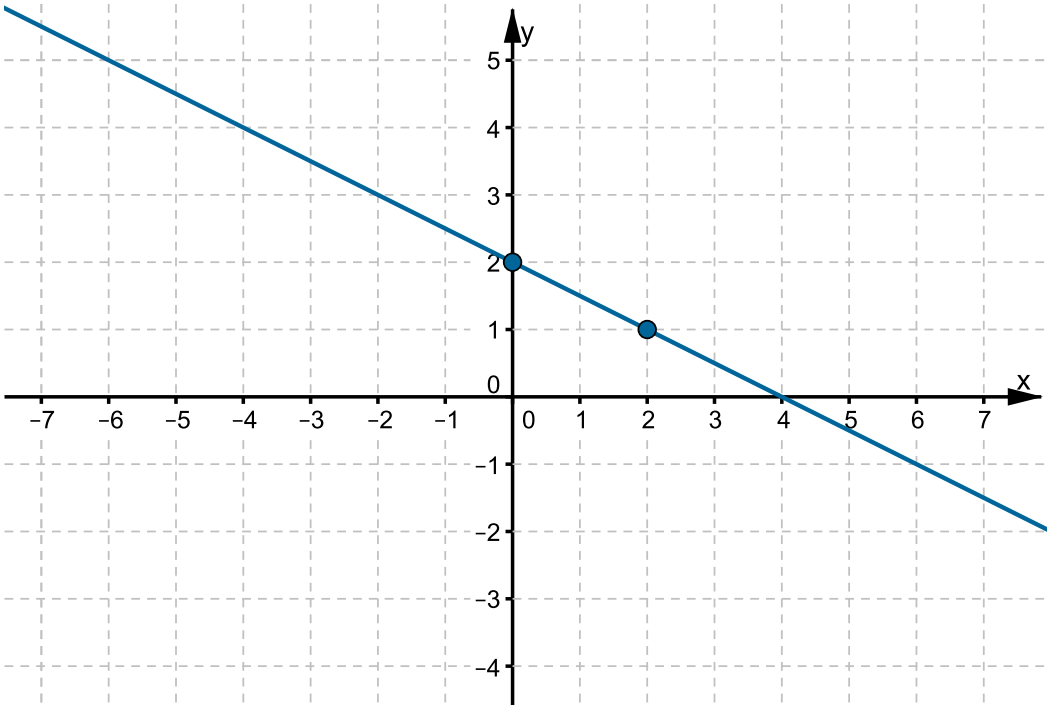
Animacja pokazuje na wykresie funkcji f(x) = minus x +1, że zwiększając argument o 1 zmniejsza się odpowiadająca mu wartość funkcji f o 1.

Przykład 3

Rozpatrzmy funkcję liniową określoną wzorem

$$f(x) = -\frac{1}{2}x + 2.$$

Ponieważ $f(0) = 2$ oraz $f(2) = 1$, to wykres funkcji przecina oś Oy w punkcie $(0,\ 2)$ i przechodzi przez punkt $(2,\ 1)$.



Pokażemy, że przy zwiększaniu argumentu o 1 odpowiadająca mu wartość funkcji f zmniejsza się o $\frac{1}{2}$.
Weźmy dowolną liczbę rzeczywistą x_1. Wtedy

$$f(x_1) = -\tfrac{1}{2}x_1 + 2,$$

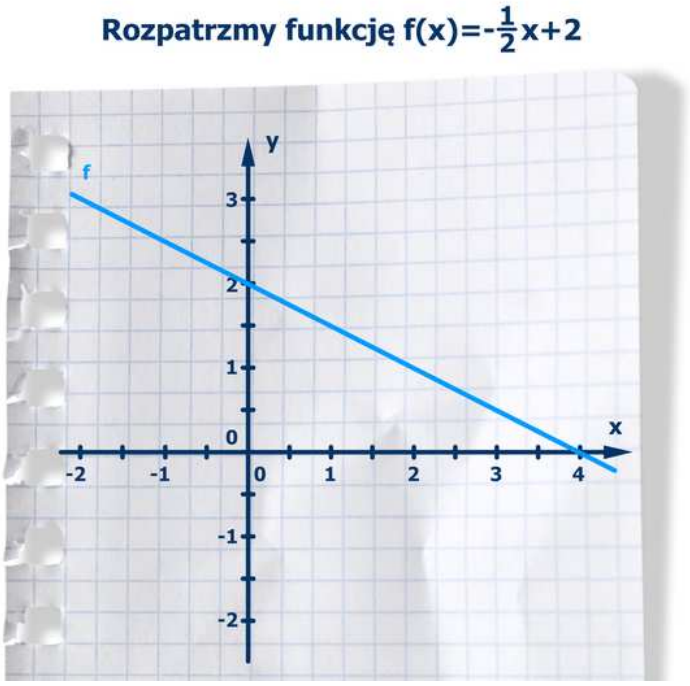
a także

$$f(x_1 + 1) = -\tfrac{1}{2}(x_1 + 1) + 2 = -\tfrac{1}{2}x_1 - \tfrac{1}{2} + 2 = -\tfrac{1}{2}x_1 + 1\tfrac{1}{2}.$$

Obliczamy różnicę tych dwóch wartości

$$f(x_1 + 1) - f(x_1) = -\tfrac{1}{2}x_1 + 1\tfrac{1}{2} - \left(-\tfrac{1}{2}x_1 + 2\right) = -\tfrac{1}{2}x_1 + 1\tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{2}x_1 - 2 = -\tfrac{1}{2}.$$

Wobec tego, wybierając dowolny punkt A na wykresie funkcji f, znajdziemy na wykresie inny punkt, który powstaje z przesunięcia punktu A o 1 jednostkę, wzdłuż osi Ox i o $\left(-\frac{1}{2}\right)$ jednostki, wzdłuż osi Oy. Można też znaleźć kolejny punkt, który powstaje z przesunięcia punkt A o 2 jednostki, wzdłuż osi Ox i o (-1) jednostkę, wzdłuż osi Oy.



Film dostępny na portalu epodreczniki.pl

Animacja pokazuje na wykresie funkcji f(x) = minus jedna druga x +2, że zwiększając argument o 1 zmniejsza się odpowiadająca mu wartość funkcji f o jedną drugą.

Zasób interaktywny dostępny pod adresem https://zpe.gov.pl/a/D1CGbjLzS

Wybierzmy na wykresie funkcji liniowej $f(x) = ax + b$ różne punkty A i B, o współrzędnych $(x_A,\ y_A)$ i (x_B, y_B) Wtedy

- $y_A = f(x_A) = ax_A + b$
- $y_B = f(x_B) = ax_B + b$

Zauważmy, że $y_A - ax_A = b$, a także $y_B - ax_B = b$, więc $y_B - ax_B = y_A - ax_A$, skąd $y_B - y_A = ax_B - ax_A$. Zatem

$$a(x_B - x_A) = y_B - y_A,$$

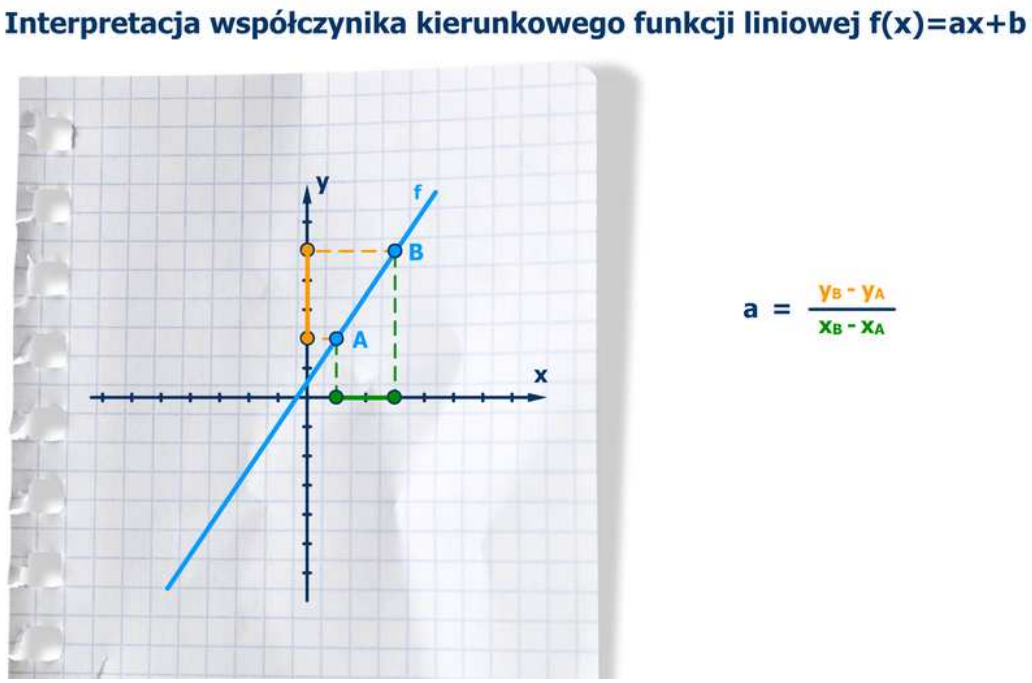
Ponieważ punkty A i B są różne i leżą na wykresie funkcji, więc $x_A \neq x_B$, stąd $x_B - x_A \neq 0$. Wobec tego

$$a = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A}.$$

jest ilorazem różnicy dwóch wartości funkcji liniowej przez różnicę odpowiadających im argumentów.
Patrząc na dwa różne punkty A i B leżące na wykresie funkcji

$$f(x) = \mathrm{ax} + b,$$

interpretujemy współczynnik kierunkowy a jako iloraz wartości przesunięcia $y_B - y_A$ wzdłuż osi Oy do odpowiadającej mu wartości przesunięcia $x_B - x_A$ wzdłuż osi Ox.



Film dostępny na portalu epodreczniki.pl

Animacja pokazuje powyżej opisaną interpretację geometryczną współczynnika kierunkowego a funkcji liniowej f(x) = a razy x +b.

Przykład 4

Na wykresie funkcji liniowej f leżą punkty $A = (3,\ 11)$ i $B = (-2,\ -4)$. Ponieważ

$$x_B - x_A = -2 - 3 = -5,\ y_B - y_A = -4 - 11 = -15,$$

więc współczynnik kierunkowy a tej funkcji jest równy

$$a = \frac{-15}{-5} = 3.$$

Liczba $a = 3$ oznacza również, że wzrostowi argumentu funkcji f o jedną jednostkę, odpowiada wzrost wartości o 3 jednostki.

Przykład 5

Na wykresie funkcji liniowej f leżą punkty $A = (-2, 1)$ i $B = (-3, 5)$. Ponieważ

$$x_B - x_A = -3 - (-2) = -1,\ y_B - y_A = 5 - 1 = 4,$$

zatem współczynnik kierunkowy a tej funkcji jest równy

$$a = \frac{4}{-1} = -4.$$

Liczba $a = -4$ oznacza również, że wzrostowi argumentu funkcji f o jedną jednostkę, odpowiada zmniejszenie wartości funkcji o 4 jednostki.

Przykład 6

Na wykresie funkcji liniowej f leżą punkty $A = (1, 3)$ i $B = (3, 6)$. Ponieważ

$$x_B - x_A = 3 - 1 = 2,\ y_B - y_A = 6 - 3 = 3,$$

to współczynnik kierunkowy a tej funkcji jest równy

$$a = \frac{3}{2}.$$

Wartość $a = \frac{3}{2}$ oznacza również, że wzrostowi argumentu funkcji f o jedną jednostkę, odpowiada wzrost wartości o $\frac{3}{2}$.

Zasób interaktywny dostępny pod adresem https://zpe.gov.pl/a/D1CGbjLzS

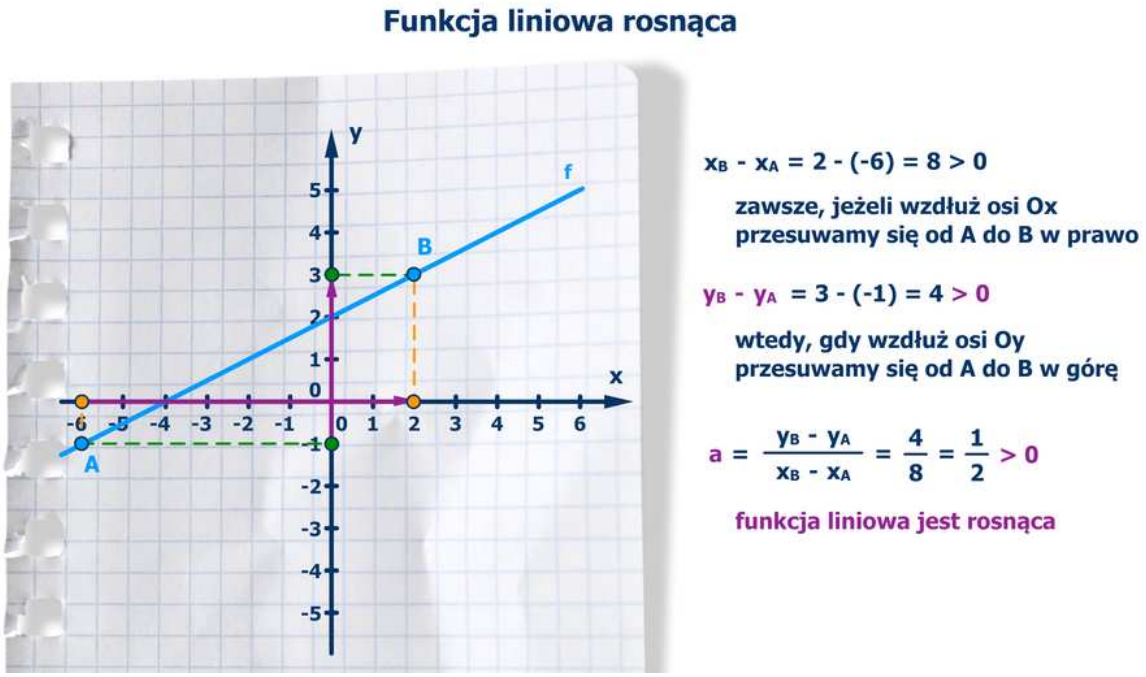
Funkcja liniowa rosnąca, funkcja liniowa malejąca

Wśród prezentowanych w poprzednim rozdziale wykresów funkcji liniowych da się wyróżnić takie, które są wykresami funkcji rosnących oraz takie, które są wykresami funkcji malejących.
Pokażemy, że funkcja liniowa $f(x) = ax + b$ jest rosnąca wtedy i tylko wtedy, gdy jej współczynnik kierunkowy jest dodatni.
Jak wykazaliśmy wcześniej: jeżeli na wykresie funkcji liniowej f leżą dwa różne punkty $A = (x_A, y_A)$ i $B = (x_B, y_B)$, to współczynnik kierunkowy funkcji f jest równy

$$a = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A}.$$

Załóżmy, że $x_B - x_A > 0$, czyli wzdłuż osi Ox przesuwamy się od punktu A do B w prawo. Wobec tego znak współczynnika a jest taki sam jak znak wyrażenia $y_B - y_A$. Zatem

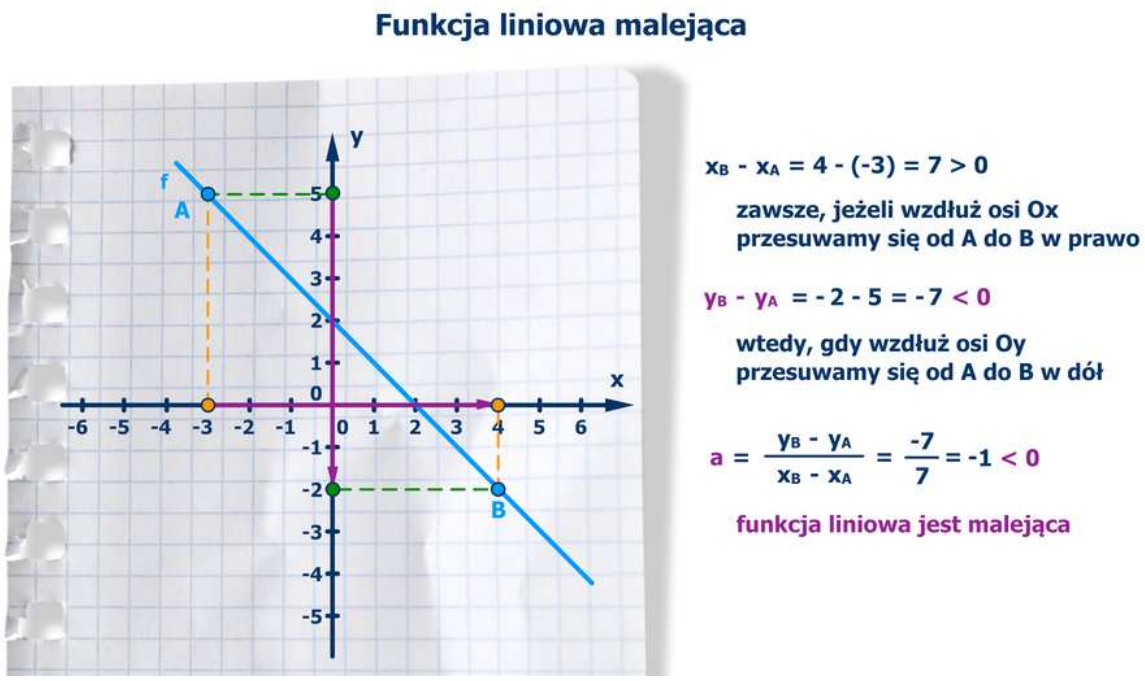
- $a > 0$ wtedy i tylko wtedy, gdy $y_B - y_A > 0$. Zatem wzdłuż osi Oy przesuwamy się od punktu A do B w górę, czyli funkcja f jest rosnąca,
- $a < 0$ wtedy i tylko wtedy, gdy $y_B - y_A < 0$. Zatem wzdłuż osi Oy przesuwamy się od punktu A do B w dół, czyli funkcja f jest malejąca.
- $a = 0$, wtedy i tylko wtedy, gdy $y_B = y_A$, czyli funkcja liniowa $f(x) = ax + b$ jest stała.



Film dostępny na portalu epodreczniki.pl

Animacja pokazuje, jak mając współrzędne punktów A i B należących do prostej, obliczyć współczynnik kierunkowy funkcji liniowej rosnącej f(x) =ax +b. Punkt A = (−6, −1), B =(2, 3). Obliczamy różnicę argumentów i różnicę wartości funkcji dla tych argumentów. Zauważamy, że różnica argumentów jest większa od zera, zawsze, jeżeli

przesuwamy się od A do B wzdłuż osi x w prawo. Różnica wartości funkcji jest większa od zera, zawsze, jeżeli przesuwamy się wzdłuż osi y od punktu A do B w górę. Wobec tego, zgodnie ze wzorem, iloraz różnicy dwóch wartości funkcji liniowej przez różnicę odpowiadających im argumentów jest większy od zera. Funkcja liniowa jest rosnąca.



Film dostępny na portalu epodreczniki.pl

Animacja pokazuje, jak mając współrzędne punktów A i B należących do prostej, obliczyć współczynnik kierunkowy funkcji liniowej malejącej f(x) =ax +b. Punkt A = (-3, 5), B =(4, -2). Obliczamy różnicę argumentów i różnicę wartości funkcji dla tych argumentów. Zauważamy, że różnica argumentów jest większa od zera, zawsze, jeżeli przesuwamy się od A do B wzdłuż osi x w prawo. Różnica wartości funkcji jest mniejsza od zera, zawsze, jeżeli przesuwamy się wzdłuż osi y od punktu A do B w dół. Wobec tego, zgodnie ze wzorem, iloraz różnicy dwóch wartości funkcji liniowej przez różnicę odpowiadających im argumentów jest mniejszy od zera. Funkcja liniowa jest malejąca.

Przykład 1

Funkcja $f(x) = 2x + 5$ jest rosnąca, ponieważ jej współczynnik kierunkowy jest równy 2, czyli $a > 0$.

Przykład 2

Funkcja $f(x) = \frac{1}{3}x - 1$ jest rosnąca, ponieważ jej współczynnik kierunkowy jest równy $\frac{1}{3}$, czyli $a > 0$.

Przykład 3

Funkcja $f(x) = -x + 2$ jest malejąca, ponieważ jej współczynnik kierunkowy jest równy -1, czyli $a < 0$.

Wiemy już, że jeżeli na wykresie funkcji liniowej f leżą dwa różne punkty $A = (x_A, y_A)$ i $B = (x_B, y_B)$, to współczynnik kierunkowy funkcji f jest równy

$$a = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A},$$

a także

$$y_A - ax_A = b.$$

Wynika z tego, że prosta będąca wykresem funkcji liniowej, która

- przechodzi przez punkt $A = (x_A, y_A)$ ma równanie

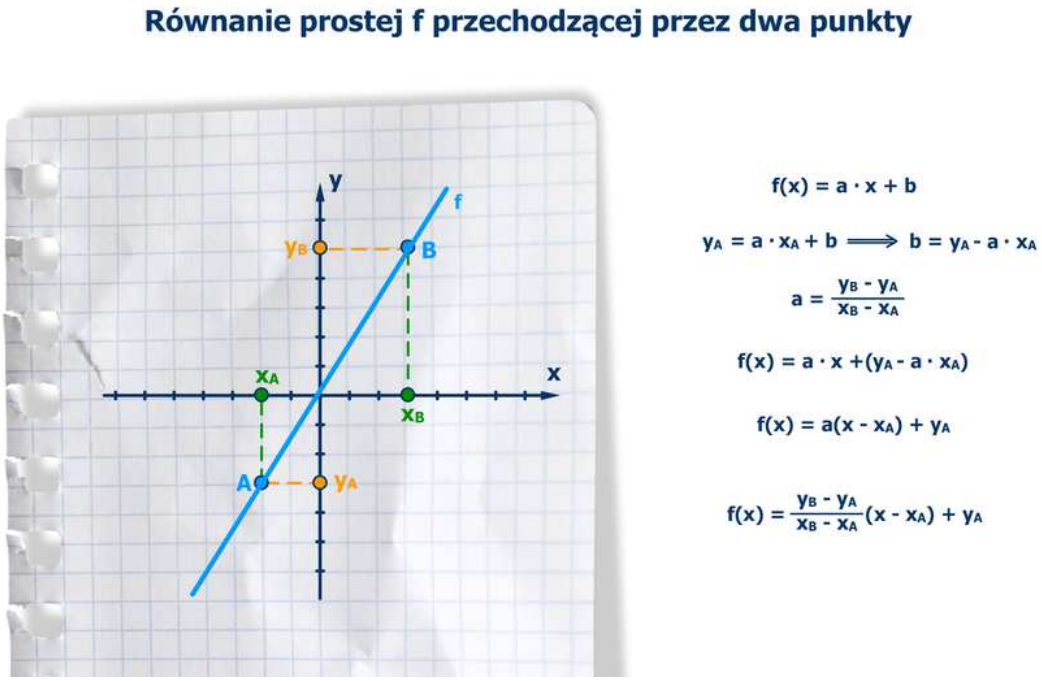
$$y = \mathrm{ax} + (y_A - ax_A),$$

co zapisujemy w postaci

$$y = a(x - x_A) + y_A,$$

- przechodzi przez dwa różne punkty $A = (x_A, y_A)$ i $B = (x_B, y_B)$ ma równanie

$$y = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A}(x - x_A) + y_A.$$



Film dostępny na portalu epodreczniki.pl

Animacja pokazuje jak wyznaczyć równanie prostej przechodzącej przez dwa punkty A i B.

Przykład 4

Dane są punkty $A = (2, \ -4)$, $B = (9, \ 10)$. Wtedy

$$x_B - x_A = 9 - 2 = 7$$

oraz

$$y_B - y_A = 10 - (-4) = 14.$$

Wynika z tego, że współczynnik kierunkowy prostej przechodzącej przez punkty A i B jest równy $a = \frac{14}{7}$, czyli $a = 2$.
Ponieważ na tej prostej leży punkt $B = (9,\ 10)$, to jej równanie zapisujemy w postaci

$$y = a(x - 9) + 10,$$

a po uwzględnieniu $a = 2$ mamy ostatecznie $y = 2(x - 9) + 10$, skąd

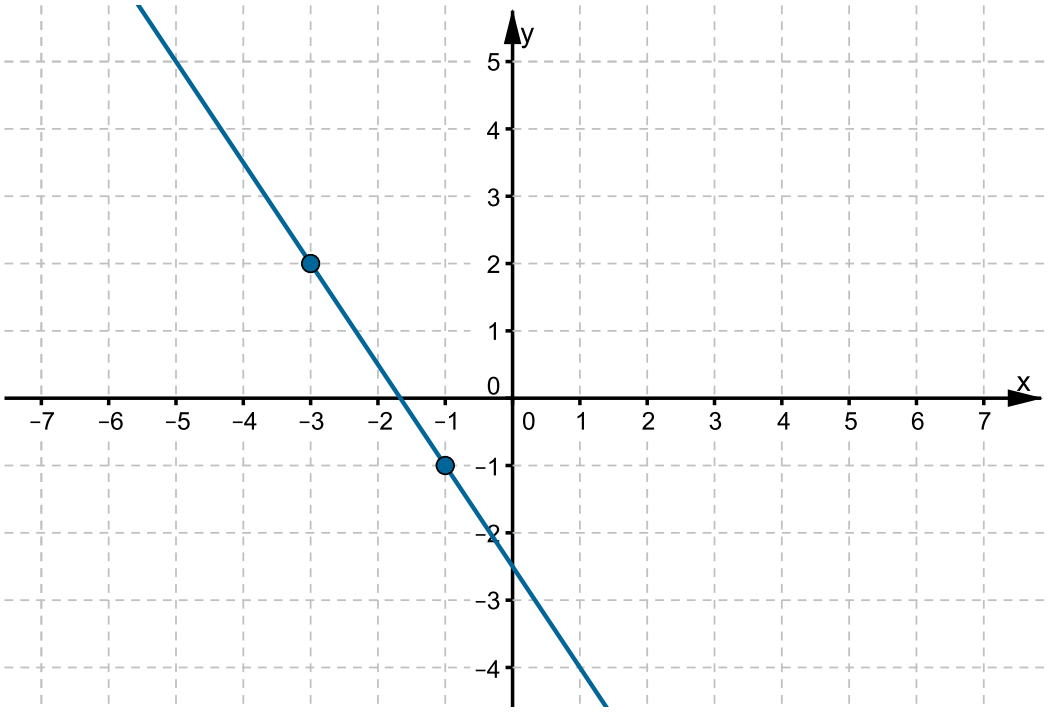
$$y = 2x - 8.$$

Zasób interaktywny dostępny pod adresem https://zpe.gov.pl/a/D16AqAVhS

Zadania

Ćwiczenie 1

Na rysunku jest przedstawiony wykres funkcji f określonej wzorem $f(x) = \mathrm{a}\mathrm{x} + b$.

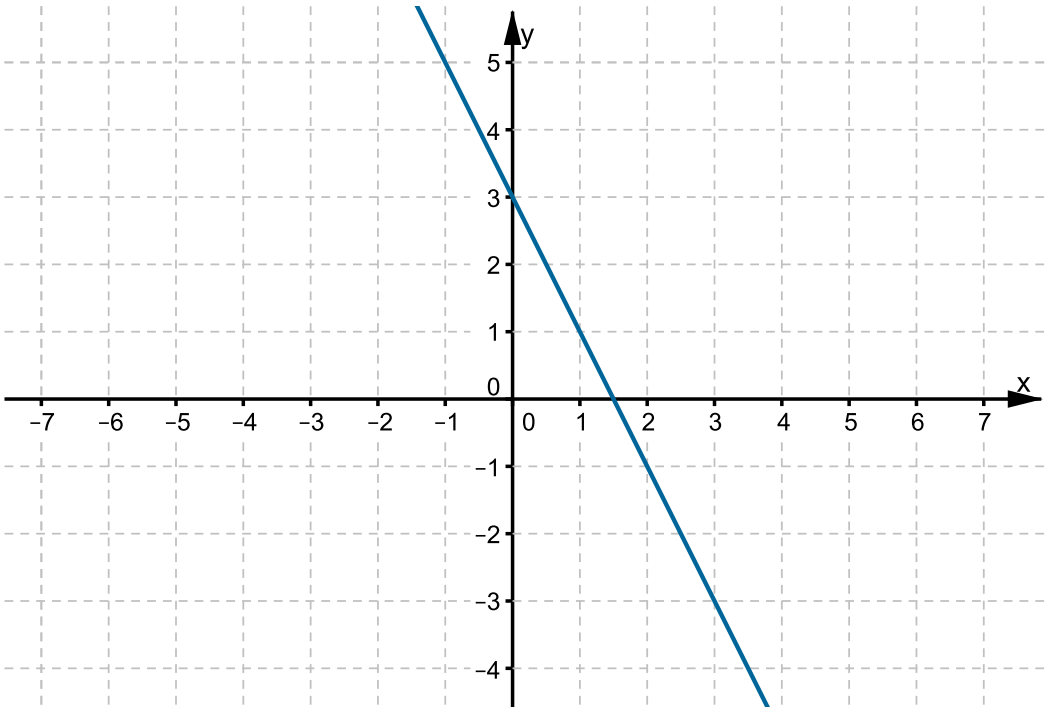


a. Oblicz a.

b. Podaj wzór funkcji f.

Ćwiczenie 2

Na rysunku jest przedstawiony wykres funkcji f określonej wzorem $f(x) = \mathrm{a}\mathrm{x} + b$.

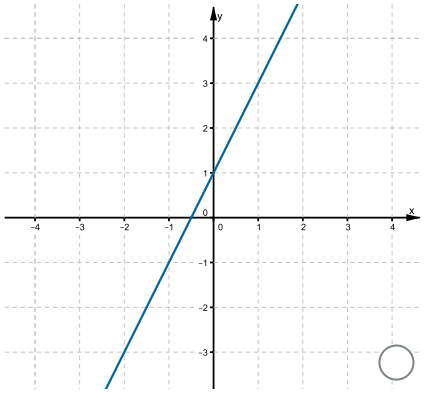


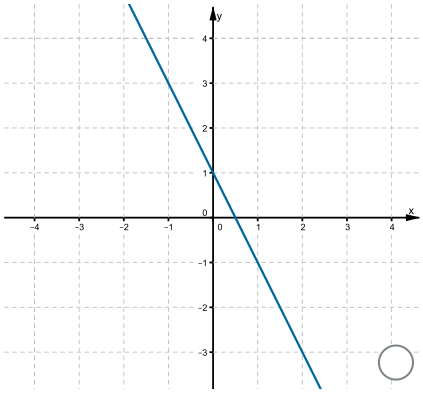
Wówczas

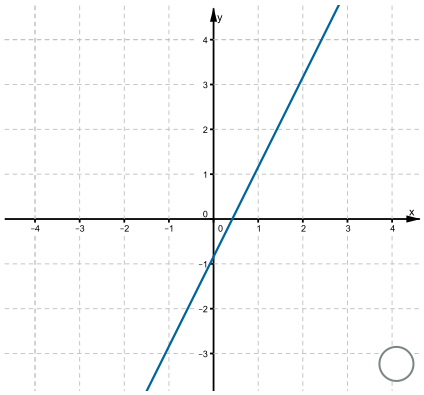
- [ ] $a = -1$
- [ ] $b = 3$
- [ ] $a < 0$
- [ ] $b < 0$

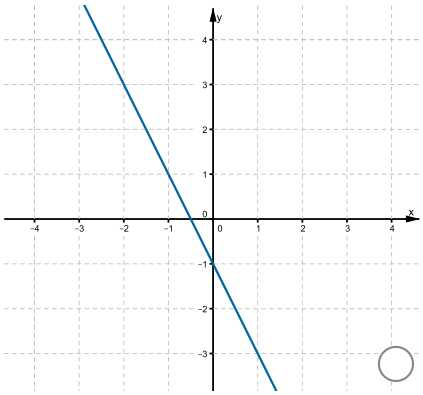
Ćwiczenie 3

Wskaż wykres funkcji f określonej wzorem $f(x) = \mathrm{ax} + b$, dla której $a > 0$ i $b < 0$.









Ćwiczenie 4

Funkcja liniowa $f(x) = \frac{1}{3}x - 5$

- jest rosnąca i jej wykres przechodzi przez punkt $(0, -5)$
- jest malejąca i jej wykres przechodzi przez punkt $(0, -5)$
- jest malejąca i jej wykres przechodzi przez punkt $(0, 5)$
- jest rosnąca i jej wykres przechodzi przez punkt $(0, 5)$

Ćwiczenie 5

Funkcja liniowa $f(x) = (2m + 3)x + m - 2$

- [ ] jest rosnąca tylko wtedy, gdy $m < 2$
- [ ] jest malejąca tylko wtedy, gdy $m < -\frac{3}{2}$
- [ ] dla $m = -1$ jest malejąca
- [ ] dla $m = 0$ jest rosnąca

Ćwiczenie 6

Funkcja liniowa f jest określona wzorem $f(x) = \mathrm{ax} + 3$, gdzie $a > 0$. Wówczas

- ◯ $f(-1) < 0$
- ◯ $f(2) + f(-2) > 6$
- ◯ $f(0) = 0$
- ◯ $f(1) > 3$

Ćwiczenie 7

Dane są punkty $A = (-2,\ 3)$ i $B = (1,\ -5)$, $C = (4,4)$. Wynika z tego, że ujemny współczynnik kierunkowy ma prosta przechodząca przez punkty

- ◯ A i C
- ◯ B i C
- ◯ A i B

Ćwiczenie 8

Dane są punkty $A = (0,\ 3)$ i $B = (-2,\ 1)$. Wynika z tego, że prosta AB

- [ ] ma współczynnik kierunkowy równy 1
- [ ] przechodzi przez punkt $(-3, 0)$
- [ ] przecina oś Oy w punkcie, którego druga współrzędna jest dodatnia
- [ ] ma równanie $y = x + 3$

Ćwiczenie 9

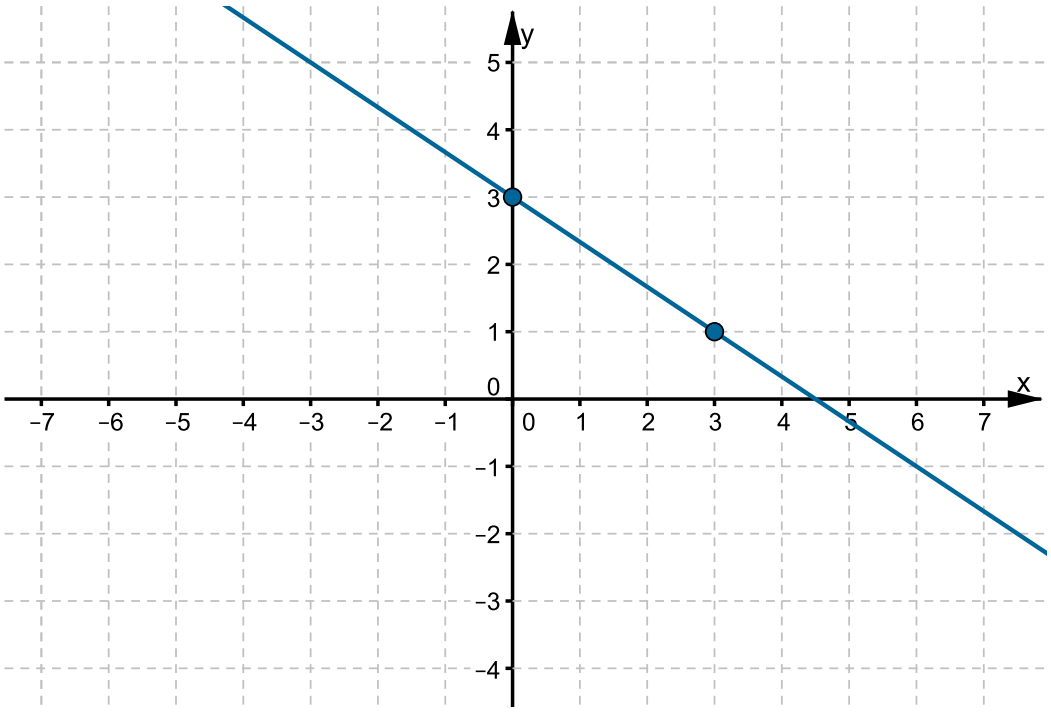
Ćwiczenie 10

Na wykresie funkcji liniowej $f(x) = \mathrm{ax} + b$ leżą punkty $\mathrm{A} = (-2,\ -3)$ i $\mathrm{B} = (2,\ 5)$. Wynika z tego, że

- [ ] $a = 4$
- [ ] funkcja f określona jest wzorem $f(x) = 2x + 1$
- [ ] wykres funkcji f przecina oś Oy w punkcie $(0,\ 2)$
- [ ] funkcja f jest rosnąca

Ćwiczenie 11

Na rysunku jest przedstawiony fragment wykresu pewnej funkcji liniowej $y = \mathrm{a}\mathrm{x} + b$.

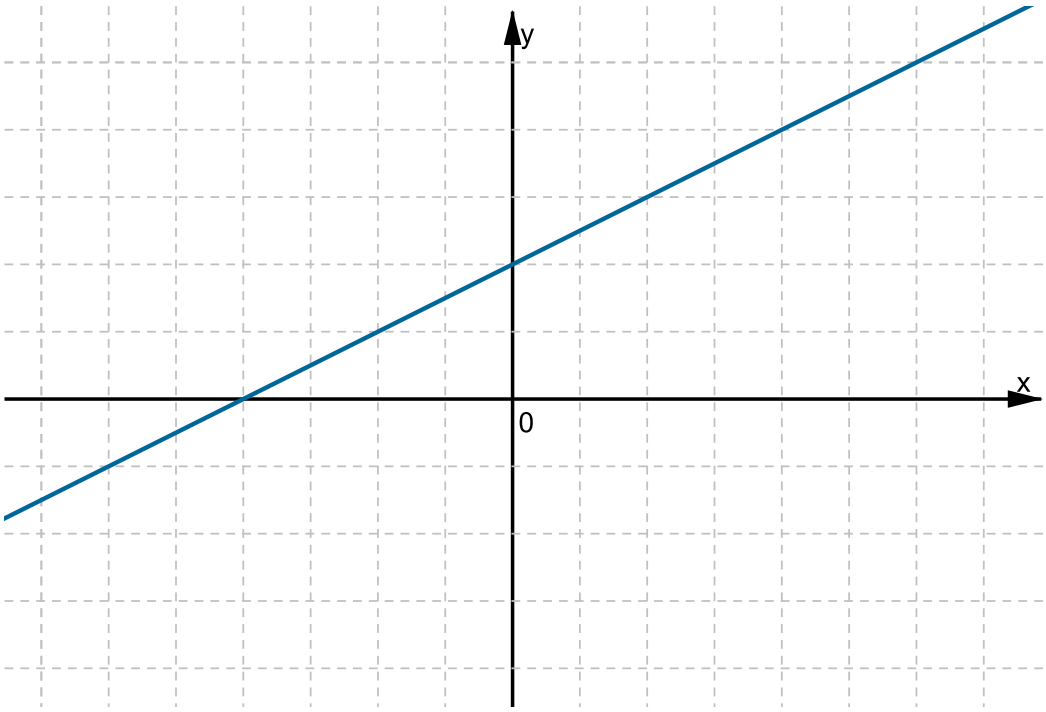


Współczynnik a jest równy

- 3
- $-\frac{3}{2}$
- $\frac{9}{2}$
- $-\frac{2}{3}$

Ćwiczenie 12

Na rysunku jest przedstawiony fragment wykresu pewnej funkcji liniowej $y = \mathrm{a}\mathrm{x} + b$.



Jakie znaki mają współczynniki a i b ?

- $a > 0$ i $b < 0$
- $a < 0$ i $b > 0$
- $a > 0$ i $b > 0$
- $a < 0$ i $b < 0$

Ćwiczenie 13

Wskaż m, dla którego funkcja liniowa $f(x) = (2 - 3m)x - 1$ jest rosnąca.

- ◯ $m = 1$
- ◯ $m = 2$
- ◯ $m = 3$
- ◯ $m = -1$

Ćwiczenie 14

Funkcja liniowa $f(x) = (3m + 1)x + m - 2$ jest stała, gdy

- ◯ $m = -\frac{1}{3}$
- ◯ $m = 3$
- ◯ $m = 2$
- ◯ $m = 1$

Ćwiczenie 15

Funkcja liniowa $f(x) = (4 - m)x + 1$ jest malejąca wtedy i tylko wtedy, gdy

- ◯ $m > 4$
- ◯ $m < 4$
- ◯ $m < 0$
- ◯ $m > 3$

Ćwiczenie 16

Przeciagnij pasujące elementy z dolnej sekcji do górnej.

funkcje rosnące

funkcje malejące

funkcje stałe

$4-20x$

$\frac{x^3}{x\sqrt{x^4}}+2$

$2^{x^2-\sqrt{x^4}}-1$

x^0

$2x+3$

$\sqrt{3}x+20$

$-2x+12$

2^5

$\frac{1}{2}$

$5-\frac{1}{5}x$

$\frac{1}{3}x-5$

$5x+\sqrt{5}$

$\frac{x^2-1}{1-x^2}$

Ćwiczenie 17

Na wykresie funkcji liniowej f leżą punkty $A=(2,3)$, $B=(1,\ -1)$. Funkcja f określona jest wzorem

- $f(x)=3x-4$
- $f(x)=4x-5$
- $f(x)=2x-3$
- $f(x)=x-1$

Ćwiczenie 18

Dane są punkty $A = (-3,\ 0)$ i $B = (1,\ -2)$. Współczynnik kierunkowy prostej AB jest równy

- $-\frac{3}{4}$
- $-\frac{2}{3}$
- -1
- $-\frac{1}{2}$

Ćwiczenie 19

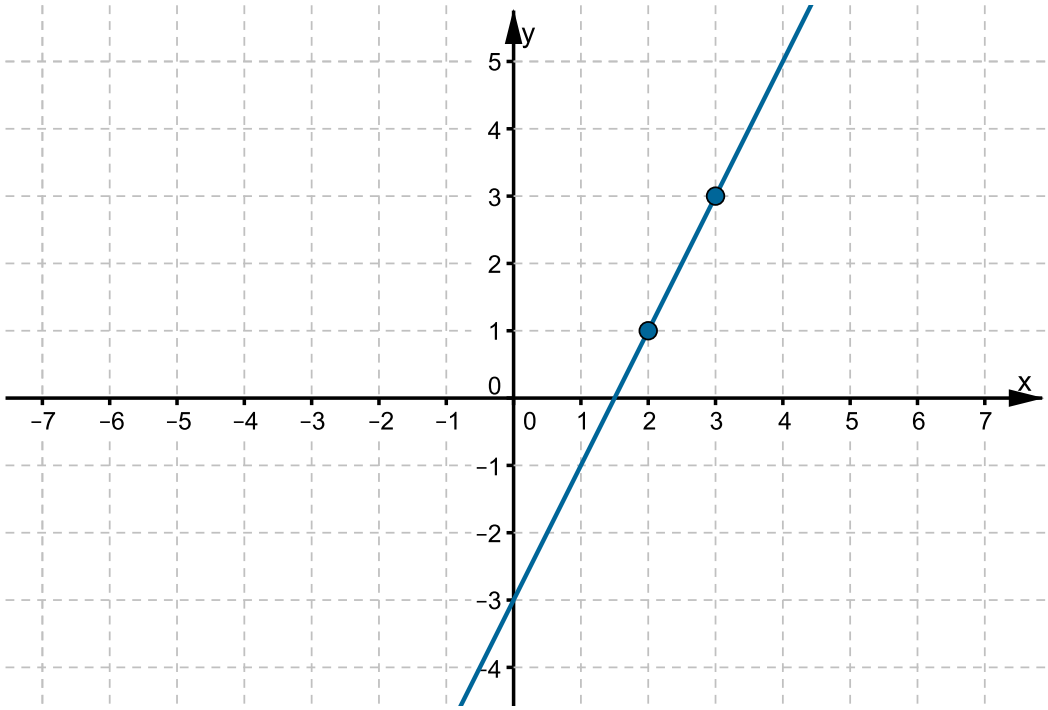
Dane są punkty $A = (-2, 1)$ i $B = (3, 3)$. Na prostej AB leży punkt

- $(18, 12)$
- $(18, 15)$
- $(18, 18)$
- $(18, 9)$

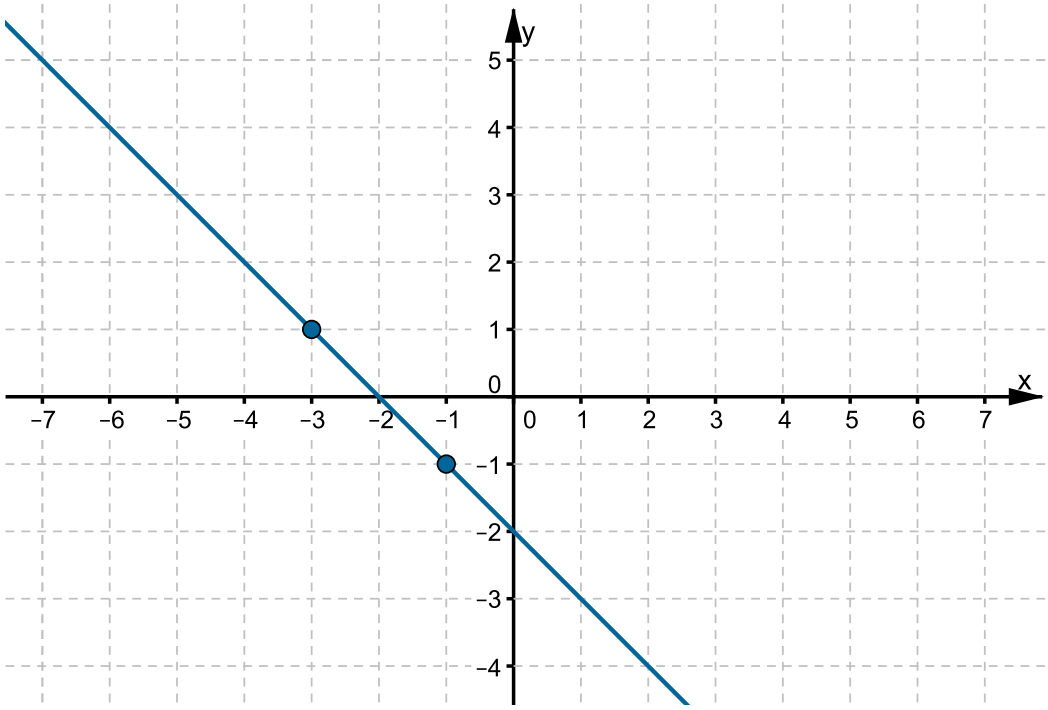
Ćwiczenie 20

Każda z prostych prezentowanych na rysunkach jest określona równaniem $y = \mathrm{ax} + b$. Odczytaj a i b.

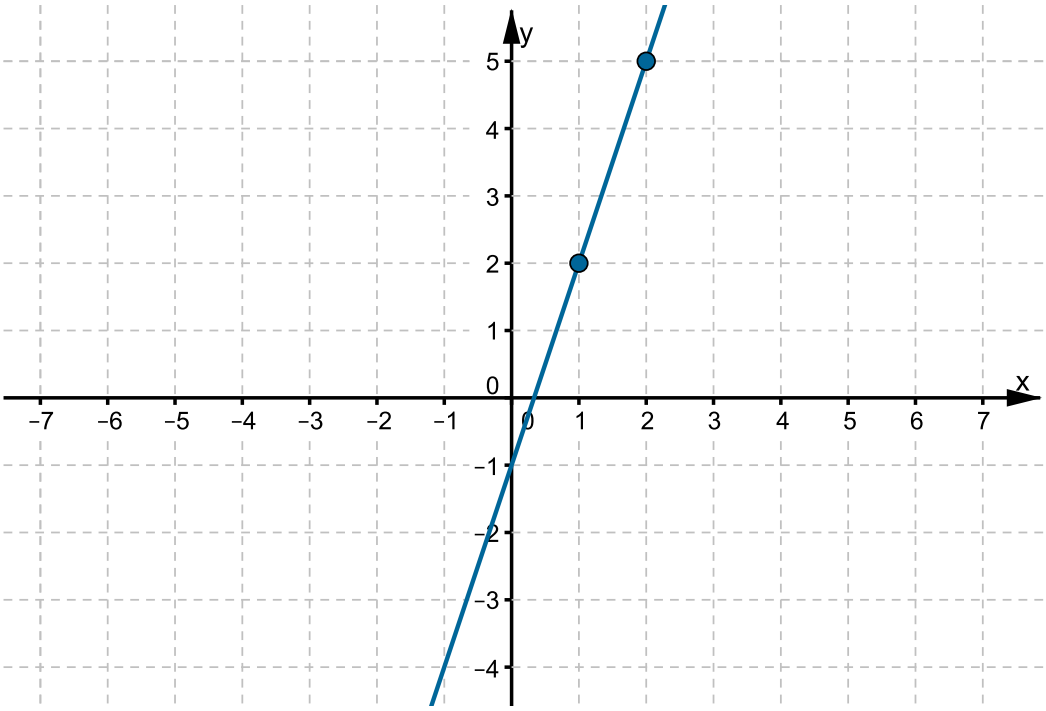
a.



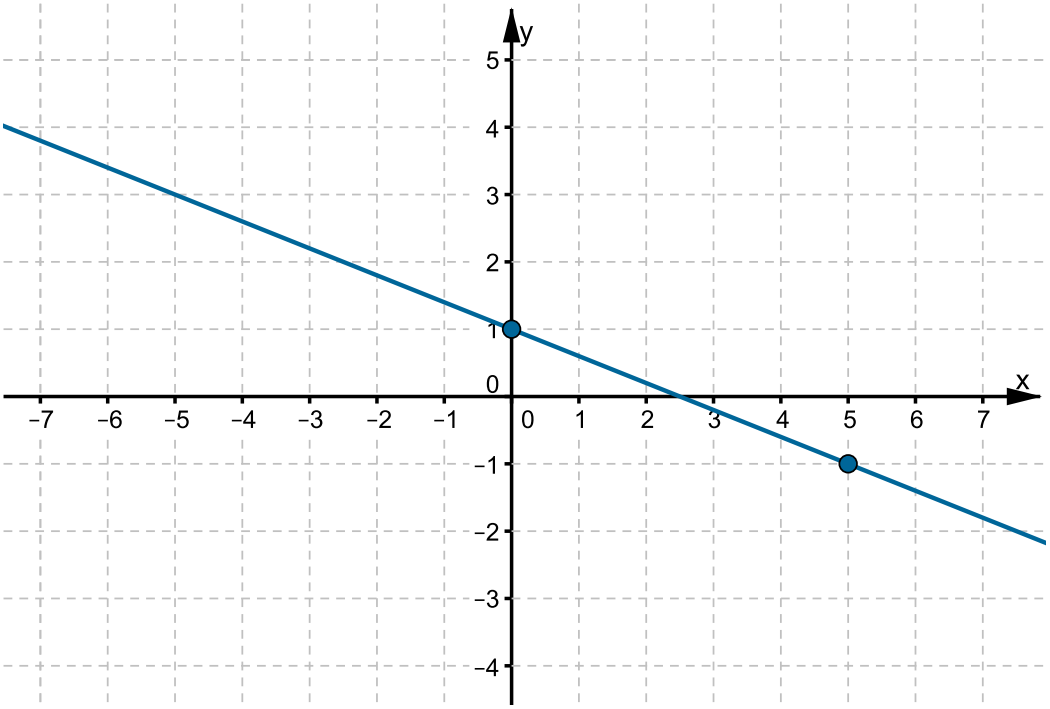
b.



c.



d.



Ćwiczenie 21

Podaj wzór funkcji liniowej f, której wykres przechodzi przez punkt $\mathrm{A} = (10,\ 112)$ i przecina oś Oy w punkcie $\mathrm{B} = (0,\ 2)$.

Ćwiczenie 22

Spośród podanych funkcji liniowych wybierz funkcje rosnące.

- [ ] $y = \frac{x-1}{3}$
- [ ] $y = x - 100$
- [ ] $y = 5 - x$
- [ ] $y = \frac{1}{10}x - 5$

Ćwiczenie 23

Spośród podanych funkcji liniowych wybierz funkcje malejące.

- [ ] $y = 1 - \frac{3}{4}x$
- [ ] $y = x + \frac{1}{3}$
- [ ] $y = -x + 6$
- [ ] $y = \frac{x-5}{9}$

Ćwiczenie 24

Wyznacz wszystkie wartości m, dla których funkcja liniowa $f(x) = (2m + 5)x - 1$ jest

a. malejąca

b. rosnąca

c. stała

Ćwiczenie 25

Wykres funkcji liniowej $f(x) = \mathrm{a}x + b$ przechodzi przez punkty $\mathrm{A} = (-7,\ 11)$ i $\mathrm{B} = (23,\ -19)$. Wynika z tego, że

- [ ] do wykresu funkcji f należy punkt $C = (1,\ 5)$
- [ ] na wykresie funkcji f leży co najmniej 7 punktów, których obie współrzędne są całkowitymi liczbami dodatnimi
- [ ] $b < 0$
- [ ] $a = -\frac{11}{7}$

Ćwiczenie 26

Dana jest funkcja liniowa $f(x) = (2m + 3k)x + 2$.
Podaj przykład

a. takich wartości parametrów m i k, że $m > 0$ i $k < 0$ i funkcja f jest malejąca

b. takich wartości parametrów m i k, że $m < 0$ i $k > 0$ i funkcja f jest malejąca

c. takich wartości parametrów m i k, że $m > 0$ i $k < 0$ i funkcja f jest rosnąca

d. takich wartości parametrów m i k, że $m < 0$ i $k > 0$ i funkcja f jest rosnąca

Ćwiczenie 27

Dana jest funkcja liniowa $f(x) = (2m + 3k)x + 2$.
Podaj przykład

a. takich wartości parametrów m i k, że $2m + k = 1$ i funkcja f jest malejąca

b. takich wartości parametrów m i k, że $m + 3k = -1$ i funkcja f jest rosnąca

c. takich wartości parametrów m i k, że $m + k = 2$ i funkcja f jest malejąca

d. takich wartości parametrów m i k, że $m + k = -1000$ i funkcja f jest rosnąca

Ćwiczenie 28

Dana jest funkcja liniowa $f(x) = (2m + 3k)x + 2$.
Rozstrzygnij, czy istnieją takie wartości parametrów m i k, że na wykresie funkcji f

- [ ] leżą dokładnie dwa punkty, których obie współrzędne są całkowitymi liczbami ujemnymi
- [ ] leży dokładnie jeden punkt, którego obie współrzędne są całkowitymi liczbami dodatnimi
- [ ] leży dokładnie jeden punkt, którego obie współrzędne są całkowitymi liczbami przeciwnych znaków

Ćwiczenie 29

Dana jest funkcja liniowa $f(x) = (2m + 3k)x + 2$.
Wykaż, że

a. jeżeli $k = -\frac{2}{3}m$, to funkcja f jest stała,

b. jeżeli $k > -\frac{2}{3}m$, to funkcja f jest rosnąca,

c. jeżeli $k < -\frac{2}{3}m$, to funkcja f jest malejąca.

Zadania generatorowe

Zadania generatorowe

Ćwiczenie 1

Ćwiczenie 2

Ćwiczenie 3

Ćwiczenie 4

Ćwiczenie 5

Ćwiczenie 6

Równanie liniowe

Obliczanie miejsca zerowego funkcji liniowej

$$f(x) = \mathrm{a}x + b$$

sprowadza się do rozwiązania równania z niewiadomą x postaci
$\mathrm{a}x + b = 0$, dla ustalonych wartości współczynników a i b. Takie równanie nazywamy równaniem liniowym.

a. Jeśli $a \neq 0$, to mamy $\mathrm{a}x = -b$, skąd $x = -\frac{b}{a}$. Wynika z tego, że każda funkcja liniowa $f(x) = \mathrm{a}x + b$, gdzie $a \neq 0$, ma dokładnie jedno miejsce zerowe $x_0 = -\frac{b}{a}$. Korzystając z poznanych własności funkcji liniowej, zauważmy też, że dla $a \neq 0$ funkcja $f(x) = \mathrm{a}x + b$ nie jest stała (jest rosnąca dla $a > 0$, malejąca dla $a < 0$), zatem prosta będąca jej wykresem przecina oś Ox w dokładnie jednym punkcie $\left(-\frac{b}{a}, 0\right)$.
b. Jeśli $a = 0$, to funkcja f określona jest wzorem $f(x) = b$. Jest to funkcja stała.

- Gdy $a = 0$ i $b \neq 0$, to równanie $f(x) = 0$ jest sprzeczne, więc w tym przypadku funkcja liniowa nie ma miejsc zerowych. Wykresem takiej funkcji liniowej jest prosta równoległa do prostej o równaniu $y = 0$ i przecinająca oś Oy w punkcie $(0, b)$.
- Gdy $a = 0$ i $b = 0$, to funkcja f jest tożsamościowo równa 0, to znaczy, że dla każdej liczby rzeczywistej x przyjmuje wartość zero. W tym przypadku funkcja f ma nieskończenie wiele miejsc zerowych. Każda liczba rzeczywista jest miejscem zerowym funkcji f.Wykres takiej funkcji liniowej pokrywa się z prostą o równaniu $y = 0$.

Przykład 1

Rozwiążemy równania.

- $\frac{x+1}{2} - \frac{2x-5}{6} = \frac{3}{4}$

Przekształcamy równanie równoważnie. Najpierw mnożymy je obustronnie przez 12

$$6(x + 1) - 2(2x - 5) = 9.$$

Stosujemy prawo rozdzielności mnożenia względem dodawania otrzymujemy:

$$6x + 6 - 4x + 10 = 9$$

$$2x = -7$$

Równanie ma jedno rozwiązanie $x = -\frac{7}{2}$.

- $(x + 2)^2 = (x - 2)(x + 2)$

Przekształcamy równanie równoważnie, stosując najpierw wzory skróconego mnożenia

$$x^2+4x+4=x^2-4.$$

Po zredukowaniu x^2 otrzymujemy równanie liniowe:

$$4x+4=-4$$

$$4x=-8$$

$$x=-2.$$

Równanie ma zatem jedno rozwiązanie $x=-2$.

- $(x+3)(x-3)+2x=(x+1)^2$

Przekształcamy równanie równoważnie, stosując najpierw wzory skróconego mnożenia

$$x^2-9+2x=x^2+2x+1.$$

Po zredukowaniu x^2 i $2x$ otrzymujemy równość sprzeczną

$$0 \bullet x=10.$$

A zatem równanie nie ma rozwiązań.

- $3x^2+(x-1)(x+1)+10=(2x-3)^2+12x$

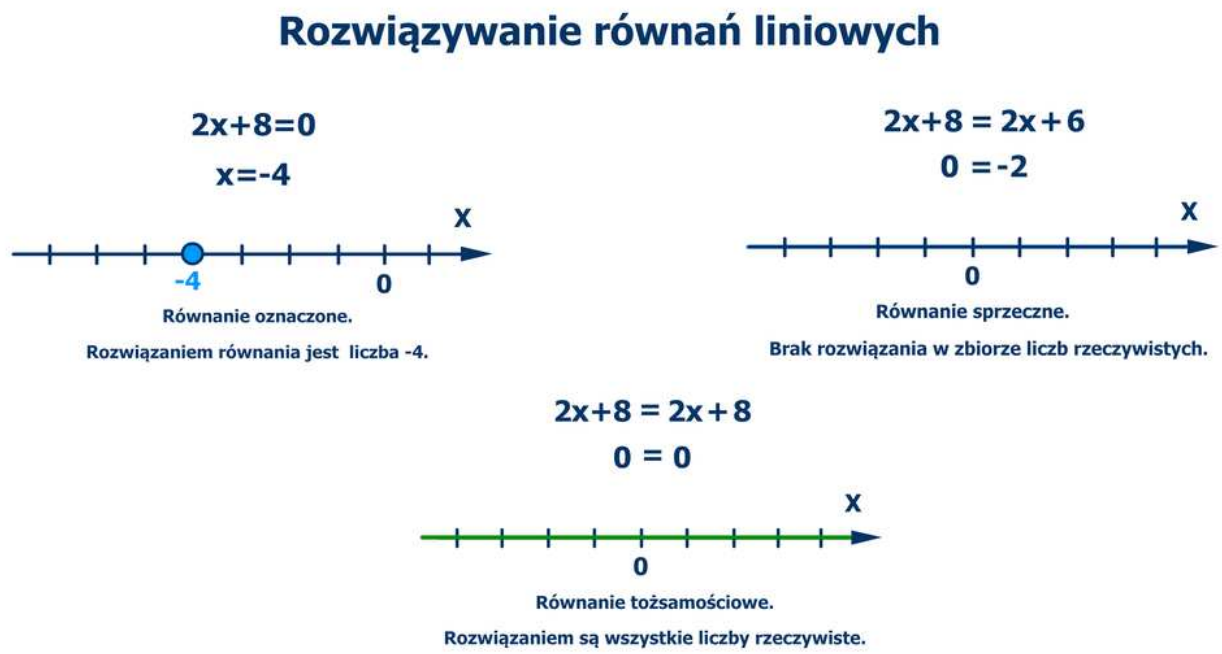
Przekształcamy równanie równoważnie, stosując najpierw wzory skróconego mnożenia:

$$3x^2+x^2-1+10=4x^2-12x+9+12x.$$

Po zredukowaniu otrzymujemy

$$0 \bullet x=0.$$

Rozwiązaniem równania jest każda liczba rzeczywista x.



Film dostępny na portalu epodreczniki.pl

Animacja pokazuje kolejne kroki rozwiązania trzech równań. Równanie 2x +8 =0 jest oznaczone, jego rozwiązaniem jest punkt leżący na osi liczbowej x =−4. Równanie 2x +8 =2x +6 jest sprzeczne, nie ma rozwiązań w zbiorze liczb rzeczywistych. Równanie 2x +8 =2x +8 jest tożsamościowe, jego rozwiązaniem są wszystkie liczby rzeczywiste. Rozwiązania opisanych równań zaznaczono na osi liczbowej.

Nierówność liniowa

Przykład 1

Ustalimy, w jakim przedziale funkcja liniowa $f(x) = 2x - 4$ przyjmuje wartości dodatnie. W tym celu należy rozwiązać nierówność $f(x) > 0$, czyli wyznaczyć wszystkie wartości x, dla których $2x - 4 > 0$.
Przekształcamy nierówność równoważnie

$$2x - 4 > 0$$

$$2x > 4$$

$$x > 2.$$

Funkcja $f(x) = 2x - 4$ przyjmuje wartości dodatnie dla x należących do przedziału $(2, +\infty)$.

Przykład 2

Znajdziemy największą liczbę całkowitą, dla której funkcja $f(x) = -3x + 5$ przyjmuje wartość dodatnią.
Rozwiązujemy nierówność $f(x) > 0$

$$-3x + 5 > 0$$

$$-3x > -5 \ / : (-3).$$

$$x < \frac{5}{3}$$

$$x < 1\frac{2}{3}.$$

A zatem $x = 1$ jest największą liczbą całkowitą, dla której funkcja $f(x) = -3x + 5$ przyjmuje wartość dodatnią.

Przykład 3

Rozwiążemy nierówność $(x - 5)^2 > (x - 3)^2$.
Przekształcamy równoważnie daną nierówność, stosując wzory skróconego mnożenia

$$x^2 - 10x + 25 > x^2 - 6x + 9$$

$$-4x > -16 / : (-4)$$

$$x < 4.$$

Rozwiązaniem nierówności jest więc każda liczba rzeczywista należąca do przedziału $(-\infty, 4)$.

Przykład 4

Znajdziemy najmniejszą liczbę całkowitą x, która spełnia nierówność $\frac{5}{3} - \frac{x-5}{2} < \frac{4x+7}{6}$. Przekształcamy równoważnie daną nierówność

$$\frac{5}{3} - \frac{x-5}{2} < \frac{4x+7}{6} \ / \bullet 6$$

$$10 - 3(x-5) < 4x + 7$$

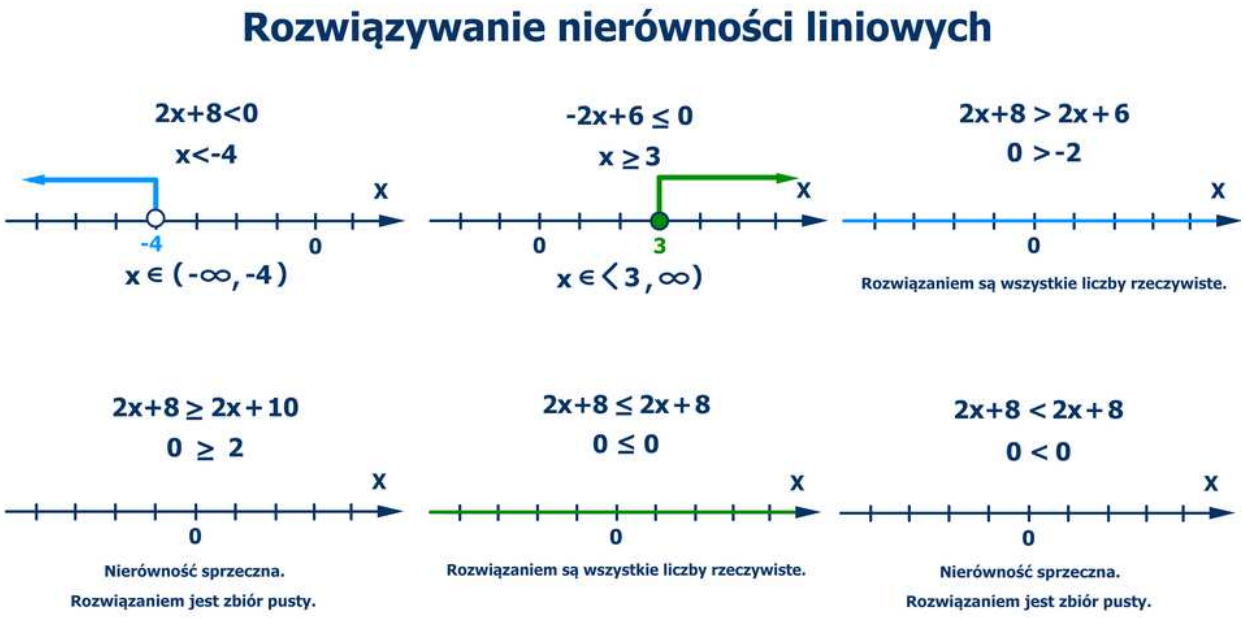
$$10 - 3x + 15 < 4x + 7$$

$$-7x < -18 / : (-7)$$

$$x > \frac{18}{7}$$

$$x > 2\frac{4}{7}$$

A zatem $x = 3$ jest najmniejszą liczbą całkowitą spełniającą tę nierówność.



Film dostępny na portalu epodreczniki.pl

Animacja pokazuje kolejne kroki rozwiązania sześciu nierówności. Rozwiązaniem nierówności 2x +8 <0 jest przedział obustronnie otwarty od minus nieskończoności do -4. Rozwiązaniem nierówności -2x +6 mniejsze równe 0 jest przedział lewostronnie domknięty od 3 do nieskończoności. Rozwiązaniem nierówności 2x +8 > 2x +6 są wszystkie liczby rzeczywiste. Rozwiązaniem nierówności 2x +8 większe równe 2x +10 jest zbiór pusty, bo nierówność jest sprzeczna. Rozwiązaniem nierówności 2x +8 mniejsze równe 2x +8 są wszystkie liczby rzeczywiste. Rozwiązaniem nierówności 2x +8 <2x +8 jest

zbiór pusty, bo nierówność jest sprzeczna. Rozwiązania opisanych nierówności zaznaczono na osi liczbowej.

Zasób interaktywny dostępny pod adresem https://zpe.gov.pl/a/D198XT24d

Zadania

Ćwiczenie 1

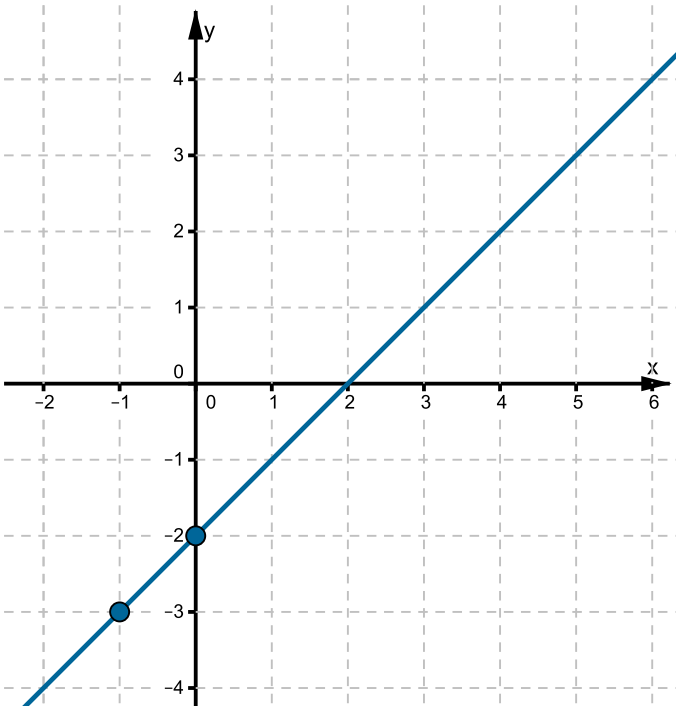
Liczba -3 jest miejscem zerowym funkcji

- [ ] $y = x - 3$
- [ ] $y = 7x + 21$
- [ ] $y = x + 3$
- [ ] $y = 2x - 3$

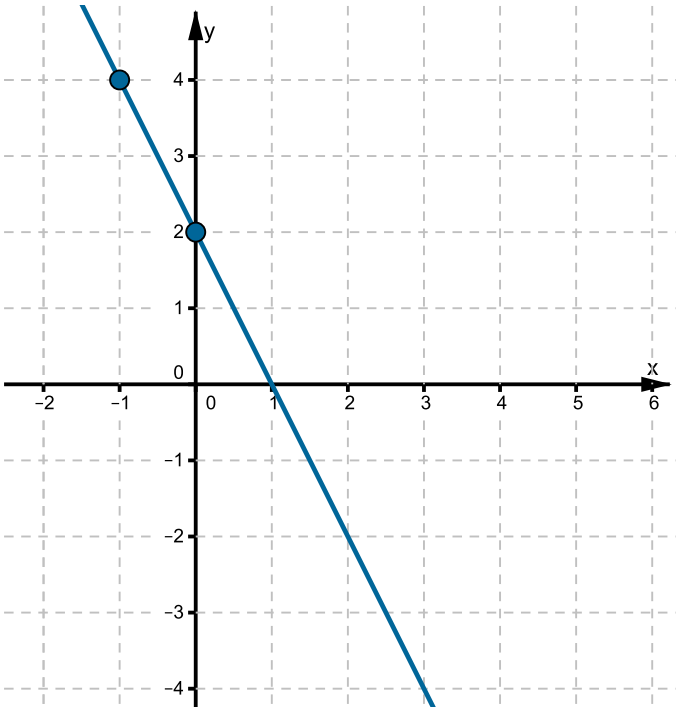
Ćwiczenie 2

Odczytaj miejsca zerowe funkcji liniowych, których fragmenty wykresów prezentowane są na rysunkach.

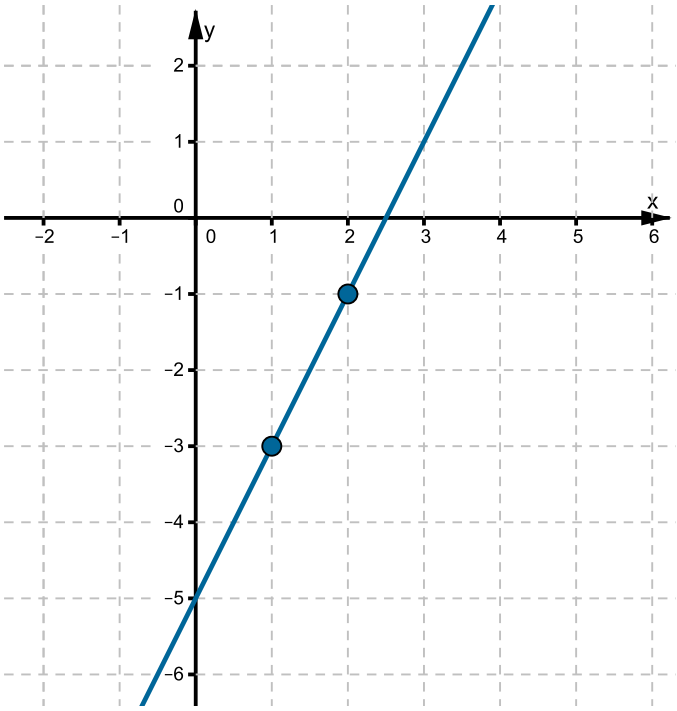
a.



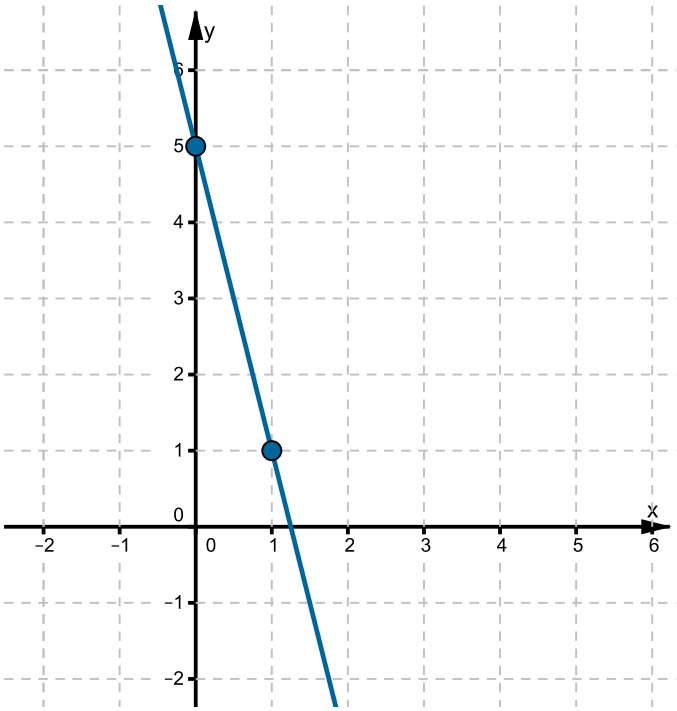
b.



c.



d.



Ćwiczenie 3

Wskaż miejsce zerowe funkcji $f(x) = \sqrt{3}x - 9$.

- ◯ $3\sqrt{3}$
- ◯ $-3\sqrt{3}$
- ◯ $\frac{\sqrt{3}}{3}$
- ◯ $-\frac{\sqrt{3}}{3}$

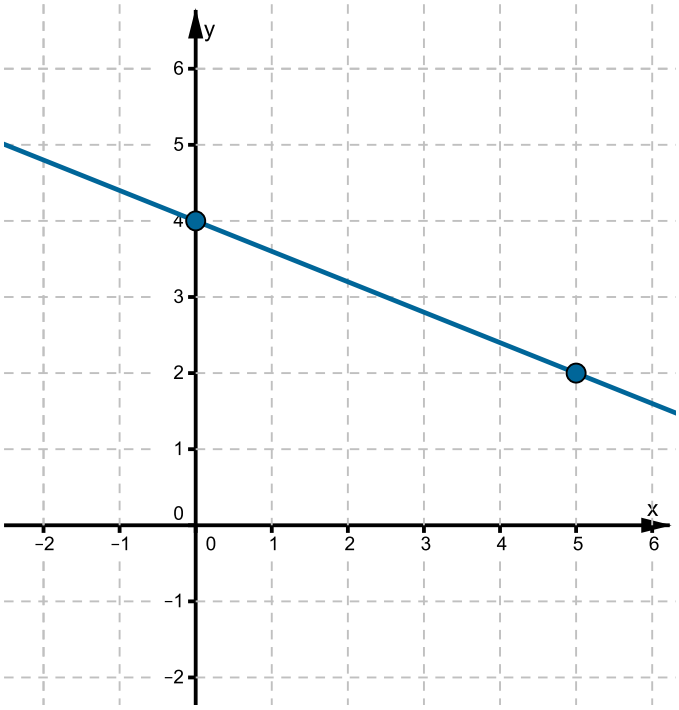
Ćwiczenie 4

Liczba (-1) jest miejscem zerowym funkcji $f(x) = (m+2)x - 3$. Wówczas

- ◯ $m = -5$
- ◯ $m = 5$
- ◯ $m = 1$
- ◯ $m = 0$

Ćwiczenie 5

Na rysunku przedstawiony jest fragment wykresu funkcji liniowej f.



Na podstawie rysunku można stwierdzić, że

- [ ] najmniejszą liczbą całkowitą spełniającą nierówność $f(x) < 0$ jest 9
- [ ] funkcja f nie ma miejsc zerowych
- [ ] największą liczbą całkowitą spełniającą nierówność $f(x) > 0$ jest 10

Ćwiczenie 6

Rozwiązanie równania $5(2-3x) = 1-2(7x+3)$ należy do przedziału

- [ ] $\langle -19, -2 \rangle$
- [ ] $\langle 0, 15 \rangle$
- [ ] $(10, 20)$
- [ ] $(-7, -3)$

Ćwiczenie 7

Rozpatrzmy nierówność $(x-4)(x+4)+14x < (x+7)^2$. Która z podanych liczb spełnia tę nierówność?

- [ ] -2
- [ ] 1
- [ ] $3-\sqrt{17}$
- [ ] $\frac{3}{4}$

Ćwiczenie 8

Funkcja liniowa określona jest wzorem $f(x) = -5x + 3$. Miejscem zerowym tej funkcji jest liczba

- ◯ $-0{,}6$
- ◯ -5
- ◯ $0{,}6$
- ◯ 3

Ćwiczenie 9

Liczba (-4) jest miejscem zerowym funkcji $f(x) = (m-1)x + 8$. Wtedy

- ◯ $m = 2$
- ◯ $m = 8$
- ◯ $m = 1$
- ◯ $m = 3$

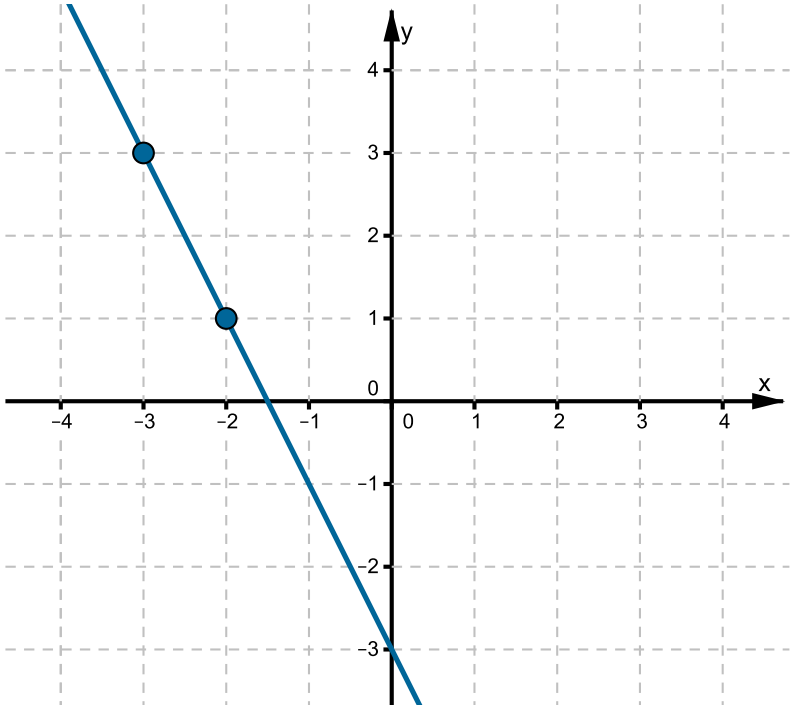
Ćwiczenie 10

Rozwiązaniem równania $3(2-x)=5-4x$ jest liczba

- $x=-3$
- $x=-1$
- $x=-4$
- $x=-2$

Ćwiczenie 11

Na rysunku przedstawiony jest fragment wykresu funkcji liniowej f.



Funkcja f przyjmuje wartość ujemną dla

- ◯ $x = -2$
- ◯ $x = -1$
- ◯ $x = -3$
- ◯ $x = -4$

Ćwiczenie 12

Rozwiązanie równania $x(x+5)=(x+2)^2$ należy do przedziału

- $(8,10)$
- $(3,6)$
- $(-5,-2)$
- $(-1,2)$

Ćwiczenie 13

Najmniejsza liczba całkowita spełniająca nierówność $(x-6)(x+6)>x(x-12)$ to

- 6
- 4
- 12
- 5

Ćwiczenie 14

Funkcja $f(x) = -3x - 1$ przyjmuje wartości ujemne dla wszystkich x należących do przedziału

- $\left(-\frac{1}{3}, +\infty\right)$
- $\left(\frac{1}{3}, +\infty\right)$
- $\left(-\infty, -\frac{1}{3}\right)$
- $\left(-\infty, \frac{1}{3}\right)$

Ćwiczenie 15

Wskaż liczbę m, dla której wykres funkcji liniowej f określonej wzorem $f(x) = (m-1)x + 4$ przyjmuje wartości dodatnie wtedy i tylko wtedy, gdy $x < 2$.

- $m = -1$
- $m = 1$
- $m = 3$
- $m = -3$

Ćwiczenie 16

Oblicz miejsce zerowe funkcji f określonej wzorem

a. $f(x) = 3x - 4$

b. $f(x) = -\frac{1}{2}x + 5$

c. $f(x) = \frac{3x-7}{4}$

d. $f(x) = \sqrt{2}x + 6$

Ćwiczenie 17

Liczba $\sqrt{5}$ jest miejscem zerowym funkcji $f(x) = \mathrm{a}x - 10$. Oblicz a.

Ćwiczenie 18

Rozwiąż nierówność $\frac{x}{21} - 2 > \frac{2-x}{19}$. Wyznacz najmniejszą liczbę całkowitą, która spełnia tę nierówność.

Ćwiczenie 19

Rozwiąż nierówność $3x(x+1) + (x-1)^2 \geq (2x-1)(2x+1)$. Zaznacz zbiór jej rozwiązań na osi liczbowej.

Ćwiczenie 20

Wykaż, że liczba 2^{12} jest rozwiązaniem równania $2^{22} - 16^2 \cdot x - 4^{10} = 8^7$.

Ćwiczenie 21

Wypisz wszystkie liczby całkowite, które spełniają jednocześnie nierówności $x(x+2) < (x-2)^2$ i $\frac{x}{4} + \frac{x+1}{2} > -2$.

Ćwiczenie 22

Połącz w pary nierówności z ich rozwiązaniami.

$2x-1<3$	$x<2$
$4x-5>4$	$x\leq 1$
$6x-1\leq 5$	$x>\frac{15}{2}$
$\frac{2}{3}x-1>4$	$x>\frac{9}{4}$

Ćwiczenie 23

Zaznacz na osi liczbowej zbiór wszystkich liczb spełniających jednocześnie nierówności $(2x-1)^2<(2x+5)^2, 4(3x+1)^2\leq 9(2x-1)^2$.

Ćwiczenie 24

Wypisz wszystkie nieujemne liczby całkowite, które spełniają jednocześnie nierówności $(x+3)^2<(x-4)^2$ i $(9x+7)x\leq(3x+1)^2$.

Ćwiczenie 25

Wykaż, że nie istnieje liczba rzeczywista x, która spełnia jednocześnie nierówności $3x(x-7)<2x^2+(x-5)^2$, $\frac{x+2}{5}-\frac{2x+1}{2}>2\frac{1}{10}$.

Zadania generatorowe

Zadania generatorowe

Ćwiczenie 1

Ćwiczenie 2

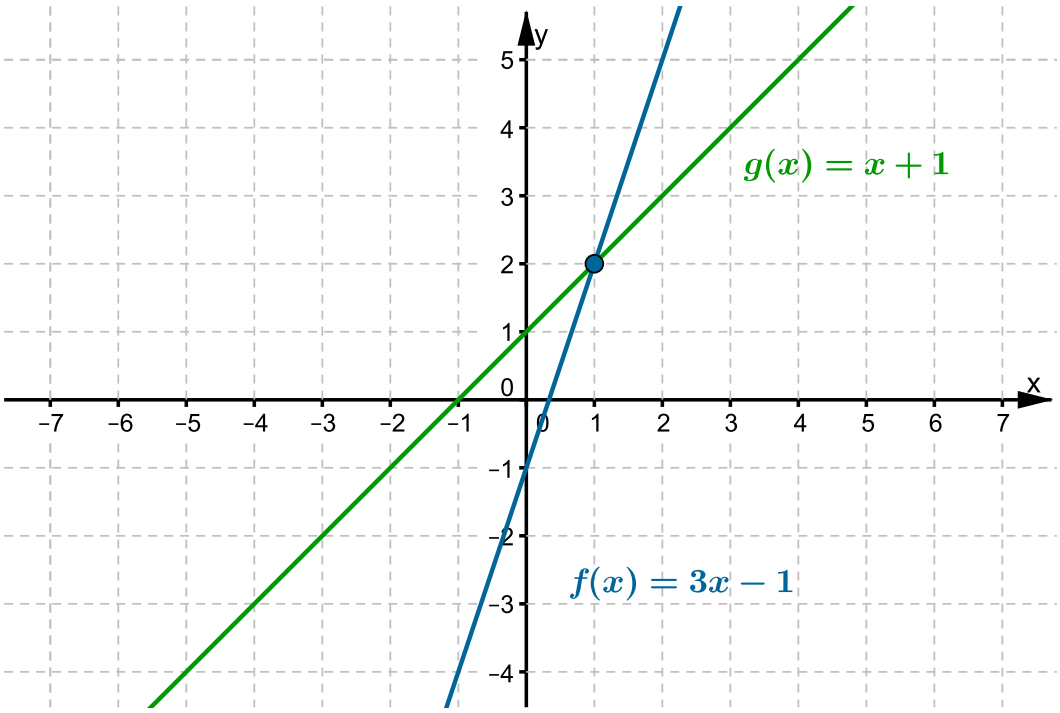
Ćwiczenie 3

Układ dwóch równań liniowych

Analizując wykresy dwóch funkcji liniowych, zaznaczone w tym samym układzie współrzędnych, możemy stwierdzić, czy wykresy te mają punkty wspólne.

Przykład 1

Rysunek przedstawia wykresy funkcji $f(x) = 3x - 1$ i $g(x) = x + 1$.
Z rysunku odczytamy, że wykresy funkcji przecinają się w punkcie $(1,\ 2)$.



Obliczając wartość każdej z funkcji dla argumentu 1, stwierdzamy, że

$$f(1) = 3 \cdot 1 - 1 = 2,$$

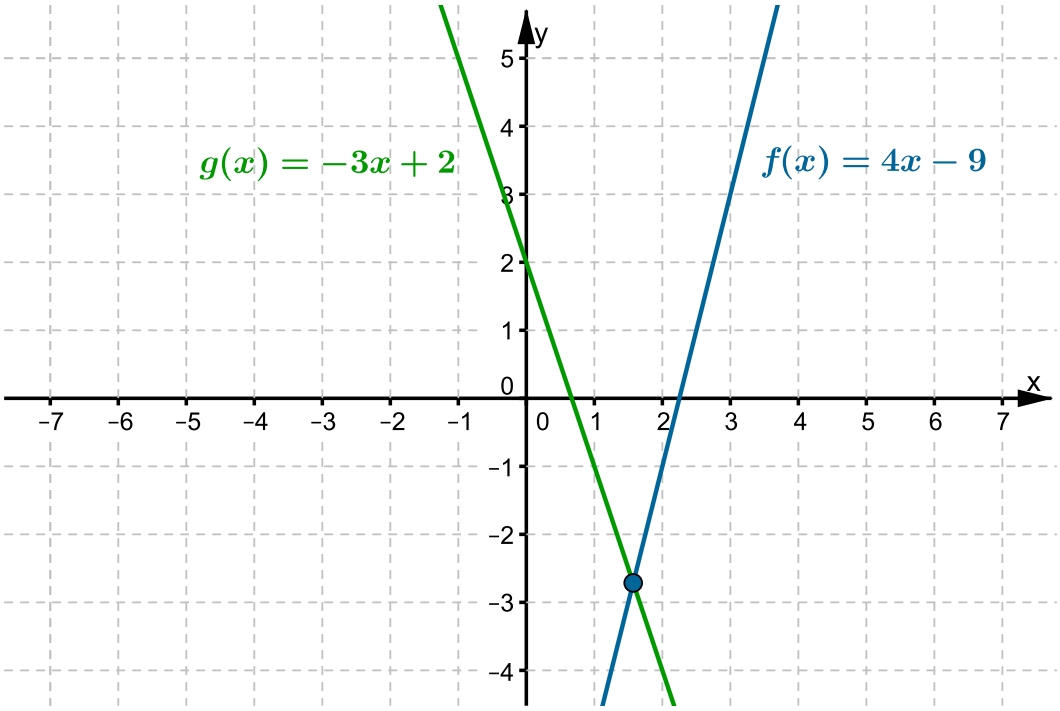
a także

$$g(1) = 1 + 1 = 2.$$

Wykresy funkcji f i g nie są prostymi równoległymi. Punkt $(1,\ 2)$ jest ich jedynym punktem wspólnym.
Nie zawsze jednak można z rysunku dokładnie odczytać współrzędne punktu przecięcia wykresów dwóch funkcji liniowych.

Przykład 2

Rysunek przedstawia wykresy funkcji $f(x) = 4x - 9$ i $g(x) = -3x + 2$.



Przykład 3

Rozwiążemy układ równań

$$\begin{cases} 2x - y = -4 \\ x + 2y = 3 \end{cases}$$

- *I* sposób

Wyznaczymy z drugiego równania niewiadomą x

$$x = 3 - 2y.$$

Następnie wykorzystujemy otrzymany związek w pierwszym równaniu, skąd otrzymujemy

$$2 \bullet (3 - 2y) - y = -4$$

$$6 - 4y - y = -4$$

$$-4y - y = -4 - 6$$

$$-5y = -10$$

$$y = 2$$

Wobec tego

$$x = 3 - 2 \bullet 2 = -1$$

Rozwiązaniem danego układu jest więc para liczb $x = -1$ oraz $y = 2$.

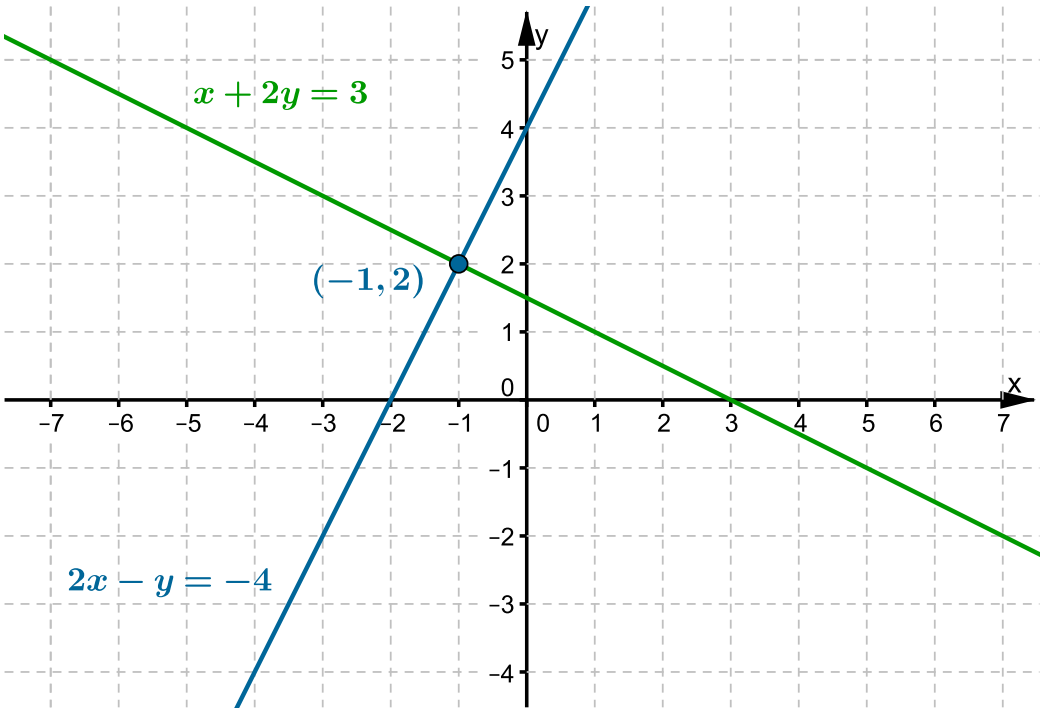
- II sposób

Rozwiążemy dany układ metodą graficzną.
Wyznaczymy y z każdego równania układu

$$\begin{cases} 2x+4=y \\ 2y=-x+3 \end{cases}$$

$$\begin{cases} y=2x+4 \\ y=-\frac{1}{2}x+\frac{3}{2} \end{cases}$$

Proste o równaniach $y=2x+4$ i $y=-\frac{1}{2}x+\frac{3}{2}$ nie są równoległe, więc przecinają się w jednym punkcie.
Rysunek przedstawia obie te proste w układzie współrzędnych.



Odczytujemy z rysunku, że te proste przecinają się w punkcie $(-1,\ 2)$.
Wobec tego układ równań

$$\begin{cases} 2x-y=-4 \\ x+2y=3 \end{cases}$$

ma jedno rozwiązanie, parę liczb $x=-1$ oraz $y=2$.

Przykład 4

Rozwiążemy układ równań

$$\begin{cases} 4x-y=-5 \\ 3x=-6 \end{cases}$$

- *I* sposób

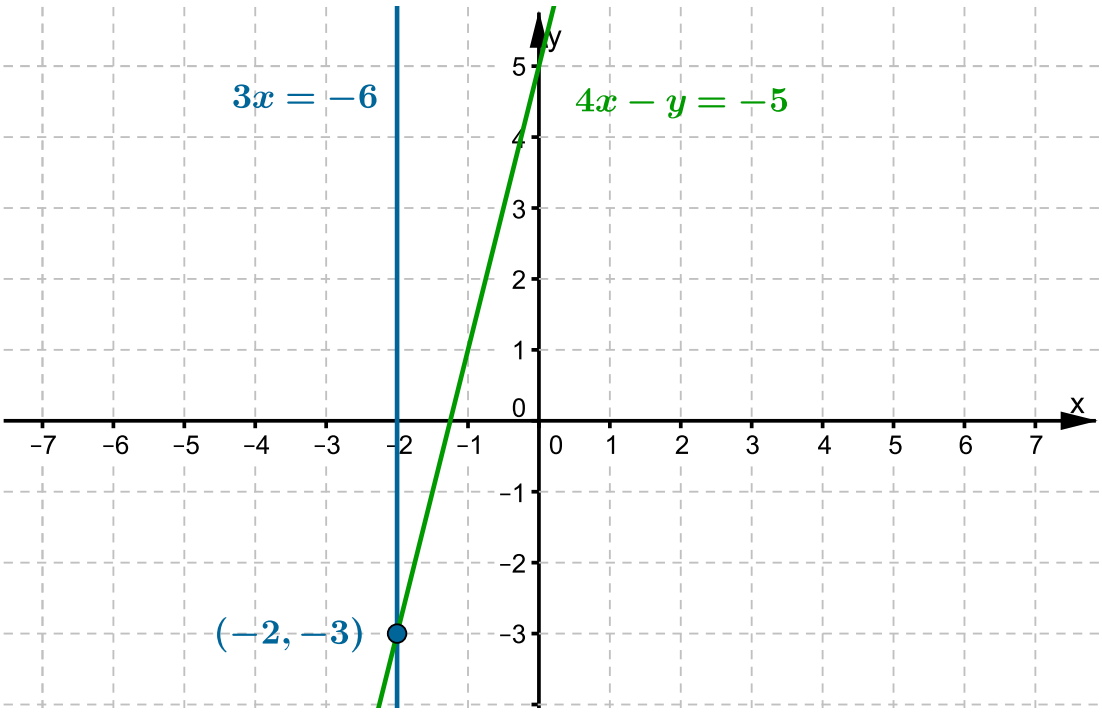
Z drugiego równania natychmiast wynika, że $x = -2$. Po wstawieniu otrzymanej wartości x do pierwszego równania otrzymujemy $y = -8 + 5$, skąd $y = -3$.
Para $x = -2$ i $y = -3$ jest więc jedynym rozwiązaniem danego układu.

- II sposób

Rozwiążemy dany układ metodą graficzną.
Z pierwszego równania wyznaczamy y, ale w drugim równaniu ta niewiadoma nie występuje.
Zapisujemy więc drugie równanie w postaci $x = -2$.

$$\begin{cases} y = 4x + 5 \\ x = -2 \end{cases}$$

Zauważmy, że równanie $x = -2$ opisuje zbiór wszystkich takich punktów, których pierwsza współrzędna jest równa -2.
Jest to więc równanie prostej równoległej do osi Oy, przecinającej oś Ox w punkcie $(0, -2)$.
Rysunek przedstawia proste o równaniach $y = 4x + 5$ i $x = -2$ w układzie współrzędnych.



Odczytujemy z niego, że te proste przecinają się w punkcie $(-2, -3)$.
Oznacza to, że układ równań

$$\begin{cases} 4x - y = -5 \\ 3x = -6 \end{cases}$$

ma jedno rozwiązanie, parę liczb $x = -2$ oraz $y = -3$.

Przykład 5

Para $x = 1$ i $y = -1$ jest rozwiązaniem układu równań $\begin{cases} 4x - 6y = 10 \\ -6x + 9y = -15 \end{cases}$, ponieważ dla $x = 1$ i $y = -1$ jest

$$4x = 6y = 4 \bullet 1 - 6 \bullet (-1) = 4 + 6 = 10$$

oraz

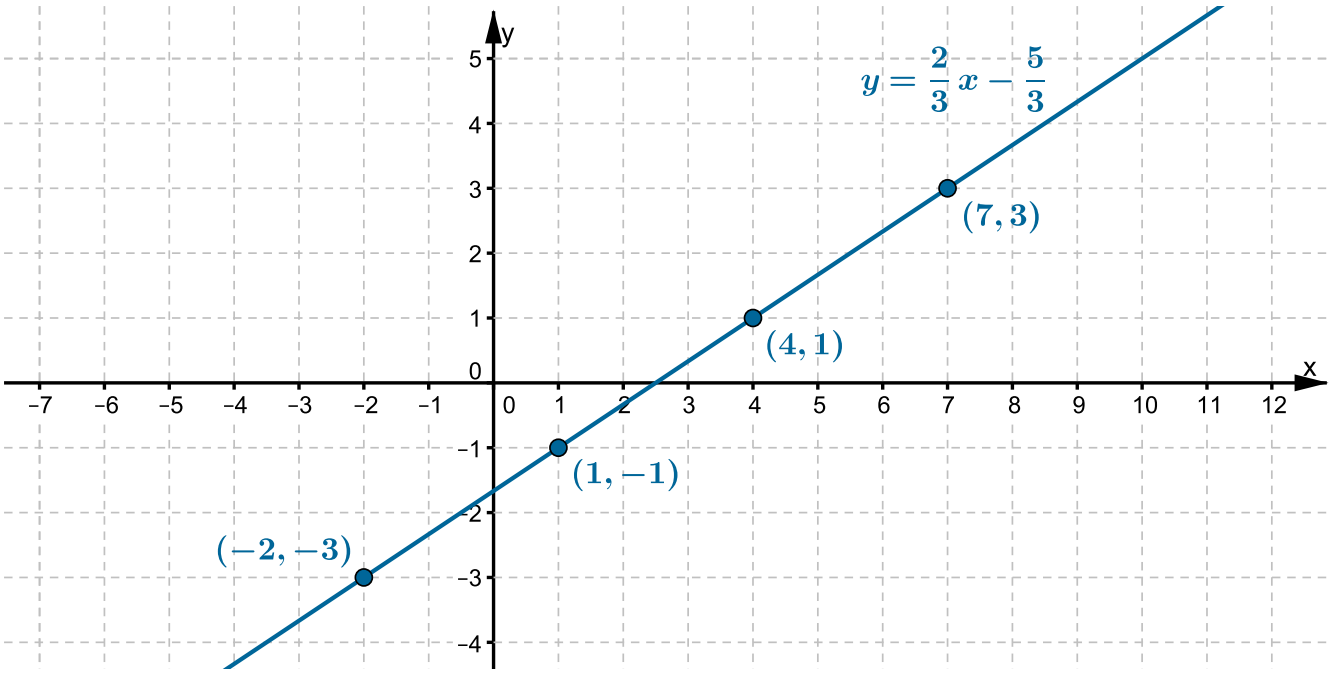
$$-6x + 9y = -6 \bullet 1 + 9 \bullet (-1) = -6 - 9 = -15.$$

Nie jest to jedyne rozwiązanie tego układu, co stwierdzimy, wyznaczając y z każdego z równań układu

$$\begin{cases} 4x - 10 = 6y \\ 9y = 6x - 15 \end{cases}$$

$$\begin{cases} y = \frac{2}{3}x - \frac{5}{3} \\ y = \frac{2}{3}x - \frac{5}{3} \end{cases}$$

Oba równania opisują tę samą prostą, a zatem układ ten ma nieskończenie wiele rozwiązań. Jest nim każda para liczb rzeczywistych x i y, która spełnia równanie $y = \frac{2}{3}x - \frac{5}{3}$.
Rysunek przedstawia prostą o równaniu $y = \frac{2}{3}x - \frac{5}{3}$.



Przykład 6

Pokażemy, że układ

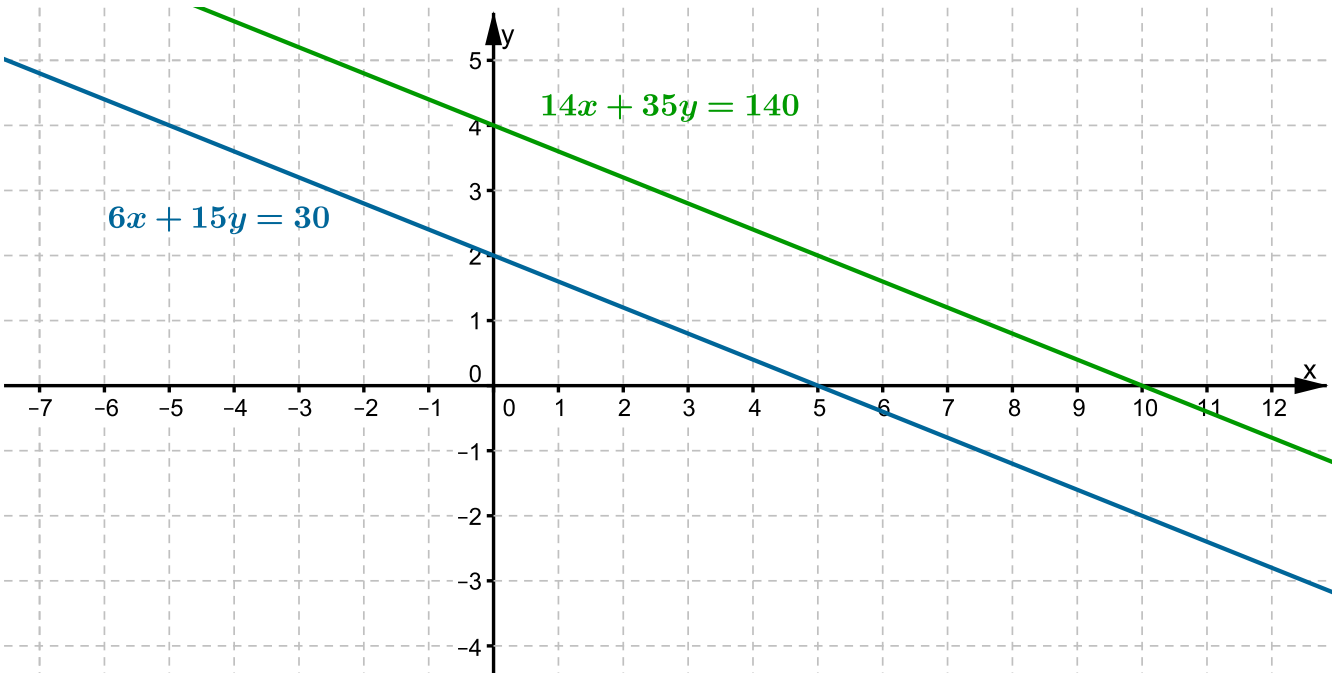
$$\begin{cases} 6x+15y=30 \\ 14x+35y=140 \end{cases}$$

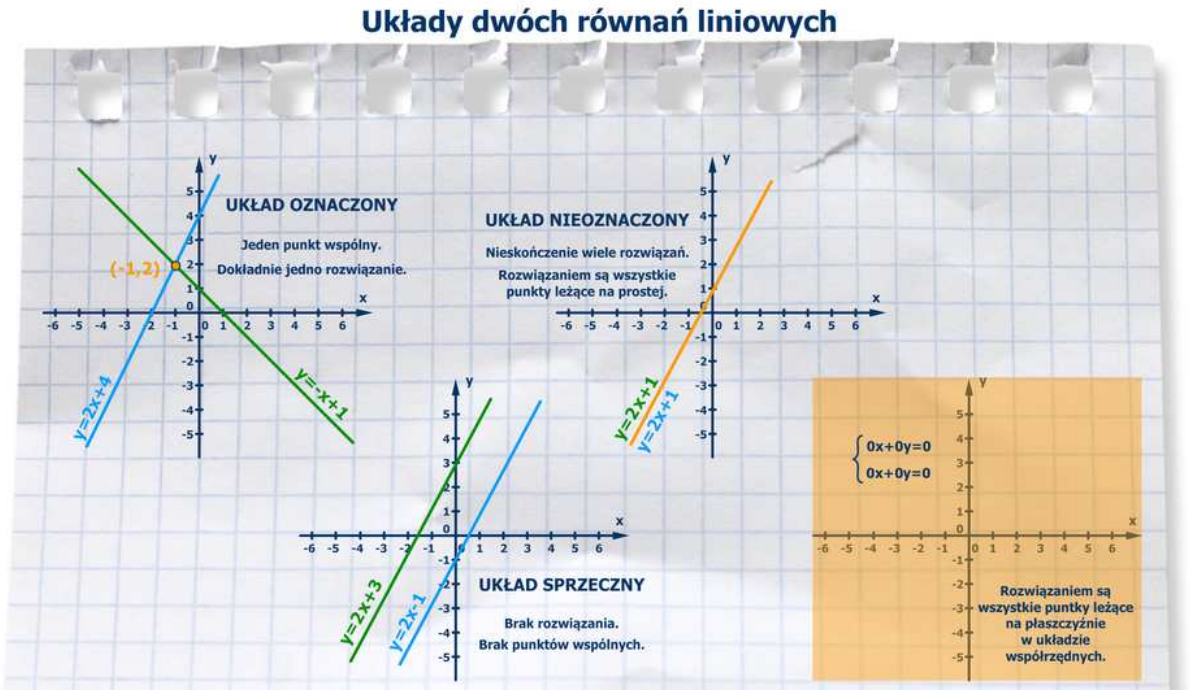
nie ma rozwiązań.
Wyznaczamy y z każdego z równań układu

$$\begin{cases} 15y=-6x+30 \\ 35y=-14x+140 \end{cases}$$

$$\begin{cases} y=-\frac{2}{5}x+2 \\ y=-\frac{2}{5}x+4 \end{cases}.$$

Proste o równaniach $y=-\frac{2}{5}x+2$ i $y=-\frac{2}{5}x+4$ są równoległe i różne, więc dany układ nie ma rozwiązań.
Rysunek przedstawia obie te proste w układzie współrzędnych.





Film dostępny na portalu epodreczniki.pl

Animacja pokazuje interpretację geometryczną czterech różnych układów równań liniowych. Układ pierwszy złożony z równań 2x +2y =2 i 2x minus y =-4, na wykresie w postaci dwóch prostych y = minus x +1 i y =2x +4, które przecinają się w jednym punkcie o współrzędnych (-1, 2). Układ jest oznaczony i ma dokładnie jedno rozwiązanie. Układ drugi złożony z równań -4x +2y =2 i 6x -3y =-3, na wykresie w postaci dwóch pokrywających się prostych y =2x +1. Układ jest nieoznaczony, ma nieskończenie wiele rozwiązań. Rozwiązaniem układu są wszystkie punkty leżące na prostej. Układ trzeci złożony z równań -6x +3y =9 i 4x -2y =2, na wykresie w postaci dwóch prostych równoległych y =2x +3 i y =2x -1. Układ jest sprzeczny, brak rozwiązań i brak punktów wspólnych. Układ czwarty złożony z równań 0x +0y =0 i 0x +0y =0. Rozwiązaniem układu są wszystkie punkty leżące na płaszczyźnie układu współrzędnych.

Układ równań liniowych

Rozpatrzmy układ dwóch równań liniowych z dwiema niewiadomymi x i y

$$\begin{cases} a_1x + b_1y = c_1 \\ a_2x + b_2y = c_2 \end{cases},$$

gdzie a_1, b_1, c_1, a2, a_2 i b_2 są ustalonymi liczbami rzeczywistymi, przy czym pary liczb: a_1 i b_1 oraz a_2 i b_2 nie są równocześnie równe zero.
Rozwiązaniem układu dwóch równań liniowych z dwiema niewiadomymi jest każda para $(x,\ \mathrm{y})$ takich liczb x i y, która spełnia każde z równań układu.

Na podstawie spostrzeżeń poczynionych w przykładach omówionych powyżej zauważmy, że układ równań liniowych

$$\begin{cases} a_1x + b_1y = c_1 \\ a_2x + b_2y = c_2 \end{cases},$$

- ma dokładnie jedno rozwiązanie, gdy proste o równaniach

$$a_1x + b_1y - c_1 = 0$$

oraz

$$a_2x + b_2y - c_2 = 0$$

nie są równoległe. Jest tak wtedy i tyko wtedy , gdy współczynniki przy x i y nie są proporcjonalne, to znaczy, gdy

$$a_1b_2 - a_2b_1 \neq 0$$

- ma nieskończenie wiele rozwiązań, gdy proste o równaniach

$$a_1x + b_1y - c_1 = 0$$

oraz

$$a_2x + b_2y - c_2 = 0$$

pokrywają się, czyli wtedy i tylko wtedy, gdy

$$a_1b_2 - a_2b_1 = 0$$

i

$$a_1c_2 - a_2c_1 = 0$$

i

$$b_1c_2 - b_2c_1 = 0$$

- nie ma rozwiązań, gdy proste o równaniach $a_1x + b_1y - c_1 = 0$

i

$$a_2x + b_2y - c_2 = 0$$

są równoległe i różne, czyli wtedy i tylko wtedy, gdy

$$a_1b_2 - a_2b_1 = 0$$

oraz zachodzi choć jeden z warunków

$$a_1c_2 - a_2c_1 \neq 0$$

lub

$$b_1c_2 - b_2c_1 \neq 0$$

> **Przykład 1**
>
> Rozwiążemy układ równań
>
> $$\begin{cases} 3x + 2y = -1 \\ x + 5y = 4 \end{cases}$$
>
> Zauważmy, że w powyższym przykładzie $3 \bullet 5 - 1 \bullet 2 = 13 \neq 0$, więc układ ma jedno rozwiązanie.
> W rozwiązaniu zastosujemy metodę podstawiania.
> W tym celu wyznaczymy x z drugiego równania.
>
> $$\begin{cases} 3x + 2y = -1 \\ x = 4 - 5y \end{cases}$$
>
> $$\begin{cases} 3 \bullet (4 - 5y) + 2y = -1 \\ x = 4 - 5y \end{cases}$$
>
> $$\begin{cases} 12 - 15y + 2y = -1 \\ x = 4 - 5y \end{cases}$$
>
> $$\begin{cases} -13y = -13 \\ x = 4 - 5y \end{cases}$$
>
> $$\begin{cases} y = 1 \\ x = 4 - 5 \bullet 1 \end{cases}$$

A zatem rozwiązaniem danego układu jest para liczb $x = -1$ i $y = 1$. Jest to jedyne rozwiązanie tego układu.

Przykład 2

Rozwiążemy układ równań

$$\begin{cases} 7x + 5y = 1 \\ 3x - 2y = -12 \end{cases}$$

Zauważmy, że w powyższym przykładzie

$$7 \bullet (-2) - 5 \bullet 3 = -29 \neq 0,$$

więc układ ma jedno rozwiązanie.
W rozwiązaniu zastosujemy metodę przeciwnych współczynników.
Pomnożymy obie strony pierwszego równania przez 2, a drugiego przez 5.

$$\begin{cases} 14x + 10y = 2 \\ 15x - 10y = -60 \end{cases}$$

Wynika stąd, że

$$29x = -58,$$

czyli $x = -2$.
Wstawiając tę wartość do pierwszego równania układu, otrzymujemy

$$7 \bullet (-2) + 5y = 1,$$

skąd $y = 3$.
Wobec tego rozwiązaniem danego układu jest para liczb $x = -2$ i $y = 3$. Jest to jedyne rozwiązanie tego układu.

Zadania

Ćwiczenie 1

W punkcie $(1,\ 3)$ przecinają się wykresy funkcji

- $h(x) = 2x + 1$ i $k(x) = -x + 4$
- $l(x) = 3x$ i $m(x) = 3x + 2$
- $f(x) = 1$ i $g(x) = x + 2$

Ćwiczenie 2

Proste o równaniach $2x - 3y = 0$ i $x + y = 5$

- są równoległe i różne
- mają dokładnie jeden punkt wspólny
- pokrywają się

Ćwiczenie 3

Wykresy funkcji $f(x) = -3x - 6$, $g(x) = \mathrm{ax} + 4$ i $h(x) = 5x + b$ mają punkt wspólny leżący na osi Ox. Wynika z tego, że

- $a = -2$
- $b = 10$
- wykresy funkcji g i h pokrywają się

Ćwiczenie 4

Dane są punkty $A = (0, 2)$, $B = (1, -1)$, $C = (-3, 5)$, $D = (-2, -2)$ oraz funkcje określone wzorami $f(x) = -3x + 2$, $g(x) = 2x + 2$, $h(x) = -x + 2$, $k(x) = -\frac{3}{2}x + \frac{1}{2}$. Wówczas

- [ ] na wykresie funkcji k leżą punkty B i C
- [ ] na wykresie funkcji h leżą punkty B i D
- [ ] A jest punktem wspólnym wykresów funkcji f, g i h
- [ ] na wykresie funkcji g leżą punkty C i D

Ćwiczenie 5

Połącz w pary układy równań z ich rozwiązaniami.

$x = 5,\ y = -2$	$\begin{cases} x + y = 2 \\ x - y = 4 \end{cases}$
$x = 4,\ y = -\frac{2}{3}$	$\begin{cases} x - y = 2 \\ x - y = 4 \end{cases}$
układ równań nie posiada rozwiązań	$\begin{cases} 2x - 2y = 2 \\ x - y = 1 \end{cases}$
układ równań posiada nieskończenie wiele rozwiązań	$\begin{cases} 2x - 3y = 10 \\ 2x + 3y = 6 \end{cases}$
$x = 3,\ y = -1$	$\begin{cases} 2x - 3y = 10 \\ 2x + 3y = 4 \end{cases}$
$x = \frac{7}{2},\ y = -1$	$\begin{cases} 2x = 10 \\ 2x + 3y = 4 \end{cases}$

Ćwiczenie 6

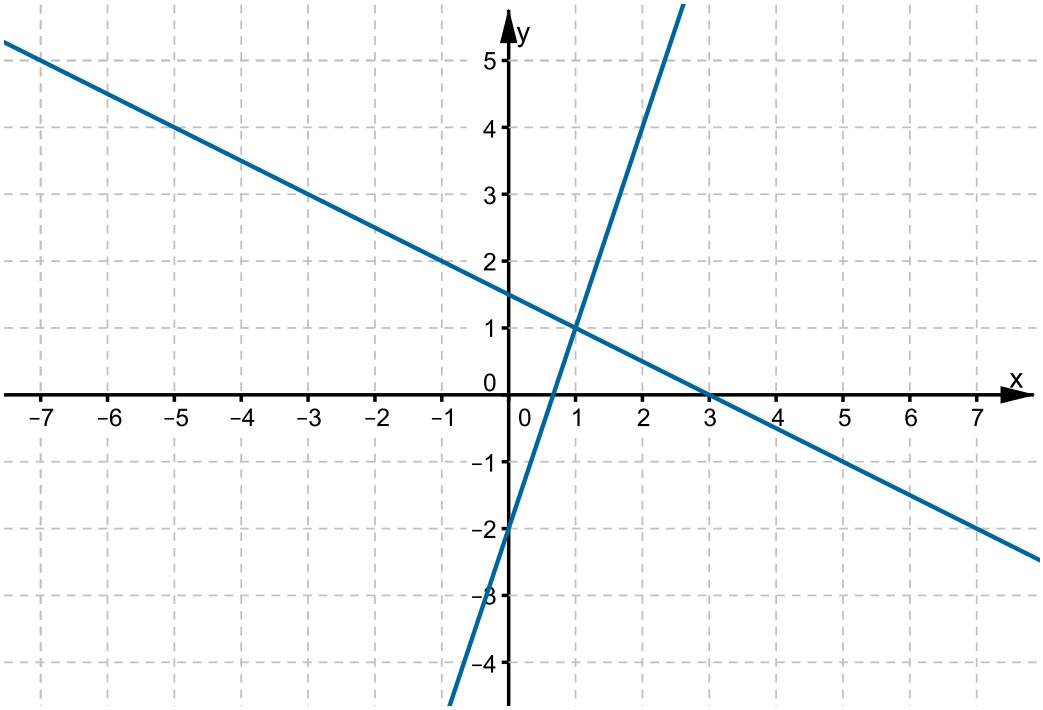
Rysunki przedstawiają interpretację geometryczną układów równań. Przyporządkuj układy równań odpowiednim rysunkom.

I. $\begin{cases} x - 2y = 1 \\ -2x + 4y = 4 \end{cases}$

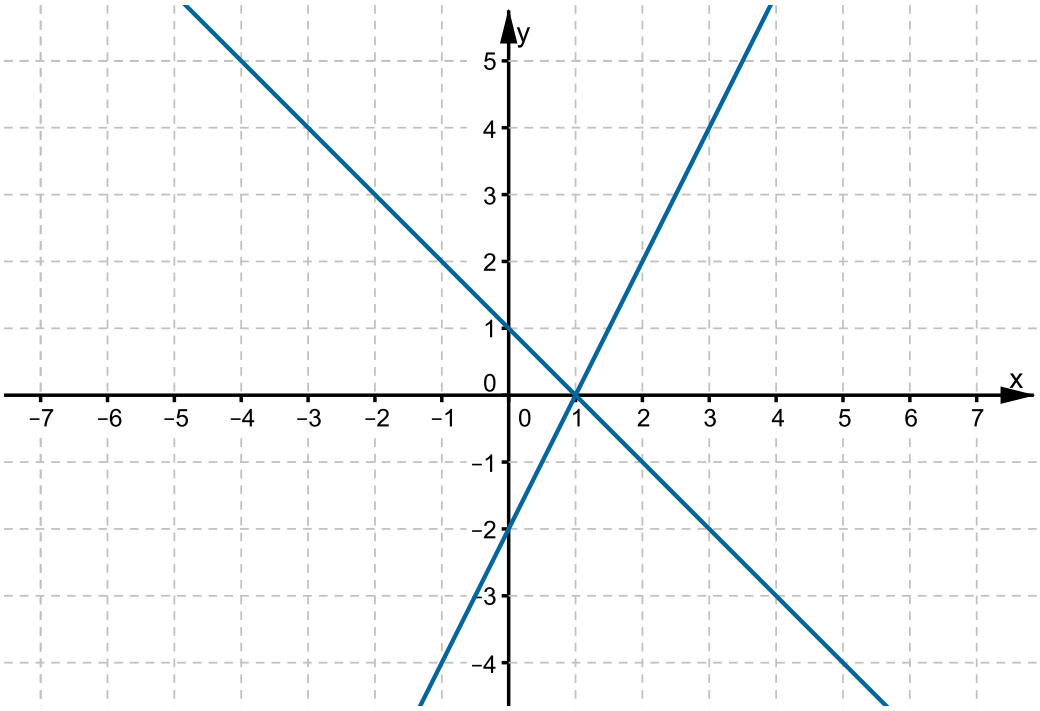
II. $\begin{cases} x + 2y = 3 \\ 3x - y = 2 \end{cases}$

III. $\begin{cases} x + y = 1 \\ 2x - y = 2 \end{cases}$

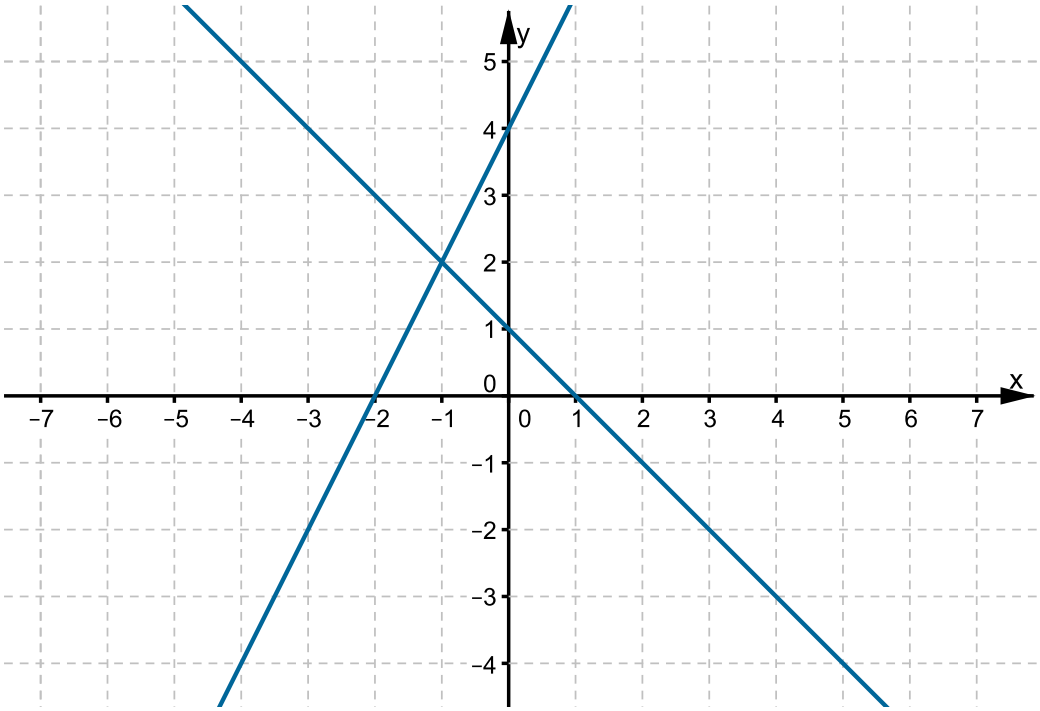
a.



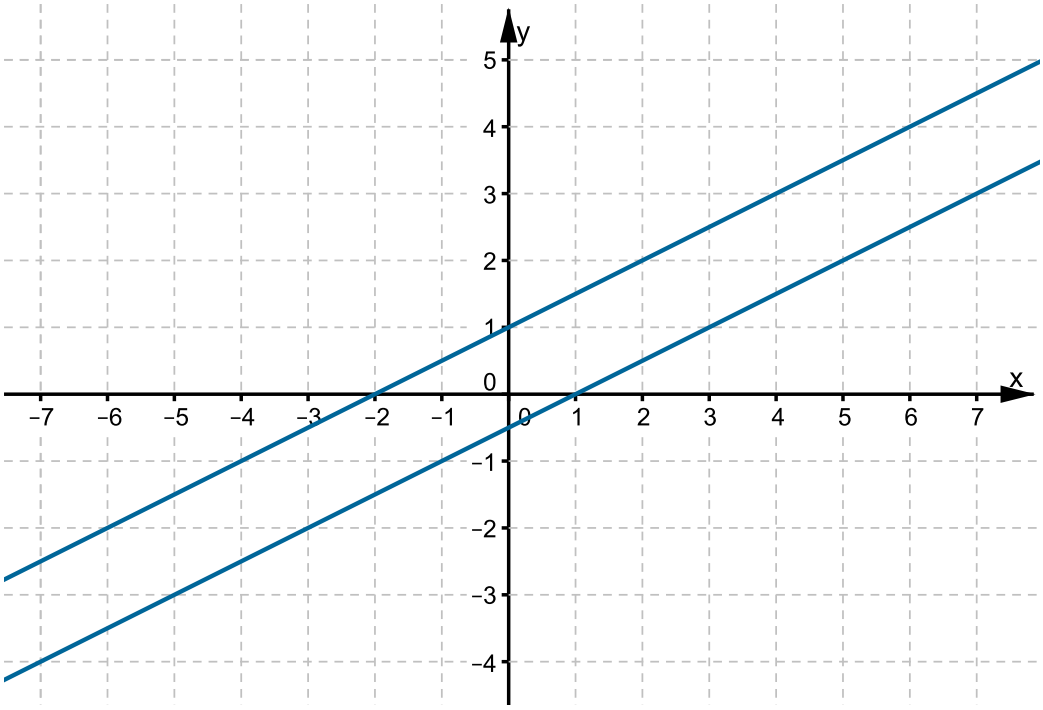
b.


y
x
5
4
3
2
1
0
−1
−2
−3
−4
−7
−6
−5
−4
−3
−2
−1
0
1
2
3
4
5
6
7

c.


y
x
5
4
3
2
1
0
−1
−2
−3
−4
−7
−6
−5
−4
−3
−2
−1
0
1
2
3
4
5
6
7

d.



Ćwiczenie 7

Dany jest układ równań $\begin{cases} 2x+y=-3 \\ \mathrm{a}x+\mathrm{b}y=6 \end{cases}$ z niewiadomymi x i y . Wówczas

- [ ] dla $a=2$ i $b=1$ układ ma nieskończenie wiele rozwiązań
- [ ] dla $a=-4$ i $b=-2$ układ ma nieskończenie wiele rozwiązań
- [ ] dla $a=1$ i $b=2$ układ nie ma rozwiązań
- [ ] dla $a=1$ i $b=1$ układ ma jedno rozwiązanie

Ćwiczenie 8

Wyznacz wszystkie wartości a i c, dla których układ równań $\begin{cases} \mathrm{a}x+y=5 \\ 6x-2y=c \end{cases}$ nie ma rozwiązań.

Ćwiczenie 9

Wyznacz wszystkie wartości m, dla których rozwiązaniem układu równań $\begin{cases} x-y=m \\ 2x-5y=3m-1 \end{cases}$ jest para liczb (x,y), takich że $x>0$ i $y>0$.

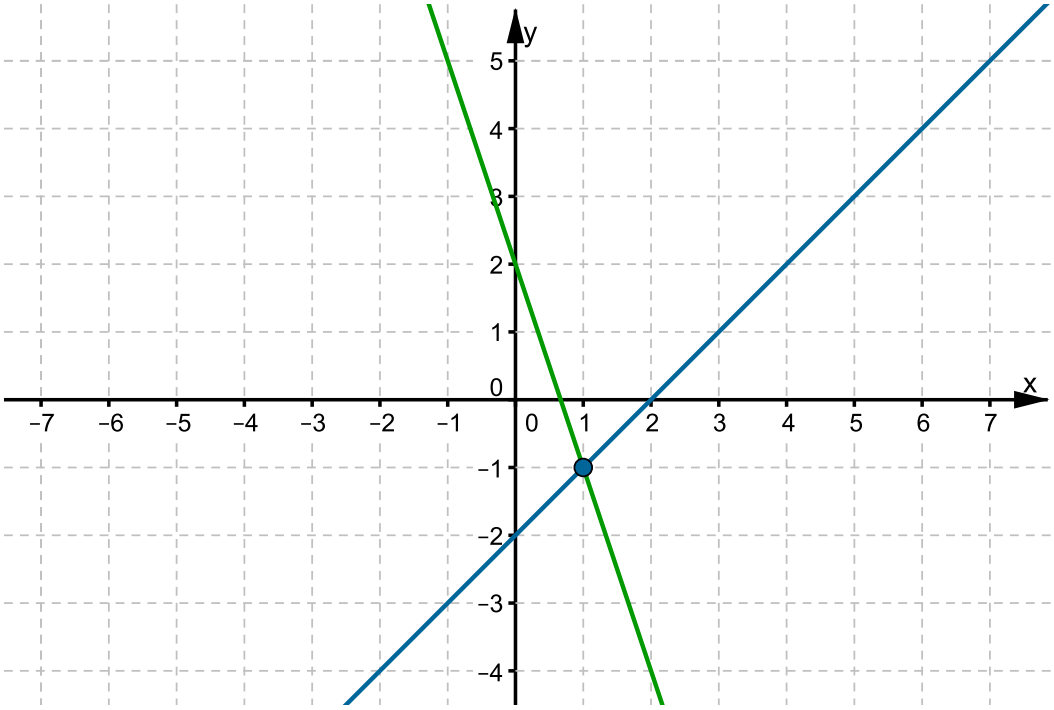
Ćwiczenie 10

Wykresy funkcji $f(x) = -2x + 4$ i $g(x) = x + 7$ przecinają się w punkcie

- ◯ $(2, 0)$
- ◯ $(-1, 6)$
- ◯ $(0, 4)$
- ◯ $(1, 8)$

Ćwiczenie 11

Wskaż układ równań, którego geometryczna interpretacja przedstawiona jest na rysunku.



- ○ $\begin{cases} x + y = -2 \\ 3x + y = 2 \end{cases}$
- ○ $\begin{cases} x + y = -2 \\ -3x + y = 2 \end{cases}$
- ○ $\begin{cases} x - y = 2 \\ 3x + y = 2 \end{cases}$
- ○ $\begin{cases} x - y = 2 \\ -3x + y = 2 \end{cases}$

Ćwiczenie 12

Rozwiązaniem układu równań $\begin{cases} x+y=5 \\ 3x+2y=3 \end{cases}$ jest para liczb

- $x=-6$ i $y=11$
- $x=-8$ i $y=13$
- $x=2$ i $y=3$
- $x=-7$ i $y=12$

Ćwiczenie 13

Wskaż układ równań, który ma nieskończenie wiele rozwiązań.

- $\begin{cases} x+y=3 \\ 3x+3y=6 \end{cases}$
- $\begin{cases} x-2y=4 \\ x-4y=8 \end{cases}$
- $\begin{cases} 3x+6y=21 \\ 5x+10y=35 \end{cases}$
- $\begin{cases} x+y=0 \\ x-y=0 \end{cases}$

Ćwiczenie 14

Rozwiązaniem układu równań $\begin{cases} x+y=-2 \\ 2x-3y=0 \end{cases}$ jest para liczb (x,y), takich że

- ◯ $x>0$ i $y<0$
- ◯ $x<0$ i $y>0$
- ◯ $x>0$ i $y>0$
- ◯ $x<0$ i $y<0$

Ćwiczenie 15

Rozwiązaniem układu równań $\begin{cases} x+\mathrm{by}=-2 \\ \mathrm{ax}-4y=3 \end{cases}$ jest para liczb $x=1$ i $y=1$. Wynika stąd, że

- ◯ $a=7$ i $b=-1$
- ◯ $a=-1$ i $b=-3$
- ◯ $a=7$ i $b=-3$
- ◯ $a=-1$ i $b=-1$

Ćwiczenie 16

Rozwiązaniem układu równań $\begin{cases} 5x+2y=1 \\ 11x+5y=-3 \end{cases}$ jest para liczb (x,y), takich że

- $x+y=-2$
- $x+y=-9$
- $x+y=0.$
- $x+y=-5$

Ćwiczenie 17

Układ równań $\begin{cases} 14x-21y=63 \\ \mathrm{ax}+6y=-18 \end{cases}$ z niewiadomymi x i y ma nieskończenie wiele rozwiązań, jeśli

- $a=1$
- $a=-29$
- $a=31$
- $a=-4$

Ćwiczenie 18

Wyznacz współrzędne punktu, w którym przecinają się wykresy funkcji f i g.

a. $f(x) = -4x$, $g(x) = x + 10$

b. $f(x) = 2x - 5$, $g(x) = x - 6$

c. $f(x) = -x + 4$, $g(x) = 3x - 8$

d. $f(x) = \frac{1}{3}x - \frac{2}{3}$, $g(x) = \frac{3}{8}x - \frac{5}{8}$

Ćwiczenie 19

Który układ równań ma dokładnie jedno rozwiązanie?

- [ ] $\begin{cases} x + 2y = 1 \\ x + y = 1 \end{cases}$
- [ ] $\begin{cases} x + y = 1 \\ x + y = -1 \end{cases}$
- [ ] $\begin{cases} 119x + 211y = -73 \\ 211x + 119y = 37 \end{cases}$
- [ ] $\begin{cases} x + y = 0 \\ x - y = 0 \end{cases}$

Ćwiczenie 20

Rozwiąż układ równań i podaj jego interpretację geometryczną.

a. $\begin{cases} 4x = -8 \\ x + 2y = 4 \end{cases}$

b. $\begin{cases} 2x - y = 3 \\ 17y = 51 \end{cases}$

c. $\begin{cases} x + y = -3 \\ 2x + y = -1 \end{cases}$

d. $\begin{cases} 2x + y = 3 \\ 2x - 3y = -9 \end{cases}$

Ćwiczenie 21

Rozwiąż układ równań i podaj jego interpretację geometryczną.

a. $\begin{cases} 2x + y = 2 \\ 3x - 2y = -4 \end{cases}$

b. $\begin{cases} 2x + 3y = -1 \\ 4x + 7y = -3 \end{cases}$

c. $\begin{cases} 2x + 3y = -1 \\ 5x + 6y = -4 \end{cases}$

d. $\begin{cases} 3x + 4y = 1 \\ 4x + 5y = 2 \end{cases}$

Ćwiczenie 22

Rozwiąż układ równań i podaj jego interpretację geometryczną.

a. $\begin{cases} 95x - 57y = 38 \\ -60x + 36y = -24 \end{cases}$

b. $\begin{cases} 119x - 34y = 68 \\ -35x + 10y = -25 \end{cases}$

c. $\begin{cases} 0{,}3x - 0{,}3y = 0{,}3 \\ -2{,}5x + 2{,}5y = 0 \end{cases}$

d. $\begin{cases} \frac{1}{4}x - \frac{1}{8}y = -\frac{1}{8} \\ -\frac{6}{7}x + \frac{3}{7}y = \frac{3}{7} \end{cases}$

Ćwiczenie 23

Wyznacz wszystkie wartości a, dla których układ równań $\begin{cases} \mathrm{a}x - y = 5 \\ 2x + 3y = -15 \end{cases}$ ma nieskończenie wiele rozwiązań.

Ćwiczenie 24

Rozstrzygnij, czy istnieje liczba b taka, że układ równań $\begin{cases} 4x - 2y = 7 \\ 3x + \mathrm{b}y = 10 \end{cases}$ nie ma rozwiązań.

Ćwiczenie 25

Wyznacz wszystkie wartości c, dla których rozwiązaniem układu równań $\begin{cases} x + 2y = c \\ 3x + 7y = 2c - 1 \end{cases}$ jest para liczb (x, y), takich że $x < 0$ i $y < 0$.

Ćwiczenie 26

Wyznacz wszystkie wartości m i k, dla których układ równań $\begin{cases} x + 3y = m \\ \mathrm{k}x - 12y = -8 \end{cases}$ ma nieskończenie wiele rozwiązań.

Ćwiczenie 27

Wyznacz wszystkie wartości m, dla których rozwiązaniem układu równań $\begin{cases} 5x-2y=m-3 \\ x+3y=2m-3 \end{cases}$ jest dokładnie jedna para liczb (x,y), spełniająca warunek $y=x+1$.

Zadania generatorowe

Ćwiczenie 1

Ćwiczenie 2

Przykłady zastosowania funkcji liniowej. Część I

W zadaniach tekstowych opisywane są zależności między wielkościami niewiadomymi. Analiza tych zależności powinna doprowadzić do zapisania związków między tymi wielkościami w postaci równania, nierówności, układu równań bądź układu nierówności. Zadanie uważa się za rozwiązane, kiedy wyznaczymy wszystkie wartości niewiadomych, spełniające warunki zadania.

W poniższych przykładach będziemy rozwiązywać zadania tekstowe za pomocą równań, nierówności oraz układów równań liniowych.

Przykład 1

Znajdziemy trzy takie liczby, których suma jest równa 85. Pierwsza z tych liczb jest o 7 większa od drugiej i jest jednocześnie dwa razy mniejsza od trzeciej.
Jeżeli pierwszą z tych liczb oznaczymy przez x, to z treści zadania wynika, że druga jest równa $x-7$, a trzecia jest równa $2x$. Ponieważ suma tych trzech liczb jest równa 85, zatem otrzymujemy równanie

$$x+x-7+2x=85.$$

Rozwiązujemy równanie, przekształcając je równoważnie

$$x+x+2x=85+7$$

$$4x=92$$

$$x=23.$$

Pierwsza z tych liczb to 23, druga to 16, a trzecia to 46.

Przykład 2

Uczniowie rozwiązywali zadanie, za które można było otrzymać $0,\ 1$ lub 2 punkty. Po ukończeniu pracy okazało się, że $\frac{2}{3}$ uczniów otrzymało 2 punkty, $25\,\%$ pozostałych otrzymało za rozwiązanie zadania 1 punkt, a 9 uczniów otrzymało 0 punktów. Obliczmy, ilu uczniów rozwiązywało zadanie.
Oznaczmy przez x liczbę uczniów rozwiązujących zadanie. Wtedy $\frac{2}{3}x$ to liczba uczniów, którzy uzyskali za zadanie 2 punkty, a $25\,\%\left(x-\frac{2}{3}x\right)$ to liczba uczniów, którzy uzyskali 1 punkt.
Otrzymujemy równanie

$$\frac{2}{3}x+25\,\%\cdot\frac{1}{3}x+9=x.$$

Obliczmy niewiadomą x

$$x - \frac{2}{3}x - \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{3}x = 9$$

$$12x - 8x - x = 9 \cdot 12$$

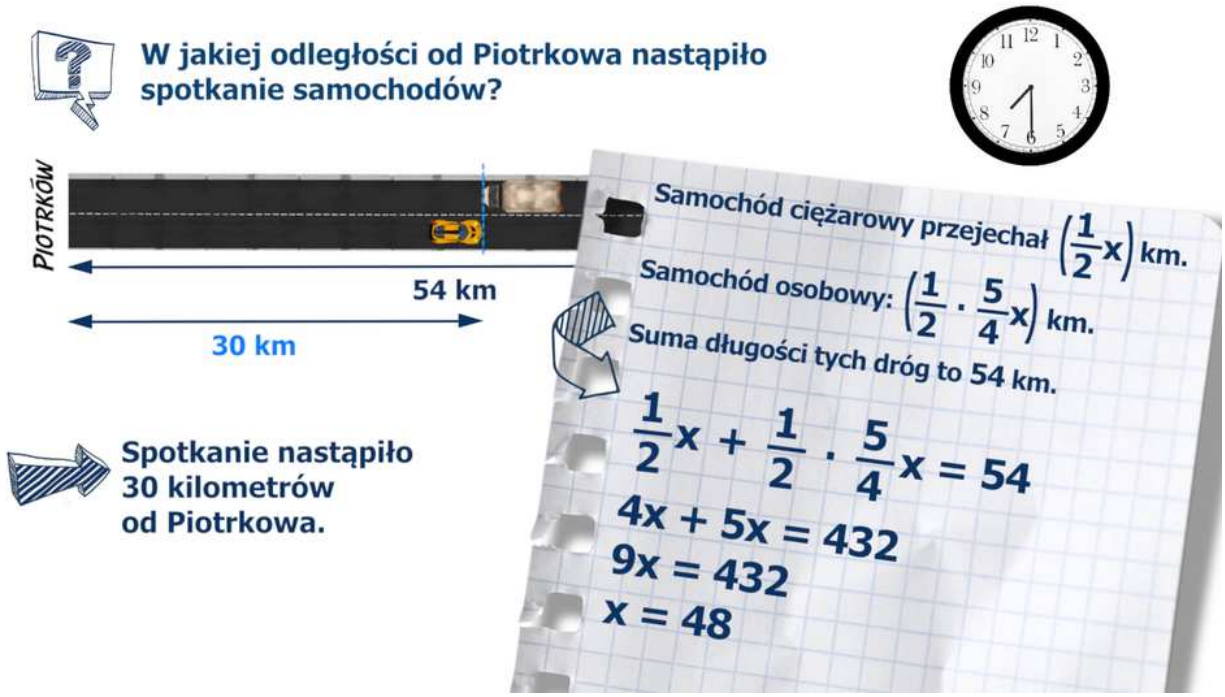
$$3x = 108$$

$$x = 36.$$

Zatem zadanie rozwiązywało 36 uczniów.

.
$2\frac{2}{3} \bullet 36 = 24$
$125\,\%\frac{1}{4} \bullet 12 = 3$
$36 - 24 - 3 = 9$

Przykład 3



Film dostępny na portalu epodreczniki.pl

Animacja pokazuje kolejne kroki rozwiązania zadania.

Droga z Piotrkowa do Łodzi ma 54 km długości. O godz. 7^{00} wyjechały tą drogą naprzeciw siebie dwa samochody: z Piotrkowa – samochód osobowy, a z Łodzi – samochód ciężarowy. Samochody te minęły się o godzinie 7^{30}. W jakiej odległości od Piotrkowa nastąpiło spotkanie tych pojazdów, jeżeli średnia prędkość samochodu osobowego była w tym czasie o 25 % większa niż średnia prędkość samochodu ciężarowego?

Oznaczmy przez x średnią prędkość samochodu ciężarowego. Wtedy średnia prędkość samochodu osobowego była równa $125\%\ x$. Do momentu spotkania każdy z pojazdów jechał przez pół godziny, czyli samochód ciężarowy przejechał $\frac{1}{2}\text{x km}$, a samochód osobowy pokonał drogę długości $\frac{1}{2} \cdot \frac{5}{4}\ \text{x km}$. Suma długości tych dróg jest równa $54\ \text{km}$, a zatem

$$\frac{1}{2}x + \frac{1}{2} \cdot \frac{5}{4}x = 54,$$

Stąd

$$4x + 5x = 432$$

$$9x = 432$$

$$x = 48.$$

Samochód ciężarowy przejechał $24\ \text{km}$, czyli spotkanie nastąpiło w odległości $30\ \text{km}$ od Piotrkowa.

Przykład 4

Wyznaczymy wszystkie pary różnych liczb całkowitych, których suma jest równa 130, a większa z nich jest mniejsza od 68.
Oznaczmy mniejszą z liczb przez x. Wtedy większa z nich, która jest równa $130 - x$, spełnia dwa warunki
$130 - x > \text{x i } 130 - x < 68.$
Wynika z tego, że
$2x < 130 \text{ i } x > 130 - 68,$
czyli
$x < 65 \text{ i } x > 62.$
Stąd $x = 63$ lub $x = 64$. Zatem są dwie pary liczb całkowitych spełniających warunki zadania 63 i 67 oraz 64 i 66.

Przykłady zastosowania funkcji liniowej. Część II

Przykład 1

Wskazówki na tarczy zegara pokazują godzinę 12^{00}. Obliczmy, za ile minut obie wskazówki zegara utworzą kąt 90°.

a. po raz pierwszy
b. po raz drugi

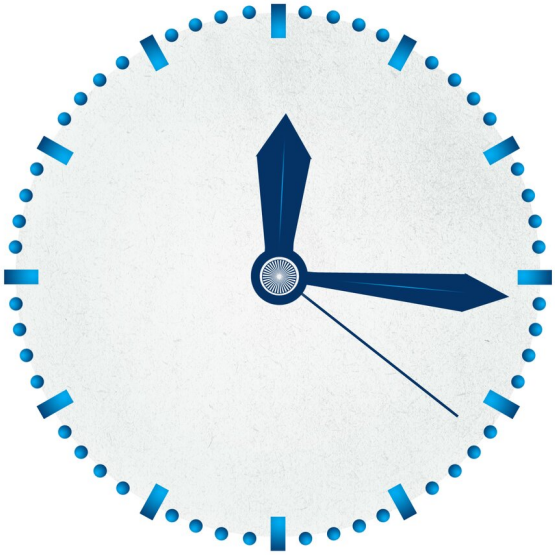
Ruch po okręgu opisujemy za pomocą prędkości kątowej. Dla zegara prawidłowo odmierzającego czas prędkość wskazówki godzinowej to 30 stopni na godzinę $(30^\circ/h)$, a wskazówki minutowej to 360 stopni na godzinę $(360^\circ/h)$.
Oznaczmy przez x czas (w godzinach), po którym wskazówki po raz pierwszy od godziny 12^{00} utworzyły kąt 90°. Zauważmy, że kąt, zakreślony przez wskazówkę minutową jest o 90° większy niż kąt zakreślony przez wskazówkę godzinową. Wobec tego

$$30x + 90 = 360x$$

$$330x = 90$$

$$x = \frac{90}{330}h = \frac{3}{11}h = \frac{180}{11}\text{min}.$$

A zatem po raz pierwszy wskazówki utworzą kąt 90° po upływie $16\frac{4}{11}$ minut.



Oznaczmy przez y czas (w godzinach), po którym wskazówki po raz drugi od godziny 12^{00} utworzyły kąt 90°. Zauważmy, że kąt, zakreślony przez wskazówkę minutową jest o 270° większy, niż kąt zakreślony przez wskazówkę godzinową. Wobec tego

$$30x + 270 = 360y$$

$$330y = 270$$

$$y = \frac{270}{330}h = \frac{9}{11}h = \frac{540}{11}\ \text{min}.$$

Stąd wniosek, że wskazówki po raz drugi utworzą kąt 90° po upływie $49\frac{1}{11}$ minuty.

Przykład 2

Na szkolną akademię z okazji Święta Niepodległości przyszło 520 uczniów. Można było usiąść na krześle lub w czteroosobowej ławce. Uczniowie zajęli w sumie 164 krzesła i ławki. Uczniów, którzy zajęli miejsca siedzące było 7 razy więcej niż pozostałych. Ustalimy, ile krzeseł było zajętych.
Obliczymy najpierw, ilu uczniów zajęło miejsca siedzące. Z treści zadania wynika, że było to $\frac{7}{8} \cdot 520$, czyli 455 osób.
Oznaczmy przez x liczbę zajętych krzeseł, a przez y – liczbę zajętych ławek.
Wówczas

$$\begin{cases} x + y = 164 \\ x + 4y = 455' \end{cases}$$

skąd

$$\begin{cases} x = 164 - y \\ (164 - y) + 4y = 455 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = 164 - y \\ -y + 4y = 455 - 164 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = 164 - y \\ 3y = 291 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = 164 - y \\ y = 97 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = 164 - 97 \\ y = 97 \end{cases}.$$

Wobec tego $x = 67$, czyli podczas akademii było zajętych 67 krzeseł. .

Przykład 3

Dwie maszyny tłoczą detale tego samego typu. W poniedziałek pierwsza maszyna pracowała 10 godzin, a druga 8 godzin i razem maszyny wyprodukowały 1940 detali. We wtorek pierwsza maszyna pracowała 3 godziny, a druga 5 godzin i razem wyprodukowały 894 takie detale. Ustalimy, ile godzin potrzebuje oddzielnie każda z maszyn, aby wyprodukować 5880 detali.
Oznaczmy:
x – liczba detali produkowanych przez pierwszą maszynę w ciągu godziny,
y – liczba detali produkowanych przez drugą maszynę w ciągu godziny.
Otrzymujemy układ równań

$$\begin{cases} 10x + 8y = 1940 \\ 3x + 5y = 894 \end{cases}.$$

Zatem

$$\begin{cases} 50x + 40y = 9700 \\ -24x - 40y = -7152' \end{cases}$$

skąd

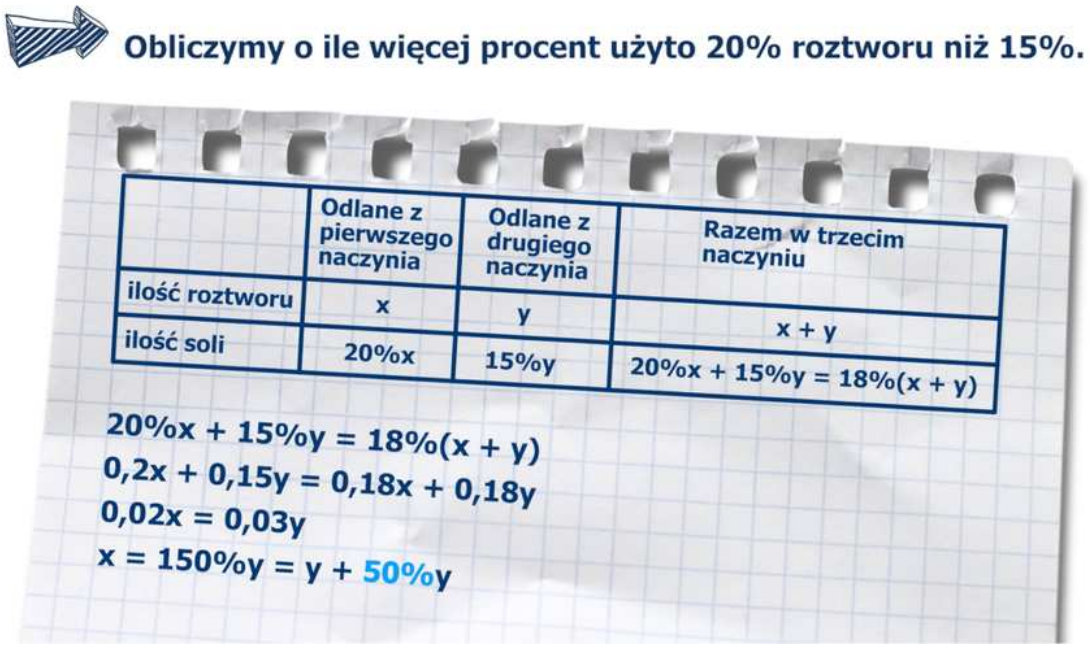
$$26x = 2548.$$

Czyli

$$x = 98, y = 120.$$

Stąd wniosek, że pierwsza maszyna wykona 5880 detali w ciągu 60 godzin, a druga – w ciągu 49 godzin.

Przykład 4



Film dostępny na portalu epodreczniki.pl

Animacja pokazuje kolejne kroki rozwiązania zadania.

W pierwszym naczyniu znajduje się dwudziestoprocentowy roztwór wodny soli, w drugim – roztwór wodny soli o stężeniu 15%. Do trzeciego, początkowo pustego naczynia, przelano pewną ilość litrów pierwszego roztworu, po czym dolano tyle litrów roztworu z drugiego naczynia, że w trzecim naczyniu otrzymano roztwór o stężeniu 18%. W ten sposób do trzeciego naczynia przelano z pierwszego o k$\%$ więcej roztworu niż z drugiego naczynia.
Obliczymy k.
Opis wszystkich wielkości ujętych w zadaniu prezentujemy w poniższej tabeli.

Tabela 02

	Odlane z pierwszego naczynia	Odlane z drugiego naczynia	Razem w trzecim naczyniu
Ilość roztworu	x	y	$x+y$
Ilość soli	20%x	15%y	20%x $+ 15\%$y $= 18\%(x+y)$

Rozwiązujemy równanie

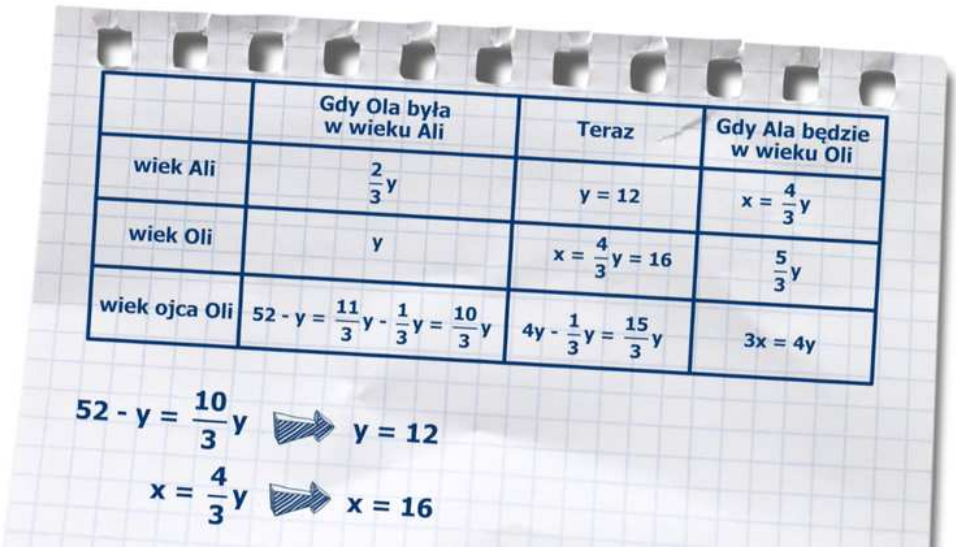
$$20\%\mathrm{x} + 15\%\mathrm{y} = 18\,\%(x+y)$$

$$20x + 15y = 18x + 18y$$

$$2x = 3y.$$

Stąd$x = \frac{3}{2}y$, a zatem $x = 150\,\%y = y + 50\,\%y$, co znaczy, że $k = 50$.

Przykład 5



Film dostępny na portalu epodreczniki.pl

Animacja pokazuje kolejne kroki rozwiązania zadania.

Ala spytała starszą koleżankę Olę: „Ile masz lat, Olu?”. Ola odpowiedziała: „Gdy ty będziesz w moim wieku, mój ojciec będzie od ciebie 3 razy starszy. Gdy ja byłam w twoim wieku, mieliśmy razem z moim ojcem 52 lata, a twój wiek stanowił dwie trzecie mojego.”
Obliczymy, ile lat ma Ola.
Oznaczmy:

- y – aktualny wiek Ali,
- x – aktualny wiek Oli.

W poniższej tabelce opisujemy fakty podane w treści zadania.

Tabela 03

	gdy Ola była w wieku Ali	teraz	gdy Ala będzie w wieku Oli

wiek Ali	$\frac{2}{3}y$	y	x
wiek Oli	y	x	
wiek ojca Oli	$52-y$		$3x$

Zauważmy, że $y-\frac{2}{3}y=x-y$, czyli $x=\frac{4}{3}y$.
Ponownie wypełniamy tabelkę.

Tabela 04

	gdy Ola była w wieku Ali	teraz	gdy Ala będzie w wieku Oli
wiek Ali	$\frac{2}{3}y$	y	$x=\frac{4}{3}y$
wiek Oli	y	$x=\frac{4}{3}y$	$\frac{5}{3}y$
wiek ojca Oli	$52-y=\frac{11}{3}y-\frac{1}{3}y=\frac{10}{3}y$	$4y-\frac{1}{3}y=\frac{11}{3}y$	$3x=4y$

Mamy w tabelce komórkę z równaniem $52-y=\frac{10}{3}y$, skąd $y=12$. To znaczy, że $\mathrm{x}=16$, czyli Ola ma 16 lat.

Przykład 6

Znajdziemy wszystkie liczby czterocyfrowe, które po skreśleniu ostatniej cyfry zmniejszają się o 1269.
Oznaczmy:

- x cyfra jedności szukanej liczby czterocyfrowej,
- y liczba trzycyfrowa, która powstaje po skreśleniu ostatniej cyfry szukanej liczby czterocyfrowej.

Wtedy liczba czterocyfrowa to $10y+x$.
Zapisujemy równanie

$$10y+x=y+1269,$$

skąd

$$9y+x=1269.$$

Zauważmy, że:

- liczba x może przyjmować jedną z wartości: $0,\ 1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5,\ 6,\ 7,\ 8,\ 9,$
- liczba $1269 - x$ jest podzielna przez 9.

Ponieważ $1269 = 9 \bullet 141$, x to możliwe
$x = 0x = 9$

- $x = 0, y = 141$ szukaną liczbą czterocyfrow 1410.
- $x = 9, y = 140$, szukaną liczbą czterocyfrowa 1409.

Przykład 7

Ustalimy, ile jest liczb trzycyfrowych, które mają następującą własność: jeżeli pomiędzy cyfrę jedności a cyfrę dziesiątek tej liczby wpiszemy znak mnożenia, to po wykonaniu mnożenia otrzymamy liczbę o 35 mniejszą od danej liczby trzycyfrowej.
Dla szukanej liczby trzycyfrowej wprowadzamy następujące oznaczenia:

- x cyfra jedności,
- y liczba dwucyfrowa otrzymana po skreśleniu cyfry jedności.

Wtedy dana liczba trzycyfrowa to $10y + x$, a iloczyn, o którym mowa w treści zadania to $y \cdot x$.
Otrzymujemy równanie

$$10y + x = \text{xy} + 35,$$

skąd

$$10y + x - \text{xy} = 35$$

$$y(10 - x) + x = 35.$$

Jeżeli teraz od obu stron równania odejmiemy 10, to lewą stronę będziemy mogli zapisać w postaci iloczynu dwóch liczb całkowitych.

$$y(10 - x)x + x - 10 = 35 - 10$$

$$y(10 - x) - (10 - x) = 25$$

$$(y - 1)(10 - x) = 25.$$

Ponieważ liczba y jest dwucyfrowa, to liczba $y - 1$ jest dodatnia, a skoro iloczyn $(y - 1)(10 - x)$ jest równy 25, to liczba $10 - x$ jest również dodatnia. Obie liczby $y - 1$ i $10 - x$ są zatem całkowitymi i dodatnimi dzielnikami liczby 25.
Zauważmy, że liczba x może przyjmować jedną z wartości: $0,\ 1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5,\ 6,\ 7,\ 8,\ 9.$
Liczba $10 - x$ jest dzielnikiem liczby 25 w dwóch przypadkach:

a. $x = 5$, wtedy $10 - x = 5$ oraz $y - 1 = \frac{25}{5} = 5$,
b. $x = 9$, wtedy $10 - x = 1$ oraz $y - 1 = 25$.

W pierwszym przypadku liczba y nie jest dwucyfrowa ($y = 6$), czyli warunki zadania nie są spełnione.
W drugim przypadku $y = 26$, skąd wniosek, że jedyną liczbą trzycyfrową o zadanych własnościach jest 269.

Zadania. Część I

Ćwiczenie 1

W koszyku znajdują się owoce: jabłka, gruszki i brzoskwinie, razem jest ich 18. Brzoskwiń jest dwa razy mniej niż jabłek, ale o dwie więcej niż gruszek. Oblicz, ile jest w tym koszyku każdego rodzaju owoców.

Ćwiczenie 2

Magda brała udział w szkolnej akcji „Góra złota". Przekazała na ten cel 135 monet, wśród których były tylko monety jednogroszowe, dwugroszowe i pięciogroszowe. Przy czym monet jednogroszowych było dwa razy mniej niż dwugroszowych. Cała kwota przekazana w ten sposób przez dziewczynkę to $2\ zł\ 65\ \ gr$. Ile monet pięciogroszowych zebrała Magda?

Ćwiczenie 3

Pewna liczba dwucyfrowa ma następujące własności

- cyfra dziesiątek tej liczby jest o 1 większa od cyfry jedności,
- jeżeli tę liczbę podzielimy przez sumę jej cyfr, to w wyniku otrzymamy 6 i resztę 1.

Jaka jest suma cyfr tej liczby?

Ćwiczenie 4

Testowana jest nowa, automatyczna linia technologiczna do produkcji pewnego detalu. Automaty, które są do niej włączone, mogą pracować na dwóch różnych poziomach wydajności.
Uruchomiono 48 automatów, które, pracując na pierwszym poziomie wydajności, miały przez 21 godzin wyprodukować ustaloną partię detali. Po 9 godzinach 3 automaty wyłączono, a pozostałe przełączono na drugi poziom wydajności, zwiększając ją w ten sposób o $28\,\%$.
Po ilu godzinach pracy przy zwiększonej wydajności wyprodukowano ustaloną partię detali?

Ćwiczenie 5

Suma jedenastu kolejnych liczb naturalnych jest równa 176. Która z tych liczb jest największa?

Ćwiczenie 6

Szkolne koło sportowe zorganizowało konkursowe zawody w rzutach do kosza z odległości $7{,}5$ metra. Każdy zawodnik oddawał 10 rzutów. Za celny rzut przyznawano 8 punktów, a za każdy rzut niecelny odbierano 3 punkty. Czy można było w ten sposób uzyskać

a. 47 punktów,

b. 63 punkty?

Ćwiczenie 7

Zmieszano $3\ \mathrm{kg}$ cukierków czekoladowych i $5\ \mathrm{kg}$ cukierków toffi. Za kilogram mieszanki trzeba zapłacić $9{,}50\ zł$. Gdyby zmieszać $5\ \mathrm{kg}$ takich cukierków czekoladowych i $3\ \mathrm{kg}$ cukierków toffi, to jeden kilogram mieszanki kosztowałby $10{,}50\ zł$.
Ile kosztuje kilogram mieszanki otrzymanej z $3\ \mathrm{kg}$ cukierków czekoladowych i $2\ \mathrm{kg}$ cukierków toffi?

Ćwiczenie 8

Na tarczy zegara wskazówki minutowa i godzinowa

- ◯ w ciągu doby tworzą kąt prosty (tak jest np. o godzinie 9.00) 24 razy
- ◯ w ciągu doby tworzą kąt półpełny (tak jest np. o godzinie 6.00) 12 razy
- ◯ w ciągu doby spotykają się (tak jest np. o godzinie 12.00) 22 razy

Ćwiczenie 9

Zapis dziesiętny pierwszej liczby sześciocyfrowej zaczyna się z lewej strony cyfrą 4. Jeżeli tę cyfrę przestawimy na ostatnie miejsce zapisu dziesiętnego, to otrzymamy drugą liczbę sześciocyfrową, która jest cztery razy mniejsza od pierwszej liczby. Znajdź te liczby.

Ćwiczenie 10

Mateusz mówi do Piotra: „Mam 3 razy więcej lat niż ty miałeś, kiedy ja miałem tyle lat, ile ty masz teraz. Kiedy osiągniesz mój wiek, będziemy mieli łącznie 112 lat. Ile lat ma obecnie Mateusz, a ile Piotr?

Ćwiczenie 11

Małgosia ma zbiór 434 znaczków pocztowych. W tym zbiorze jest 6 razy więcej znaczków polskich niż zagranicznych. Ile znaczków zagranicznych ma Małgosia?

Ćwiczenie 12

Suma trzech liczb jest równa 90. Znajdź te liczby, jeżeli druga jest 2 razy większa od pierwszej, ale o 5 mniejsza od trzeciej.

Zadania. Część II

Ćwiczenie 1

Cztery liczby całkowite pozostają w stosunku $5{:}7{:}11{:}26$. Suma dwóch skrajnych liczb jest równa 713. Jakie to liczby?

Ćwiczenie 2

Suma siedemnastu kolejnych liczb naturalnych jest równa 544. Znajdź dziewiątą z tych liczb.

Ćwiczenie 3

Z miejscowości A i B oddalonych od siebie o $90\ \mathrm{km}$ wyjechali w tym samym momencie naprzeciw siebie dwaj rowerzyści. Rowerzysta jadący z A do B jechał ze średnią prędkością o $25\,\%$ większą niż średnia prędkość drugiego rowerzysty. Po dwóch godzinach jazdy rowerzyści spotkali się w miejscowości C. O ile kilometrów oddalone są od siebie miejscowości A i C?

Ćwiczenie 4

Suma cyfr pewnej liczby dwucyfrowej jest równa 11. Po zamianie cyfr miejscami otrzymujemy liczbę większą od danej. Znajdź wszystkie liczby dwucyfrowe o tej własności.

Ćwiczenie 5

W sobotę o 9^{00} grupa znajomych wyjechała na wycieczkę rowerową z Piotrkowa do Inowłodza. Mieli do pokonania $54\ \mathrm{km}$. Jeden z uczestników spóźnił się i z miejsca zbiórki wyjechał o 9^{20}. Z jaką średnią prędkością musi jechać ten spóźnialski, żeby dogonić grupę zanim dojedzie do Inowłodza, jeśli grupa jedzie ze średnią prędkością $18\ \mathrm{km}/h$?

Ćwiczenie 6

Cyfrą dziesiątek pewnej liczby trzycyfrowej jest 5, a suma wszystkich jej cyfr jest równa 17. Jeżeli cyfry setek i dziesiątek zamienimy miejscami, to otrzymamy liczbę o 90 większą od danej liczby. Znajdź tę liczbę trzycyfrową.

Ćwiczenie 7

Dwaj bracia Janek i Franek zaplanowali, że w sobotę odwiedzą babcię. Babcia chłopców mieszka w odległości $20\ \mathrm{km}$ od ich domu. Janek wyszedł z domu o godzinie 6^{00} i szedł do babci z prędkością $5\ \mathrm{km}/h$. Franek wyjechał z domu do babci o 7^{48} na rowerze i dogonił Janka po 36 minutach jazdy. Obaj chłopcy kontynuowali podróż, nie zmieniając prędkości.
O której godzinie Franek przyjechał do babci?

Ćwiczenie 8

Kwotę $970\ \mathrm{zł}$ wypłacono banknotami o nominałach $20\ \mathrm{zł}$, $50\ \mathrm{zł}$ i $100\ \mathrm{zł}$. Ile było banknotów każdej wartości, jeżeli banknotów stuzłotowych było 2 razy więcej niż pięćdziesiątek, a dwudziestek o 2 więcej niż pięćdziesiątek i setek razem?

Ćwiczenie 9

Jeśli do pewnej liczby trzycyfrowej dopiszemy na końcu cyfrę 9, to otrzymamy liczbę o 4257 większą od danej. Jaka to liczba?

Ćwiczenie 10

Ile wody trzeba odparować z $3\ \mathrm{kg}$ wodnego roztworu soli kuchennej o stężeniu $5\,\%$, żeby otrzymać roztwór o stężeniu $12\,\%$?

Ćwiczenie 11

Bilet na pewne przedstawienie kosztował odpowiednio $20\ \mathrm{zł}$ dla dorosłych i $12\ \mathrm{zł}$ dla dzieci. Po potrąceniu $18\,\%$ kwoty uzyskanej ze sprzedaży biletów na koszty związane z wynajęciem sali, organizatorzy uzyskali $2624\ \mathrm{zł}$ dochodu. Ilu dorosłych i ile dzieci było na tym przedstawieniu, jeżeli wiadomo, że sprzedano 222 bilety?

Ćwiczenie 12

Osiemnaście lat temu dziadek Marka był trzy razy starszy od taty Marka, a obecnie dziadek jest dwa razy starszy od taty Marka. Ile lat ma dziadek Marka, a ile jego tata?

Ćwiczenie 13

Ile gramów złota próby $0{,}680$ należy stopić z $10\ \mathrm{g}$ złota próby $0{,}960$, aby otrzymać złoto próby $0{,}750$?

Ćwiczenie 14

W pierwszym naczyniu znajduje się $12\,\%$ roztwór wodny soli, w drugim – roztwór wodny soli o stężeniu $16\,\%$. Do trzeciego, początkowo pustego naczynia przelano pewną ilość roztworu z pierwszego naczynia, po czym dolano tyle roztworu z drugiego naczynia, że w trzecim naczyniu otrzymano $4\ \mathrm{kg}$ roztworu o stężeniu $15\,\%$. Ile kg roztworu z drugiego naczynia dolano do trzeciego naczynia?

Ćwiczenie 15

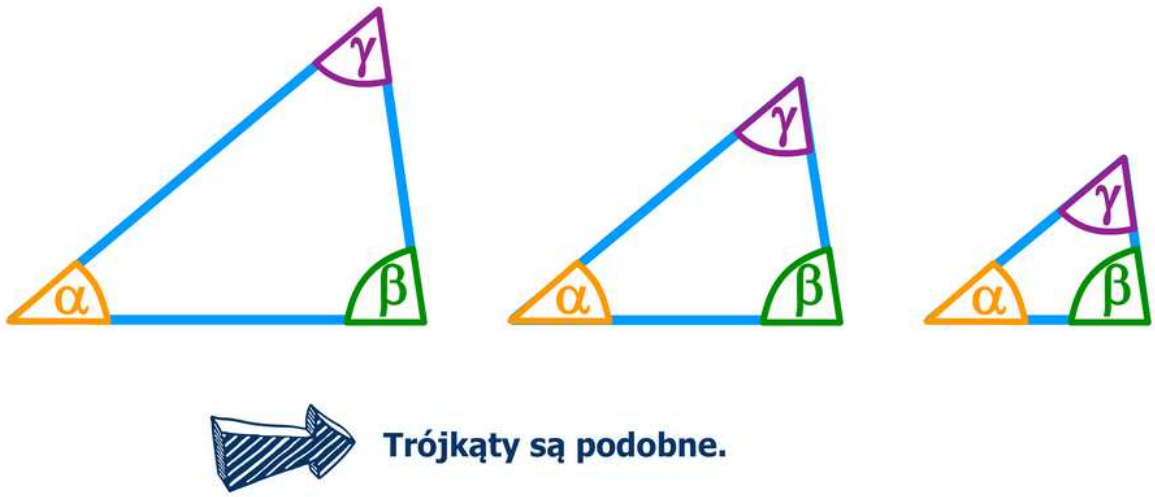
W zakładzie poligraficznym do produkcji kopert bąbelkowych używane są dwa różne automaty, które przez 10 minut pracy wytwarzają razem 2700 kopert. Gdyby pierwszy automat pracował przez 12 minut, a drugi przez 15 minut, to wyprodukowałyby tę samą liczbę kopert. Ile czasu potrzebuje każdy z tych automatów, żeby wyprodukować 600 kopert?

Ćwiczenie 16

Znajdź wszystkie liczby trzycyfrowe, które po skreśleniu ostatniej cyfry zmniejszają się o 650.

Wprowadzenie do trygonometrii

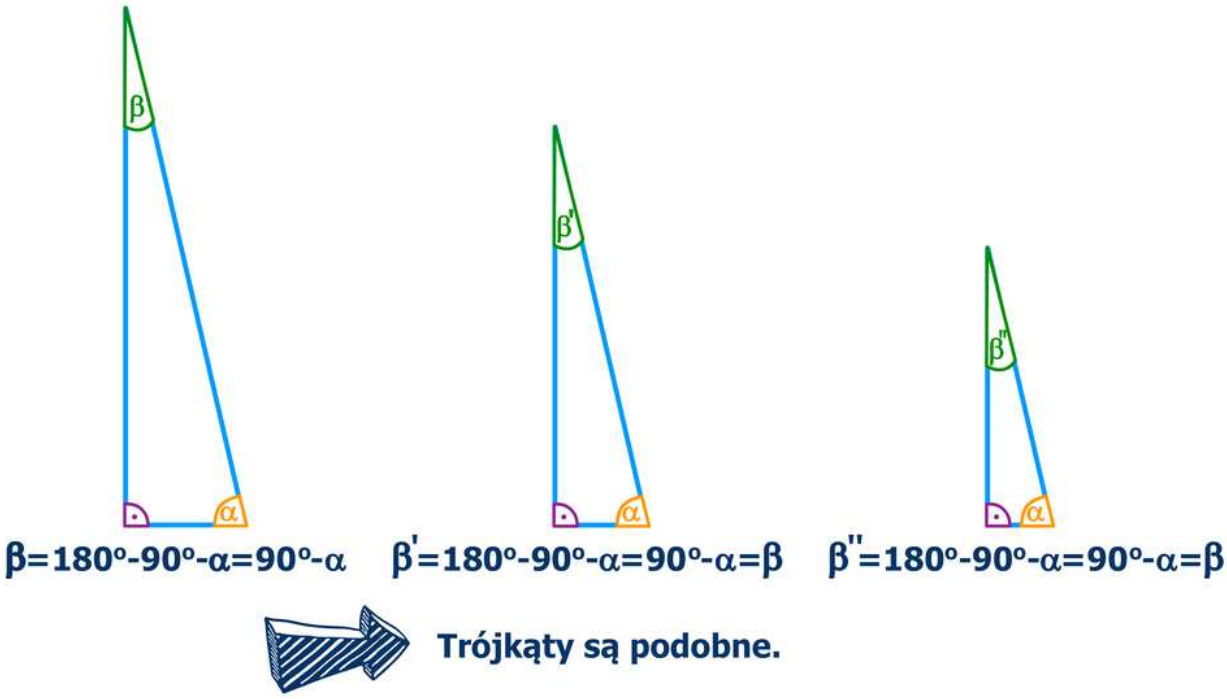
Przypomnijmy, że trójkąty są podobne, jeśli wszystkie ich odpowiednie kąty są równe (cecha kąt-kąt-kąt).



Film dostępny na portalu epodreczniki.pl

Animacja pokazuje trzy różnych wymiarów zdjęcia tej samej budowli w kształcie trójkątna ostrokątnego. Na zdjęciu największym zaznaczono kąty alfa, beta i gamma. Porównując, w dwóch etapach (zdjęcie największe i średnie a potem największe i najmniejsze) odpowiednie kąty tych budowli, zauważamy że odpowiednie kąty w tych trójkątach są tej samej miary, a więc trójkąty są podobne.

Korzystając z cechy podobieństwa kąt-kąt-kąt, możemy sprawdzić, czy dwa trójkąty prostokątne są podobne, gdy w każdym z nich znamy miarę jednego z kątów ostrych.



Film dostępny na portalu epodreczniki.pl

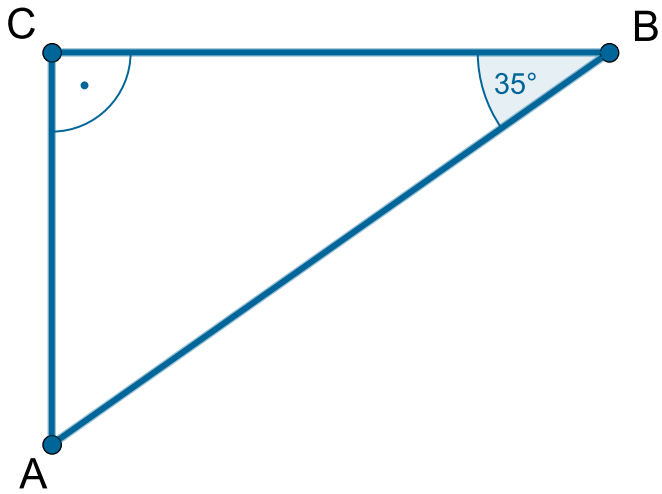
Animacja pokazuje trzy różnych wymiarów zdjęcia żaglówki, na których narysowano trójkąty prostokątne o kątach 90 stopni i alfa. W pierwszym trójkącie brakujący kąt beta równy 90 stopni minus alfa. W drugim trójkącie kąt beta prim równy 90 stopni minus alfa równy beta. W trzecim trójkącie kąt beta bis równy 90 stopni minus alfa równy beta, więc trójkąty są podobne.

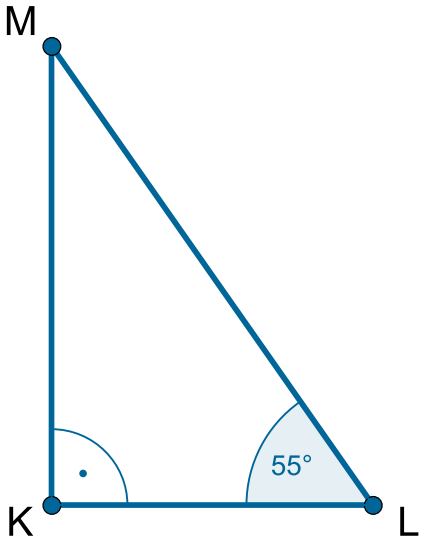
Przykład 1

W trójkącie prostokątnym ABC kąt przy wierzchołku C jest prosty, a miara kąta ABC jest równa 35°. W trójkącie prostokątnym KLM kąt przy wierzchołku K jest prosty, a miara kąta KLM jest równa 55°.
A zatem

$$|\sphericalangle \mathrm{ACB}| = |\sphericalangle L\,\mathrm{KM}| = 90^\circ,\ |\sphericalangle \mathrm{ABC}| = |\sphericalangle \mathrm{KML}| = 35^\circ\ ,\ |\sphericalangle \mathrm{BAC}| = |\sphericalangle \mathrm{KLM}| = 55^\circ.$$

Trójkąty ABC i KLM są więc podobne, co stwierdzamy, powołując się na cechę podobieństwa kąt-kąt-kąt.





W trójkątach podobnych pary odpowiednich boków są proporcjonalne – boki trójkątów ABC i KLM spełniają więc zależność

$$\frac{|AB|}{|LM|} = \frac{|BC|}{|KM|} = \frac{|AC|}{|KL|}.$$

Wynika z tego, że każdy stosunek długości dwóch boków w trójkącie ABC jest równy stosunkowi długości odpowiednich boków w trójkącie KLM, np.

$$\frac{|AB|}{|BC|} = \frac{|LM|}{|KM|}, \frac{|AC|}{|BC|} = \frac{|KL|}{|KM|}, \frac{|AC|}{|AB|} = \frac{|KL|}{|LM|}.$$

Przykład 2

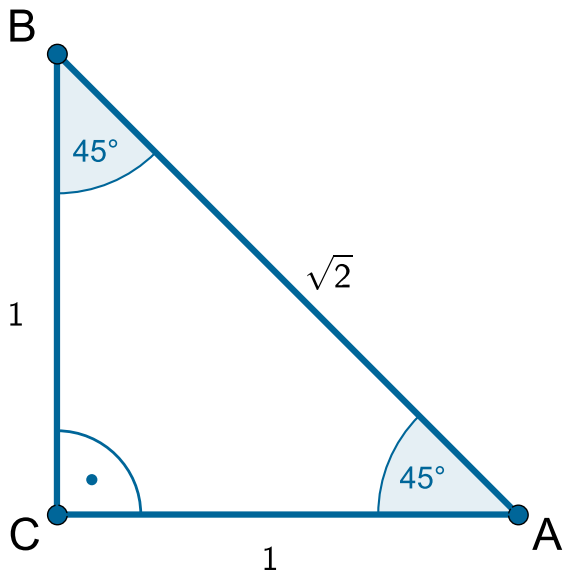
Rozpatrzmy trójkąt prostokątny ABC, którego przyprostokątne AC i BC są równe 1. Ponieważ trójkąt ten jest równoramienny, to miary jego kątów ostrych ABC i CAB są równe 45°.
Z twierdzenia Pitagorasa obliczamy długość przeciwprostokątnej AB tego trójkąta.

$$|AB|^2 = |AC|^2 + |BC|^2$$

$$|AB|^2 = 1^2 + 1^2.$$

Ponieważ $|AB| > 0$, stąd

$$|AB| = \sqrt{2}.$$



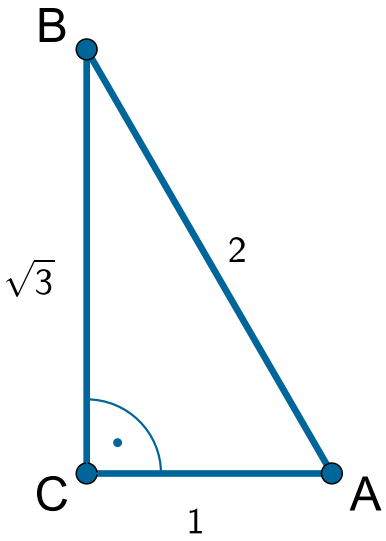
Wówczas $\frac{|AC|}{|BC|} = 1$, $\frac{|AC|}{|AB|} = \frac{1}{\sqrt{2}}$, czyli $\frac{|AC|}{|AB|} = \frac{\sqrt{2}}{2}$, a także $\frac{|BC|}{|AB|} = \frac{\sqrt{2}}{2}$.
Każdy równoramienny trójkąt prostokątny jest podobny do trójkąta ABC, co stwierdzamy na mocy cechy podobieństwa kąt-kąt-kąt. Zatem w każdym trójkącie prostokątnym, którego jeden z kątów ostrych jest równy 45°, stosunek dowolnie wybranej przyprostokątnej do przeciwprostokątnej jest równy $\frac{\sqrt{2}}{2}$.

Przykład 3

Pokażemy, że trójkąt prostokątny, w którym stosunek jednej z przyprostokątnych do przeciwprostokątnej jest równy $\frac{\sqrt{2}}{2}$, jest trójkątem, w którym oba kąty ostre są równe 45°. Oznaczając długość przeciwprostokątnej tego trójkąta przez x, gdzie $x > 0$, zauważmy, że jedna z jego przyprostokątnych ma długość $\frac{\sqrt{2}}{2}x$, a zatem (na podstawie twierdzenia Pitagorasa) druga przyprostokątna ma długość $\sqrt{x^2 - \left(\frac{\sqrt{2}}{2}x\right)^2} = \frac{\sqrt{2}}{2}x$. Wobec tego dany trójkąt prostokątny jest równoramienny, więc każdy z jego kątów ostrych ma miarę 45°.

Przykład 4

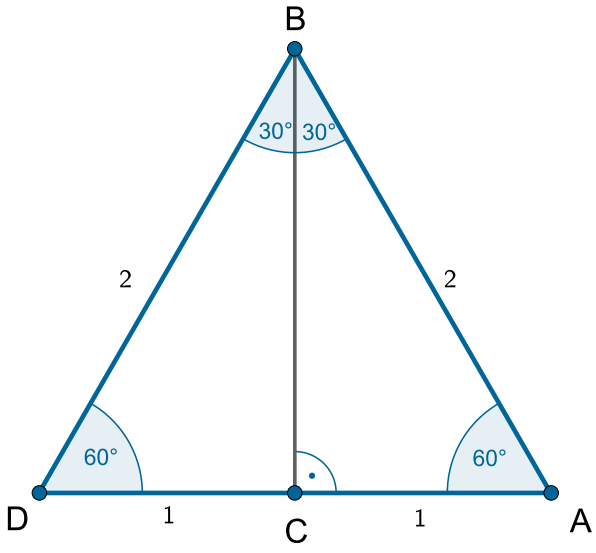
Rozpatrzmy trójkąt prostokątny ABC, którego przyprostokątna AC jest równa 1, a przeciwprostokątna AB jest równa 2. Z twierdzenia Pitagorasa obliczamy $|BC| = \sqrt{3}$.



Na prostej AC wybierzmy teraz punkt D symetryczny do punktu A względem punktu C. Wtedy

$$|\mathrm{AD}| = 2,\ |\mathrm{DB}| = |\mathrm{AB}|,$$

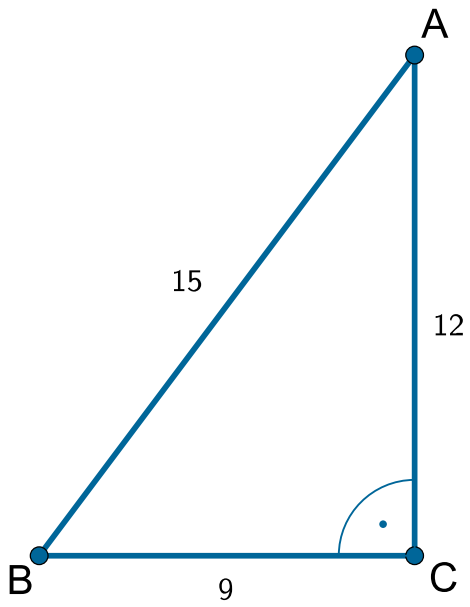
bo odcinki AB i DB są symetryczne względem prostej BC. Wobec tego trójkąt ABD jest równoboczny, a BC to jego wysokość poprowadzona do boku AD.



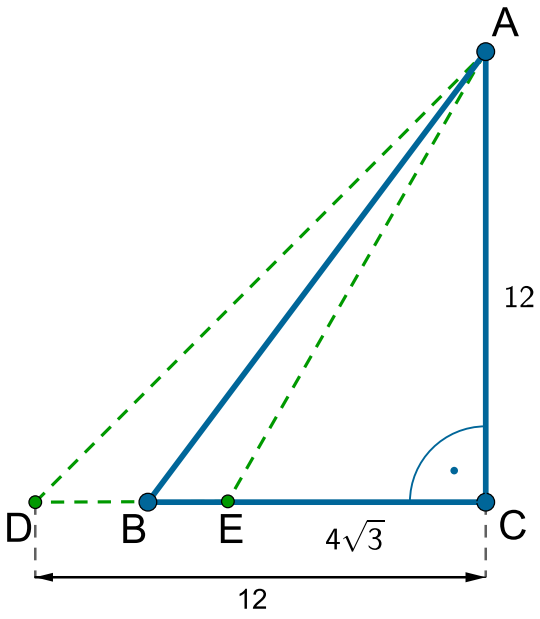
Wynika z tego, że w trójkącie ABC kąt ostry leżący naprzeciwko przyprostokątnej AC ma miarę 30°, a kąt ostry leżący naprzeciwko przyprostokątnej BC ma miarę 60°.

Przykład 5

Rozpatrzmy trójkąt prostokątny ABC, którego przyprostokątna BC jest równa 9, a przeciwprostokątna AB jest równa 15.
Z twierdzenia Pitagorasa obliczamy $|\mathrm{AC}| = 12$.



Wybierzmy na półprostej CB takie punkty D i E, że $|\mathrm{CD}| = 12$ i $|\mathrm{CE}| = 4\sqrt{3}$.



Wtedy:

- w trójkącie ACD jest $|\mathrm{AC}| = |\mathrm{CD}|$, więc kąt DAC ma miarę 45°.
- w trójkącie ACE jest $\frac{|\mathrm{CE}|}{|\mathrm{AC}|} = \frac{\sqrt{3}}{3}$, a zatem kąt EAC ma miarę 30°.

Zatem kąt ostry BAC w trójkącie ABC ma miarę większą niż 30° i mniejszą niż 45°.
Za pomocą kątomierza, można zmierzyć na rysunku, że kąt ten ma miarę około 39°.

Przykład 6

Każdy trójkąt prostokątny, którego kąty ostre mają miary 30°, 60° jest podobny do trójkąta ABC, opisanego w poprzednim przykładzie. Wobec tego w każdym takim trójkącie prostokątnym:

- stosunek długości przyprostokątnej leżącej naprzeciw kąta 30° do przeciwprostokątnej jest równy $\frac{1}{2}$,
- stosunek długości przyprostokątnej leżącej przy kącie 30° do przeciwprostokątnej jest równy $\frac{\sqrt{3}}{2}$,
- stosunek długości przyprostokątnej leżącej naprzeciw kąta 30° do drugiej przyprostokątnej jest równy $\frac{1}{\sqrt{3}}$, czyli $\frac{\sqrt{3}}{3}$.

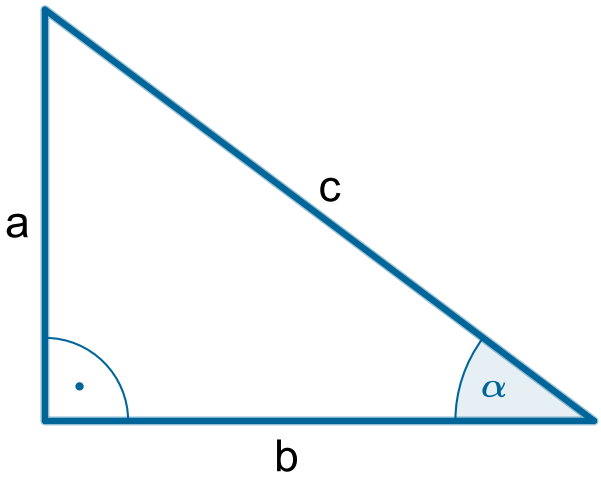
Wynika z tego również, że:

- w każdym trójkącie prostokątnym, w którym jedna z przyprostokątnych jest dwa razy krótsza od przeciwprostokątnej, kąt ostry leżący naprzeciw tej przyprostokątnej jest równy 30°,
- w każdym trójkącie prostokątnym, w którym stosunek długości jednej z przyprostokątnych do długości przeciwprostokątnej jest równy $\frac{\sqrt{3}}{2}$, kąt ostry leżący naprzeciw tej przyprostokątnej jest równy 60°,
- w każdym trójkącie prostokątnym, w którym stosunek długości jednej z przyprostokątnych do długości drugiej przyprostokątnej jest równy $\sqrt{3}$, kąt ostry leżący naprzeciw krótszej przyprostokątnej jest równy 30°.

Sinus, cosinus i tangens kąta ostrego

Definicja: Sinus, cosinus i tangens kąta ostrego w trójkącie prostokątnym

Załóżmy, że w trójkącie prostokątnym jeden z kątów ostrych ma miarę α. Wprowadzimy nazwy stosunków długości boków tego trójkąta.



- Sinusem kąta ostrego α (w skrócie sinα) nazywamy stosunek długości przyprostokątnej leżącej naprzeciw kąta α do długości przeciwprostokątnej.
- Cosinusem kąta ostrego α (w skrócie cosα) nazywamy stosunek długości przyprostokątnej leżącej przy kącie α do długości przeciwprostokątnej.
- Tangensem kąta ostrego α (w skrócie tgα) nazywamy stosunek długości przyprostokątnej leżącej naprzeciw kąta α do długości przyprostokątnej leżącej przy kącie α.

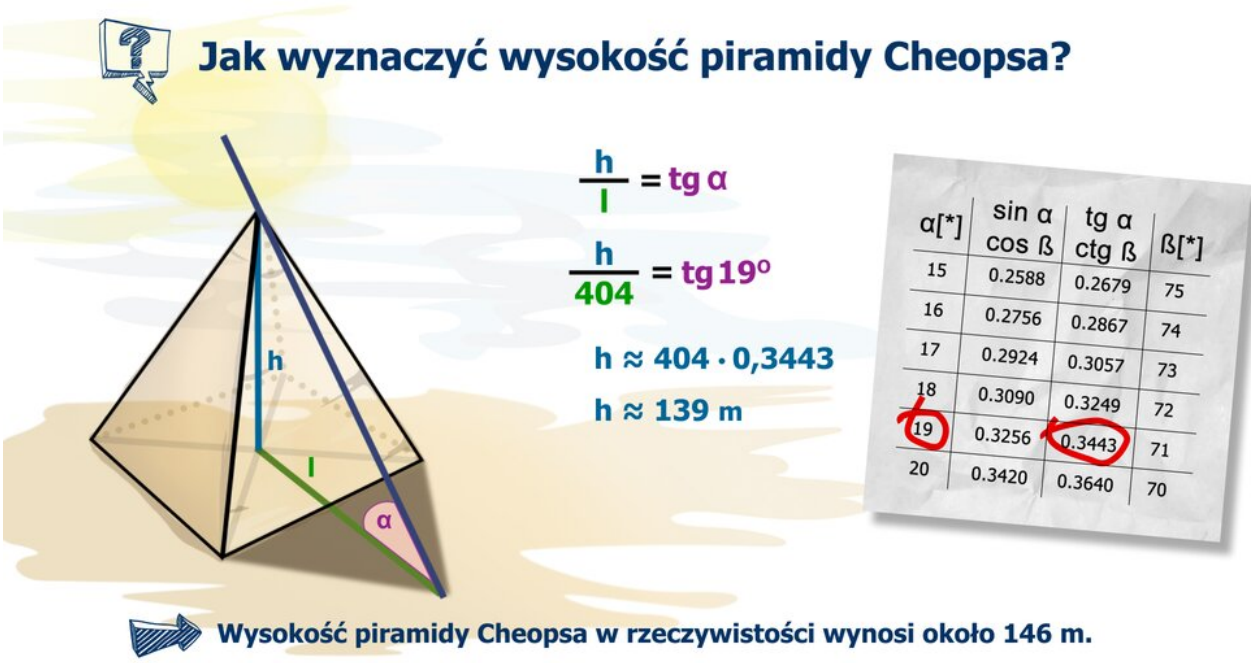
Zasób interaktywny dostępny pod adresem https://zpe.gov.pl/a/DtTIRqwDI

Korzystając z oznaczeń na rysunku, zapisujemy

$$\sin\alpha = \frac{a}{c},\ \cos\alpha = \frac{b}{c},\ \operatorname{tg}\alpha = \frac{a}{b}.$$

Powyższe zależności nazywa się funkcjami trygonometrycznymi kąta ostrego α.

Przykład 1



Film dostępny na portalu epodreczniki.pl

Animacja pokazuje jak wyznaczyć wysokość Piramidy Cheopsa. Długość cienia rzucanego przez wierzchołek piramidy to przeciwprostokątna. Wysokość piramidy h i odległość l od spodka wysokości do końca cienia to przyprostokątne. l =404 metry. Kąt alfa między przyprostokątnymi wynosi 19 stopni. Zapisujemy związek między przyprostokątnymi trójkąta. Korzystając z funkcji tangens z tablic trygonometrycznych odczytujemy wartość kąta 19 stopni i obliczamy, że wysokość Piramidy Cheopsa wynosi 139 metrów.

Film dostępny na portalu epodreczniki.pl

Animacja pokazuje jak wyznaczyć wysokość rampy korzystając z funkcji trygonometrycznych w trójkącie prostokątnym.

Uwaga!

Bezpośrednio z definicji wynika, że dla dowolnego kąta ostrego α

$$\sin\alpha > 0, \cos\alpha > 0.$$

Ponadto, w każdym trójkącie prostokątnym najdłuższym bokiem jest przeciwprostokątna, zatem dla dowolnego kąta ostrego α

$$\sin\alpha < 1, \ \cos\alpha < 1.$$

Twierdzenie: 1

Dla dowolnego kąta ostrego α prawdziwe są nierówności:

$$0 < \sin\alpha < 1$$

$$0 < \cos\alpha < 1.$$

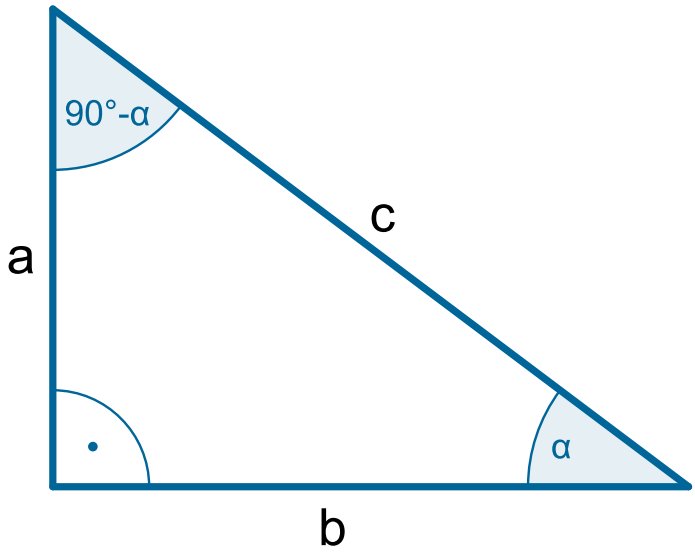
Uwaga!

Jeżeli jeden z kątów ostrych trójkąta prostokątnego ma miarę α, to drugi kąt ostry w tym trójkącie ma miarę $90^\circ - \alpha$. Korzystając z definicji funkcji trygonometrycznych, zapisujemy

$$\sin(90^\circ - \alpha) = \frac{b}{c}$$

$$\cos(90^\circ - \alpha) = \frac{a}{c}$$

$$\operatorname{tg}(90^\circ - \alpha) = \frac{b}{a}.$$



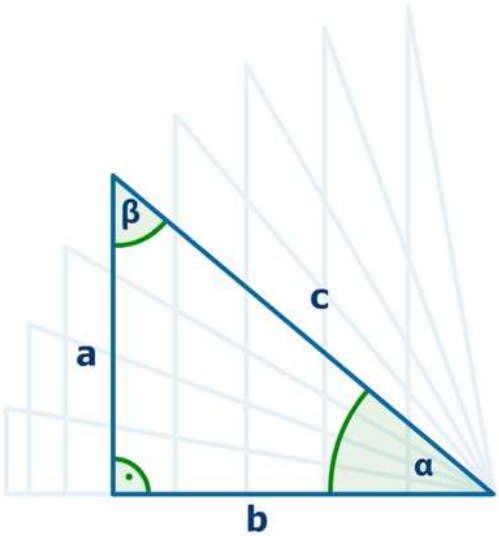
Twierdzenie: 2

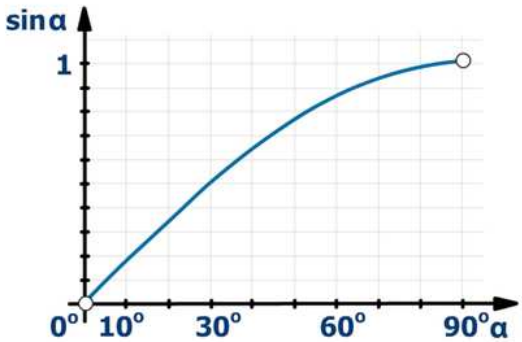
Dla dowolnego kąta ostrego α prawdziwe są równości

$$\cos(90^\circ - \alpha) = \sin\alpha$$

$$\sin(90^\circ - \alpha) = \cos\alpha$$

$$\operatorname{tg}(90^\circ - \alpha) = \frac{1}{\operatorname{tg}\alpha}.$$



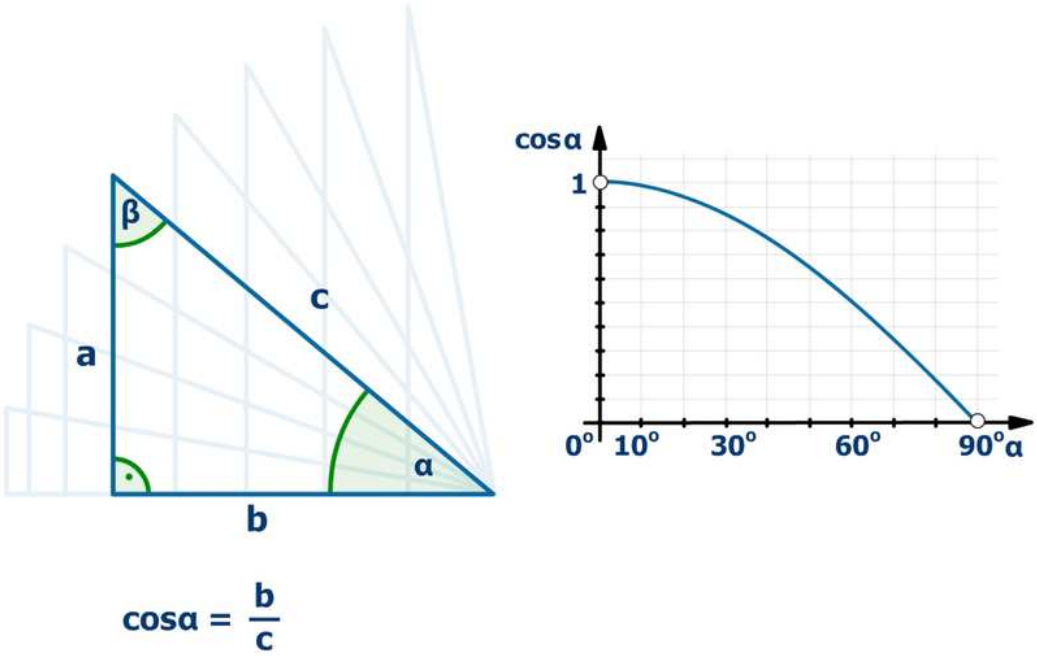


$$\sin\alpha = \frac{a}{c}$$

Film dostępny na portalu epodreczniki.pl

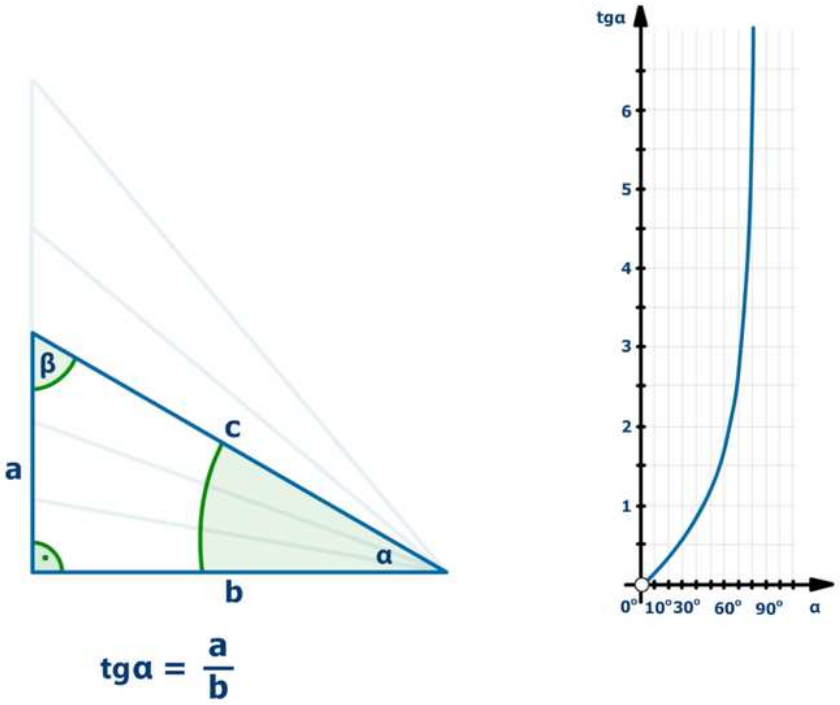
Animacja pokazuje jak obliczyć sinus dla kąta ostrego w trójkącie prostokątnym o przyprostokątnych długość a, b i przeciwprostokątnej długość c. Kąt alfa leży naprzeciw

przyprostokątnej a, kąt beta leży naprzeciw przyprostokątnej b. Mierzymy linijką długości przyprostokątnej a i przeciwprostokątnej c trójkąta prostokątnego dla kątów 10 stopni, 20 stopni, 30 stopni, 40 stopni, 50 stopni, 60 stopni, 80 stopni, 90 stopni. Otrzymane liczby wstawiamy do wzoru funkcji sinus i obliczamy wartość funkcji sinus dla danego kąta. Otrzymane wartości tworzą na wykresie fragment funkcji sinus.



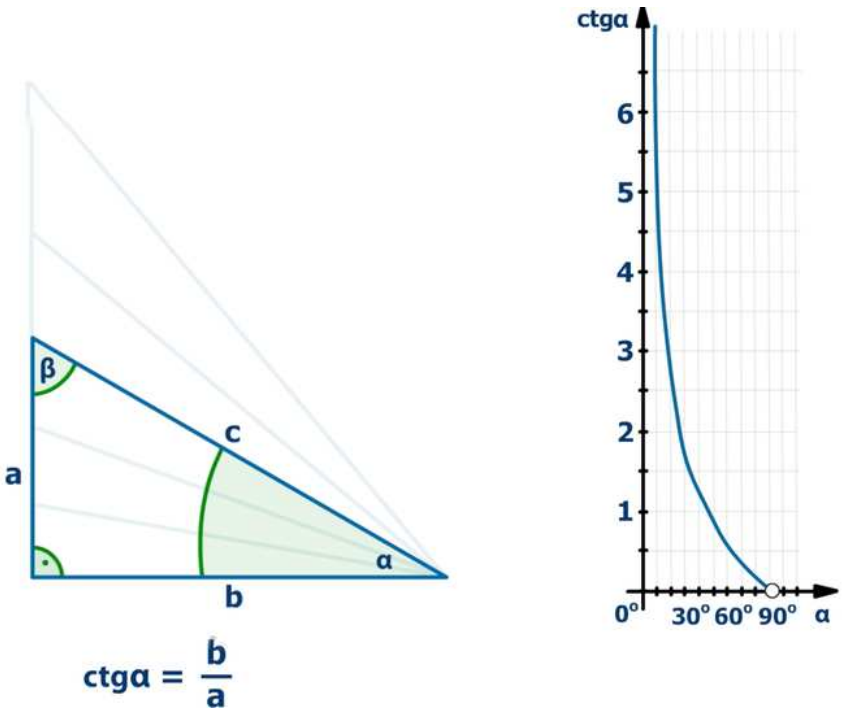
Film dostępny na portalu epodreczniki.pl

Animacja pokazuje jak obliczyć cosinus dla kąta ostrego w trójkącie prostokątnym o przyprostokątnych długość a, b i przeciwprostokątnej długość c. Kąt alfa leży naprzeciw przyprostokątnej a, kąt beta leży naprzeciw przyprostokątnej b. Mierzymy linijką długości przyprostokątnej b i przeciwprostokątnej c trójkąta prostokątnego dla kątów 10 stopni, 20 stopni, 30 stopni, 40 stopni, 50 stopni, 60 stopni, 80 stopni, 90 stopni. Otrzymane liczby wstawiamy do wzoru funkcji cosinus i obliczamy wartość funkcji cosinus dla danego kąta. Otrzymane wartości tworzą na wykresie fragment funkcji cosinus.



Film dostępny na portalu epodreczniki.pl

Animacja pokazuje jak obliczyć tangens dla kąta ostrego w trójkącie prostokątnym o przyprostokątnych długość a, b i przeciwprostokątnej długość c. kąt alfa leży naprzeciw przyprostokątnej a, kąt beta leży naprzeciw przyprostokątnej b. Mierzymy linijką długości przyprostokątnych a i b trójkąta prostokątnego dla kątów 10 stopni, 20 stopni, 30 stopni, 40 stopni, 50 stopni, 60 stopni, 80 stopni, 90 stopni. Wstawiamy otrzymane liczby do wzoru funkcji tangens i obliczamy wartość funkcji tangens dla danego kąta. Otrzymane wartości tworzą na wykresie fragment funkcji tangens.



Film dostępny na portalu epodreczniki.pl

Animacja pokazuje jak obliczyć sinus dla kąta ostrego w trójkącie prostokątnym o przyprostokątnych długość a, b i przeciwprostokątnej długość c. Kąt alfa leży naprzeciw przyprostokątnej a, kąt beta leży naprzeciw przyprostokątnej b. Mierzymy linijką długości przyprostokątnych a i b trójkąta prostokątnego dla kątów 10 stopni, 20 stopni, 30 stopni, 40 stopni, 50 stopni, 60 stopni, 80 stopni, 90 stopni. Wstawiamy otrzymane liczby do wzoru funkcji cotangens i obliczamy wartość funkcji cotangens dla danego kąta. Otrzymane wartości tworzą na wykresie fragment funkcji cotangens.

Przykłady

Przykład 1

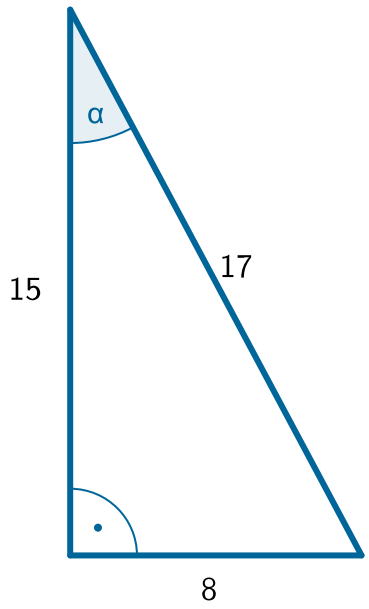
Na podstawie spostrzeżeń poczynionych w poprzednich przykładach, uzupełnimy tabelkę, wpisując wartości sinusa, cosinusa i tangensa kątów: 30°, 45°, 60°.

Tabela 0.1

α	30°	45°	60°
$\sin\alpha$	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$
$\cos\alpha$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$
$\operatorname{tg}\alpha$	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$

Przykład 2

Trójkąt na rysunku jest prostokątny.



Dla tego trójkąta zachodzą następujące związki trygonometryczne:

$$\sin\alpha = \frac{8}{17},\ \cos\alpha = \frac{15}{17},\ \operatorname{tg}\alpha = \frac{8}{15}$$

oraz

$$\sin(90^\circ - \alpha) = \frac{15}{17}, \ \cos(90^\circ - \alpha) = \frac{8}{17}, \mathrm{tg}(90^\circ - \alpha) = \frac{15}{8}.$$

Przykład 3

W trójkącie prostokątnym jeden z kątów ostrych ma miarę α, przyprostokątna leżąca naprzeciw tego kąta ma długość 5, a druga przyprostokątna ma długość 4. Wtedy

$$\mathrm{tg}\alpha = \frac{5}{4}.$$

Z twierdzenia Pitagorasa obliczamy długość przeciwprostokątnej c tego trójkąta

$$c^2 = 4^2 + 5^2.$$

Ponieważ $c > 0$, stąd

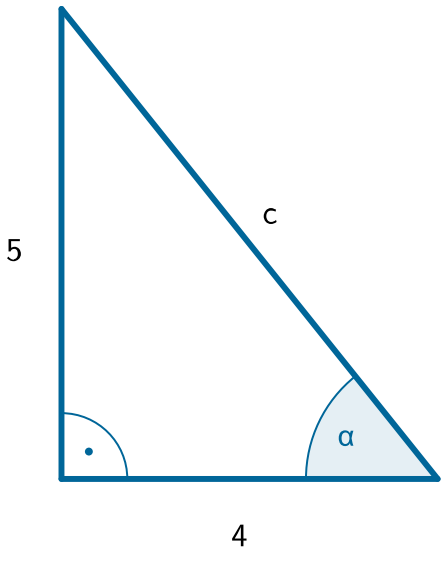
$$\mathrm{c} = \sqrt{41.}$$

Zatem

$$\sin\alpha = \frac{5}{\sqrt{41}}, \ \cos\alpha = \frac{4}{\sqrt{41}},$$

czyli

$$\sin\alpha = \frac{5\sqrt{41}}{41}, \ \cos\alpha = \frac{4\sqrt{41}}{41}.$$



Przykład 4

Obliczymy wartość wyrażenia

$$\frac{2\sin 42^\circ + 3\cos 48^\circ}{5\cos 48^\circ - 4\sin 42^\circ}.$$

Zauważmy, że

$$42^\circ + 48^\circ = 90^\circ.$$

Wobec tego

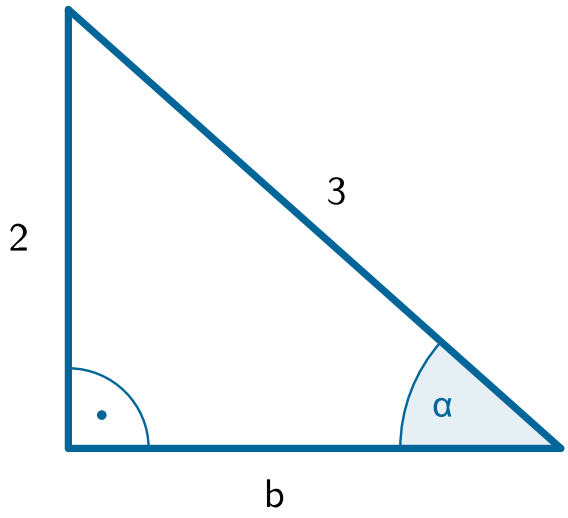
$$\cos 48^\circ = \cos(90^\circ - 42^\circ) = \sin 42^\circ,$$

a zatem

$$\frac{2\sin 42^\circ + 3\cos 48^\circ}{5\cos 48^\circ - 4\sin 42^\circ} = \frac{2\sin 42^\circ + 3\sin 42^\circ}{5\sin 42^\circ - 4\sin 42^\circ} = \frac{5\sin 42^\circ}{\sin 42^\circ} = 5.$$

Przykład 5

Kąt α jest ostry i $\sin\alpha = \frac{2}{3}$. Znajdziemy wartości $\cos\alpha$ i $\mathrm{tg}\alpha$.
Wystarczy w tym celu rozpatrzyć dowolny trójkąt prostokątny, w którym stosunek długości jednej z przyprostokątnych do długości przeciwprostokątnej jest równy $\frac{2}{3}$. Najprostszym przykładem jest trójkąt o przeciwprostokątnej długości 3 i jednej z przyprostokątnych długości 2. Kąt α leży wtedy naprzeciwko tej przyprostokątnej.



Korzystając z twierdzenia Pitagorasa, obliczamy długość b drugiej przyprostokątnej

$$2^2 + b^2 = 3^2.$$

Ponieważ $b > 0$, stąd

$$b = \sqrt{5}.$$

Zatem

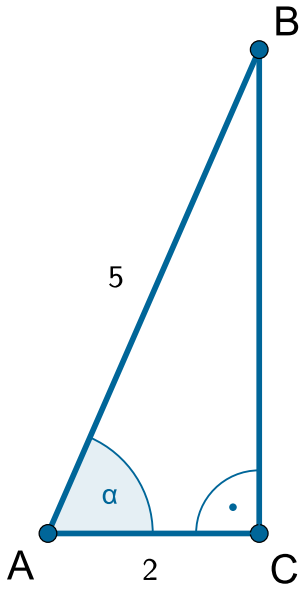
$$\cos\alpha = \frac{\sqrt{5}}{3}, \mathrm{tg}\alpha = \frac{2}{\sqrt{5}},$$

czyli

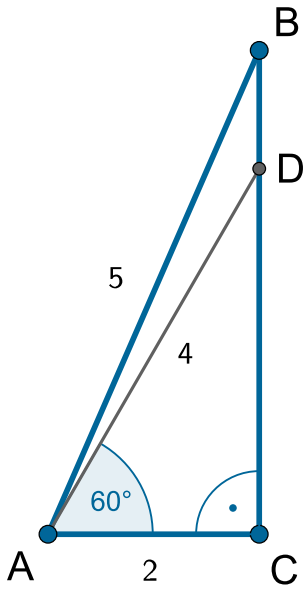
$$\mathrm{tg}\alpha = \frac{2\sqrt{5}}{5}.$$

Przykład 6

Wykażemy, że jeżeli kąt α jest ostry i $\cos\alpha = \frac{2}{5}$, to $\alpha > 60^\circ$.
Rozpatrzmy trójkąt prostokątny ABC, w którym $|AC| = 2$ i $|AB| = 5$. Wtedy $\cos(\sphericalangle BAC) = \frac{2}{5}$, co oznacza, że miary kątów $|\sphericalangle BAC|$ i α są równe.



Wybierzmy na przyprostokątnej BC taki punkt D, że $|AD| = 4$.



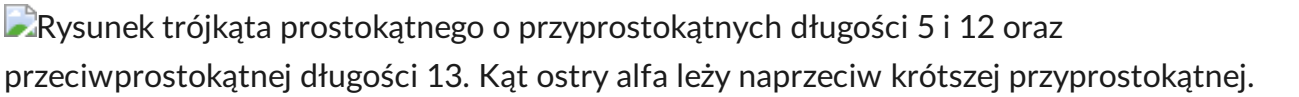
Wówczas $\cos(\sphericalangle \mathrm{DAC}) = \frac{2}{4}$, czyli $\cos(\sphericalangle \mathrm{DAC}) = \frac{1}{2}$, więc $|\sphericalangle \mathrm{DAC}| = 60^\circ$. Ponieważ $|\sphericalangle \mathrm{DAC}| < |\sphericalangle \mathrm{BAC}|$, to $60^\circ < \alpha$. Koniec dowodu.

Uwaga. Zestaw wzorów, przygotowany dla potrzeb egzaminu maturalnego z matematyki, zawiera tablicę wartości funkcji trygonometrycznych. Można z niej odczytać, że $\cos 68^\circ \approx 0{,}4040$ i $\cos 69^\circ \approx 0{,}3839$. Wynika stąd, że kąt ostry α, dla którego $\cos\alpha = 0{,}4$, jest kątem z przedziału $(68^\circ, 69^\circ)$.

Zadania. Część I

Ćwiczenie 1

Na rysunku zaznaczono długości boków trójkąta prostokątnego. Jeden z kątów ostrych tego trójkąta ma miarę α.


Rysunek trójkąta prostokątnego o przyprostokątnych długości 5 i 12 oraz przeciwprostokątnej długości 13. Kąt ostry alfa leży naprzeciw krótszej przyprostokątnej.

Wówczas

- [ ] $\mathrm{tg}\alpha > 1$
- [ ] $\sin\alpha = \frac{5}{13}$
- [ ] $13\cos\alpha = 12$

Ćwiczenie 2

Jeżeli $\alpha = 30^\circ$ i $\beta = 45^\circ$, to

- [ ] $\cos\alpha \cdot \cos\beta = \frac{\sqrt{6}}{4}$
- [ ] $\sqrt{3} \cdot \mathrm{tg}\alpha = \mathrm{tg}\beta$
- [ ] $\sin\alpha + \sin\beta = \frac{3}{4}$

Ćwiczenie 3

W trójkącie prostokątnym przyprostokątne mają długości 4 i 7, a mniejszy z kątów ostrych ma miarę α. Wówczas

- [ ] $\mathrm{tg}(90^\circ - \alpha) < 2$
- [ ] $\cos\alpha = \frac{7}{\sqrt{65}}$
- [ ] $\cos(90^\circ - \alpha) = \frac{4}{11}$

Ćwiczenie 4

Jeżeli $\alpha = 49^\circ$, to

- [ ] $\sin\alpha > \frac{1}{2}$
- [ ] $\cos\alpha > \frac{\sqrt{2}}{2}$
- [ ] $\mathrm{tg}\alpha > 1$

Ćwiczenie 5

Prawdziwa jest równość

- [ ] $\sin 12^\circ = \cos 78^\circ$
- [ ] $\mathrm{tg}\, 65^\circ \cdot \mathrm{tg}\, 25^\circ = 1$
- [ ] $\cos 51^\circ = \sin 59^\circ$

Ćwiczenie 6

Kąt α jest ostry oraz $\sin\alpha = 0{,}1$. Wówczas

- [ ] $\operatorname{tg}\alpha < \frac{1}{11}$
- [ ] $\operatorname{tg}\alpha \cdot \cos\alpha < 0{,}1$
- [ ] $\cos\alpha > 0{,}9$

Ćwiczenie 7

Kąt α jest ostry oraz $\cos\alpha = \sin 38^\circ$. Wynika z tego, że

- [ ] $\alpha > 60^\circ$
- [ ] $\operatorname{tg}\alpha > 1$
- [ ] $\sin\alpha = \cos 38^\circ$

Ćwiczenie 8

W trójkącie prostokątnym kąty ostre α i β spełniają zależność $\alpha = 4\beta$. Wówczas

- [ ] $\cos\alpha + \sin\beta < 1$
- [ ] $\sin\alpha \cdot \cos\beta + \cos\alpha \cdot \sin\beta = 1$
- [ ] $\sin\alpha > \operatorname{tg}\beta$

Ćwiczenie 9

W trójkącie równoramiennym ABC podstawa AB ma długość 30, a każde z ramion ma długość 25. Oznaczmy miary kątów ABC i ACB odpowiednio przez α i 2β. Wtedy

- [ ] $\mathrm{tg}\alpha \cdot \mathrm{tg}\beta = 1$
- [ ] $\cos\alpha = 0{,}6$
- [ ] $\sin\beta = 0{,}96$

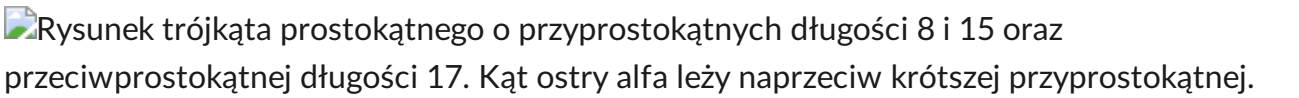
Ćwiczenie 10

W trapezie prostokątnym ABCD o podstawach AB i CD kąty przy wierzchołkach A i D są proste. Bok AD jest dwa razy dłuższy od boku CD i trzy razy krótszy od boku AB. Wtedy

- ◯ miara kąta ostrego tego trapezu jest równa 45°
- ◯ kąt rozwarty tego trapezu ma miarę mniejszą od 150°
- ◯ tangens kąta ostrego tego trapezu jest równy $\frac{2}{5}$

Ćwiczenie 11

Na rysunku podano długości boków i zaznaczono kąt ostry α trójkąta prostokątnego.

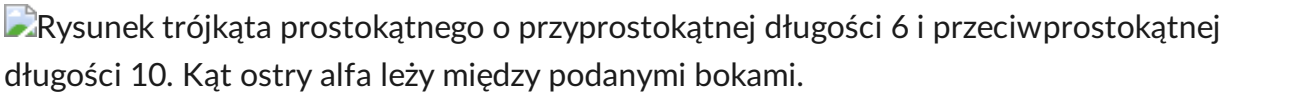

Rysunek trójkąta prostokątnego o przyprostokątnych długości 8 i 15 oraz przeciwprostokątnej długości 17. Kąt ostry alfa leży naprzeciw krótszej przyprostokątnej.

Wtedy

- $\mathrm{tg}\alpha = \frac{15}{17}$
- $\mathrm{tg}\alpha = \frac{15}{8}$
- $\mathrm{tg}\alpha = \frac{8}{17}$
- $\mathrm{tg}\alpha = \frac{8}{15}$

Ćwiczenie 12

Na rysunku podano długości dwóch boków i zaznaczono kąt ostry trójkąta prostokątnego.

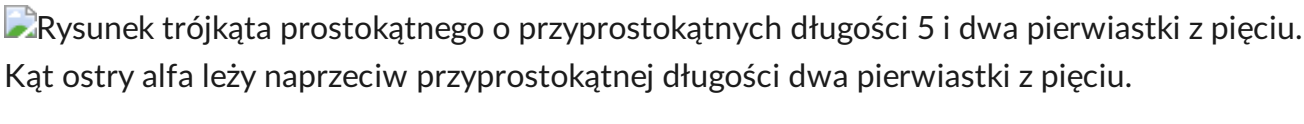

Rysunek trójkąta prostokątnego o przyprostokątnej długości 6 i przeciwprostokątnej długości 10. Kąt ostry alfa leży między podanymi bokami.

Wtedy

- $\sin(90^\circ - \alpha) = \frac{2}{3}$
- $\sin(90^\circ - \alpha) = \frac{3}{4}$
- $\sin(90^\circ - \alpha) = \frac{3}{5}$
- $\sin(90^\circ - \alpha) = \frac{4}{5}$

Ćwiczenie 13

Na rysunku podane są długości przyprostokątnych trójkąta prostokątnego, którego jeden z kątów ostrych jest równy α.


Rysunek trójkąta prostokątnego o przyprostokątnych długości 5 i dwa pierwiastki z pięciu. Kąt ostry alfa leży naprzeciw przyprostokątnej długości dwa pierwiastki z pięciu.

Wówczas

- $\sin\alpha = \frac{\sqrt{5}}{3}$
- $\sin\alpha = \frac{3}{2\sqrt{5}}$
- $\sin\alpha = \frac{2}{3}$
- $\sin\alpha = \frac{2\sqrt{5}}{5}$

Ćwiczenie 14

Liczba $\frac{\sqrt{2}\bullet\operatorname{tg}60^\circ+\sqrt{3}\cos 45^\circ}{\sin 30^\circ}$ jest równa

- $3\sqrt{6}$
- $\frac{3\sqrt{2}+2\sqrt{3}}{2}$
- $\frac{2\sqrt{2}+3\sqrt{3}}{3}$
- $6\sqrt{3}$

Ćwiczenie 15

Kąt α jest ostry i $\mathrm{tg}\alpha = \frac{2}{3}$. Wtedy

- $\alpha = 60^\circ$
- $\alpha < 45^\circ$
- $\alpha < 60^\circ$
- $\alpha = 45^\circ$

Ćwiczenie 16

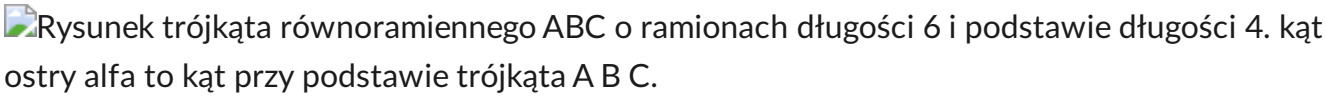
W trójkącie prostokątnym dane są kąty ostre $\alpha = 28^\circ$ i $\beta = 62^\circ$. Wtedy $\frac{\cos\alpha+\sin\beta}{\sin\beta-3\cos\alpha}$ równa się

- -1
- 1
- 2
- -2

Zadania. Część II

Ćwiczenie 1

Na rysunku podane są długości boków trójkąta równoramiennego, którego kąt przy podstawie jest równy α.


Rysunek trójkąta równoramiennego ABC o ramionach długości 6 i podstawie długości 4. kąt ostry alfa to kąt przy podstawie trójkąta A B C.

Wtedy

- $\sin\alpha = \frac{2\sqrt{2}}{3}$
- $\sin\alpha = \frac{2}{3}$
- $\sin\alpha = \frac{1}{3}$
- $\sin\alpha = \frac{\sqrt{2}}{3}$

Ćwiczenie 2

Długość boku rombu jest równa 7. Pole rombu jest równe 28. Wówczas cosinus kąta ostrego tego rombu jest równy

- $\frac{4}{7}$
- $\frac{7}{\sqrt{65}}$
- $\frac{4}{\sqrt{65}}$
- $\frac{\sqrt{33}}{7}$

Ćwiczenie 3

W trapezie $ABCD$, o podstawach AB i CD, dane są długości boków $|AB| = 12$ i $|AD| = |BC| = |CD| = 6$. Wynika z tego, że sinus kąta BAC jest równy

- $\frac{\sqrt{3}}{3}$
- $\frac{\sqrt{3}}{2}$
- $\frac{1}{2}$
- $\frac{1}{3}$

Ćwiczenie 4

Wskaż liczbę równą 1.

- $\operatorname{tg} 40^\circ \bullet \sin 50^\circ \bullet \cos 50^\circ$
- $\operatorname{tg} 40^\circ \bullet \operatorname{tg} 50^\circ$
- $\operatorname{tg} 40^\circ \bullet \sin 50^\circ$
- $\operatorname{tg} 40^\circ \bullet \cos 50^\circ$

Ćwiczenie 5

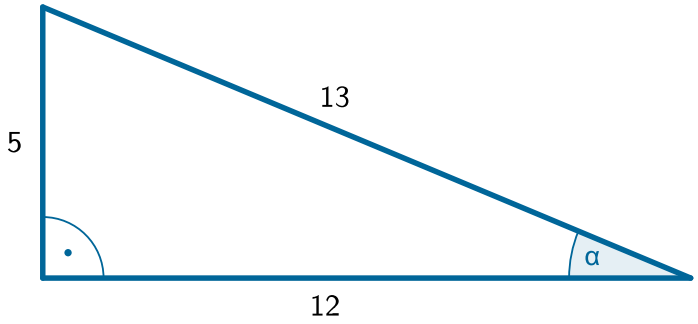
O kątach ostrych: α, β, γ wiadomo, że: $\mathrm{tg}\alpha = \frac{3}{2}$, $\cos\beta = \frac{9}{10}$, $\sin\gamma = \frac{7}{8}$. Wynika z tego, że

- ◯ $\gamma > \alpha > \beta$
- ◯ $\beta > \gamma > \alpha$
- ◯ $\beta > \alpha > \gamma$
- ◯ $\alpha > \beta > \gamma$

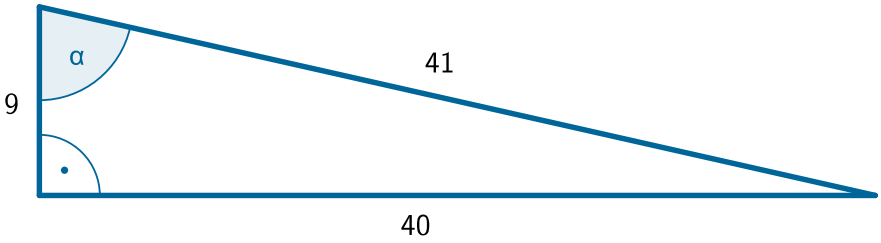
Ćwiczenie 6

Podaj sinus, cosinus i tangens kąta ostrego α.

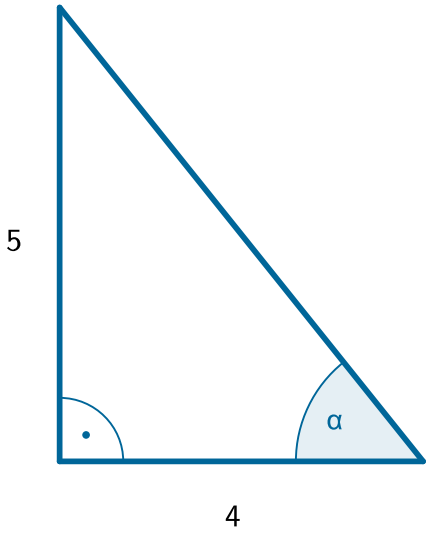
a.



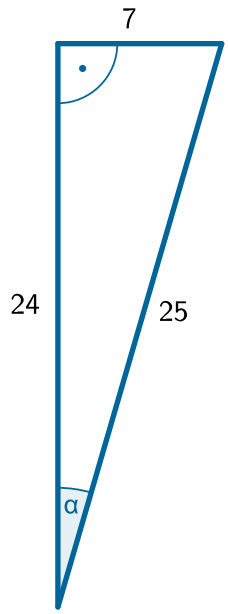
b.



c.



d.



Ćwiczenie 7

Dane są długości przyprostokątnych a i b trójkąta prostokątnego. Oblicz sinus, cosinus i tangens kąta ostrego α, leżącego naprzeciw przyprostokątnej a, jeżeli

a. $a = 1, b = 7$

b. $a = \sqrt{7}, b = 3$

c. $a = 3, b = 6\sqrt{2}$

d. $a = \sqrt{41,}\ b = 2$

Ćwiczenie 8

W trójkącie prostokątnym dana jest długość przyprostokątnej a i długość przeciwprostokątnej c. Oblicz sinus, cosinus i tangens kąta ostrego β, leżącego przy przyprostokątnej a, jeśli

a. $a = 1, c = 7$

b. $a = \sqrt{7}, c = 5$

c. $a = 3, c = 2\sqrt{5}$

d. $a = 7, c = \sqrt{74}$

Ćwiczenie 9

Oblicz.

a. $(\sin 30^\circ + \sin 60^\circ)^2 - 2\sin 60^\circ \cdot \cos 30^\circ$

b. $(\sin 60^\circ \cdot \operatorname{tg} 30^\circ + \cos 30^\circ)^2 - \sin 60^\circ$

c. $(\operatorname{tg} 30^\circ + \operatorname{tg} 60^\circ) \cdot \sin 30^\circ \cdot \sin 60^\circ$

Ćwiczenie 10

Wykaż, że

a. $16 \bullet \left(\sin 30^\circ + \sin^2 45^\circ + \sin^4 60^\circ\right) = 25$

b. $8 \bullet \left(\cos^2 30^\circ \bullet \cos^2 45^\circ + \cos 60^\circ\right) = 7$

c. $\operatorname{tg} 30^\circ \bullet \operatorname{tg} 45^\circ \bullet \operatorname{tg} 60^\circ = 1$

Ćwiczenie 11

Oblicz.

a. $\frac{5\cos 18^\circ + 7\sin 72^\circ}{17\sin 72^\circ - 11\cos 18^\circ}$

b. $\operatorname{tg} 22^\circ \bullet \operatorname{tg} 44^\circ \bullet \operatorname{tg} 46^\circ \bullet \operatorname{tg} 68^\circ$

Ćwiczenie 12

Wykaż, że

a. $\cos 72^\circ \cdot \cos\ 28^\circ = \sin\ 62^\circ \cdot \sin\ 18^\circ$

b. $\frac{\operatorname{tg} 18^\circ}{\operatorname{tg} 54^\circ} = \frac{\operatorname{tg} 36^\circ}{\operatorname{tg} 72^\circ}$

c. $(3\sin 19^\circ + 2\cos 71^\circ)(\sin 44^\circ + 7\cos 46^\circ) = 40\cos 71^\circ \sin 44^\circ$

Ćwiczenie 13

W trójkącie ABC dane są długości boków $|\mathrm{AC}| = |\mathrm{BC}| = \sqrt{29}$ i $|\mathrm{AB}| = 4$. Oblicz sinus każdego z kątów tego trójkąta.

Ćwiczenie 14

W trapezie prostokątnym ABCD ramię AD jest prostopadłe do podstaw AB i CD. Boki trapezu mają długości: $|\mathrm{AB}| = 21$, $|\mathrm{AD}| = 12$, $|\mathrm{CD}| = 16$. Oblicz.

a. $s\,\mathrm{in}(\measuredangle \mathrm{BAC})$

b. $\operatorname{tg}(\measuredangle BDC)$

c. $\cos(\measuredangle ABC)$

Ćwiczenie 15

Długości przekątnych rombu ABCD są równe $|\mathrm{AC}| = 48$ i $|\mathrm{BD}| = 14$. Oblicz.

a. $\mathrm{tg}(\measuredangle \mathrm{CAB})$

b. $\cos(\measuredangle \mathrm{CDB})$

c. $s\,\mathrm{in}(\measuredangle \mathrm{BAD})$

Ćwiczenie 16

W trapezie równoramiennym ABCD długości podstaw są równe $|\mathrm{AB}| = 11$ i $|\mathrm{CD}| = 7$, a każde z ramion ma długość 6. Oblicz.

a. $\cos(\measuredangle\, \mathrm{BAD})$

b. $\mathrm{tg}(\measuredangle\, \mathrm{CAB})$

c. $s\,\mathrm{in}(\measuredangle\, \mathrm{ACD})$

Ćwiczenie 17

W równoległoboku ABCD dane są długości boków $|\mathrm{AB}| = 28$ i $|\mathrm{AD}| = 17$. Pole tego równoległoboku jest równe 420, a kąt przy wierzchołku A jest ostry. Oblicz.

a. $s\,\mathrm{in}(\measuredangle\, \mathrm{BAD})$

b. $\mathrm{tg}(\measuredangle\, \mathrm{DBA})$

c. $\cos(\measuredangle\, \mathrm{CAB})$

Ćwiczenie 18

Pole trójkąta ostrokątnego jest równe 780. Boki tego trójkąta mają długości $|\mathrm{AB}| = 39$ i $|\mathrm{AC}| = 41$. Oblicz.

a. $s\,\mathrm{in}(\measuredangle\,\mathrm{BAC})$

b. $\cos(\measuredangle\,\mathrm{ABC})$

c. $\mathrm{tg}(\measuredangle\,\mathrm{ACB})$

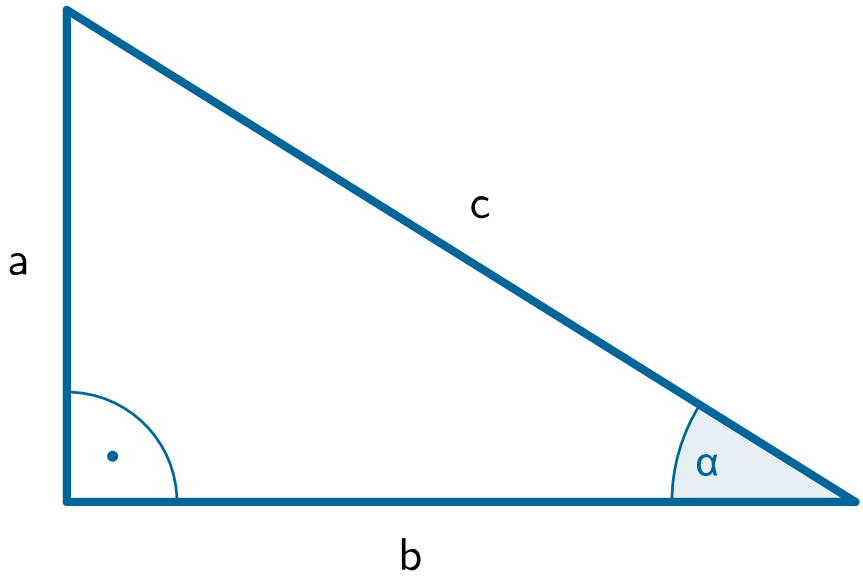
Ćwiczenie 19

W rombie ABCD krótsza przekątna ma długość $|\mathrm{BD}| = 30$, a bok 25. Wykaż, że $\sin(\measuredangle\,\mathrm{BAD}) = 2 \bullet \sin(\measuredangle\,\mathrm{CAD}) \bullet \cos(\measuredangle\,\mathrm{CAB})$.

Tożsamości trygonometryczne

Na podstawie twierdzenia Pitagorasa zapisujemy związek między długościami boków w trójkącie prostokątnym (przy oznaczeniach takich jak na rysunku)

$$a^2 + b^2 = c^2.$$



Oznaczmy przez α miarę kąta ostrego, leżącego naprzeciwko przyprostokątnej o długości a . Z definicji sinusa oraz cosinusa kąta ostrego α w trójkącie prostokątnym mamy

$$\sin\alpha = \frac{a}{c},\ \cos\alpha = \frac{b}{c}.$$

Wówczas

$$(\sin\alpha)^2 + (\cos\alpha)^2 = \left(\frac{a}{c}\right)^2 + \left(\frac{b}{c}\right)^2 = \frac{a^2}{c^2} + \frac{b^2}{c^2} = \frac{a^2+b^2}{c^2} = \frac{c^2}{c^2} = 1.$$

Bezpośrednio z definicji sinusa, cosinusa i tangensa kąta ostrego α w trójkącie prostokątnym wynika, że wartość $\operatorname{tg}\alpha$ możemy wyrazić za pomocą $\sin\alpha$ i $\cos\alpha$.

$$\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} = \frac{\frac{a}{c}}{\frac{b}{c}} = \frac{a}{c}\cdot\frac{c}{b} = \frac{a}{b} = \operatorname{tg}\alpha.$$

Udowodniliśmy w ten sposób następujące twierdzenie.

> **Twierdzenie:**
>
> Dla dowolnego kąta ostrego α prawdziwe są równości
>
> $$\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$$

$$\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} = \mathrm{tg}\alpha.$$

Powyższe zależności określają związki między funkcjami trygonometrycznymi tego samego kąta ostrego.

Przykłady

Przykład 1

Obliczymy wartość wyrażenia

$$\frac{\sin^2 27^\circ+\cos^2 27^\circ-3}{\cos^2 63^\circ+\sin^2 63^\circ+1}.$$

Ponieważ dla dowolnego kąta ostrego α zachodzi równość

$$\sin^2\alpha+\cos^2\alpha=1,$$

to

$$\sin^2 27^\circ+\cos^2 27^\circ=1\ ,\ \cos^2 63^\circ+\sin^2 63^\circ=1.$$

Wobec tego

$$\frac{\sin^2 27^\circ+\cos^2 27^\circ-3}{\cos^2 63^\circ+\sin^2 63^\circ+1}=\frac{1-3}{1+1}=\frac{-2}{2}=-1.$$

Przykład 2

Kąt α jest ostry i $\sin\alpha=\frac{9}{11}$. Obliczymy wartość wyrażenia co $s^2\alpha$.
Ponieważ

$$\sin^2\alpha+\cos^2\alpha=1,$$

to

$$\cos^2\alpha=1-\sin^2\alpha$$

dla dowolnego kąta ostrego α.
Skoro $\sin\alpha=\frac{9}{11}$, to

$$\cos^2\alpha=1-\left(\frac{9}{11}\right)^2=1-\frac{81}{121}=\frac{40}{121}.$$

Przykład 3

Kąt α jest ostry i $\cos\alpha=\frac{3}{4}$. Obliczymy wartość wyrażenia $3-\frac{\sin\alpha}{\operatorname{tg}\alpha}$.
Ponieważ

$$\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}=\operatorname{tg}\alpha,$$

to

$$\frac{\sin\alpha}{\operatorname{tg}\alpha} = \frac{\sin\alpha}{\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}} = \frac{\sin\alpha\cdot\cos\alpha}{\sin\alpha} = \cos\alpha$$

Zatem dla $\cos\alpha = \frac{3}{4}$ otrzymujemy

$$3 - \frac{\sin\alpha}{\operatorname{tg}\alpha} = 3 - \cos\alpha = 3 - \frac{3}{4} = 2\frac{1}{4}.$$

Przykład 4

Wykażemy, że $\sin 38^\circ < \operatorname{tg} 38^\circ$.
Wiemy, że cos dowolnego kąta ostrego jest mniejszy od 1, więc

$$\cos 38^\circ < 1.$$

Mnożymy obie strony nierówności przez liczbę dodatnią $\frac{\sin 38^\circ}{\cos 38^\circ}$.
Zatem

$$\frac{\sin 38^\circ}{\cos 38^\circ} \bullet \cos 38^\circ < \frac{\sin 38^\circ}{\cos 38^\circ}$$

Ponieważ

$$\frac{\sin 38^\circ}{\cos 38^\circ} = \operatorname{tg} 38^\circ,$$

więc

$$\sin 38^\circ < \operatorname{tg} 38^\circ,$$

co należało wykazać.

Przykład 5

Kąt α jest ostry i $\cos\alpha = \frac{\sqrt{5}}{3}$. Obliczymy wartość wyrażenia $2\,\mathrm{si}\,n^2\alpha - \mathrm{co}\,s^2\alpha$.
Korzystając z tożsamości $\mathrm{si}\,n^2\alpha + \mathrm{co}\,s^2\alpha = 1$, otrzymujemy

$$\mathrm{si}\,n^2\alpha = 1 - \mathrm{co}\,s^2\alpha.$$

Wobec tego

$$2\,\mathrm{si}\,n^2\alpha - \cos^2\alpha = 2\left(1 - \cos^2\alpha\right) - \cos^2\alpha = 2 - 2\cos^2\alpha - \cos^2\alpha = 2 - 3\cos^2\alpha.$$

Dla $\cos\alpha = \frac{\sqrt{5}}{3}$ mamy

$$2\,\mathrm{si}\,n^2\alpha - \cos^2\alpha = 2 - 3\cdot\left(\frac{\sqrt{5}}{3}\right)^2 = 2 - \frac{3\cdot 5}{9} = 2 - \frac{5}{3} = \frac{1}{3}.$$

Przykład 6

Kąt α jest ostry i $\sin\alpha = 0{,}3$. Obliczymy $\cos\alpha$ i $\operatorname{tg}\alpha$.
Korzystając z tożsamości $\mathrm{si}\,n^2\alpha + \mathrm{co}\,s^2\alpha = 1$, otrzymujemy $\cos^2\alpha = 1 - \mathrm{si}\,n^2\alpha$. Wobec

tego dla $\sin\alpha = 0{,}3$ mamy:

$$\cos^2\alpha = 1 - \sin^2\alpha = 1 - (0{,}3)^2 = 1 - 0{,}09 = \frac{91}{100},$$

Ponieważ $\cos\alpha > 0$, więc otrzymujemy

$$\cos\alpha = \frac{\sqrt{91}}{10},$$

stąd

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} = \frac{\frac{3}{10}}{\frac{\sqrt{91}}{10}} = \frac{3}{\sqrt{91}} = \frac{3\sqrt{91}}{91}.$$

Przykład 7

Kąt α jest ostry i $\sin\alpha = \frac{\sqrt{7}}{4}$. Obliczymy wartość wyrażenia $10 - 9\operatorname{tg}^2\alpha$.

- *I* sposób

Skoro $\sin\alpha = \frac{\sqrt{7}}{4}$, to

$$\cos^2\alpha = 1 - \sin^2\alpha = 1 - \left(\frac{\sqrt{7}}{4}\right)^2 = 1 - \frac{7}{16} = \frac{9}{16}.$$

Ponieważ $\cos\alpha > 0$, to $\cos\alpha = \frac{3}{4}$ oraz

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{\frac{\sqrt{7}}{4}}{\frac{3}{4}} = \frac{\sqrt{7}}{3}.$$

Stąd

$$10 - 9\operatorname{tg}^2\alpha = 10 - 9 \cdot \left(\frac{\sqrt{7}}{3}\right)^2 = 10 - 9 \cdot \frac{7}{9} = 10 - 7 = 3.$$

- II sposób

Korzystając z tożsamości stosowanych w poprzednich przykładach, wyrazimy $10 - 9\operatorname{tg}^2\alpha$ za pomocą $\sin\alpha$.

$$10 - 9\operatorname{tg}^2\alpha = 10 - 9 \cdot \left(\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}\right)^2 = 10 - 9 \cdot \frac{\sin^2\alpha}{\cos^2\alpha} = 10 - 9 \cdot \frac{\sin^2\alpha}{1-\sin^2\alpha}.$$

Wtedy dla $\sin\alpha = \frac{\sqrt{7}}{4}$ otrzymujemy

$$10 - 9\operatorname{tg}^2\alpha = 10 - 9 \cdot \frac{\sin^2\alpha}{1-\sin^2\alpha} = 10 - 9 \cdot \frac{\left(\frac{\sqrt{7}}{4}\right)^2}{1-\left(\frac{\sqrt{7}}{4}\right)^2} = 10 - 9 \cdot \frac{7}{16} \cdot \frac{16}{9} = 3.$$

Przykład 8

Kąt α jest ostry i $\mathrm{tg}\alpha = \frac{\sqrt{11}}{5}$. Obliczymy $\sin\alpha$ i $\cos\alpha$.
Jeśli $\mathrm{tg}\alpha = \frac{\sqrt{11}}{5}$, to $\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} = \frac{\sqrt{11}}{5}$, skąd $\sin\alpha = \frac{\sqrt{11}}{5}\cos\alpha$. Ponadto $\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$, czyli

$$\left(\frac{\sqrt{11}}{5}\cos\alpha\right)^2 + \cos^2\alpha = 1.$$

Zatem

$$\frac{11}{25}\cos^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$$

$$11\cos^2\alpha + 25\cos^2\alpha = 25$$

$$36\cos^2\alpha = 25$$

$$\cos^2\alpha = \frac{25}{36}.$$

Ponieważ $\cos\alpha > 0$, to

$$\cos\alpha = \sqrt{\frac{25}{36}} = \frac{5}{6},\ \sin\alpha = \frac{\sqrt{11}}{5}\cdot\frac{5}{6} = \frac{\sqrt{11}}{6}.$$

Przykład 9

Kąt α jest ostry i $\mathrm{tg}\alpha = \frac{3}{8}$. Obliczymy $\frac{2\sin\alpha+\cos\alpha}{2\cos\alpha-6\sin\alpha}$.

- *I* sposób

Najpierw obliczamy $\sin\alpha$ i $\cos\alpha$.
Jeśli $\mathrm{tg}\alpha = \frac{3}{8}$, to $\sin\alpha = \frac{3}{8}\cos\alpha$. Ponadto $\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$, skąd

$$\left(\frac{3}{8}\cos\alpha\right)^2 + \cos^2\alpha = 1.$$

Wobec tego

$$\frac{9}{64}\cos^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$$

$$9\cos^2\alpha + 64\cos^2\alpha = 64$$

$$\cos^2\alpha = \frac{64}{73}.$$

Ponieważ $\cos\alpha > 0$, to $\cos\alpha = \sqrt{\frac{64}{73}} = \frac{8\sqrt{73}}{73}$ i $\sin\alpha = \frac{3}{8}\cdot\frac{8\sqrt{73}}{73} = \frac{3\sqrt{73}}{73}$,
czyli wartość danego wyrażenia to

$$\frac{2\sin\alpha+\cos\alpha}{2\cos\alpha-6\sin\alpha} = \frac{2\cdot\frac{3\sqrt{73}}{73}+\frac{8\sqrt{73}}{73}}{2\cdot\frac{8\sqrt{73}}{73}-6\cdot\frac{3\sqrt{73}}{73}} = \frac{14\sqrt{73}}{-2\sqrt{73}} = -7.$$

- II sposób

Zauważmy, że jeśli $\mathrm{tg}\alpha = \frac{3}{8}$, to $\sin\alpha = \frac{3}{8}\cos\alpha$. Uwzględniając tę zależność, otrzymujemy

$$\frac{2\sin\alpha+\cos\alpha}{2\cos\alpha-6\sin\alpha} = \frac{2\cdot\frac{3}{8}\cos\alpha+\cos\alpha}{2\cos\alpha-6\cdot\frac{3}{8}\cos\alpha} = \frac{\frac{7}{4}\cos\alpha}{-\frac{1}{4}\cos\alpha} = -7$$

- III sposób

Korzystając z tożsamości $\mathrm{tg}\alpha = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}$, wyrazimy $\frac{2\sin\alpha+\cos\alpha}{2\cos\alpha-6\cos\alpha}$ za pomocą $\mathrm{tg}\alpha$

$$\frac{2\sin\alpha+\cos\alpha}{2\cos\alpha-6\sin\alpha} = \frac{\frac{2\sin\alpha}{\cos\alpha}+\frac{\cos\alpha}{\cos\alpha}}{\frac{2\cos\alpha}{\cos\alpha}-\frac{6\sin\alpha}{\cos\alpha}} = \frac{2\mathrm{tg}\alpha+1}{2-6\mathrm{tg}\alpha}.$$

Skoro $\mathrm{tg}\alpha = \frac{3}{8}$, to

$$\frac{2\sin\alpha+\cos\alpha}{2\cos\alpha-6\sin\alpha} = \frac{2\mathrm{tg}\alpha+1}{2-6\mathrm{tg}\alpha} = \frac{2\cdot\frac{3}{8}+1}{2-6\cdot\frac{3}{8}} = \frac{\frac{7}{4}}{-\frac{1}{4}} = -7.$$

Przykład 10

Wykażemy, że jeżeli kąt α jest ostry i $\mathrm{tg}\alpha + \frac{1}{\mathrm{tg}\,\alpha} = 9$, to $tg^2\alpha + \frac{1}{tg^2\alpha} = 79$.
Skoro $\mathrm{tg}\alpha + \frac{1}{\mathrm{tg}\alpha} = 9$, to

$$\left(\mathrm{tg}\alpha + \frac{1}{\mathrm{tg}\alpha}\right)^2 = 81.$$

Stąd

$$tg^2\alpha + 2\mathrm{tg}\alpha\cdot\frac{1}{\mathrm{tg}\alpha} + \frac{1}{tg^2\alpha} = 81,$$

czyli

$$tg^2\alpha + 2 + \frac{1}{tg^2\alpha} = 81.$$

Wynika z tego, że $tg^2\alpha + \frac{1}{tg^2\alpha} = 79$, a to właśnie należało wykazać.

Przykład 11

Wykażemy, że dla każdego kąta ostrego α wartość wyrażenia
$(\sin\alpha + \cos\alpha)^2 + (\cos\alpha - \sin\alpha)^2$ jest równa 2.
Przekształcamy wyrażenie

$$(\sin\alpha + \cos\alpha)^2 + (\cos\alpha - \sin\alpha)^2 =$$

$$= \mathrm{si}\,n^2\alpha + 2\sin\alpha\cos\alpha + \mathrm{co}\,s^2\alpha + \cos^2\alpha - 2\sin\alpha\cos\alpha + \mathrm{si}\,n^2\alpha =$$

$$= 2\,\mathrm{si}\,n^2\alpha + 2\,\mathrm{co}\,s^2\alpha = 2\left(\mathrm{si}\,n^2\alpha + \mathrm{co}\,s^2\alpha\right).$$

Korzystamy z tożsamości $\mathrm{si}\,n^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$, skąd

$$(\sin\alpha+\cos\alpha)^2+(\cos\alpha-\sin\alpha)^2=2\left(\sin^2\alpha+\cos^2\alpha\right)=2\cdot 1=2,$$

a to właśnie należało wykazać.

Przykład 12

Wykażemy, że jeżeli kąt α jest ostry i $\sin\alpha+\cos\alpha=\frac{7}{5}$, to $\sin^4\alpha+\cos^4\alpha=\frac{337}{625}$.
Jeśli $\sin\alpha+\cos\alpha=\frac{7}{5}$, to $(\sin\alpha+\cos\alpha)^2=\left(\frac{7}{5}\right)^2$, skąd $\sin^2\alpha+2\sin\alpha\cos\alpha+\cos^2\alpha=\frac{49}{25}$.
Ponieważ $\sin^2\alpha+\cos^2\alpha=1$, to $2\sin\alpha\cos\alpha=\frac{49}{25}-1$, czyli $\sin\alpha\cos\alpha=\frac{12}{25}$.
Przekształcając tożsamość $\sin^2\alpha+\cos^2\alpha=1$, otrzymujemy kolejno

$$\left(\sin^2\alpha+\cos^2\alpha\right)^2=1$$

$$\sin^4\alpha+2\sin^2\alpha\cos^2\alpha+\cos^4\alpha=1$$

$$\sin^4\alpha+\cos^4\alpha=1-2\sin^2\alpha\cos^2\alpha$$

$$\sin^4\alpha+\cos^4\alpha=1-2(\sin\alpha\cos\alpha)^2$$

Uwzględniając równość $\sin\alpha\cos\alpha=\frac{12}{25}$, otrzymujemy

$$\sin^4\alpha+\cos^4\alpha=1-2\cdot\left(\frac{12}{25}\right)^2,$$

skąd

$$\sin^4\alpha+\cos^4\alpha=1-\frac{2\cdot 144}{625}=\frac{337}{625}.$$

Koniec dowodu.

Przykład 13

W pewnym trójkącie prostokątnym suma sinusów kątów ostrych jest równa $\frac{31}{25}$.
Wykażemy, że iloczyn sinusów tych kątów jest równy $\frac{168}{625}$.
Oznaczmy przez α i β miary kątów ostrych w danym trójkącie. Wtedy
$\sin\beta=\sin(90^\circ-\alpha)=\cos\alpha$.
Z warunków zadania mamy $\sin\alpha+\sin\beta=\frac{31}{25}$, czyli $\sin\alpha+\cos\alpha=\frac{31}{25}$.
Wynika z tego, że

$$(\sin\alpha+\cos\alpha)^2=\left(\frac{31}{25}\right)^2=\frac{961}{625}.$$

Ponadto

$$(\sin\alpha+\cos\alpha)^2=\sin^2\alpha+2\sin\alpha\cos\alpha+\cos^2\alpha=1+2\sin\alpha\cos\alpha.$$

Zatem $1+2\sin\alpha\cos\alpha=\frac{961}{625}$, skąd

$$2\sin\alpha\cos\alpha = \frac{961}{625} - 1 = \frac{336}{625},$$

czyli

$$\sin\alpha\cos\alpha = \frac{168}{625}.$$

Koniec dowodu.

Przykład 14

Wykażemy, że dla każdego kąta ostrego α prawdziwa jest nierówność $\sin\alpha + \cos\alpha \leq \sqrt{2}$.
Skorzystamy z udowodnionej wcześniej tożsamości

$$(\sin\alpha + \cos\alpha)^2 + (\cos\alpha - \sin\alpha)^2 = 2,$$

którą przekształcimy do postaci

$$(\cos\alpha - \sin\alpha)^2 = 2 - (\sin\alpha + \cos\alpha)^2.$$

Ponieważ kwadrat dowolnej liczby rzeczywistej jest nieujemny, to $(\cos\alpha - \sin\alpha)^2 \geq 0$ dla dowolnego kąta ostrego α.
Wynika z tego, że

$$2 - (\sin\alpha + \cos\alpha)^2 \geq 0,$$

czyli

$$(\sin\alpha + \cos\alpha)^2 \leq 2.$$

Stąd

$$\sin\alpha + \cos\alpha \leq \sqrt{2.}$$

Koniec dowodu.

Zadania

Ćwiczenie 1

Dane są liczby $a = \cos^2 25^\circ + \sin^2 25^\circ$, $b = \frac{\operatorname{tg} 42^\circ}{\sin 42^\circ} \cdot \cos 42^\circ$. Wówczas

- [ ] $a = b$
- [ ] $a < 2$
- [ ] $b > 1$

Ćwiczenie 2

Kąt α jest ostry i $\sin\alpha = \frac{3}{4}$. Wtedy

- ( ) $7 \operatorname{si} n^2 \alpha = 9 \operatorname{co} s^2 \alpha$
- ( ) $\sin^4 \alpha + \operatorname{co} s^4 \alpha = 1$
- ( ) $\operatorname{co} s^2 \alpha = \frac{7}{8}$

Ćwiczenie 3

Kąt α jest ostry i $\operatorname{tg}\alpha = 5$. Wówczas

- [ ] $\sin\alpha = \frac{5}{6}$ i $\cos\alpha = \frac{1}{6}$
- [ ] $\sin\alpha = \frac{5\sqrt{26}}{26}$ i $\cos\alpha = \frac{\sqrt{26}}{26}$
- [ ] $\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha} = 0{,}2$

Ćwiczenie 4

Kąt α jest ostry i $\cos\alpha = \frac{1}{3}$. Wynika z tego, że

- ◯ $\sin\alpha = \frac{8}{9}$
- ◯ $\mathrm{tg}\alpha = 2\sqrt{2}$
- ◯ $\sin^2\alpha = \frac{2}{3}$

Ćwiczenie 5

Kąt α jest ostry i $\mathrm{tg}\alpha = 2$. Wówczas

- ☐ $\frac{6\cos\alpha+\sin\alpha}{2\cos\alpha+\sin\alpha} = 4$
- ☐ $\frac{11\sin\alpha+3\cos\alpha}{\cos\alpha+2\sin\alpha} = 5$
- ☐ $\frac{\cos\alpha+\sin\alpha}{\sin\alpha-\cos\alpha} = 3$

Ćwiczenie 6

Dla dowolnego kąta ostrego α prawdziwa jest równość

- ☐ $\sin^4\alpha - \cos^4\alpha = \sin^2\alpha - \cos^2\alpha$
- ☐ $\frac{(\sin\alpha+\cos\alpha)^2-1}{2} = \sin\alpha\cos\alpha$
- ☐ $\frac{1-(\sin^4\alpha+\cos^4\alpha)}{2} = (\sin\alpha\cos\alpha)^2$

Ćwiczenie 7

Dla dowolnego kąta ostrego α prawdziwa jest równość

- [ ] $\left(\mathrm{tg}\alpha+\frac{1}{\mathrm{tg}\,\alpha}\right)^2-\left(tg^2\alpha+\frac{1}{tg^2\alpha}\right)=2$
- [ ] $(2\sin\alpha+\cos\alpha)^2+(2\cos\alpha-\sin\alpha)^2=3$
- [ ] $\mathrm{co}\,s^2\alpha\left(\mathrm{tg}^2\alpha+\mathrm{si}\,n^2\alpha\right)+\mathrm{co}\,s^4\alpha=1$

Ćwiczenie 8

Dla dowolnego kąta ostrego α prawdziwa jest nierówność

- [ ] $\cos\alpha+\sin\alpha>1$
- [ ] $\mathrm{tg}\alpha>\sin\alpha$
- [ ] $3\sin\alpha+4\cos\alpha<5$

Ćwiczenie 9

Kąt α jest ostry i $\sin\alpha\cos\alpha=\frac{2}{5}$. Wtedy

- [ ] $(\sin\alpha-\cos\alpha)^2=\frac{1}{10}$
- [ ] $\mathrm{si}\,n^4\alpha+\mathrm{co}\,s^4\alpha=\frac{17}{25}$
- [ ] $\sin\alpha+\cos\alpha=\frac{3\sqrt{5}}{5}$

Ćwiczenie 10

Dla każdego kąta ostrego α

- [ ] wyrażenie $\sqrt{\cos^4\alpha + 4\sin^2\alpha}$ jest równe $2 - \cos^2\alpha$
- [ ] wyrażenie $\sqrt{\sin^4\alpha + 4\cos^2\alpha} + \sqrt{\cos^4\alpha + 4\sin^2\alpha}$ jest równe 3
- [ ] wyrażenie $\sqrt{\sin^4\alpha + 4\cos^2\alpha}$ jest równe $\sin^2\alpha - 2$

Ćwiczenie 11

Kąt α jest ostry i $\sin\alpha = \frac{2}{3}$. Wtedy liczba $\cos^2\alpha$ jest równa

- ○ $\frac{4}{9}$
- ○ $\frac{1}{3}$
- ○ $\frac{5}{9}$
- ○ $\frac{2}{3}$

Ćwiczenie 12

Dla każdego kąta ostrego α wyrażenie $\sin^2\alpha + \left(1 - \cos^2\alpha\right)$ jest równe

- ○ $\cos^2\alpha$
- ○ $2\sin^2\alpha$
- ○ 2
- ○ 1

Ćwiczenie 13

Kąt α jest ostry i $\mathrm{tg}\alpha = 1{,}2$. Wówczas

- $\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha} = 2$
- $\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha} = 5$
- $\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha} = \frac{36}{25}$
- $\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha} = \frac{5}{6}$

Ćwiczenie 14

Wartość wyrażenia $\frac{29+\left(\sin 29^\circ \cdot \cos 29^\circ \cdot \mathrm{tg}\, 29^\circ + \cos^2 29^\circ\right)}{61-\left(\sin 61^\circ \cdot \cos 61^\circ \cdot \mathrm{tg}\, 61^\circ + \cos^2 61^\circ\right)}$ jest równa

- 1
- $\frac{1}{2}$
- $\frac{1}{3}$
- $\frac{29}{61}$

Ćwiczenie 15

Kąt α jest ostry i $\cos\alpha = 0{,}7$. Wynika z tego, że

- $\sin\alpha = \frac{\sqrt{51}}{10}$
- $\sin\alpha = 0{,}51$
- $\sin\alpha = \frac{\sqrt{3}}{10}$
- $\sin\alpha = \frac{3}{10}$

Ćwiczenie 16

Wartość wyrażenia $(\sin 15^\circ + 3\cos 15^\circ)^2 + (3\sin 15^\circ - \cos 15^\circ)^2$ jest równa

- 10
- 4
- 1
- 3

Ćwiczenie 17

Kąt α jest ostry i $\sin\alpha = \frac{4}{9}$. Wtedy liczba $\mathrm{tg}\alpha$ jest równa

- $\frac{4}{\sqrt{65}}$
- $\frac{16}{\sqrt{65}}$
- $\frac{36}{65}$
- $\frac{4}{5}$

Ćwiczenie 18

Dla każdego kąta ostrego α wyrażenie $\frac{\sin^8\alpha - \cos^8\alpha}{\sin^4\alpha + \cos^4\alpha}$ jest równe

- 2
- $2\sin^2\alpha + 1$
- $2\sin^2\alpha - 1$
- 1

Ćwiczenie 19

Kąt α jest ostry i $\sin\alpha + \cos\alpha = \frac{11}{10}$. Wtedy iloczyn $\sin\alpha \cdot \cos\alpha$ jest równy

- $\frac{21}{100}$
- $\frac{21}{200}$
- $\frac{11}{100}$
- $\frac{11}{200}$

Ćwiczenie 20

Dla każdego kąta ostrego α wartość wyrażenia $\sin^4\alpha + \cos^4\alpha$

- jest równa 2
- jest większa od 2
- jest równa 1
- jest mniejsza od 1

Ćwiczenie 21

Kąt α jest ostry i $\cos^2\alpha - \sin^2\alpha = \frac{7}{9}$. Oblicz.

a. $\cos^2\alpha$

b. $\cos\alpha$

c. $\sin^2\alpha$

d. $\sin\alpha$

Ćwiczenie 22

Kąt α jest ostry i $\sin\alpha = \frac{2}{11}$. Oblicz.

a. wartość wyrażenia $5 - 3\cos^2\alpha$

b. $\cos\alpha$

c. wartość wyrażenia $\sqrt{13tg^2\alpha + \frac{7}{3}}$

Ćwiczenie 23

Kąt α jest ostry i $\cos\alpha = \frac{\sqrt{11}}{6}$. Oblicz.

a. wartość wyrażenia $5 - 12\sin^2\alpha$

b. $\sin\alpha$

c. wartość wyrażenia $4\sin^2\alpha - \sin^3\alpha - \sin\alpha\cos^2\alpha$

Ćwiczenie 24

Kąt α jest ostry i $\operatorname{tg}\alpha = \frac{5}{2}$. Oblicz.

a. $\sin\alpha$

b. $\cos\alpha$

c. wartość wyrażenia $\frac{4\sin\alpha+\cos\alpha}{7\cos\alpha-2\sin\alpha}$

Ćwiczenie 25

Rozstrzygnij, czy istnieje kąt ostry α, dla którego

- ◯ $\sin\alpha = \frac{2}{7}$ i $\mathrm{tg}\alpha = \frac{2\sqrt{5}}{15}$
- ◯ $\cos\alpha = \frac{3}{5}$ i $\mathrm{tg}\alpha = \frac{3}{4}$
- ◯ $\sin\alpha\cos\alpha = \frac{2}{3}$
- ◯ $\sin\alpha = \frac{2}{7}$ i $\cos\alpha = \frac{5}{7}$

Ćwiczenie 26

Kąt α jest ostry i $\mathrm{tg}\alpha + \frac{1}{\mathrm{tg}\alpha} = \frac{10}{3}$. Oblicz wartość wyrażenia

a. $\sin\alpha + \cos\alpha$

b. $tg^2\alpha + \frac{1}{tg^2\alpha}$

Ćwiczenie 27

Kąt α jest ostry i $\sin\alpha - \cos\alpha = \frac{7}{13}$. Oblicz wartość wyrażenia.

a. $\sin\alpha\cos\alpha$

b. $\sin\alpha + \cos\alpha$

Ćwiczenie 28

Kąt α jest ostry i $\sin\alpha + \cos\alpha = 1{,}4$. Oblicz wartość wyrażenia.

a. $\sin\alpha\cos\alpha$

b. $\sin^4\alpha + \cos^4\alpha$

Ćwiczenie 29

Uzasadnij, że jeżeli α jest kątem ostrym, to

a. $2\sin^2\alpha+\cos^2\alpha=\left(1+tg^2\alpha\right)\left(1+\sin^2\alpha\right)\cos^2\alpha$

b. $\sin^4\alpha+\cos^4\alpha=1-\frac{2\sin^2\alpha}{1+tg^2\alpha}$

c. $\cos^8\alpha-\sin^8\alpha=\left(\cos^4\alpha+\sin^4\alpha\right)\left(\cos^2\alpha-\sin^2\alpha\right)$

Ćwiczenie 30

Uzasadnij, że jeżeli α jest kątem ostrym, to
$\sqrt{\sin^4\alpha-2\cos^2\alpha+3}+\sqrt{\cos^4\alpha-2\sin^2\alpha+3}=3.$

Zadania generatorowe

Zadania generatorowe

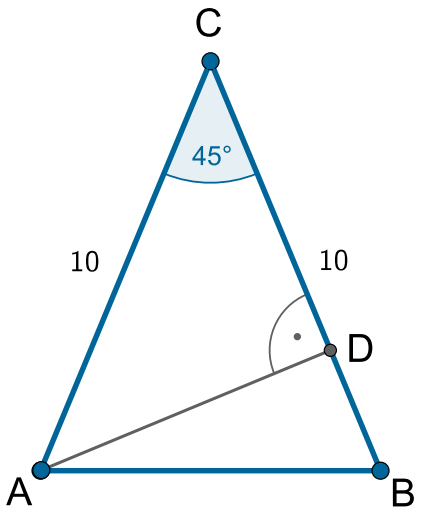
Ćwiczenie 1

Przykłady. Część I

W poniższych przykładach pokażemy zastosowania trygonometrii do opisu związków miarowych w figurach płaskich.

Przykład 1

W trójkącie równoramiennym ABC każde z ramion AC i BC ma długość równą 10. Miara kąta ACB jest równa 45°. Obliczymy pole tego trójkąta.



Zauważmy, że wysokość AD, opuszczona na bok CB, odcina trójkąt prostokątny ADC. Ponieważ kąt ACD ma miarę 45°, to

$$\frac{|\mathrm{AD}|}{|\mathrm{AC}|} = \sin 45^\circ.$$

Wobec tego

$$|\mathrm{AD}| = |\mathrm{AC}| \cdot \sin 45^\circ = 10 \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} = 5\sqrt{2}$$

i pole P trójkąta ABC jest równe

$$P = \frac{1}{2} \cdot |\mathrm{BC}| \cdot |\mathrm{AD}| = \frac{1}{2} \cdot 10 \cdot 5\sqrt{2} = 25\sqrt{2}.$$

Przykład 2

Rozpatrzmy trójkąt ostrokątny ABC, w którym dane są długości boków $|\mathrm{AC}| = \mathrm{b}$, $|\mathrm{BC}| = \mathrm{a}$ oraz miara γ kąta ACB.
Zauważmy, że wysokość AD opuszczona na bok BC, odcina trójkąt prostokątny, w którym

$$\frac{|AD|}{|AC|} = \sin\gamma,$$

Przyjmując $h = |AD|$, otrzymujemy

$$\frac{h}{b} = \sin\gamma,$$

skąd

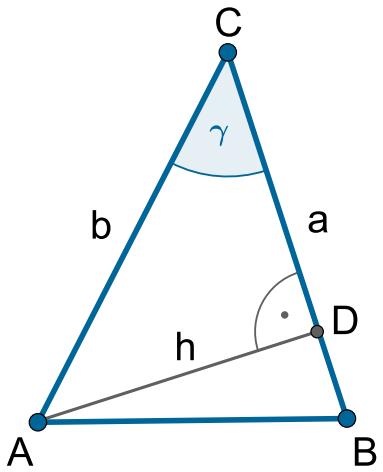
$$h = b\sin\gamma.$$

Pole trójkąta ABC jest równe

$$P_{ABC} = \frac{1}{2} \cdot a \cdot h,$$

zatem

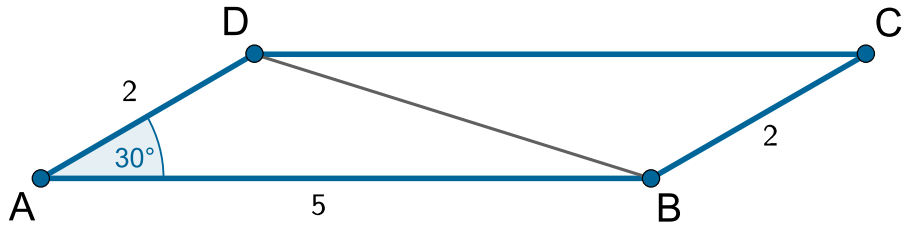
$$P_{ABC} = \frac{1}{2} \cdot a \cdot b \bullet \sin\gamma.$$



Wobec tego pole trójkąta ostrokątnego możemy wyrazić za pomocą danych długości dwóch boków i sinusa kąta między nimi.

Przykład 3

W równoległoboku $ABCD$ dane są długości boków $|AB| = 5$ i $|BC| = 2$. Kąt DAB ma miarę 30°. Obliczymy pole tego równoległoboku.
Zauważmy, że przekątna DB dzieli dany równoległobok na dwa trójkąty przystające ADB i CBD.



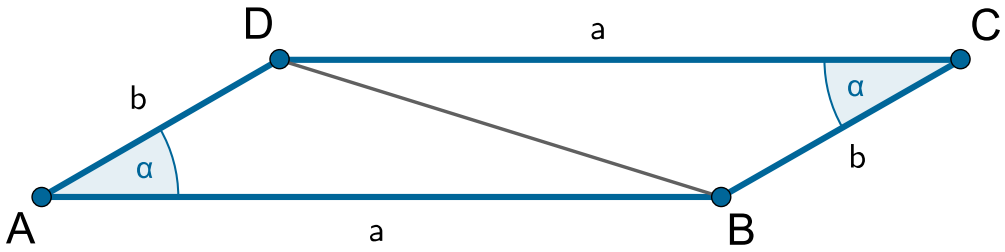
Ponieważ pole trójkąta ABD jest równe

$$P_{\mathrm{ABD}} = \frac{1}{2} \cdot |\mathrm{AB}| \cdot |\mathrm{AD}| \cdot \sin 30^\circ = \frac{1}{2} \cdot 5 \cdot 2 \cdot \frac{1}{2} = \frac{5}{2},$$

to pole równoległoboku ABCD jest równe 5.

Przykład 4

Rozpatrzmy równoległobok ABCD, w którym długości boków AB i AD są równe odpowiednio a oraz b. Kąt ostry między tymi bokami ma miarę α.
Podobnie jak w poprzednim przykładzie, zauważmy, że przekątna DB dzieli dany równoległobok na dwa trójkąty przystające ADB i B CD.



Ponieważ pole trójkąta ABD jest równe

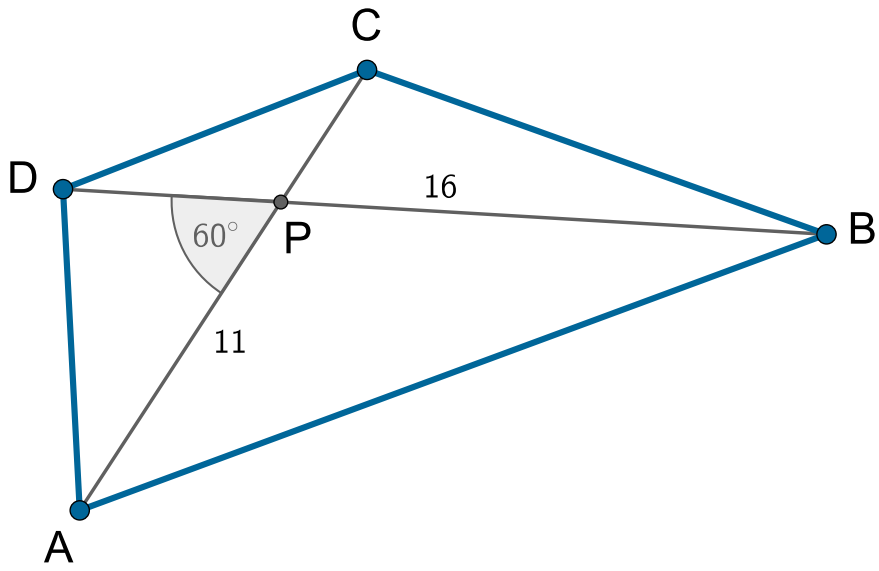
$$P_{\mathrm{ABD}} = \frac{1}{2} \cdot |\mathrm{AB}| \cdot |\mathrm{AD}| \cdot \sin\alpha = \frac{1}{2}\mathrm{ab} \cdot \sin\alpha,$$

to pole równoległoboku ABCD jest równe

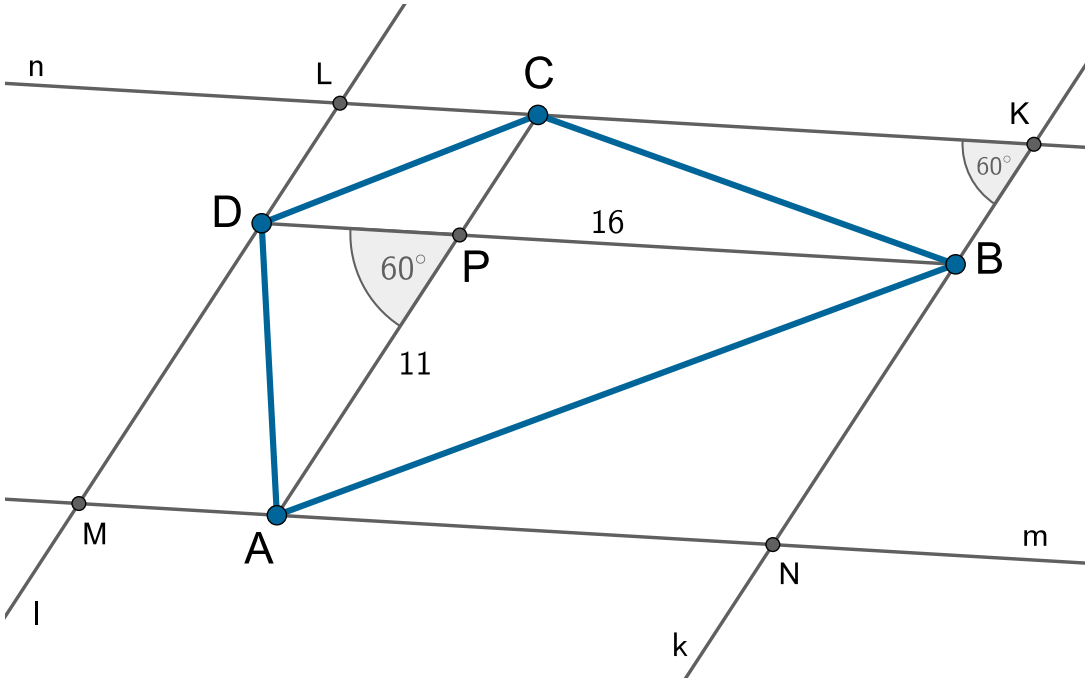
$$P_{\mathrm{ABCD}} = 2 \cdot P_{\mathrm{ABD}} = 2 \cdot \frac{1}{2}\mathrm{ab}\sin\alpha = \mathrm{ab}\sin\alpha.$$

Przykład 5

W czworokącie ABCD przekątne długości $|\mathrm{AC}| = 11$ oraz $|\mathrm{BD}| = 16$ przecinają się w punkcie P pod kątem 60°. Obliczymy pole tego czworokąta.



Poprowadźmy przez wierzchołki czworokąta ABCD cztery proste k, l, m, n równoległe odpowiednio do przekątnych tego czworokąta. Punkty przecięcia tych prostych oznaczmy K, L, M, N.



Czworokąt KLMN jest równoległobokiem. Wobec tego $|\mathrm{NK}| = 11$ i $|\mathrm{KL}| = 16$ oraz kąt NKL ma miarę 60°. A zatem pole czworokąta KLMN jest równe

$$P_{\mathrm{KLMN}} = |\mathrm{NK}| \cdot |\mathrm{KL}| \cdot \sin 60^\circ = 16 \cdot 11 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = 88\sqrt{3}.$$

Każdy z czworokątów APDM, BPAN, CPBK i DPCL jest równoległobokiem, w którym jedna z przekątnych jest bokiem czworokąta ABCD.

Każda przekątna dzieli równoległobok na dwa trójkąty przystające. Pola tych trójkątów są równe

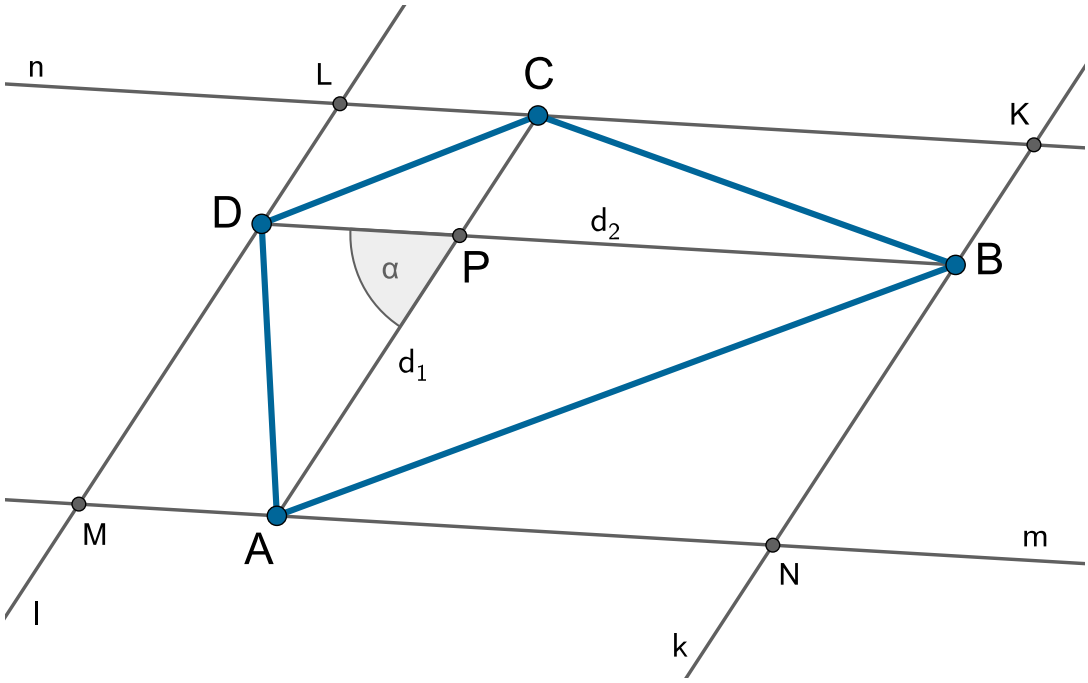
$$P_{\mathrm{APD}} = P_{\mathrm{AMD}}, P_{\mathrm{BPA}} = P_{\mathrm{BNA}}, P_{\mathrm{CPB}} = P_{\mathrm{CKB}}, P_{\mathrm{DPC}} = P_{\mathrm{DLC}}.$$

Ponadto pole czworokąta ABCD jest sumą pól trójkątów APD, BPA, CPB i DPC. To znaczy, że pole równoległoboku KLMN jest dwa razy większe od pola czworokąta ABCD. Zatem

$$P_{\mathrm{ABCD}} = \frac{1}{2} \cdot P_{\mathrm{KLMN}} = \frac{1}{2} \cdot 88\sqrt{3} = 44\sqrt{3}.$$

Przykład 6

Rozpatrzmy czworokąt ABCD, w którym długości przekątnych AC i BD są równe odpowiednio d_1 oraz d_2, a kąt ostry między nimi ma miarę α.
Podobnie jak w poprzednim przykładzie, poprowadźmy przez wierzchołki czworokąta cztery proste k, l, m, n równoległe odpowiednio do przekątnych tego czworokąta. Punkty przecięcia tych prostych oznaczmy K, L, M, N.

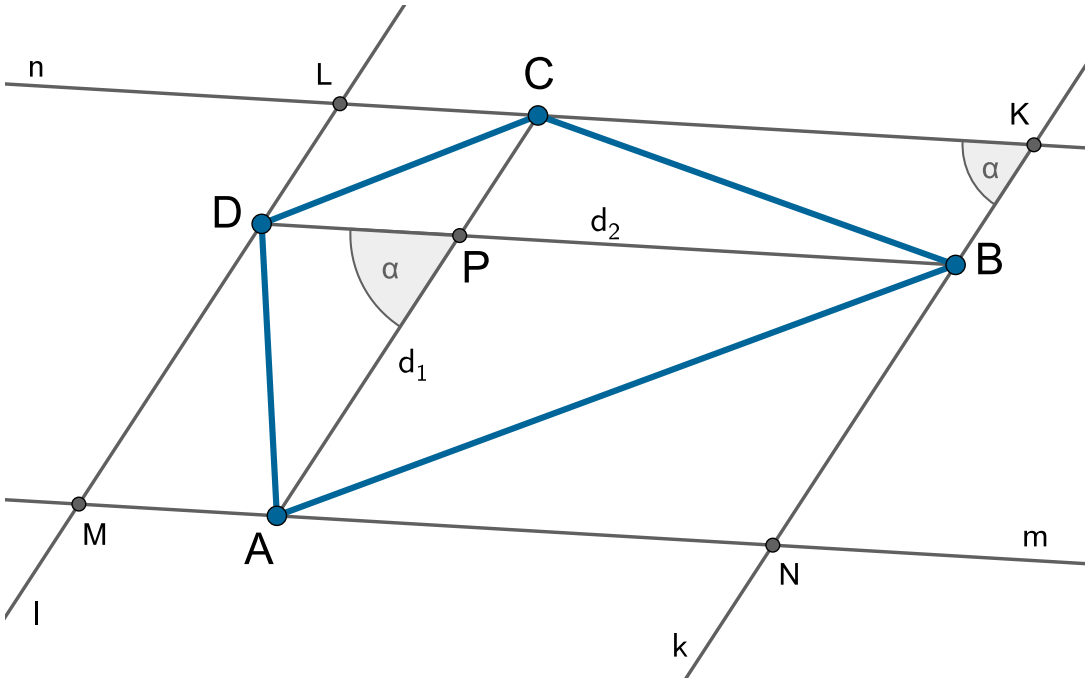


Czworokąt KLMN jest równoległobokiem. Wobec tego $|\mathrm{NK}| = d_1$ i $|\mathrm{KL}| = d_2$ oraz kąt NKL ma miarę α. Pole KLMN jest równe

$$P_{\mathrm{KLMN}} = |\mathrm{NK}| \cdot |\mathrm{KL}| \cdot \sin\alpha = d_1 \cdot d_2 \cdot \sin\alpha.$$

Każdy z czworokątów APDM, BPAN, CPBK i DPCL jest równoległobokiem, w którym jedna z przekątnych jest bokiem czworokąta ABCD.
Przekątna dzieli równoległobok na dwa trójkąty przystające. Pola tych trójkątów są równe

$$P_{\mathrm{APD}} = P_{\mathrm{AMD}}, P_{\mathrm{BPA}} = P_{\mathrm{BNA}}, P_{\mathrm{CPB}} = P_{\mathrm{CKB}}, P_{\mathrm{DPC}} = P_{\mathrm{DLC}}.$$

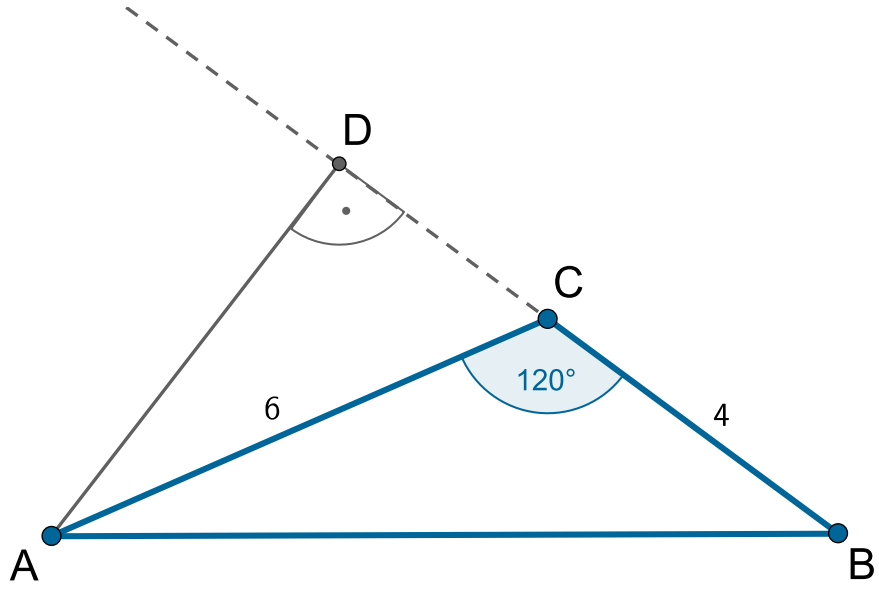


Ponadto pole czworokąta ABCD jest sumą pól trójkątów APD, BPA, CPB i DPC. To znaczy, że pole równoległoboku KLMN jest dwa razy większe od pola czworokąta ABCD, skąd

$$P_{\mathrm{ABCD}} = \frac{1}{2} \cdot P_{\mathrm{KLM}\,N} = \frac{1}{2} d_1 d_2 \sin\alpha.$$

Przykład 7

W trójkącie ABC boki AC i BC mają długości $|\mathrm{AC}| = 6$ i $|\mathrm{BC}| = 4$, a kąt między tymi bokami ma miarę 120°. Obliczymy pole tego trójkąta.
Zauważmy, że wysokość AD jest opuszczona na przedłużenie boku BC.



W trójkącie prostokątnym ADC kąt przy wierzchołku C ma miarę 60°. Wówczas

$$\frac{|\mathrm{AD}|}{|\mathrm{AC}|} = \sin 60^\circ,$$

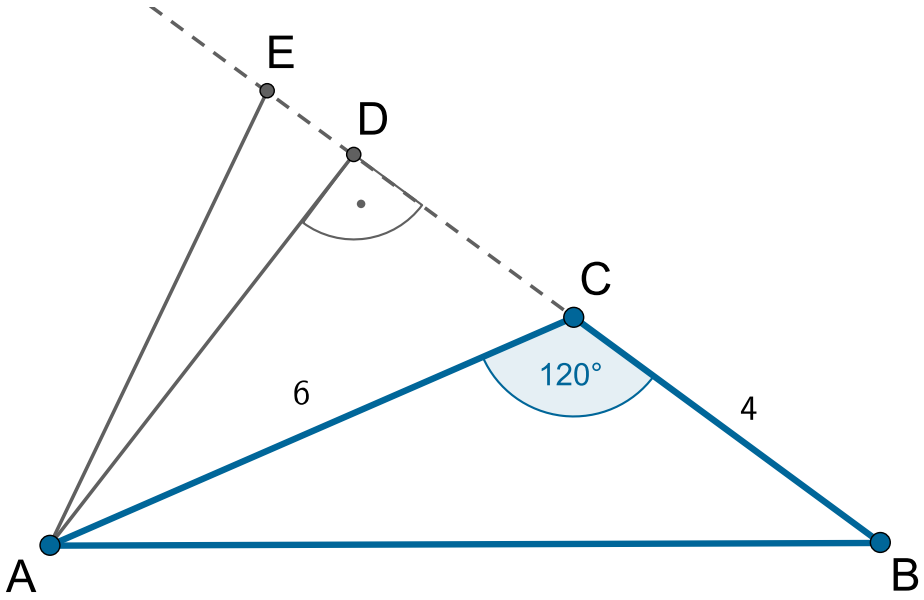
skąd

$$|\mathrm{AD}| = |\mathrm{AC}| \cdot \sin 60^\circ = 6 \cdot \tfrac{\sqrt{3}}{2} = 3\sqrt{3}.$$

Pole P trójkąta ABC jest więc równe

$$P_{\mathrm{ABC}} = \tfrac{1}{2} \cdot |\mathrm{BC}| \cdot |\mathrm{AD}| = \tfrac{1}{2} \cdot 4 \cdot 3\sqrt{3} = 6\sqrt{3}.$$

Wybierzmy dodatkowo na półprostej BC taki punkt E, że $|\mathrm{EC}| = |\mathrm{BC}|$. Wówczas trójkąty BAC oraz EAC mają równe boki BC i EC oraz wspólną wysokość AD, opuszczoną z wierzchołka A.

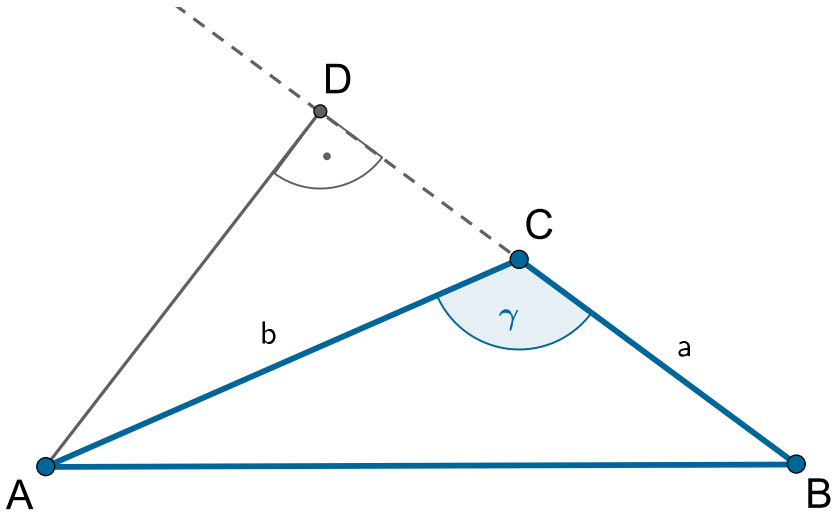


Pola tych trójkątów są więc równe, co znaczy, że pole trójkąta ABC można wyrazić za pomocą danych długości boków i sinusa kąta przyległego do kąta rozwartego zawartego między tymi bokami

$$P_{\mathrm{ABC}} = P_{\mathrm{ACE}} = \tfrac{1}{2} \cdot |\mathrm{EC}| \cdot |\mathrm{CA}| \cdot \sin 60^\circ = \tfrac{1}{2} \cdot |\mathrm{BC}| \cdot |\mathrm{CA}| \cdot \sin 60^\circ = \tfrac{1}{2} \cdot 4 \cdot 6 \cdot \tfrac{\sqrt{3}}{2} = 6\sqrt{3}.$$

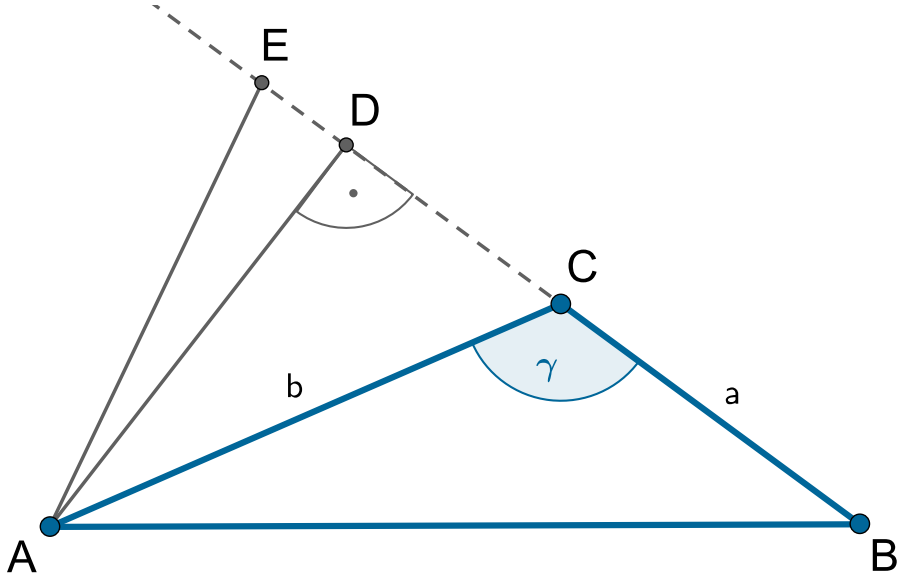
Przykład 8

Rozpatrzmy trójkąt rozwartokątny ABC, w którym dane są długości boków $|\mathrm{CB}| = a$ i $|\mathrm{AC}| = b$. Kąt ACB jest rozwarty i ma miarę γ.



Niech AD będzie wysokością trójkąta ABC, przy czym punkt D niech leży na przedłużeniu boku BC. Postępując podobnie jak w poprzednim przykładzie, wybierzmy na półprostej BC taki punkt E, że

$$|\mathrm{CE}| = a.$$



Wówczas trójkąty ABC i AEC mają równe pola, czyli

$$P_{\mathrm{ABC}} = P_{\mathrm{ACE}} = \tfrac{1}{2} \cdot |\mathrm{EC}| \cdot |\mathrm{CA}| \cdot \sin(180^\circ - \gamma) = \tfrac{1}{2}\mathrm{ab}\sin(180^\circ - \gamma).$$

Przykłady. Część II

Sinus kąta można rozważać także dla kąta prostego oraz rozwartego. Wówczas

$$\sin 90^\circ = 1$$

i jeżeli α jest kątem ostrym, to

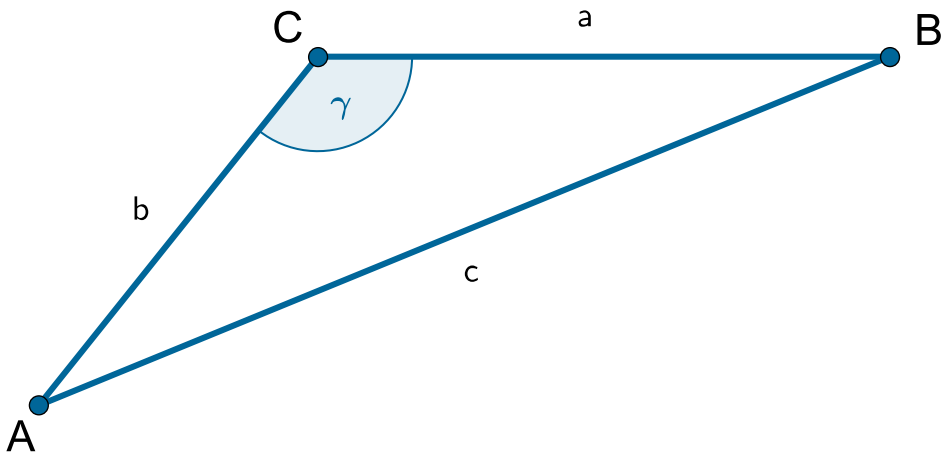
$$\sin(180^\circ - \alpha) = \sin\alpha.$$

Z powyższych równości i z wcześniejszych przykładów wynika, że pole dowolnego trójkąta jest równe połowie iloczynu długości dwóch jego boków i sinusa kąta zawartego między nimi.

Twierdzenie: 4

Pole trójkąta jest równe połowie iloczynu długości dwóch jego boków i sinusa kąta zawartego między tymi bokami.
Przy oznaczeniach takich jak na rysunku

$$P_{\mathrm{ABC}} = \tfrac{1}{2}\mathrm{ab}\sin\gamma.$$



Przykład 1

W trójkącie ABC dane są długości boków: $|\mathrm{BC}| = 6$, $|\mathrm{AC}| = 4$. Kąt ACB ma miarę 120°. Na boku AB leży taki punkt D, że $|\sphericalangle\mathrm{ACD}| = 60^\circ$. Obliczymy długość odcinka CD.
Zauważmy, że pole trójkąta ABC jest równe sumie pól trójkątów ADC i BDC.
Ponadto

$$P_{\mathrm{ABC}} = \tfrac{1}{2}\cdot 6\cdot 4\cdot\sin 120^\circ = 6\sqrt{3}.$$

Oznaczmy $|\mathrm{CD}| = \mathrm{x}$. Wtedy pola trójkątów ADC i BDC możemy zapisać za pomocą x.

$$P_{\mathrm{ADC}} = \frac{1}{2} \cdot 4 \cdot x \cdot \sin 60^\circ = \sqrt{3}x$$

$$P_{\mathrm{BDC}} = \frac{1}{2} \cdot x \cdot 6 \cdot \sin 60^\circ = \frac{3\sqrt{3}}{2}x.$$

Otrzymujemy równanie

$$\frac{3\sqrt{3}}{2}x + \sqrt{3}x = 6\sqrt{3},$$

skąd

$$x = \frac{12}{5}.$$

Zatem

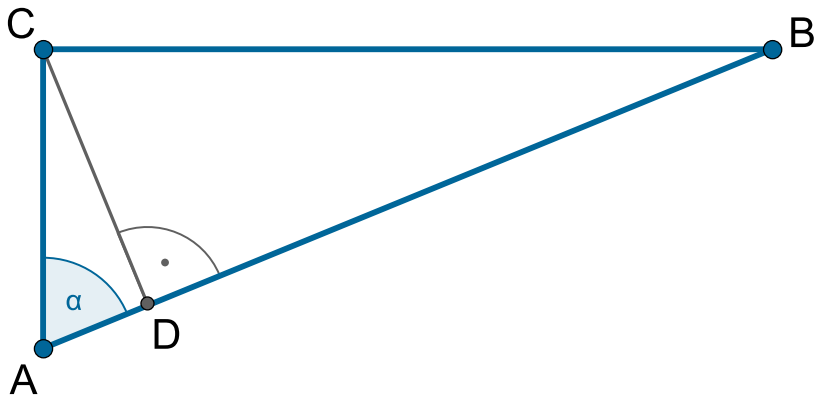
$$|\mathrm{CD}| = 2{,}4.$$

Przykład 2

W trójkącie prostokątnym ABC kąt przy wierzchołku C jest prosty, a punkt D jest spodkiem wysokości poprowadzonej na przeciwprostokątną z wierzchołka C. Wykażemy, że

$$|\mathrm{AC}|^2 = |\mathrm{AD}| \cdot |\mathrm{AB}|.$$

Oznaczmy przez α miarę kąta BAC.



Wówczas w trójkącie ABC

$$\cos\alpha = \frac{|\mathrm{AC}|}{|\mathrm{AB}|},$$

a w trójkącie ACD

$$\cos\alpha = \frac{|\mathrm{AD}|}{|\mathrm{AC}|}.$$

Stąd

$$\frac{|\mathrm{AC}|}{|\mathrm{AB}|} = \frac{|\mathrm{AD}|}{|\mathrm{AC}|},$$

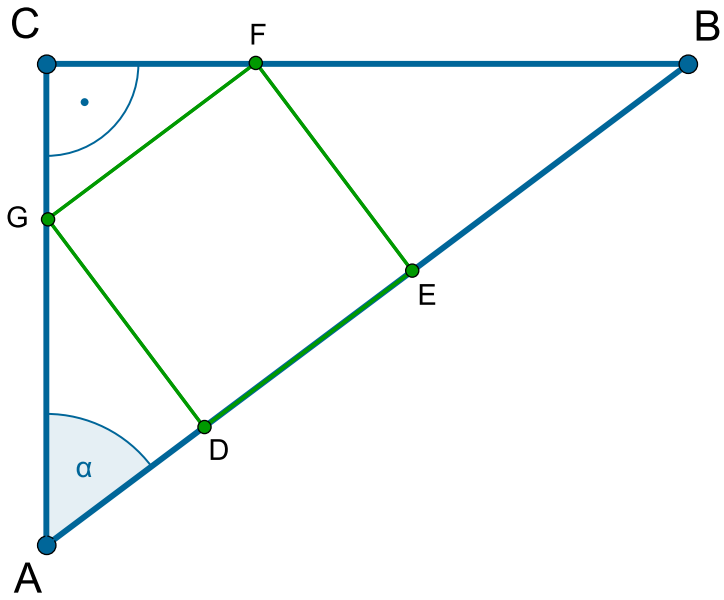
czyli

$$|\mathrm{AC}|^2 = |\mathrm{AD}| \cdot |\mathrm{AB}|.$$

W ten sposób dowód został zakończony.

Przykład 3

W trójkącie prostokątnym ABC przyprostokątne mają długości $|\mathrm{BC}| = 14{,}8$ i $|\mathrm{AC}| = 11{,}1$. Kwadrat DEFG jest wpisany w trójkąt ABC tak, że bok DE leży na przeciwprostokątnej AB, a wierzchołki F i G leżą na przyprostokątnych odpowiednio BC i AC. Obliczymy długość boku tego kwadratu.



Z twierdzenia Pitagorasa w trójkącie ABC obliczamy długość boku AB.

$$|\mathrm{AB}|^2 = (11{,}1)^2 + (14{,}8)^2$$

$$|\mathrm{AB}|^2 = 342{,}25$$

Ponieważ $|\mathrm{AB}| > 0$, to

$$|\mathrm{AB}| = 18{,}5.$$

Oznaczmy przez x długość boku kwadratu DEFG, a przez α miarę kąta BAC.
Stąd

$$|\sphericalangle \mathrm{CGF}| = \alpha, |\sphericalangle \mathrm{EFB}| = \alpha.$$

Każdy z trójkątów prostokątnych ADG, GCF oraz FEB jest zatem podobny do trójkąta ABC. Wobec tego stosunki długości boków w tych trójkątach możemy wyrazić za pomocą funkcji trygonometrycznych kąta α.
W trójkącie ABC

$$\sin\alpha = \frac{14{,}8}{18{,}5} = \frac{4}{5}, \cos\alpha = \frac{11{,}1}{18{,}5} = \frac{3}{5}.$$

W trójkącie ADG

$$\sin\alpha = \frac{x}{|\mathrm{AG}|},$$

a w trójkącie CGF

$$\cos\alpha = \frac{|\mathrm{CG}|}{x}.$$

Wynika z tego, że

$$\frac{x}{|\mathrm{AG}|} = \frac{4}{5}, \frac{|\mathrm{CG}|}{x} = \frac{3}{5},$$

skąd

$$|\mathrm{AG}| = \frac{5}{4}x, |\mathrm{CG}| = \frac{3}{5}x.$$

Ale $|\mathrm{AG}| + |\mathrm{CG}| = |\mathrm{AC}|$, więc $\frac{5}{4}x + \frac{3}{5}x = \frac{111}{10}$, a zatem $\frac{37}{20}x = \frac{111}{10}$, czyli $x = 6$.
Zatem długość boku kwadratu DEFG jest równa 6.

Zadania

Ćwiczenie 1

W trójkącie równoramiennym ABC dane są $|\mathrm{AC}| = |\mathrm{BC}| = 4$ i $|\sphericalangle \mathrm{ACB}| = 30^\circ$. Wówczas

- [ ] pole trójkąta ABC jest równe 4
- [ ] wysokość AD opuszczona z wierzchołka A na bok BC ma długość 2
- [ ] podstawa AB ma długość 2

Ćwiczenie 2

W trójkącie ABC dane są $|\mathrm{AB}| = 6$, $|\mathrm{BC}| = 2\sqrt{2}$ i $|\sphericalangle \mathrm{ABC}| = 45^\circ$. Wynika z tego, że

- [ ] kąt BAC ma miarę 30°
- [ ] pole trójkąta ABC jest równe 6
- [ ] wysokość CD opuszczona z wierzchołka C na bok AB ma długość 2

Ćwiczenie 3

W równoległoboku ABCD dane są długości boków $|\mathrm{AB}| = 10$, $|\mathrm{AD}| = 6$. Miara kąta BAD jest równa 60°. Wtedy

- [ ] kąt ABD ma miarę większą niż 30°
- [ ] pole równoległoboku ABCD jest równe $15\sqrt{3}$
- [ ] wysokość DE opuszczona z wierzchołka D na bok BC ma długość $5\sqrt{3}$

Ćwiczenie 4

W trapezie równoramiennym ABCD podstawy mają długości $|\mathrm{AB}| = 7$ i $|\mathrm{CD}| = 5$. Przekątne AC i BD tego trapezu przecinają się w punkcie S, przy $|\sphericalangle \mathrm{BSA}| = 60^\circ$. Wówczas

- pole trapezu ABCD jest równe $36\sqrt{3}$
- $|\mathrm{BD}| = 12$
- trójkąt ASD ma pole równe $\frac{35\sqrt{3}}{4}$

Ćwiczenie 5

W rombie ABCD o boku równym $2\sqrt{3}$ przekątna AC ma długość 6. Wynika z tego, że

- ◯ przekątna BD jest równa $\sqrt{3}$
- ◯ kąt ABC ma miarę 4 razy większą od miary kąta ACD
- ◯ pole tego rombu jest równe 10

Ćwiczenie 6

W trójkącie ABC boki AB i BC mają długości równe odpowiednio 7 oraz $4\sqrt{2}$. Kąt ABC ma miarę 135°. Wtedy

- ☐ kąt BAC ma miarę 30°
- ☐ odległość punktu C od prostej AB jest równa 4
- ☐ pole trójkąta ABC jest równe 14

Ćwiczenie 7

Podstawy trapezu prostokątnego ABCD mają długości 5 i 9. Cosinus kąta ostrego tego trapezu jest równy $0{,}8$. Wówczas

- [ ] kąt nachylenia krótszej przekątnej tego trapezu do podstawy jest większy niż 30°
- [ ] pole trapezu ABCD jest równe 21
- [ ] dłuższe ramię trapezu ABCD jest równe 5

Ćwiczenie 8

W trójkącie ABC dane są długości boków: $|\mathrm{AB}| = 8$, $|\mathrm{BC}| = 6$, $|\mathrm{AC}| = 5$. Punkt D jest środkiem boku AB. Punkty E i F leżą na bokach odpowiednio BC i AC, przy czym $|\mathrm{BE}| = |\mathrm{CF}| = 2$. Wynika z tego, że

- [ ] pola trójkątów DEF i CEF są równe
- [ ] pole trójkąta ADF stanowi $\frac{3}{10}$ pola trójkąta ABC
- [ ] pole trójkąta BDE stanowi $\frac{1}{6}$ pola trójkąta ABC

Ćwiczenie 9

W trójkącie prostokątnym ABC kąt ostry przy wierzchołku B jest dwa razy większy od kąta ostrego przy wierzchołku A. Stosunek długości przyprostokątnej BC do przeciwprostokątnej AB jest równy

- ◯ $\frac{1}{2}$
- ◯ $\frac{\sqrt{3}}{2}$
- ◯ $\frac{1}{3}$
- ◯ $\frac{\sqrt{2}}{2}$

Ćwiczenie 10

W trójkącie prostokątnym ABC o kącie prostym przy wierzchołku C, dane są $|\mathrm{BC}| = 12$ i $\sin(\measuredangle \mathrm{CAB}) = \frac{3}{5}$. Wynika z tego, że długość boku AC jest równa

- ◯ 20
- ◯ 9
- ◯ 16

Ćwiczenie 11

W trójkącie równoramiennym ABC dane są długości boków $|\mathrm{AC}| = |\mathrm{BC}| = 6$ i $\left|\mathrm{AB}\right| = 6\sqrt{3}$. Wówczas kąt między ramionami tego trójkąta ma miarę

- ◯ 120°
- ◯ 150°
- ◯ 90°
- ◯ 60°

Ćwiczenie 12

Pole trójkąta ABC, w którym $\left|\mathrm{AB}\right| = 8$, $\left|\mathrm{AC}\right| = 2\sqrt{3}$ i $|\sphericalangle \mathrm{CAB}| = 60^\circ$ jest równe

- ◯ $12\sqrt{3}$
- ◯ 12
- ◯ 24
- ◯ $12\sqrt{2}$

Ćwiczenie 13

W trapezie równoramiennym $ABCD$ podstawy mają długości $|AB| = 11$ i $|CD| = 5$. Wysokość tego trapezu jest równa 3. Wówczas kąt ostry przy podstawie tego trapezu ma miarę

- ◯ 45°
- ◯ 60°
- ◯ 30°
- ◯ 15°

Ćwiczenie 14

Dany jest trójkąt równoramienny, w którym ramię ma długość 6, a miara kąta przy podstawie jest równa 75°. Pole tego trójkąta jest równe

- ◯ $9\sqrt{2}$
- ◯ 18
- ◯ 9
- ◯ $9\sqrt{3}$

Ćwiczenie 15

W równoległoboku ABCD dane są $|\mathrm{AB}| = 7$, $|\mathrm{AD}| = 12$i $|\sphericalangle \mathrm{BCD}| = 150^\circ$. Pole tego równoległoboku jest równe

- $42\sqrt{2}$
- $42\sqrt{3}$
- 42

Ćwiczenie 16

W czworokącie wypukłym ABCD punkty K, L i M są środkami boków odpowiednio BC, CD i DA, $\left|\mathrm{KL}\right| = 6$, $\left|\mathrm{LM}\right| = 2\sqrt{2}$, a kąt KLM ma miarę 135°. Wówczas pole czworokąta ABCD jest równe

- 24
- 6
- 12
- 18

Ćwiczenie 17

Na bokach AB i AC trójkąta ABC odpowiednio leżą punkty K i L takie, że $|\mathrm{AK}| = 2|\mathrm{KB}|$ i $|\mathrm{AL}| = 3|\mathrm{LC}|$. Wynika z tego, że stosunek pola trójkąta AKL do pola trójkąta ABC jest równy

- $\frac{2}{3}$
- $\frac{3}{4}$
- $\frac{4}{5}$
- $\frac{1}{2}$

Ćwiczenie 18

W trójkącie prostokątnym ABC przyprostokątne mają długości $|\mathrm{AC}| = 5$, $|\mathrm{BC}| = 20$. Punkt D leży na przeciwprostokątnej AB i $|\sphericalangle \mathrm{DCA}| = 45^\circ$. Odcinek CD ma długość

- $4\sqrt{2}$
- $\frac{5\sqrt{17}}{2}$
- $3\sqrt{3}$
- $\frac{25}{4}$

Ćwiczenie 19

W trójkącie prostokątnym ABC przeciwprostokątna AB ma długość 6. Kąt ABC ma miarę 30°. Oblicz długości przyprostokątnych i pole tego trójkąta.

Ćwiczenie 20

W trójkącie równoramiennym ABC dane są długości boków $|\mathrm{AC}| = |\mathrm{BC}| = 2$. Miara kąta ABC jest równa 75°. Oblicz pole tego trójkąta.

Ćwiczenie 21

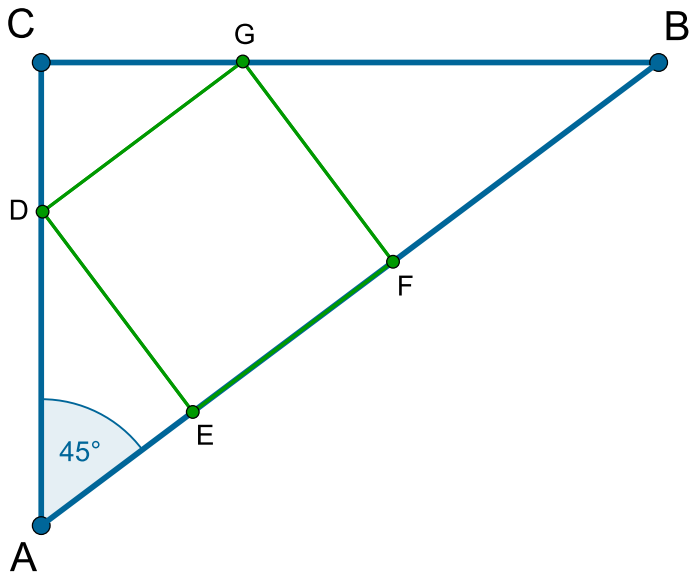
W równoległoboku $ABCD$ dane są długości boków $|AD| = 5$, $|CD| = 8$, a miara kąta ABC jest 3 razy większa od miary kąta BAD. Oblicz pole równoległoboku $ABCD$.

Ćwiczenie 22

W trapezie równoramiennym $ABCD$ podstawami są boki AB i CD. Każda z przekątnych AC i BD ma długość 10. Przekątne AC i BD przecinają się w punkcie M, przy czym $|\sphericalangle AMB| = 150^\circ$. Oblicz pole trapezu $ABCD$.

Ćwiczenie 23

W trójkącie prostokątnym ABC przedstawionym na rysunku kąt ostry BAC ma miarę 45°. Bok kwadratu $DEFG$, wpisanego w ten trójkąt, jest równy $2\sqrt{2}$. Oblicz pole trójkąta ABC.



Ćwiczenie 24

W trapezie równoramiennym $ABCD$ podstawy mają długości $|AB| = 18$, $|CD| = 6$. Proste AD i BC przecinają się w punkcie E, przy czym $|\sphericalangle AEB| = 120^\circ$. Oblicz pole trapezu $ABCD$.

Ćwiczenie 25

Bok rombu ABCD ma długość $20\frac{1}{2}$. Tangens kąta ostrego przy wierzchołku A jest równy $\frac{40}{9}$. Oblicz długość przekątnej AC.

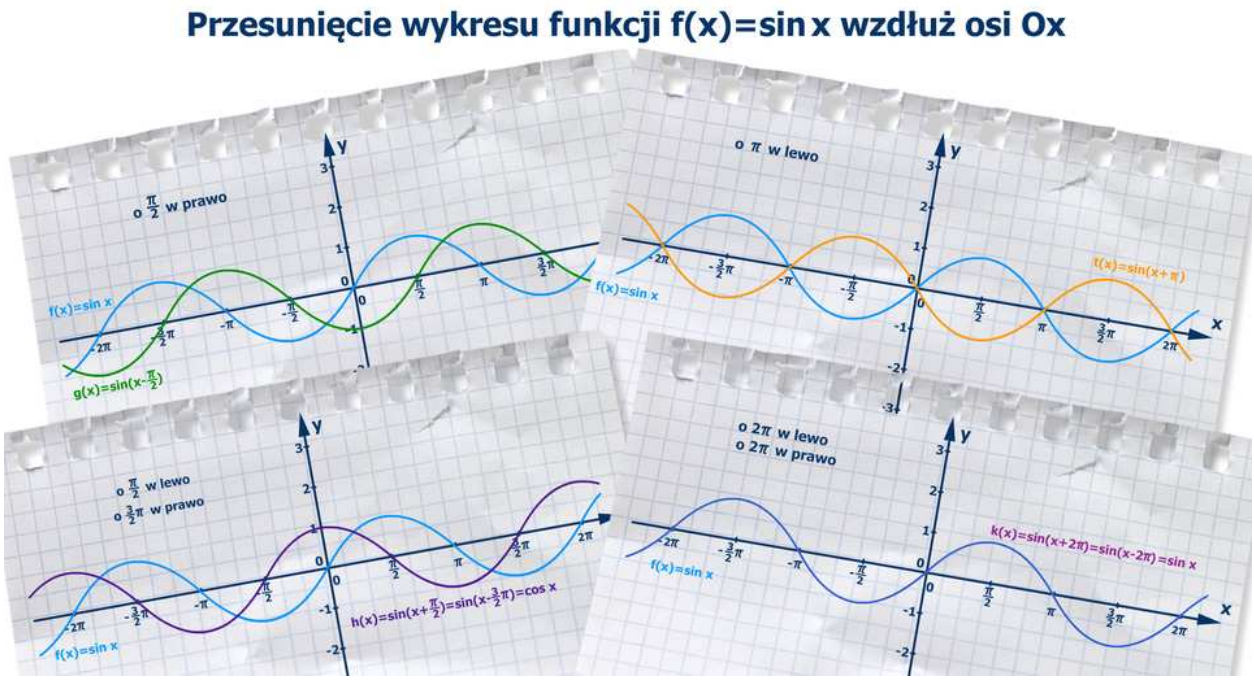
Ćwiczenie 26

W trójkącie prostokątnym ABC kąt przy wierzchołku C jest prosty, $|\mathrm{AB}| = 17$ i $\operatorname{tg}(\sphericalangle \mathrm{ABC}) = 1{,}875$. Oblicz długości boków AC i BC oraz pole koła wpisanego w ten trójkąt.

Ćwiczenie 27

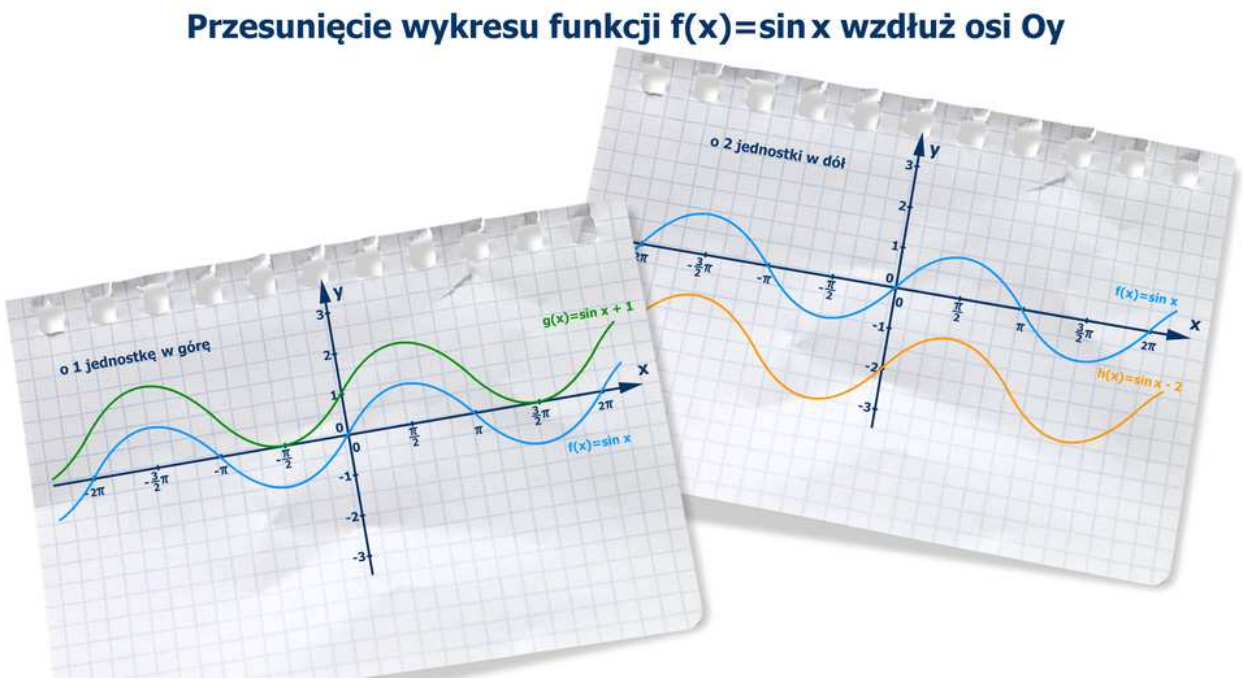
W trójkącie ABC na bokach AB i AC wybrano takie punkty D i E, że $\frac{|\mathrm{AD}|}{|\mathrm{DB}|} = \frac{5}{4}$ i $\frac{|\mathrm{AE}|}{|\mathrm{EC}|} = \frac{3}{2}$. Wykaż, że pole trójkąta ABC jest 3 razy większe od pola trójkąta ADE.

Wykresy i własności funkcji trygonometrycznych



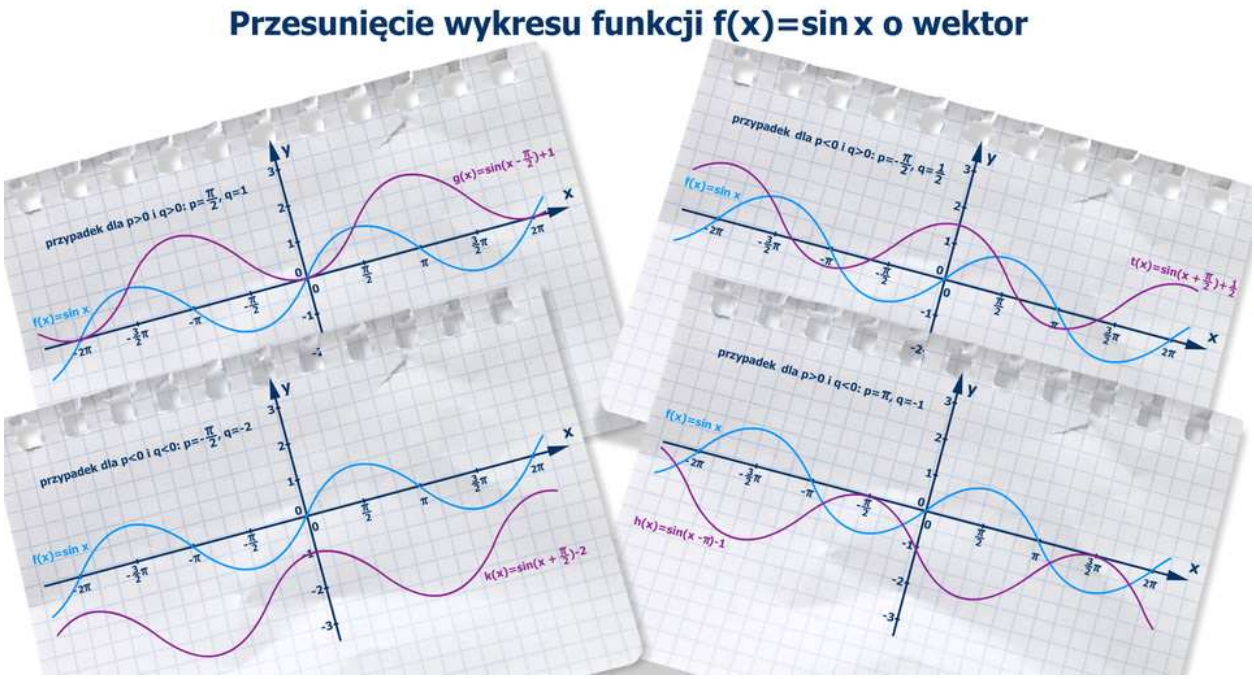
Film dostępny na portalu epodreczniki.pl

Animacja



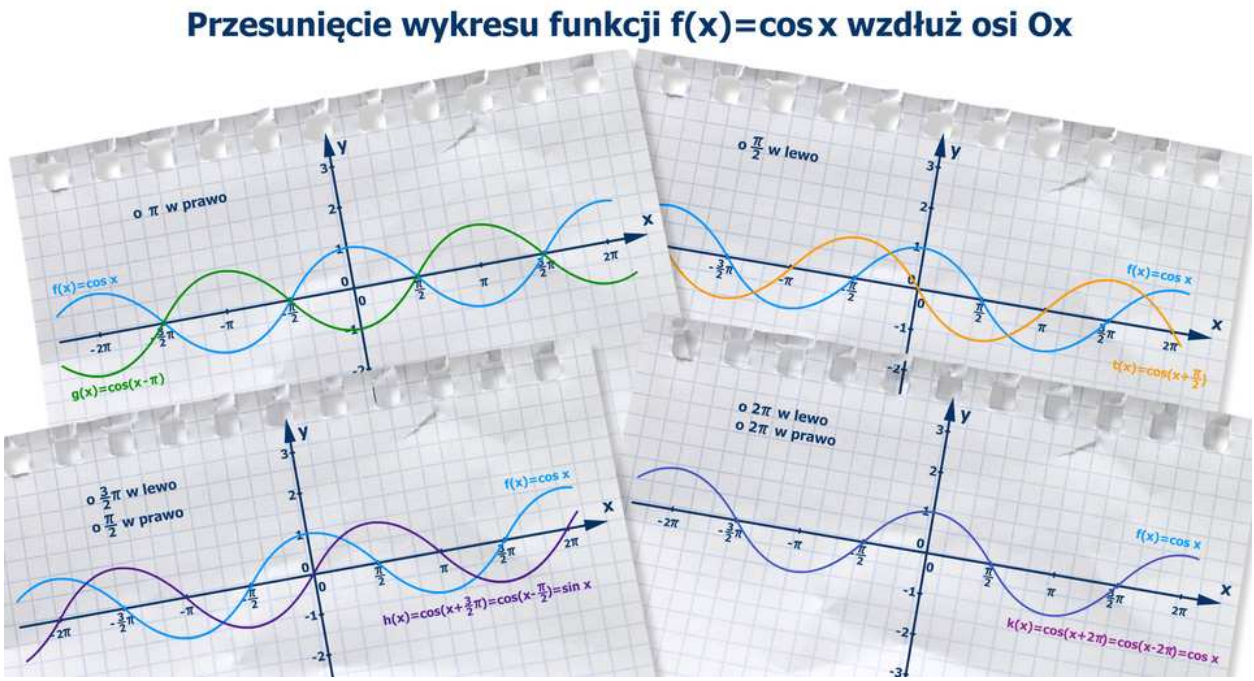
Film dostępny na portalu epodreczniki.pl

Animacja



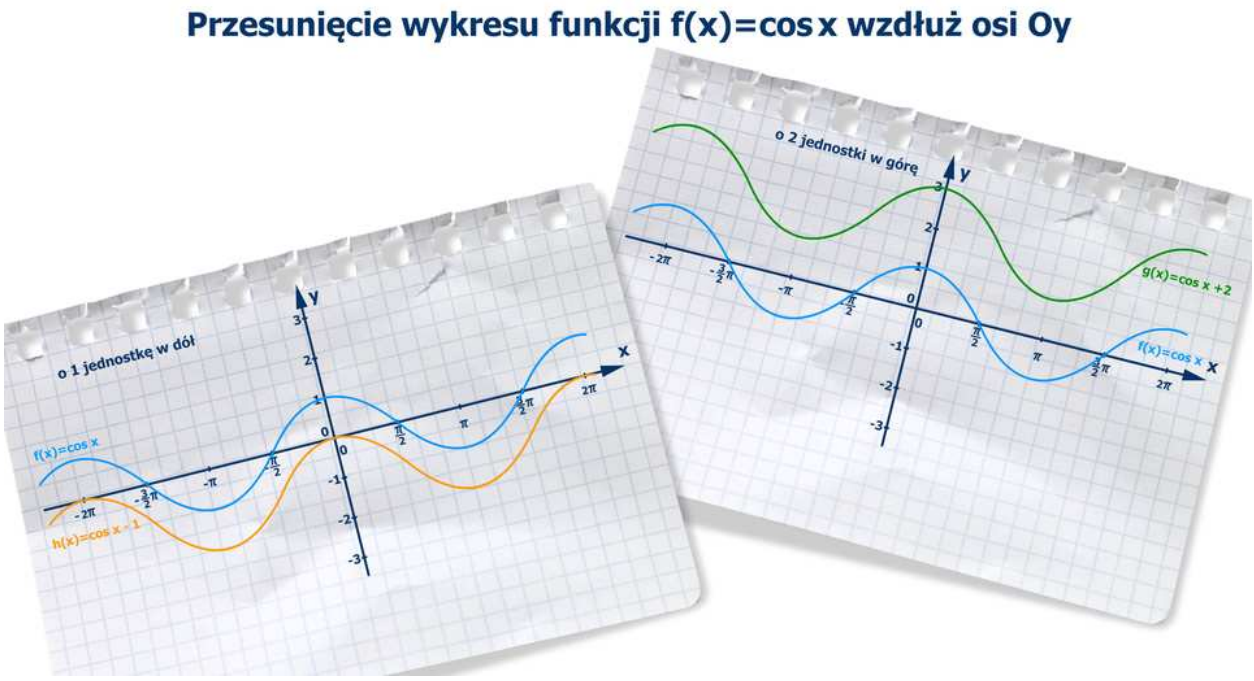
Film dostępny na portalu epodreczniki.pl

Animacja



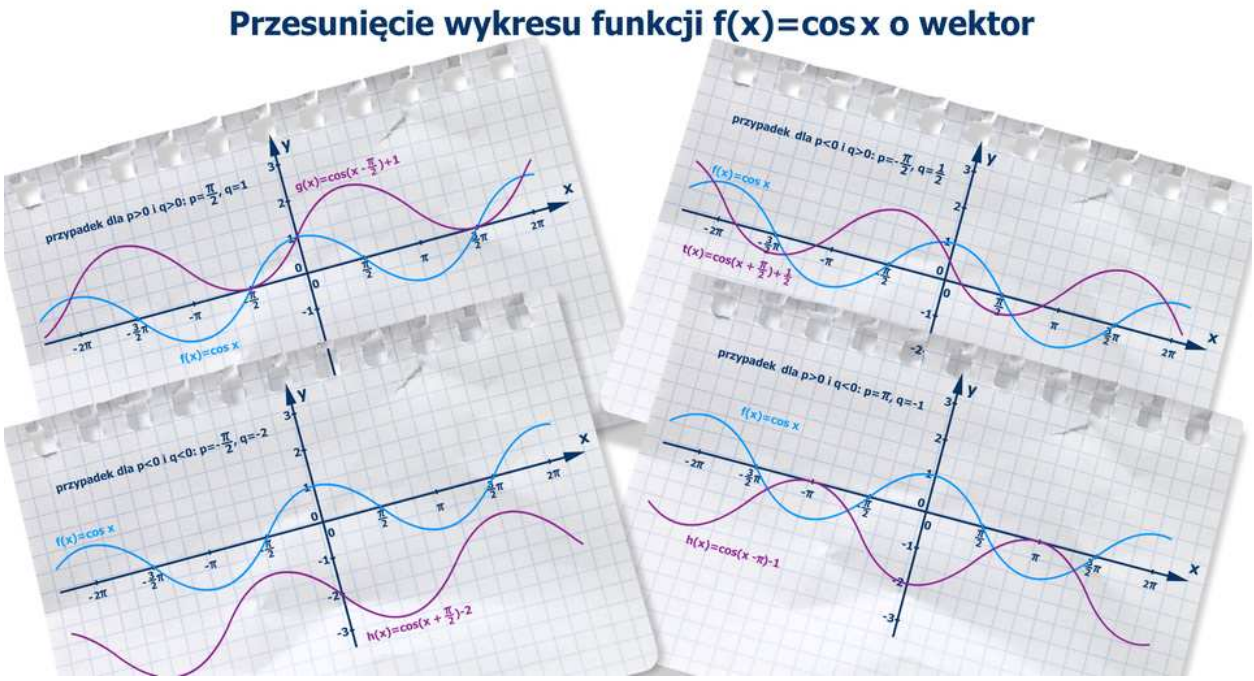
Film dostępny na portalu epodreczniki.pl

Animacja



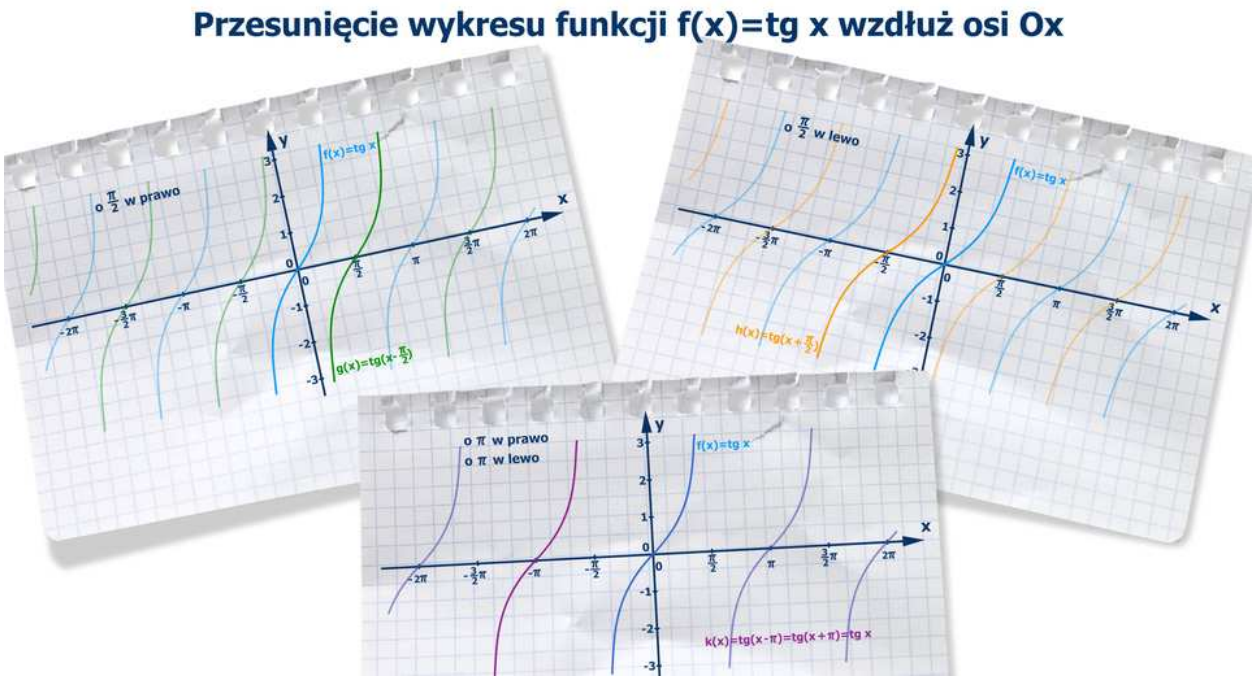
Film dostępny na portalu epodreczniki.pl

Animacja



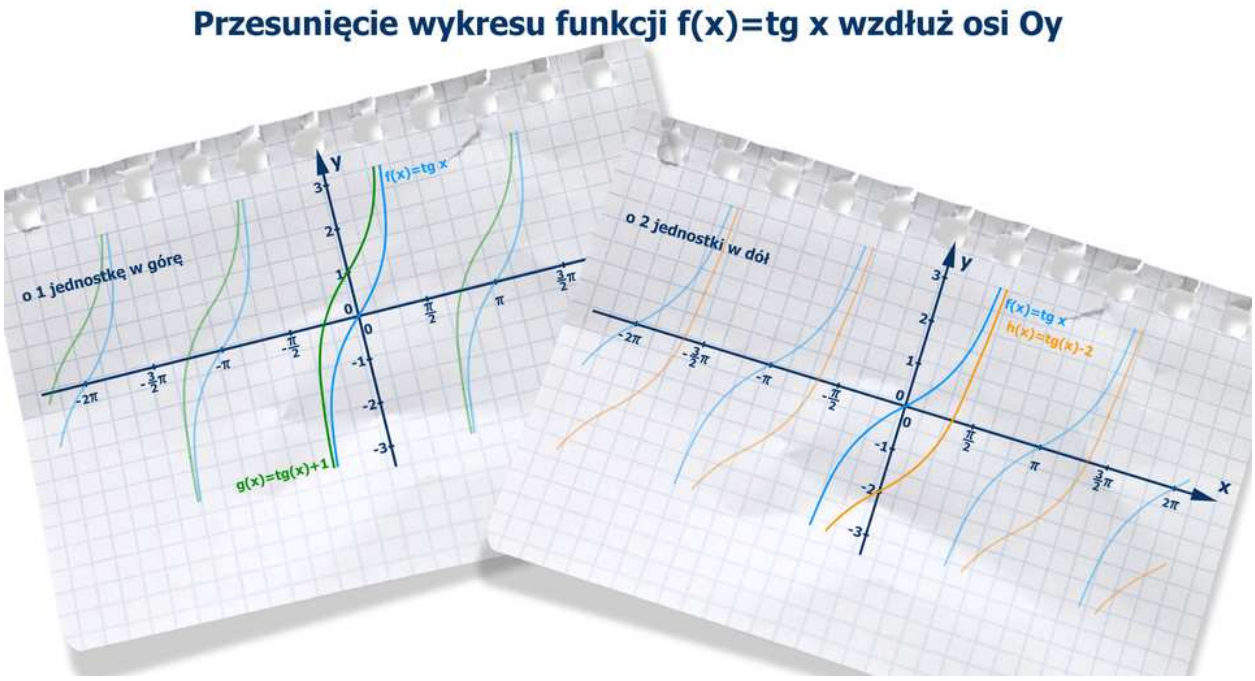
Film dostępny na portalu epodreczniki.pl

Animacja



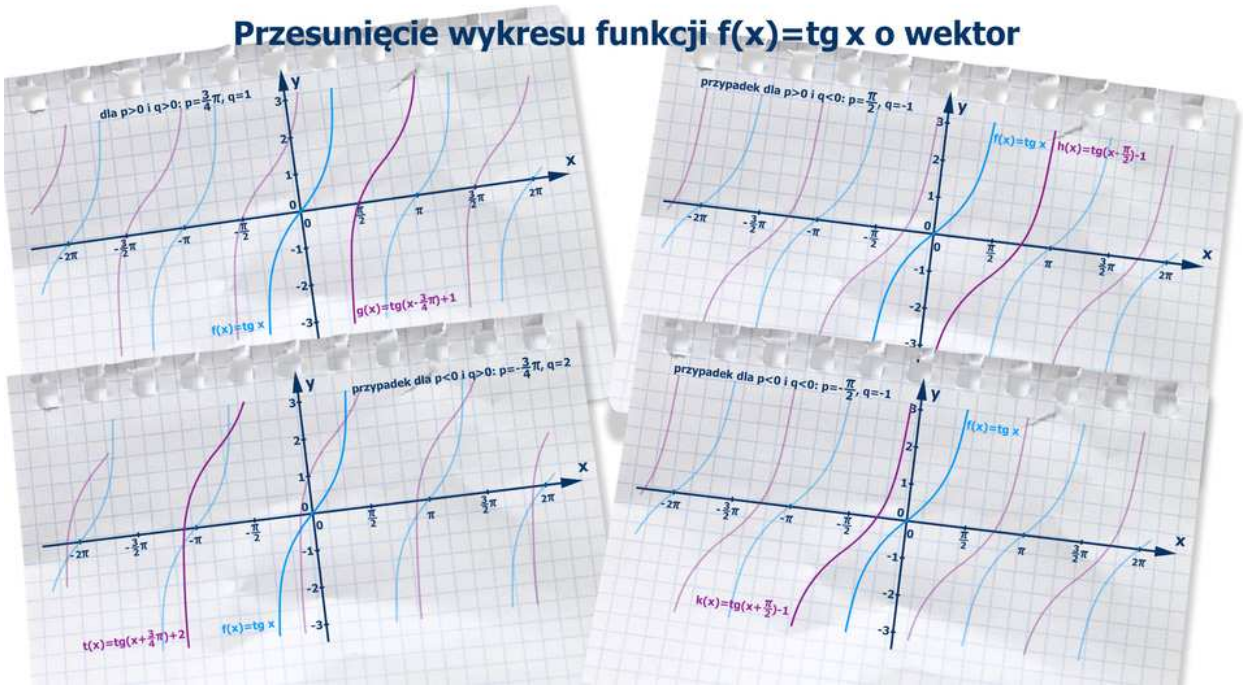
Film dostępny na portalu epodreczniki.pl

Animacja



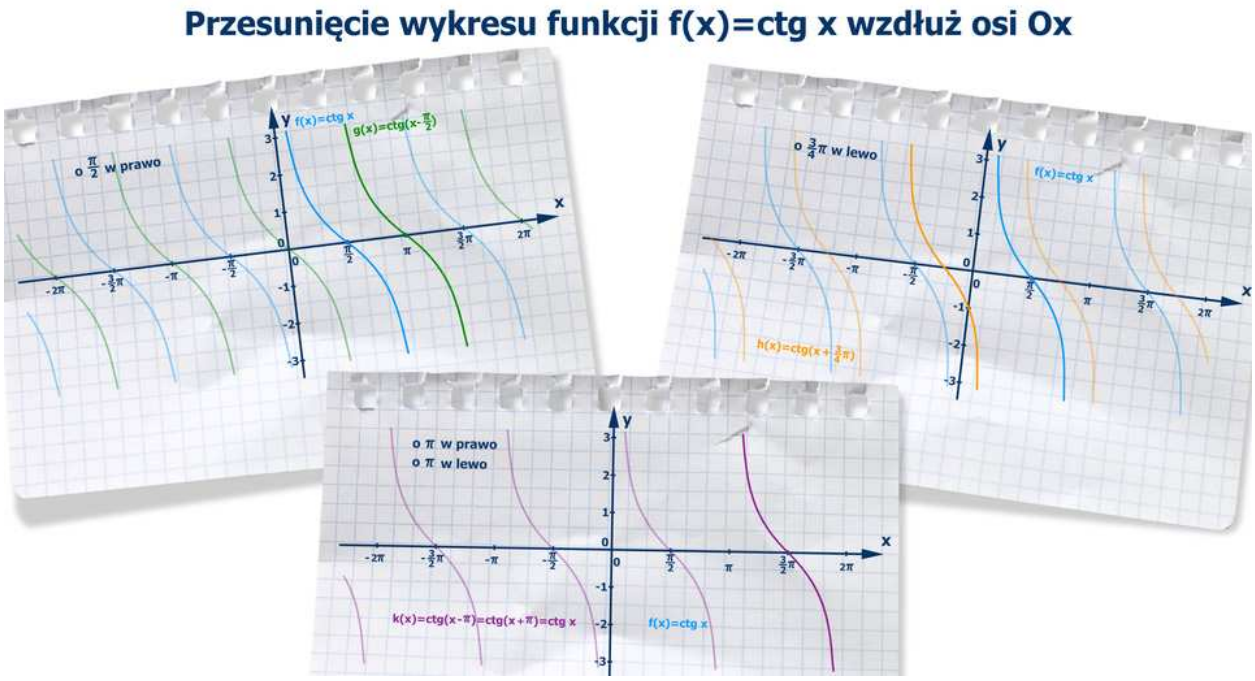
Film dostępny na portalu epodreczniki.pl

Animacja



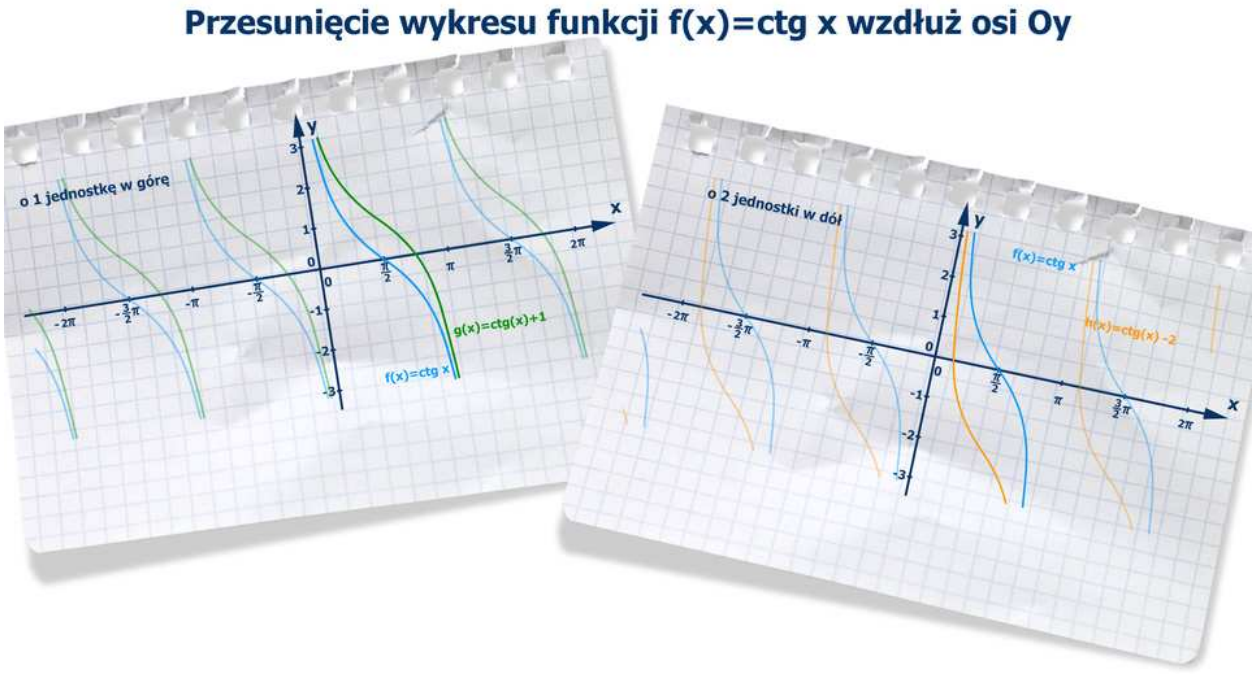
Film dostępny na portalu epodreczniki.pl

Animacja



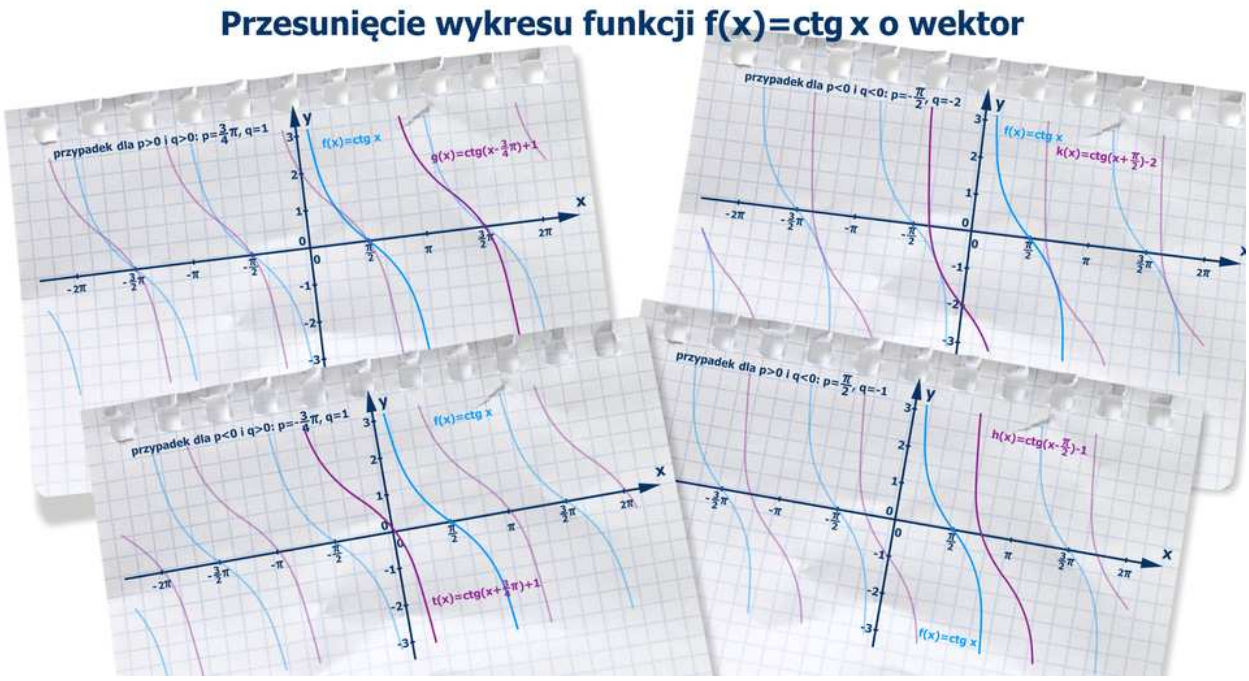
Film dostępny na portalu epodreczniki.pl

Animacja



Film dostępny na portalu epodreczniki.pl

Animacja



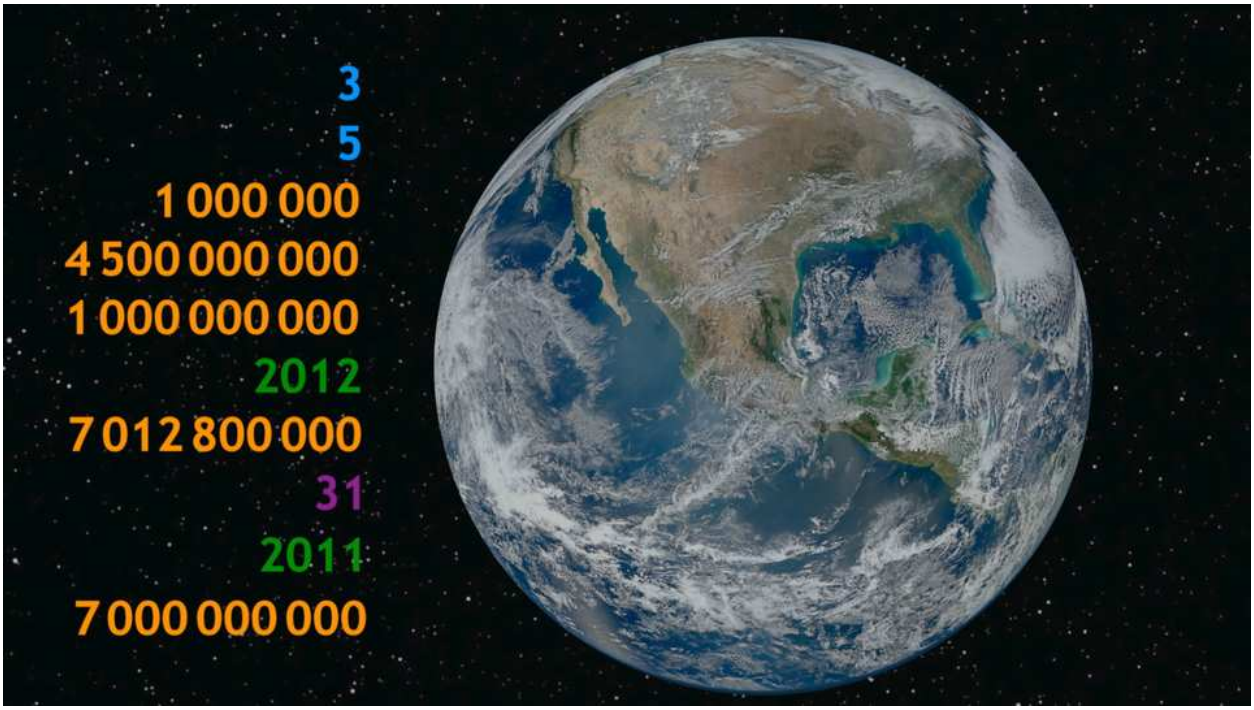
Film dostępny na portalu epodreczniki.pl

Animacja

Liczby naturalne, całkowite i wymierne

Już wiesz

- $0, 1, 2, 3, 4, 5, \ldots$ to liczby naturalne. Liczby naturalne można uporządkować rosnąco, wtedy dla dowolnej liczby naturalnej n następna jest liczba $n+1$. Liczb naturalnych jest nieskończenie wiele.



Film dostępny na portalu epodreczniki.pl

Animacja

- Liczba naturalna większa od 1, która ma dokładnie dwa dzielniki (1 i samą siebie) jest liczbą pierwszą (np. $2,\ 3,\ 5,\ 7,\ 11,\ 13$ ...).
- Liczba naturalna większa od 1, która ma więcej niż dwa dzielniki jest liczbą złożoną (np. $4,\ 9,\ 10,\ 24$ ...).
- Liczba 1 nie jest ani pierwsza, ani złożona.
- Dwie liczby naturalne nazywamy względnie pierwszymi, jeżeli nie mają wspólnego dzielnika większego niż 1 (np. 3 i 5 lub 7 i 9).
- Ułamek $\frac{p}{q}$ nazywamy nieskracalnym, jeżeli liczby naturalne p i q są względnie pierwsze.(np. $\frac{5}{7}, \frac{7}{10}, \frac{12}{13}$).

Film dostępny na portalu epodreczniki.pl

Animacja pokazuje Ziemię i Słońce. Ziemia składa się z siedmiu dziesiątych z wody. Trzy dziesiąte powierzchni Ziemi to kontynenty i wyspy. Słońce składa się w siedemdziesięciu pięciu setnych z wody, w dwudziestu czterech setnych z helu a jedna setna to pozostałe pierwiastki.

- Jeśli liczbę naturalną a można zapisać jako iloczyn dodatnich liczb naturalnych b i n (czyli $a = b \bullet n$), to wtedy:

- - b i n są dzielnikami liczby naturalnej a.
- - a jest wielokrotnością liczby naturalnej b lub liczby naturalnej n.

- Liczby całkowite to wszystkie liczby naturalne $0,\ 1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5$ ... oraz liczby do nich przeciwne $0,\ -1,\ -2,\ -3,\ -4$ ...
- Liczba całkowita podzielna przez 2 jest liczbą parzystą. Liczbę parzystą możemy zapisać w postaci $2k$, gdzie k jest liczbą całkowitą. 0 jest liczbą parzystą.
- Liczba całkowita, która nie jest podzielna przez 2 jest nieparzysta. Liczbę nieparzystą możemy zapisać np. jako $2k + 1$ lub $2k - 1$, gdzie k jest liczbą całkowitą.
- Liczby wymierne to wszystkie liczby, które można przedstawić w postaci ułamka $\frac{p}{q}$, którego licznik p i mianownik q $(q \neq 0)$ są liczbami całkowitymi.

Zadania

Ćwiczenie 1

Przeciągnij liczby z dolnej sekcji do górnej.

liczby naturalne

liczby, które NIE są liczbami naturalnymi

$4\sqrt{5}-\sqrt{5}$ $\sqrt{9}$ $\sqrt{3}$ $\frac{3}{2}$ -4 7 $\left(\frac{1}{5}\right)^{-1}$ 0

Ćwiczenie 2

Przeciągnij liczby z dolnej sekcji do górnej.

liczby całkowite

liczby, które NIE są liczbami całkowitymi

0 -4 $\sqrt{3}$ 7 $\frac{12}{3}$ $\frac{3}{2}$ $\sqrt{9}$ 16^{-1} $\left(\frac{1}{5}\right)^{-1}$

Ćwiczenie 3

Przeciągnij liczby z dolnej sekcji do górnej.

liczby wymierne

liczby, które NIE są liczbami wymiernymi (niewymierne)

-4 16^{-1} $4\sqrt{5}-\sqrt{5}$ $\frac{12}{3}$ $\left(\frac{1}{5}\right)^{-1}$ $\sqrt{3}$ 7 $\sqrt{9}$ $\frac{3}{2}$ 0 π

Ćwiczenie 4

Odpowiedz na pytania.

a. Podaj przykład liczby całkowitej, która nie jest liczbą naturalną.

b. Podaj przykład liczby wymiernej, która nie jest całkowita.

c. Czy istnieje liczba naturalna, która nie jest wymierna?

d. Czy istnieje liczba naturalna, która nie jest całkowita?

Przykład 1

Film dostępny pod adresem https://zpe.gov.pl/a/DHgKgyx88

Animacja

Ćwiczenie 5

Rozstrzygnij, czy zdanie jest prawdziwe, czy fałszywe.

- [ ] Wynikiem dzielenia $3\frac{1}{2} : 2\frac{3}{4}$ jest liczba $1\frac{3}{11}$.
- [ ] Wynikiem działania $\frac{1}{2} - \frac{1}{4} - \frac{1}{8} - \frac{1}{16}$ jest liczba $\frac{1}{16}$.
- [ ] Wynikiem odejmowania $\frac{11}{18} - \frac{5}{6}$ jest liczba $\left(-\frac{1}{2}\right)$.
- [ ] Wynikiem mnożenia $2\frac{3}{4} \bullet \frac{8}{11}$ jest liczba $2\frac{6}{11}$.

Ćwiczenie 6

Rozstrzygnij, czy zdanie jest prawdziwe, czy fałszywe.

- [ ] Wynikiem działania $\frac{0{,}92+0{,}49}{0{,}3 \bullet 0{,}1}$ jest liczba 47.
- [ ] Iloczyn liczb $2{,}35$ i $0{,}4$ jest równy $0{,}94$.
- [ ] Iloraz liczby $4{,}8$ przez liczbę $0{,}03$ jest równy 16.

Ważne!

- Mówimy, że liczby a i b są przeciwne, jeżeli $a + b = 0$. Liczbę przeciwną do x oznaczamy $-x$.
- Mówimy, że liczby a i b są odwrotne, jeżeli $a \bullet b = 1$. Liczbą odwrotną do liczby x różnej od zera jest $\frac{1}{x}$. Zauważmy, że nie ma liczby odwrotnej do zera, gdyż nie istnieje taka liczba, która pomnożona przez 0 dałaby 1.
- Zauważ, że jeżeli $x \neq 0$, to iloczyn liczby odwrotnej do x i liczby przeciwnej do x jest równy -1.

$$-x \bullet \frac{1}{x} = -1$$

Ćwiczenie 7

Rozstrzygnij, czy zdanie jest prawdziwe, czy fałszywe.

- [ ] Każda liczba rzeczywista ma liczbę do siebie odwrotną.
- [ ] Liczbą odwrotną do liczby $2\frac{2}{5}$ jest liczba przeciwna do liczby $-\frac{5}{12}$.
- [ ] Liczbą przeciwną do $\frac{11}{20}$ jest liczba $(-0{,}55)$.
- [ ] Liczba $1\frac{3}{7}$ jest odwrotna do liczby $\frac{7}{10}$.
- [ ] Każda liczba rzeczywista ma liczbę do siebie przeciwną.

Ćwiczenie 8

Rozstrzygnij, czy zdanie jest prawdziwe, czy fałszywe.

- [ ] Liczba $0,(36)$ leży pomiędzy liczbami $\frac{9}{25}$ i $\frac{37}{100}$.
- [ ] Liczba $3\frac{1}{8}$ jest większa od liczby $-2\frac{3}{4}$ o $5\frac{3}{8}$.
- [ ] Podwojonym iloczynem liczb $2\frac{3}{5}$ i $-\frac{1}{2}$ jest $-2{,}6$.
- [ ] Średnia arytmetyczna liczb $2\frac{5}{9}$ oraz $1\frac{7}{12}$ jest równa $2\frac{1}{6}$.

Przykład 2

Film dostępny pod adresem https://zpe.gov.pl/a/DHgKgyx88

Animacja

Ćwiczenie 9

Rozstrzygnij, czy zdanie jest prawdziwe, czy fałszywe.

- [ ] Wynik działania $\frac{-2{,}25+\left(2-3\frac{4}{5}\right)}{-3\frac{4}{17}\bullet\frac{1}{5}+1\frac{2}{8}:2{,}125}$ jest liczbą ujemną.
- [ ] Po wykonaniu obliczeń $\left(\frac{2}{15}+0{,}45\right)\bullet\frac{3}{7}$ otrzymamy liczbę $0{,}4$.
- [ ] Wynik działania $\frac{2{,}75-1\frac{1}{2}:(-3{,}375)}{5-2\frac{4}{9}}$ jest liczbą większą od 1.

Ćwiczenie 10

Rozstrzygnij, czy zdanie jest prawdziwe, czy fałszywe.

- [ ] Ułamek $0,(27)$ jest równy $\frac{3}{11}$.
- [ ] Suma liczb 0 , <mfenced separators="|"> 4 + 0 , (18) jest równa 0 , <mfenced separators="|"> 62 .
- [ ] Ułamek $\frac{1}{7}$ ma skończone rozwinięcie dziesiętne.
- [ ] Liczba $3,(6)$ jest wymierna.

Ćwiczenie 11

Rozstrzygnij, czy zdanie jest prawdziwe, czy fałszywe.

- [ ] Ósma cyfra po przecinku w rozwinięciu dziesiętnym liczby $\frac{41}{11}$ jest równa 7.
- [ ] Dwudziesta pierwsza cyfra po przecinku w rozwinięciu dziesiętnym liczby $0,(725)$ jest równa 5.

Ćwiczenie 12

Rozstrzygnij, czy zdanie jest prawdziwe, czy fałszywe.

- [ ] Ułamek $\frac{520}{1041}$ jest ułamkiem nieskracalnym.
- [ ] Ułamek $\frac{1326}{3913}$ jest ułamkiem skracalnym.
- [ ] Ułamek $\frac{11}{15}$ jest równy $\frac{112}{152}$.
- [ ] Największą liczbą, przez jaką można skrócić licznik i mianownik ułamka $\frac{2376}{2592}$ jest 216.

Film dostępny pod adresem https://zpe.gov.pl/a/DHgKgyx88

Animacja

Ćwiczenie 13

Liczba $2\frac{3}{7} - 1\frac{2}{5}$ jest mniejsza od liczby $\frac{3}{5} + \frac{8}{7}$

- o $\frac{7}{5}$
- o $\frac{1}{2}$
- o $\frac{5}{7}$
- o $1\frac{1}{2}$

Ćwiczenie 14

Wynikiem działania $\frac{7}{8}+\frac{7}{4}-\frac{7}{16}$ jest liczba

- $2{,}987$
- $2{,}725$
- $2{,}1853$
- $2{,}1875$

Ćwiczenie 15

Odwrotnością liczby $\frac{7}{8}+\frac{7}{4}-\frac{7}{16}$ jest liczba

- $\frac{16}{35}$
- $\frac{35}{16}$
- $\frac{13}{35}$
- $1\frac{5}{35}$

Ćwiczenie 16

Dane są liczby $a=2\frac{3}{7},\ b=1\frac{3}{5}, c=3\frac{1}{4}$. Różnica liczb $(a+b)c$ i $(a-b)c$ jest równa

- $\frac{52}{5}$
- $\frac{1059}{140}$
- $10\frac{3}{5}$
- $\frac{87}{4}$

Ćwiczenie 17

Niech $a = \frac{3}{5}$ i $b = \frac{1}{12}$. Wskaż liczbę, której rozwinięcie dziesiętne jest skończone.

- $\frac{b}{a}$
- $a + b$
- $a - b$
- ab

Ćwiczenie 18

Która równość jest prawdziwa?

- $\frac{384}{40320} = \frac{21}{13}$
- $\frac{384}{40320} = \frac{1}{105}$
- $\frac{384}{40320} = \frac{2}{3}$
- $\frac{384}{40320} = \frac{1}{8}$

Ćwiczenie 19

Liczbą x, która spełnia równanie $\frac{1}{22} + x = 0{,}06(81)$ jest

- $0{,}34$
- $0{,}02(27)$
- $\frac{2}{44}$
- $0,(343)$

Ćwiczenie 20

Niech $x = 3\frac{1}{5}$ i $y = 4\frac{1}{4}$. Prawdziwa jest równość

- $xy = 13\frac{3}{5}$
- $\frac{x}{y} = 13\frac{3}{5}$
- $x - y = 13\frac{3}{5}$
- $x + y = 13\frac{3}{5}$

Ćwiczenie 21

Niech $x = 0,(03)$ i $y = 0,(01)$. Wskaż równość prawdziwą.

- $\frac{x}{y} = 3$
- $x - y = 0,(2)$
- $xy = 3$
- $x + y = 0,(4)$

Ćwiczenie 22

Dane są liczby $x = 0,(285714)$ i $y = 0,(142857)$. Suma $x + y$ jest równa

- $0,(428561)$
- $0,(423571)$
- $0,(428571)$
- $0,(448571)$

Ćwiczenie 23

Dane są liczby $x = \frac{5}{9}$ i $y = 0,(003)$. Różnica $x - y$ jest równa

- $0,(558)$
- $0,(559)$
- $0,(552)$
- $0,(553)$

Ćwiczenie 24

Iloczyn cyfr stojących na trzydziestym pierwszym i trzydziestym drugim miejscu po przecinku w rozwinięciu dziesiętnym ułamka $\frac{8}{11}$ jest równy

- 16
- 15
- 13
- 14

Ćwiczenie 25

Niech $x = 0{,}875$ i $y = 0{,}9875$. Zapisz każdą z liczb $x + y, x - y, \mathrm{xy}, \frac{y}{x}$ w postaci ułamka zwykłego, nieskracalnego.

Ćwiczenie 26

Zapisz rozwinięcie dziesiętne

a. odwrotności liczby naturalnej większej od 10 i mniejszej od 12

b. sumy odwrotności trzech początkowych liczb pierwszych

Ćwiczenie 27

Dane są wszystkie jednocyfrowe liczby całkowite dodatnie podzielne przez 4. Zapisz rozwinięcie dziesiętne sumy kwadratów odwrotności tych liczb.

Ćwiczenie 28

Podaj rozwinięcia dziesiętne ułamków zwykłych: $\frac{149}{80}$, $-\frac{9}{80}$, $\frac{553}{640}$.

Ćwiczenie 29

Dane są liczby $a = \frac{1}{2} + \frac{3}{2+4} + \frac{5}{2+4+6}$ oraz $b = \frac{2}{3} + \frac{4}{3+5} + \frac{6}{3+5+7}$. Wykaż, że $\frac{1}{2}b - \frac{1}{5}a = \frac{1}{2}$.

Ćwiczenie 30

Oblicz i zapisz wynik w postaci ułamka nieskracalnego.

a. $\frac{25}{231} + \frac{2}{63} + \frac{5}{99}$

b. $\frac{13}{60} + \frac{55}{126} + \frac{17}{35}$

c. $\frac{95}{133} + \frac{46}{91} + \frac{138}{161}$

d. $\frac{5}{24} - \frac{11}{57} + \frac{57}{456}$

Ćwiczenie 31

Ćwiczenie 32

Oblicz i zapisz wynik w postaci ułamka dziesiętnego.

a. $\left(\frac{1}{3} + 2\frac{1}{9}\right) \bullet \left(\frac{1}{2} + 2\frac{1}{4}\right)$

b. $\left(\frac{1}{3} + 2\frac{1}{9}\right) : \left(\frac{1}{2} + 2\frac{1}{4}\right)$

Ćwiczenie 33

Wyznacz taki ułamek zwykły x, aby równość była prawdziwa.

a. $\frac{6}{7}+x=0{,}0\overline{(45)}$

b. $\frac{1}{3}+x=\frac{1}{4}+0,\overline{(09)}$

c. $0,\overline{(01)}+x=\frac{1}{33}$

d. $\frac{x}{11}+\frac{2}{7}=0{,}0\overline{(45)}$

Ćwiczenie 34

Wyznacz taki ułamek dziesiętny x, aby równość była prawdziwa.

a. $\frac{1}{3}+x=1{,}1\overline{(6)}$

b. $\frac{1}{3}+x \bullet 0{,}0(18)=\frac{1}{4}+0{,}125$

c. $0,\overline{(01)}+x=\frac{1}{33}+0{,}1(6)$

d. $\frac{x}{11}+\frac{2}{3}=0{,}041(6)$

Ćwiczenie 35

Wyznacz liczbę, która na osi liczbowej leży w jednakowej odległości od liczb x i y, gdy

a. $x=\frac{5}{13}$, $y=\frac{5}{12}$

b. $x=5,(3)$, $y=5,(36)$

c. $x=\frac{1}{a}$, $y=\frac{1}{b}$

Ćwiczenie 36

Podaj przykład liczby, która na osi liczbowej leży między liczbami

a. $\frac{19}{16}$ i $\frac{17}{14}$

b. $3,(5)$ i $3,(6)$

c. $-5\frac{1}{3}$ i $-5\frac{1}{4}$

Ćwiczenie 37

Wyznacz wszystkie nieskracalne ułamki zwykłe o liczniku 3, które są większe od $\frac{4}{11}$ i mniejsze od $\frac{7}{13}$.

Ćwiczenie 38

Znajdź wszystkie pary dodatnich liczb całkowitych a i b, dla których spełniony jest warunek $\frac{3}{7} < \frac{a}{11} < \frac{4}{b} < \frac{17}{20}$.

Ćwiczenie 39

Dziesiąta część uczestników maratonu przebiegła wyznaczoną trasę w czasie krótszym niż $3\ \mathrm{h}$. Połowa pozostałych uczestników uzyskała czas nie dłuższy niż $4\ \mathrm{h}$. Jaka część spośród wszystkich zawodników maratonu przebiegła trasę w czasie dłuższym niż $4\ \mathrm{h}$?

Ćwiczenie 40

Podaj trzy różne liczby naturalne n, dla których ułamek $\frac{2n+1}{3n+5}$ jest skracalny. Przez jaką liczbę naturalną, w każdym przypadku, ten ułamek można skrócić?

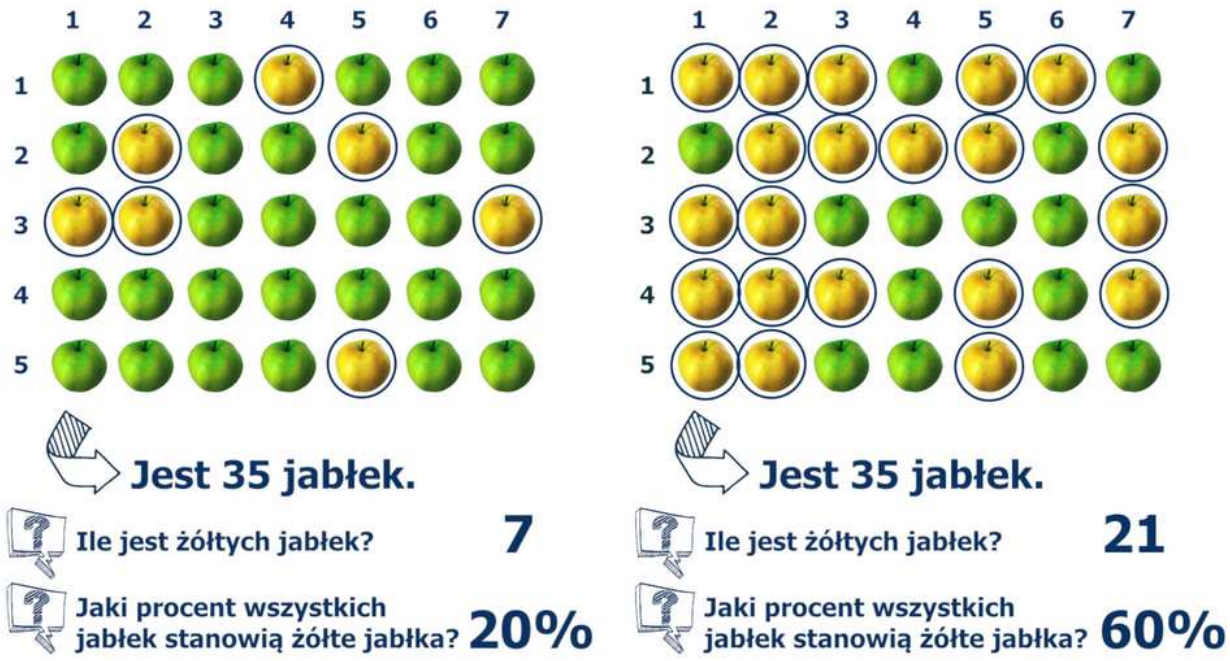
Ćwiczenie 41

Uzasadnij, że dla każdej liczby naturalnej a ułamek $\frac{a}{2a+1}$ jest nieskracalny.

Ćwiczenie 42

Sprawdź, czy istnieją liczby naturalne n, dla których ułamek $\frac{7n+11}{3n+4}$ można skrócić przez 5. Czy istnieje liczba naturalna n, dla której ten ułamek można skrócić przez liczbę większą niż 5?

Procenty i punkty procentowe

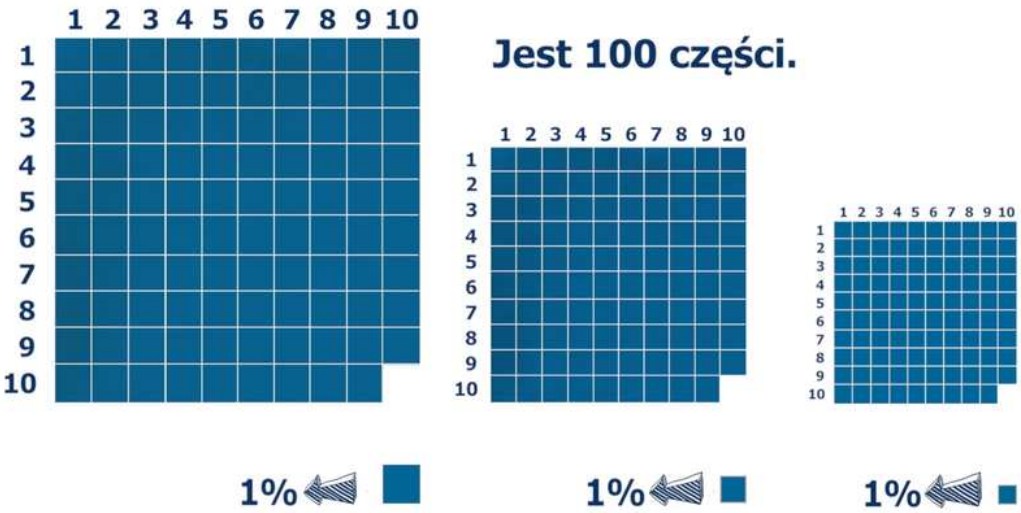


Film dostępny na portalu epodreczniki.pl

Animacja

Już wiesz

- Jeden procent $(1\,\%)$ liczby x to $\frac{1}{100}x$.



Film dostępny na portalu epodreczniki.pl

Animacja

- Różnicę między dwiema podanymi w procentach wartościami jednej wielkości określamy za pomocą punktów procentowych.
  Na przykład zmiana oprocentowania z 4% na 3% oznacza spadek o 1 punkt procentowy.

Film dostępny na portalu epodreczniki.pl

Animacja pokazuje dwie szklanki wypełnione różną ilością soku. Należy oszacować, w ilu procentach szklanka jest pełna. Pierwsza szklanka zapełniona jest w 25 procentach, druga szklanka w 80 procentach.

Już wiesz

Film dostępny na portalu epodreczniki.pl

Animacja pokazuje zaśnieżone góry. Należy oszacować jaki procent powierzchni góry jest zaśnieżony. Na początku góra przykryta jest śniegiem w 20 procentach, po opadach śniegu pokryta jest śniegiem w 90 procentach.

Zadania

Ćwiczenie 1

Zaznacz poprawne stwierdzenie.

- ◯ 45% liczby z jest równe 15. Wtedy $z > 33$.
- ◯ $25\,\%$ liczby x jest równe 26. Wynika z tego, że $x = 6{,}5$.
- ◯ $12\,\%$ liczby y jest równe 18. Wtedy $y = 216$.

Ćwiczenie 2

Zaznacz poprawne stwierdzenie.

- ◯ $400\ \mathrm{g}$ śmietany zawiera $120\ \mathrm{g}$ tłuszczu, zatem zawartość tłuszczu w tej śmietanie wynosi $18\,\%$.
- ◯ Liczba o $20\,\%$ większa od 120 jest równa 144.
- ◯ Liczba o $55\,\%$ mniejsza od 155 jest równa $85{,}25$.

Ćwiczenie 3

Zaznacz poprawne stwierdzenie.

- [ ] Cenę książki obniżono o $20\,\%$. Jeśli sprzedawca chciałby sprzedawać ją po takiej cenie jak przed obniżką, to powinien podwyższyć nową cenę o $25\,\%$.
- [ ] Cenę płyty zmniejszono o $10\,\%$, a następnie nową cenę znów zmniejszono o $10\,\%$. Wówczas cena płyty zmniejszyła się o $20\,\%$.
- [ ] Cenę telewizora obniżono o $15\,\%$ i teraz kosztuje $1519{,}8$ zł. Z tego wynika, że przed obniżką telewizor kosztował 1788 zł.
- [ ] W grudniu cenę tabletu podwyższono o $15\,\%$, a w styczniu obniżono tę nową cenę o $15\,\%$. Teraz tablet kosztuje tyle samo, co w grudniu.

Ćwiczenie 4

Zaznacz poprawne stwierdzenie.

- ◯ Każdy z boków pierwszego trójkąta jest o $30\,\%$ krótszy od odpowiedniego boku drugiego trójkąta. Z tego wynika, że obwód pierwszego trójkąta jest o $30\,\%$ mniejszy od obwodu drugiego trójkąta.
- ◯ Długość boku kwadratu ABCD jest o $5\,\%$ większa od długości boku kwadratu MNKL. Wynika z tego, że pole kwadratu ABCD jest o $5\,\%$ większe od pola kwadratu MNKL.

Ćwiczenie 5

Rysy, najwyższy szczyt polskich Tatr ma wysokość $2499\ \mathrm{m.\,n.\,p.\,m.}$, podczas gdy Gerlach, najwyższy szczyt Tatr, ma wysokość $2655\ \mathrm{m.\,n.\,p.\,m.}$

- ◯ Gerlach jest wyższy od Rysów o mniej niż $5{,}88\,\%$.
- ◯ Rysy są niższe od Gerlacha o mniej niż $5{,}88\,\%$.

Ćwiczenie 6

Zaznacz poprawne stwierdzenie.

- W klasie Ia dziewczęta stanowią 60% wszystkich uczniów, a jednocześnie jest ich o 4 więcej niż chłopców. Wynika z tego, że w tej klasie jest 20 uczniów.
- W klasie Ib jest 28 uczniów, przy czym dziewcząt jest o 4 więcej niż chłopców. Języka hiszpańskiego uczy się 25% wszystkich chłopców oraz 75% wszystkich dziewcząt. Wynika z tego, że języka hiszpańskiego uczy się 50% wszystkich uczniów tej klasy.

Ćwiczenie 7

Zaznacz poprawne stwierdzenie.

- Jeżeli oprocentowanie lokaty wynosiło 10% i zostało zwiększone o 20%, to znaczy, że zwiększyło się o 2 punkty procentowe.
- Kandydat na burmistrza był popierany przez 25% obywateli. W ostatnim czasie poparcie wzrosło o 20 punktów procentowych. Obecnie popiera go 30% obywateli.

Ćwiczenie 8

Wiadomo, że 17% pewnej liczby równa się $5{,}78$. Ta liczba to

- 33
- 30
- 34
- $17{,}5$

Ćwiczenie 9

Ile procent liczby 80 stanowi liczba 55?

- ◯ 76%
- ◯ 120%
- ◯ 60%
- ◯ $68{,}75\%$

Ćwiczenie 10

W skarbcu jest 40 sztabek złota i 30 sztabek srebra. O ile procent więcej jest sztabek złota niż sztabek srebra?

- ◯ 40%
- ◯ $33,(3)\%$
- ◯ 20%
- ◯ 25%

Ćwiczenie 11

W koszyku są jabłka i gruszki, przy czym liczba gruszek stanowi $80\,\%$ liczby jabłek. Wynika stąd, że liczba jabłek stanowi

- ◯ $125\,\%$ liczby gruszek
- ◯ $70\,\%$ liczby gruszek
- ◯ $80\,\%$ liczby gruszek
- ◯ $20\,\%$ liczby gruszek

Ćwiczenie 12

Długość podstawy trójkąta ABC wydłużono o $20\,\%$, a wysokość opuszczoną na tę podstawę skrócono o $20\,\%$. Pole tak otrzymanego trójkąta

- ◯ jest większe o $8\,\%$ od pola trójkąta ABC
- ◯ jest mniejsze o $4\,\%$ od pola trójkąta ABC
- ◯ jest równe polu trójkąta ABC
- ◯ jest większe o $4\,\%$ od pola trójkąta ABC

Ćwiczenie 13

Lodówka kosztuje 1600 zł. Jaka będzie cena lodówki, jeśli podwyższymy ją o 30%, a następnie obniżymy o 30%?

- ◯ 1200 zł
- ◯ 1600 zł
- ◯ 1456 zł
- ◯ 1500 zł

Ćwiczenie 14

Gdy beczka z wodą jest w 30% pusta, zawiera o 30 litrów wody więcej, niż gdy jest w 30% napełniona. Pojemność beczki jest równa

- ◯ 90 litrów
- ◯ 100 litrów
- ◯ 60 litrów
- ◯ 75 litrów

Ćwiczenie 15

Po dwukrotnej obniżce ceny towaru, za każdym razem o ten sam procent, jego cena końcowa stanowi 64% ceny początkowej. O ile procent każdorazowo dokonywano obniżki ceny towaru?

- o 20%
- o 8%
- o 6%
- o 18%

Ćwiczenie 16

Jedna piąta powierzchni czarno – białej fotografii to kolor czarny, a reszta to kolor biały. Fotografia została powiększona. Jaki procent powierzchni powiększonej fotografii zajmuje kolor biały?

- 40%
- 80%
- 20%
- 60%

Ćwiczenie 17

Cena puszki farby z podatkiem VAT w wysokości 22% była równa $164{,}70$ zł. O ile złotych zdrożała puszka farby, jeśli stawka podatku wzrosła do 23%?

- o $1{,}35$ zł
- o $1{,}61$zł
- o $1{,}3$ zł
- o $1{,}60$ zł

Ćwiczenie 18

Która z liczb jest większa: 51% liczby 75 czy 75% liczby 51?

Ćwiczenie 19

Zmieszano 30 kg stopu zawierającego 15% żelaza i 45 kg stopu zawierającego 20% żelaza. Oblicz, ile procent żelaza zawiera powstały stop.

Ćwiczenie 20

Tabela przedstawia zestawienie wyników sprawdzianu z geografii, który pisali uczniowie Ia.

Dane

ocena	1	2	3	4	5	6
liczba uczniów	4	8	11	5	3	1

a. Ile procent uczniów klasy Ia uzyskało ocenę niedostateczną?

b. Ile procent uczniów tej klasy uzyskało ocenę co najmniej dostateczną?

c. Jaki procent uczniów klasy Ia, którzy uzyskali ocenę pozytywną, stanowią uczniowie z oceną dobrą ?

Ćwiczenie 21

Cena netto zmywarki jest równa 1100 zł, zaś cena brutto telewizora to 3800 zł. Stawka podatku VAT na sprzęt AGD i RTV wynosi 23%. Oblicz

a. cenę brutto zmywarki

b. cenę netto telewizora

c. jaki procent ceny brutto zmywarki stanowi jej cena netto

d. jaki procent ceny netto telewizora stanowi jego cena brutto

Ćwiczenie 22

Rodzeństwo Marek i Kasia mają dwie prostokątne działki. Długość jednego z boków działki Kasi jest o 20% krótsza od długości boku działki Marka. Szerokość boku działki Kasi jest o 10% dłuższa od szerokości boku działki Marka. O ile procent pole działki Kasi jest mniejsze od pola działki brata?

Ćwiczenie 23

Jaś i Małgosia zdawali egzamin testowy z matematyki. Jaś uzyskał 64% punktów możliwych do zdobycia, natomiast wynik Małgosi był lepszy od wyniku Jasia o 15 punktów procentowych. O ile więcej procent punktów otrzymała Małgosia od Jasia?

Podatek VAT

Podstawowym podatkiem, z jakim mają do czynienia zarówno przedsiębiorcy, jak i ich klienci, jest podatek od wartości dodanej, czyli VAT (Value Added Tax). Jego cechą charakterystyczną jest to, że całą wartością opodatkowany jest ostateczny konsument danej czynności.
Szczegółowe zasady obliczania podatku VAT oraz jego stawki dla określonych grup towarów i usług ustalane są aktami prawnymi. Zmieniająca się sytuacja gospodarcza powoduje kolejne modyfikacje zarówno stawek, jak i sposobu naliczania VAT, co czyni go jednym z bardziej skomplikowanych podatków w polskim systemie prawnym.

Przy obliczeniach będziemy używać takich pojęć, jak:

- kwota netto – kwota bez podatku VAT,
- kwota brutto = kwota netto + stawka podatku VAT· kwota netto.

Ćwiczenie 24

Zaznacz poprawne stwierdzenie.

- [ ] Zestaw gier komputerowych kosztuje $196{,}80$ zł. Jeżeli stawka podatku VAT zostałaby zmniejszona z $23\,\%$ na $8\,\%$, to przy zakupie tego zestawu zaoszczędzilibyśmy 25 zł.
- [ ] Cena netto laptopa jest równa 929 zł. Stawka podatku VAT na sprzęt elektroniczny wynosi $23\,\%$. Markowi wystarczy 1200 zł na zakup tego laptopa.
- [ ] Cena książki wraz z podatkiem VAT wynosi $47{,}46$ zł. Jeżeli stawka podatku VAT na książki wynosi $5\,\%$, to cena netto tej książki jest równa $45{,}08$ zł.

Podatek PIT
Podatek dochodowy od osób fizycznych PIT (Personal IncomeTax) jest to podatek bezpośredni, obejmujący dochody uzyskiwane przez osoby fizyczne. W terminie do 30 kwietnia każdego roku w Urzędzie Skarbowym należy złożyć odpowiednie rozliczenie, w którym po ustaleniu podstawy obliczenia podatku, nalicza się kwotę tego podatku. Kwota podatku zaokrąglana jest do pełnych złotych.
W roku 2013 podatek PIT naliczany był zgodnie z tabelą

Tabela

Podstawa obliczenia podatku w złotych		**Podatek wynosi**
ponad	**do**	
	85 528 zł	18% minus kwota zmniejszająca podatek o 556,02 zł
85 528 zł		14 839,02 zł plus 32% nadwyżki ponad 85 528 zł

Jeśli podatnik spełnia odpowiednie warunki, może skorzystać z ulgi prorodzinnej z tytułu wychowywania dziecka.

- Ulga dla osób wychowujących tylko 1 dziecko – 1112,04 zł rocznie (pod warunkiem, że dochód roczny nie przekroczył kwoty 112 000 zł).
- Ulga dla osób wychowujących więcej niż jedno dziecko (niezależnie od wysokości dochodów).

Tabela 03

Liczba dzieci	Wysokość ulgi rocznie
Pierwsze dziecko	1112,04 zł (w przypadku, gdy dochód nie przekroczy kwoty 112000 zł)
Drugie dziecko	1112,04 zł
Trzecie dziecko	1668,12 zł
Czwarte i każde następne dziecko	2224,08 zł

Podatek pomniejszany jest o wysokość ulgi.Pozostający w związku małżeńskim przez cały rok podatkowy mogą rozliczać PIT wspólnie według następującej zasady:

- sumujemy podstawy opodatkowania obojga małżonków,
- otrzymaną kwotę dzielimy przez 2, wynik traktujemy jako postawę obliczania podatku PIT,
- obliczamy należny podatek według odpowiedniej skali podatkowej
- mnożymy kwotę podatku przez 2.

Ostateczną kwotę podatku do zapłacenia (po uwzględnieniu wszystkich odliczeń) zaokrągla się do pełnych złotych.

Ćwiczenie 25

Zaznacz poprawne stwierdzenie.

- ◯ W rozliczeniu podatkowym pani Joanny podstawa opodatkowania jest równa 112 560 zł. Podatek PIT, który zapłaci pani Joanna przekroczy więc kwotę 25 000 zł.
- ◯ W rocznym rozliczeniu podatkowym pan Jacek wykazał, że podstawa naliczenia podatku PIT w 2013 roku, od jego dochodów wynosiła 58 625 zł. Podatek, który zapłaci za ten rok to 9 996,48 zł.

Ćwiczenie 26

Podstawy obliczenia podatku PIT w 2013 r. wynosiły odpowiednio: od dochodów Marty - $98\ 564$ zł i od dochodów jej męża Jana – $79\ 366$ zł.

a. Jaką kwotę podatku zapłacił każdy z małżonków, jeśli rozliczali podatek osobno?

b. Ile zaoszczędziliby jako rodzina, jeśli rozliczyliby podatek wspólnie?

Ćwiczenie 27

Dorota wychowuje samotnie córkę i syna. Jej podstawa obliczania podatku od dochodu w roku 2013 wynosi $132\ 450$ zł. Jaki podatek zapłaci Dorota, jeśli wykorzysta ulgę prorodzinną?

Ćwiczenie 28

Wspólna podstawa opodatkowania dochodów dla Ani i Wojtka wynosi w 2013 r. $152\ 469$ zł. Czy zapłacony przez nich podatek przekroczy $23\ 000$ zł, jeśli skorzystają z ulgi z tytułu wychowywania trójki dzieci?

Ćwiczenie 29

Ile kilogramów czystej wody dolano do 15% roztworu wodnego saletry potasowej, jeżeli otrzymano 10 kg roztworu o stężeniu 6%?

Ćwiczenie 30

Właściciel sklepu otrzymał 15% rabat w hurtowni. Za 1 kg cukru zapłacił wtedy $3{,}40$ zł. Oblicz, jaką cenę zapłaciłby za 1 kg cukru, gdyby nie otrzymał rabatu.

Ćwiczenie 31

Litr benzyny kosztował w grudniu $5{,}20$ zł. W kolejnych miesiącach cena benzyny zmieniała się następująco: w styczniu - wzrosła o 12%, w lutym – spadła o 14%, w marcu wzrosła o 5%. Jaka była cena litra benzyny na koniec marca?

Ćwiczenie 32

Liczba chłopców w klasie Ic jest o $70\,\%$ większa od liczby dziewcząt w tej klasie. Jaki procent całej klasy stanowią dziewczęta?

Zadania generatorowe

Ćwiczenie 1

Ćwiczenie 2

Działania na potęgach

Przypomnijmy

- Potęgą a^n o wykładniku naturalnym $(n > 1)$ nazywamy iloczyn n czynników, z których każdy jest równy a.

$$a^n = \underbrace{a \bullet a \bullet a \bullet \ldots\ldots \bullet a}_{\text{n czynników}}.$$

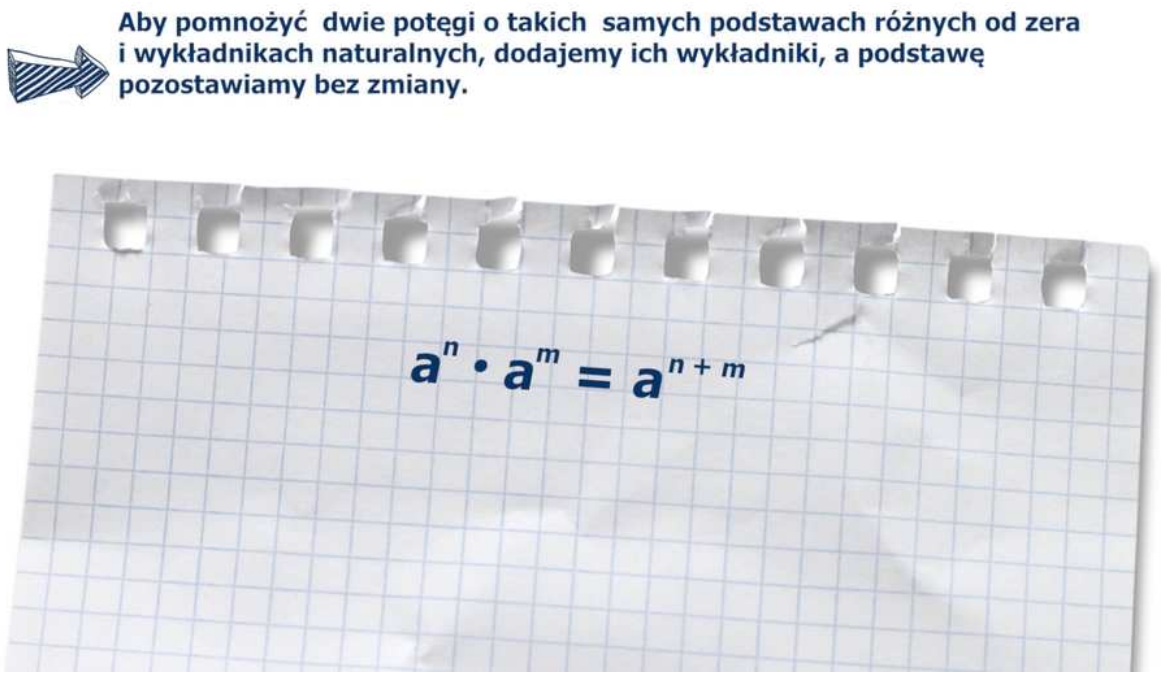
- Przyjmujemy, że $a^0 = 1$ dla $a \neq 0$ oraz $a^1 = a$.
- Dla każdej liczby naturalnej n i dla dowolnej liczby $a \neq 0$ przyjmujemy $a^{-n} = \frac{1}{a^n}$.

Twierdzenie: Działania na potęgach 01

- Iloczyn potęg o tych samych podstawach

Dla dowolnej liczby rzeczywistej $a \neq 0$ i dowolnych liczb całkowitych n i m prawdziwa jest równość

$$a^n \bullet a^m = a^{n+m}.$$



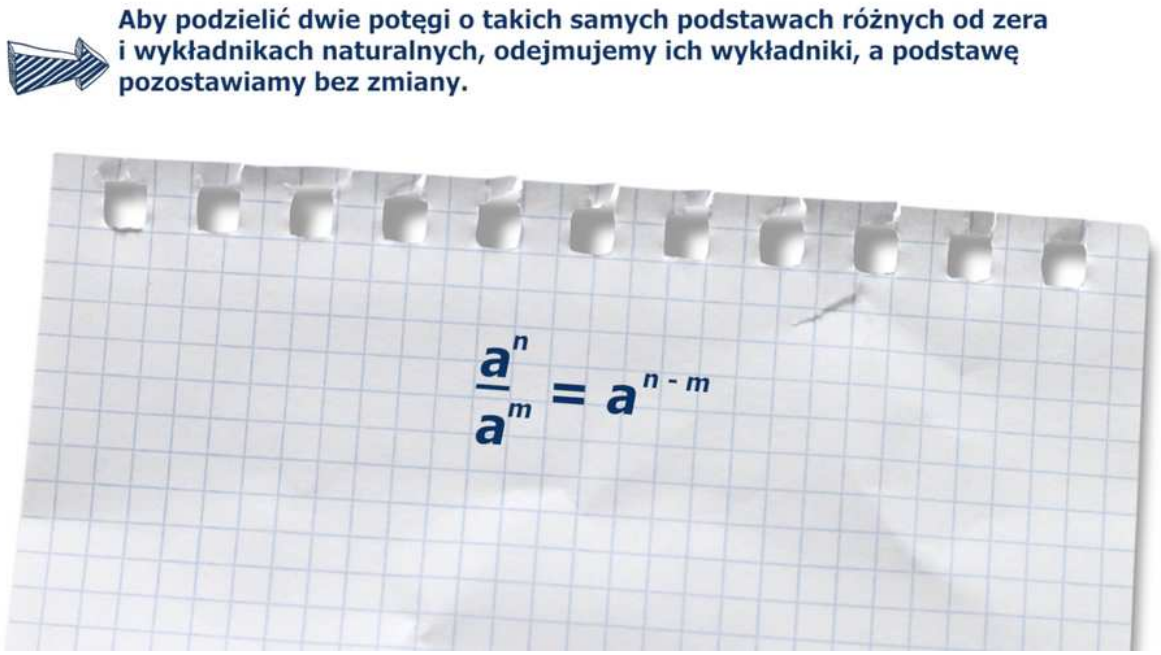
Film dostępny na portalu epodreczniki.pl

Animacja

- Iloraz potęg o tych samych podstawach

Dla dowolnej liczby rzeczywistej $a \neq 0$ i dowolnych liczb całkowitych n i m prawdziwa jest równość

$$\frac{a^n}{a^m} = a^{n-m}.$$



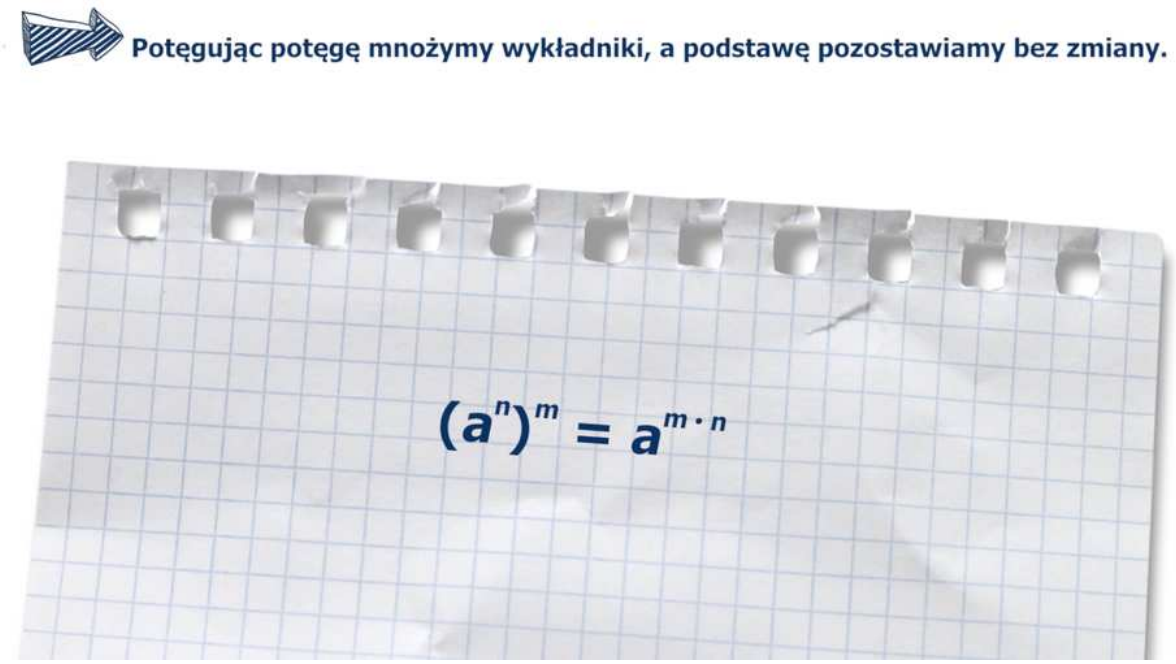
Film dostępny na portalu epodreczniki.pl

Animacja

- Potęga potęgi

Dla dowolnej liczby rzeczywistej $a \neq 0$ i dowolnych liczb całkowitych n i m prawdziwa jest równość

$$(a^n)^m = a^{n \bullet m}.$$



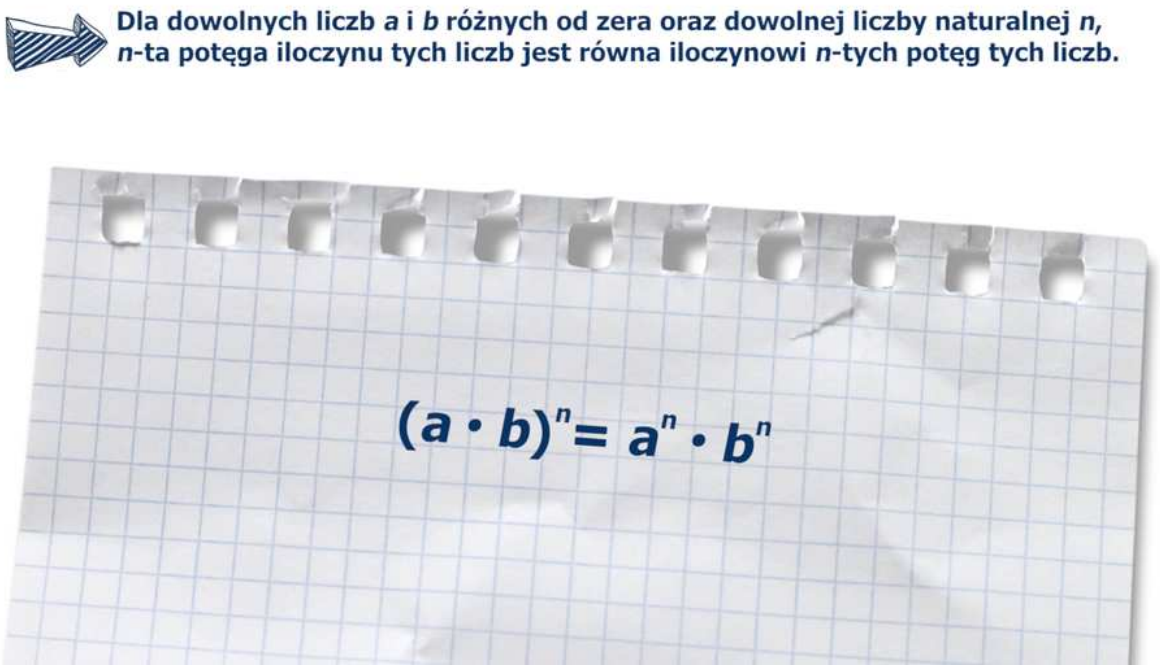
Film dostępny na portalu epodreczniki.pl

Animacja

- Iloczyn potęg o tych samych wykładnikach

Dla dowolnych liczb rzeczywistych $a \neq 0$ i $b \neq 0$ i dowolnej liczby całkowitej n prawdziwa jest równość

$$a^n \bullet b^n = (a \bullet b)^n.$$



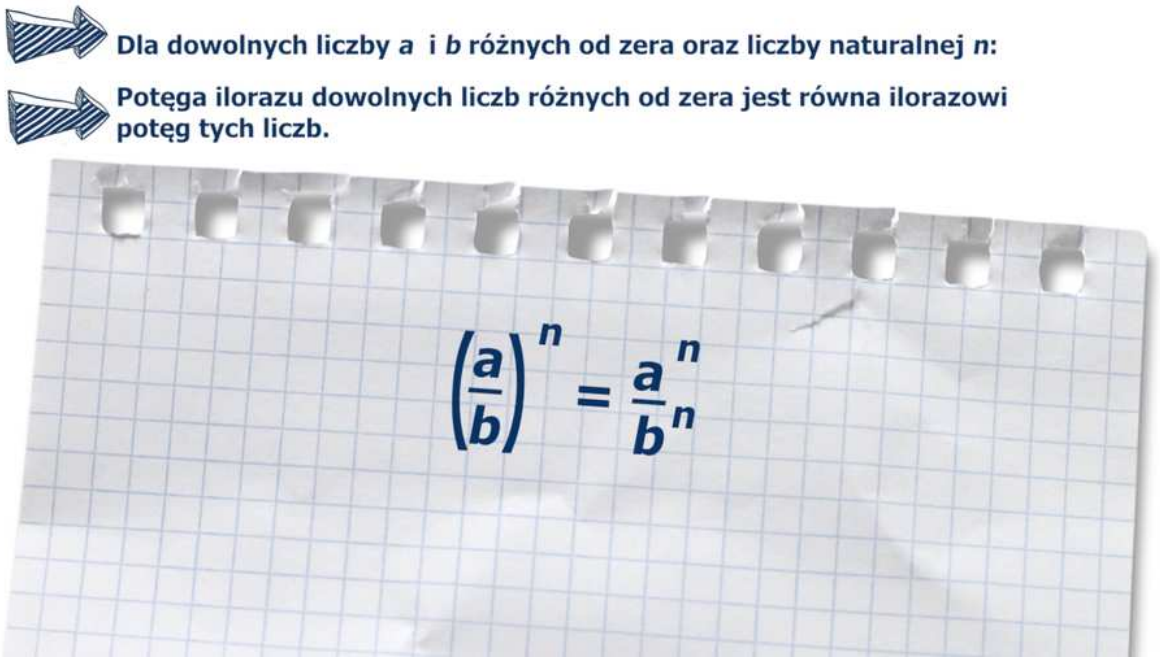
Film dostępny na portalu epodreczniki.pl

Animacja

- Iloraz potęg o tych samych wykładnikach

Dla dowolnych liczb rzeczywistych $a \neq 0$ i $b \neq 0$ i dowolnej liczby całkowitej n prawdziwa jest równość

$$\frac{a^n}{b^n} = \left(\frac{a}{b}\right)^n.$$



Film dostępny na portalu epodreczniki.pl

Animacja

Zadania

Ćwiczenie 1

Zaznacz poprawne stwierdzenia.

- [ ] Liczba -4^2 jest równa 16.
- [ ] Liczba $(-4)^2$ jest równa 16.
- [ ] Liczba 3^{-6} jest równa $\frac{1}{729}$.

Ćwiczenie 2

Zaznacz poprawne stwierdzenie.

- ( ) Liczba $\left(\frac{1}{256}\right)^4$ jest równa 2^{-16}.
- ( ) Liczba 25^6 jest równa 5^8.
- ( ) Liczba $\left(\sqrt{7}\right)^{12}$ jest równa 7^6.

Ćwiczenie 3

Suma odwrotności trzech początkowych liczb pierwszych jest równa

- $\left(1^{-1}+2^{-1}+3^{-1}\right)$
- $2^{-1}+3^{-1}+5^{-1}$
- $\left(2^{-1}+3^{-1}+5^{-1}\right)^{-1}$
- $\frac{1}{2^{-1}+3^{-1}+5^{-1}}$

Ćwiczenie 4

Ułamek $\frac{3^5 \bullet 2+3^6 \bullet 4}{3^7 \bullet 3^{-2}}$ jest równy

- 3^5
- 12
- 3^2
- 14

Ćwiczenie 5

Liczbę $0{,}0000000000345$ można zapisać w postaci

- $34{,}5 \bullet 10^{-9}$
- $3{,}45 \bullet 10^{-10}$
- $3{,}45 \bullet 10^{-11}$
- $34{,}5 \bullet 10^{-11}$

Ćwiczenie 6

Ćwierć liczby 8^{100} to

- 2^{300}
- 8^{25}
- 2^{298}
- 8^{50}

Ćwiczenie 7

Suma $4^{100} + 4^{100} + 4^{100} + 4^{100}$ jest równa

- 16^{100}
- 4^{101}
- 16^{400}
- 4^{400}

Ćwiczenie 8

Dane są liczby: $x = 8^5$, $y = 2^{-3}$, $z = 3^{18}$. Wtedy

- ◯ $\frac{x}{y} \bullet z = 3^{18}$
- ◯ $\frac{x}{y} \bullet z = 4^{18}$
- ◯ $\frac{x}{y} \bullet z = 2^{18}$
- ◯ $\frac{x}{y} \bullet z = 6^{18}$

Ćwiczenie 9

Oblicz.

a. 5^6

b. -5^6

c. 5^{-6}

d. -5^{-6}

e. $(-5)^6$

f. $(-5)^{-6}$

Ćwiczenie 10

Oblicz.

a. $\left(\frac{2}{3}\right)^2 \bullet \left(\frac{3}{2}\right)^4$

b. $\left(\frac{5}{2}\right)^{-3} : \left(\frac{2}{5}\right)^5$

c. $(-1)^5 \bullet 3^2 \bullet \left(-\frac{1}{3}\right)^2$

d. $\left(\frac{4}{5}\right)^{-3} \bullet \left(\frac{5}{4}\right)^3$

e. $\left(2\frac{2}{5}\right)^2 : \left(\frac{5}{12}\right)^3$

Ćwiczenie 11

Podane liczby zapisz w postaci potęgi o podstawie 2.

a. $2^3 \bullet 4^{-2} \bullet \frac{1}{8}$

b. $512^{46} \bullet \left(1024^{20}\right)^8$

c. $\frac{\left(\frac{1}{16}\right)^{-1} \bullet 8^5}{32}$

d. $\frac{\left(\frac{1}{16}\right)^3 \bullet \left(-\frac{1}{2}\right)^{-5}}{(-2)^5 \bullet 256^{-2}}$

Ćwiczenie 12

Wykonaj działania.

a. $\frac{7^{12}+7^{14}}{7^{10}}$

b. $\frac{11^{111}-11^{113}}{11^{110}}$

c. $\frac{3^{18}+3^{19}+3^{20}+3^{21}}{3^{20}+3^{22}}$

Ćwiczenie 13

Zapisz wyrażenie w postaci potęgi o podstawie a i wykładniku całkowitym.

a. $\frac{a^3 \bullet a^{-4}}{a^{-5}} : \frac{a^6}{(a^{-3})^2}$

b. $\frac{(a^3)^2 \bullet a^2}{(a^2)^4} \bullet a^{-1}$

c. $\frac{a^{-33} \bullet a^{13}}{(a^{-5})^4}$

Ćwiczenie 14

Zaznacz poprawne stwierdzenie.

- [ ] Liczba 32^8 jest równa 256^5.
- [ ] Jeżeli $x = 4 \bullet 5^3$ i $y = 20^3$, to $x = y$.
- [ ] Liczba $\frac{2^{16} \bullet 4^{23}}{8^{10}}$ jest równa 16^8.
- [ ] Liczba $5^{20} \bullet 25^{15}$ jest równa 5^{25}.

Ćwiczenie 15

Zaznacz poprawne stwierdzenie.

- [ ] Liczba $3^7 : 6^7$ jest równa $\frac{1}{256}$.
- [ ] Ułamek $\frac{36^3}{3^6}$ jest równy 64.
- [ ] Równość $\frac{3 \bullet 5^{2013}+5^{2014}}{5^{2013} \bullet 2^3} = 1$ jest prawdziwa.
- [ ] Liczba $2^5 \bullet 5^5$ jest równa 100000.

Uwaga!

Porównując potęgi o tych samych podstawach dodatnich a, musimy pamiętać, że:

- dla $a > 1$ większa jest ta potęga, która ma większy wykładnik,
- dla $a < 1$ to większa jest ta potęga, która ma mniejszy wykładnik.

Ćwiczenie 16

Dane są liczby $a = 55^{44}$ i $b = 55^{55}$.

- ◯ Prawdziwa jest nierówność $a > b$.
- ◯ Prawdziwa jest nierówność $a < \mathrm{b}$.

Ćwiczenie 17

Dane są liczby $m = 22^{44}$ i $n = 44^{22}$.

- ◯ Prawdziwa jest nierówność $m < n$.
- ◯ Prawdziwa jest nierówność $m > \mathrm{n}$.

Ćwiczenie 18

Przeciągnij i upuść.

b) $\sqrt[3]{4} =$ ☐

b) $\frac{1}{\sqrt[4]{2}}$ ☐

c) $\frac{1}{\sqrt[4]{2^3}}$ ☐

d) $\frac{\sqrt{2}}{2}$ ☐

e) $\frac{1}{9}$ ☐

f) $\frac{1}{3\sqrt{3}}$ ☐

g) $\sqrt{81}$ ☐

h) $4\sqrt{8}$ ☐

3^{-2} $4^{\frac{1}{3}}$ $2^{\frac{5}{2}}$ $2^{-\frac{1}{4}}$ $2^{-\frac{3}{4}}$ $2^{\frac{1}{4}}$ $4^{-\frac{1}{4}}$ $3^{-\frac{2}{3}}$ $2^{-\frac{1}{2}}$ 3^2 $3^{-\frac{2}{3}}$ $2^{\frac{7}{2}}$ $3^{-\frac{3}{2}}$

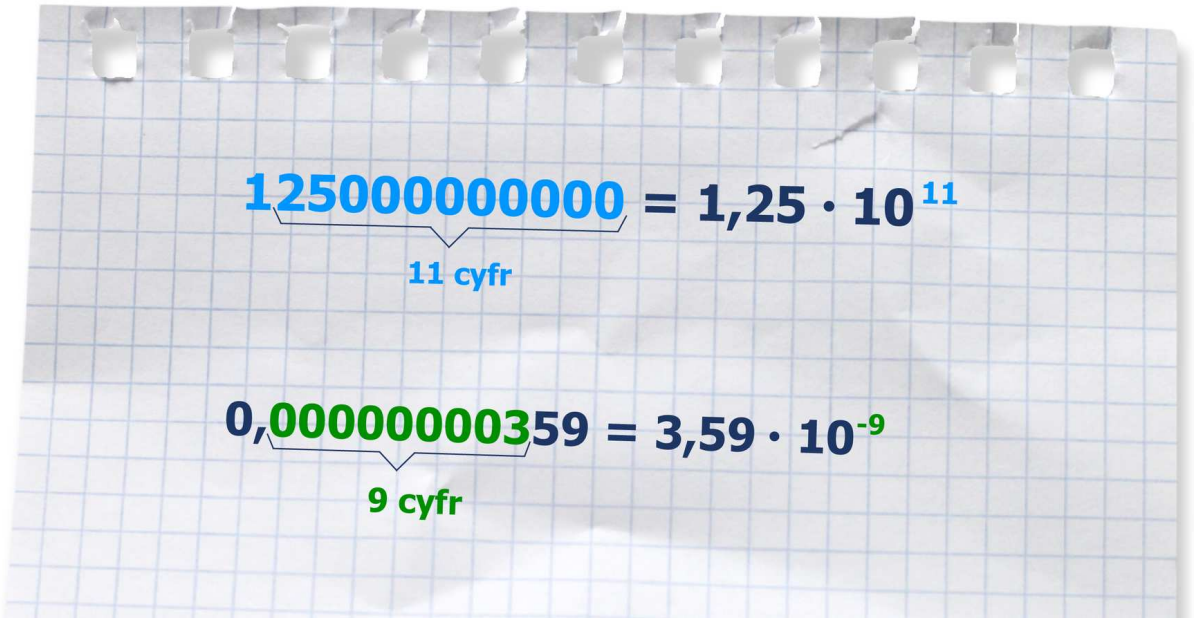
Ciekawostka

Potęg o wykładniku całkowitym używamy do zapisywania liczb bardzo małych lub bardzo dużych. Stosujemy wtedy notację wykładniczą, np.:

- $6{,}02 \bullet 10^{23}\ \mathrm{mol}^{-1}$ to liczba Avogadro oznaczająca liczbę cząsteczek materii znajdujących się w jednym molu tej materii,
- $3 \bullet 10^{8}\ \mathrm{m}/s$ to prędkość światła,
- $1{,}66\ \cdot\ 10 - 27\ \mathrm{kg}$ to masa pojedynczego atomu węgla,
- $3{,}84 \bullet 10^{8}\ \mathrm{m}$ to średnia odległość Księżyca od Ziemi.

Ważne!

Liczba zapisana w notacji wykładniczej ma postać $a \bullet 10^{k}$, gdzie $1 \leq a < 10$ oraz k jest liczbą całkowitą.



Ćwiczenie 19

Zaznacz poprawne stwierdzenie.

- ◯ Liczba $2{,}37 \bullet 10^{-5}$ jest mniejsza od $3{,}24 \bullet 10^{-6}$.
- ◯ Iloczynem liczb $5{,}6 \bullet 10^{15}$ i $3{,}5 \bullet 10^{-7}$ jest liczba $1{,}96 \bullet 10^{9}$.
- ◯ Liczba $a = 2{,}4 \bullet 10^{-5}$ jest 3 razy większa od liczby $b = 8 \bullet 10^{-7}$.
- ◯ Liczba $6{,}52 \bullet 10^{-6}$ jest równa $0{,}000652$.

Działania na pierwiastkach

- Pierwiastkiem kwadratowym z liczby nieujemnej a nazywamy liczbę nieujemną b taką, która podniesiona do drugiej potęgi jest równa a.
  Zatem, dla dowolnej liczby nieujemnej $a\sqrt{a} = \mathrm{b}$ wtedy i tylko wtedy, gdy $b^2 = a$ i $b \geq 0$.

- Pierwiastkiem sześciennym z liczby a nazywamy taką liczbę b, która podniesiona do trzeciej potęgi jest równa a.
  Zatem, dla dowolnej liczby $a\sqrt[3]{a} = \mathrm{b}$ wtedy i tylko wtedy, gdy $b^3 = a$.

Zauważmy, że powyższe definicje różnią się wyłącznie założeniami dla liczb a i b. Ponieważ b^2 jest zawsze liczbą nieujemną, to pierwiastki kwadratowe obliczamy wyłącznie z liczb nieujemnych. Natomiast b^3 może być zarówno ujemne, jak i nieujemne, dlatego pierwiastek sześcienny obliczamy z dowolnej liczby a.
Podobnie możemy zapisać definicje pierwiastka stopnia n większego niż 1, pamiętając o odpowiednim założeniu dotyczącym liczby podpierwiastkowej.

- Jeśli n jest liczbą parzystą większą od 1, to pierwiastkiem stopnia n z liczby nieujemnej a nazywamy liczbę nieujemną b taką, która podniesiona do potęgi n jest równa a.

$$\sqrt[n]{a} = b \iff b^n = a$$

- Jeśli n jest liczbą nieparzystą większą od 1 to pierwiastkiem stopnia n z liczby a nazywamy liczbę b taką, która podniesiona do potęgi n jest równa a.

$$\sqrt[n]{a} = b \iff b^n = a$$

> **Twierdzenie: Działania na pierwiastkach**
>
> Jeśli a i b są liczbami nieujemnymi, n i m są liczbami naturalnymi większymi od 1, k jest dodatnią liczbą naturalną, to
>
> - $\sqrt[n]{a \bullet b} = \sqrt[n]{a} \bullet \sqrt[n]{b}$
> - $\sqrt[n]{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}}$, $\mathrm{b} \neq 0$
> - $\left(\sqrt[n]{a}\right)^n = a$
> - $\left(\sqrt[n]{a}\right)^k = \sqrt[n]{a^k}$
> - $\sqrt[n]{\sqrt[m]{a}} = \sqrt[n \bullet m]{a}$
>
> Jeśli w powyższym twierdzeniu liczby n i m (stopnie pierwiastków) są nieparzyste, to twierdzenie pozostanie prawdziwe również dla ujemnych liczb podpierwiastkowych (a lub b) .

Zadania. Część I

Ćwiczenie 1

Zaznacz poprawne stwierdzenie.

- ○ Liczba $\sqrt{4\frac{16}{25}}$ jest równa $2\frac{4}{5}$.
- ○ Liczba $-\sqrt[3]{-512}$ jest ujemna.
- ○ Liczba $\sqrt{289}$ jest równa 17.

Ćwiczenie 2

Zaznacz poprawne stwierdzenie.

- ☐ Liczba $\sqrt[3]{36} \bullet \sqrt[3]{6}$ jest liczbą całkowitą.
- ☐ Liczba $\sqrt{7} : \sqrt{28}$ jest równa $\frac{1}{4}$.
- ☐ Liczba $\sqrt{2} \bullet \sqrt{32}$ jest równa 8.

Ćwiczenie 3

Zaznacz poprawne stwierdzenie.

- ☐ Liczba $2\sqrt[3]{21}$ jest równa $\sqrt[3]{42}$.
- ☐ Liczba $\sqrt{1575}$ jest równa $15\sqrt{7}$.
- ☐ Liczba $\sqrt[3]{261}$ jest równa $3\sqrt[3]{29}$.
- ☐ Liczba $3\sqrt{5}$ jest równa $\sqrt{45}$.

Ćwiczenie 4

Zaznacz poprawne stwierdzenie.

- [ ] Liczba $\frac{3}{4\sqrt{2}}$ jest równa $\frac{3}{8}\sqrt{2}$.
- [ ] Liczba $\frac{1}{\sqrt{3}}$ jest równa $\frac{\sqrt{3}}{3}$.
- [ ] Liczba $\frac{3}{\sqrt[3]{5}}$ jest równa $\frac{3\sqrt[3]{5}}{5}$.
- [ ] Liczba $\frac{7}{\sqrt{7}}$ jest równa $\sqrt{7}$.

Ćwiczenie 5

Zaznacz poprawne stwierdzenie.

- [ ] Liczba $\left(\sqrt{\sqrt{\sqrt{6}}}\right)^{12}$ jest równa 6.
- [ ] Liczba $\left(\left(-2\sqrt{5}\right)^{-1}\right)^{-2}$ jest liczbą dodatnią.
- [ ] Liczba $\left(2\sqrt{3}\right)^{-4}$ jest większa od 1.
- [ ] Liczba $\left(\frac{5}{\sqrt{2}}\right)^{-3}$ jest mniejsza od 1.

Ćwiczenie 6

Zaznacz poprawne stwierdzenie.

- ◯ Prawdziwa jest równość $\sqrt{3^{555}+3^{555}+3^{555}}=3^{555}$.
- ◯ Wynikiem dodawania $\sqrt{50}+\sqrt{18}+\sqrt{32}$ jest liczba $10\sqrt{2}$.
- ◯ Wynikiem dodawania $2^{999}+2^{999}$ jest 2^{1000}.

Ćwiczenie 7

Liczba $\frac{2^0+2^3\bullet 2^4+2^{-1}:2^{-3}}{2^{-1}+2^{-2}+2^{-3}}$ jest

- ◯ mniejsza od 1
- ◯ niewymierna
- ◯ całkowita ujemna
- ◯ naturalna

Ćwiczenie 8

Liczba $\left(\sqrt{\sqrt{\sqrt{3}}}\right)^{16}$ jest równa

- ◯ 3^4
- ◯ $3\sqrt{3}$
- ◯ $9\sqrt{3}$
- ◯ 3^2

Ćwiczenie 9

Liczba $\sqrt[3]{-8} \bullet \sqrt[3]{-512}$ jest równa

- -2^{-4}
- -2^{4}
- 2^{-4}
- 2^{4}

Ćwiczenie 10

Dane są liczby: $x = -\sqrt[3]{-64}$, $y = \sqrt{9^3}$, $z = \frac{2^2}{3^3}$. Prawdziwa jest równość

- $z = x \bullet y$
- $z = -\frac{y}{x}$
- $z = \frac{x}{y}$

Ćwiczenie 11

Oblicz.

a. $\sqrt{125} + \sqrt{405} + \sqrt{20}$

b. $\sqrt{50} - 2\sqrt{72} + \sqrt{800}$

c. $\sqrt{98} - \sqrt{162} + \sqrt{288}$

d. $\sqrt[3]{108} + \sqrt[3]{500} - 5\sqrt[3]{32}$

Ćwiczenie 12

Udowodnij, że jeśli $x = \left(2^3\right)^4 \bullet \left(\frac{1}{64}\right)^{-2}$ oraz $y = \left(2^5 \bullet \sqrt[3]{8}\right)^2$, to $x = y^2$.

Ćwiczenie 13

Wykaż, że prawdziwa jest nierówność $\frac{\left(3^{-2}\right)^3 \bullet 3^2}{27^{-2}} > \left(\sqrt{3\sqrt[3]{27}}\right)^{-1}$.

Zadania. Część II

Ćwiczenie 1

Przeciągnij liczby z dolnej sekcji do górnej.

liczby dodatnie

liczby ujemne

2^{-4} $\left(-\frac{1}{3}\right)^{3}$ $-\left(\frac{1}{2}\right)^{-2}$ 2^{4} $(-3)^{5}$ -2^{4} -3^{5} 3^{5} $\left(-\frac{1}{2}\right)^{-2}$ $\left(\frac{1}{2}\right)^{-2}$ $(-2)^{4}$ 3^{-5} $-\left(\frac{1}{3}\right)^{3}$ $\left(-\frac{1}{3}\right)^{-3}$

Ćwiczenie 2

Ćwiczenie 3

Przeciągnij i upuść.

b) $2^{\frac{1}{3}} =$

b) $2^{\frac{4}{3}} =$

c) $8^{-\frac{1}{3}} =$

d) $2 =$

e) $\frac{1}{9} =$

f) $-3 =$

g) $-2 =$

h) $4^{-\frac{2}{3}} =$

$\sqrt[3]{-27}$ $\sqrt[3]{-8}$ $\sqrt[3]{2^4}$ $\sqrt[3]{2}$ $\sqrt[4]{4}$ $3\sqrt[3]{3}$ $\frac{1}{\sqrt{81}}$ $\sqrt{2^7}$ $\sqrt{4}$ $\frac{1}{\sqrt[3]{4^2}}$ $\sqrt[3]{8}$ $\sqrt[8]{9}$ $\frac{1}{\sqrt[3]{8}}$

Ćwiczenie 4

Połącz w pary.

$\frac{5}{\sqrt{3}}$	$\sqrt{3}$
$\frac{3\sqrt{3}}{2}$	$\frac{5\sqrt{3}}{3}$
$\frac{3}{\sqrt{3}}$	$\frac{9}{2\sqrt{3}}$
$\frac{2}{3\sqrt{3}}$	$\frac{2\sqrt{3}}{9}$

Ćwiczenie 5

Połącz w pary.

$5\sqrt{2}$	$\sqrt{125}$
$5\sqrt{5}$	$\sqrt{50}$
$2\sqrt{7}$	$\sqrt{150}$
$2\sqrt{5}$	$\sqrt{28}$
$7\sqrt{2}$	$\sqrt{20}$
$5\sqrt{6}$	$\sqrt{98}$
$5\sqrt{3}$	$\sqrt{75}$

Ćwiczenie 6

Połącz w pary.

$4\sqrt[3]{2}$	$\sqrt[3]{128}$
$2\sqrt[3]{4}$	$\sqrt[4]{162}$
$3\sqrt[4]{2}$	$\sqrt[4]{32}$
$2\sqrt[4]{2}$	$\sqrt[3]{32}$

Ćwiczenie 7

Uzupełnij tabelę.

Dane

Zapis dziesiętny	Notacja wykładnicza
1350000000000000	$1{,}35 \bullet 10^{15}$
13500000000000	$1{,}35 \bullet 10^{\cdots}$
	$1{,}36 \bullet 10^{14}$
$0{,}0000000000000135$	$1{,}35 \bullet 10^{\cdots}$
	$1{,}35 \bullet 10^{-12}$
$0{,}00000000000136$	$\ldots \bullet 10^{-12}$

Ćwiczenie 8

Oblicz. Odpowiedź podaj w notacji wykładniczej.

a. $\left(5{,}3 \bullet 10^{9}\right) \bullet \left(1{,}4 \bullet 10^{12}\right)$

b. $\left(6{,}4 \bullet 10^{23}\right) \bullet \left(2 \bullet 10^{18}\right)$

c. $\left(8{,}6 \bullet 10^{-12}\right) \bullet \left(4 \bullet 10^{-18}\right)$

d. $\frac{2{,}98 \bullet 10^{11}}{1{,}49 \bullet 10^{18}}$

e. $\frac{3{,}15 \bullet 10^{31}}{\left(2{,}1 \bullet 10^{18}\right) \bullet \left(2{,}5 \bullet 10^{8}\right)}$

Działania na wyrażeniach algebraicznych

Już wiesz

- Dla dowolnych liczb rzeczywistych $a,\ \mathrm{b},\ \mathrm{x}, y$ zachodzi prawo rozdzielności mnożenia względem dodawania

$$a(x+y)=\mathrm{ax}+\mathrm{ay}.$$

- Jeśli do powyższego wzoru zamiast y wstawimy liczbę do niej przeciwną, czyli $(-y)$, to otrzymamy

$$\mathrm{a}(x+(-y))=a(x-y)=\mathrm{ax}-\mathrm{ay}.$$

- Na podstawie prawa rozdzielności możemy zapisać również

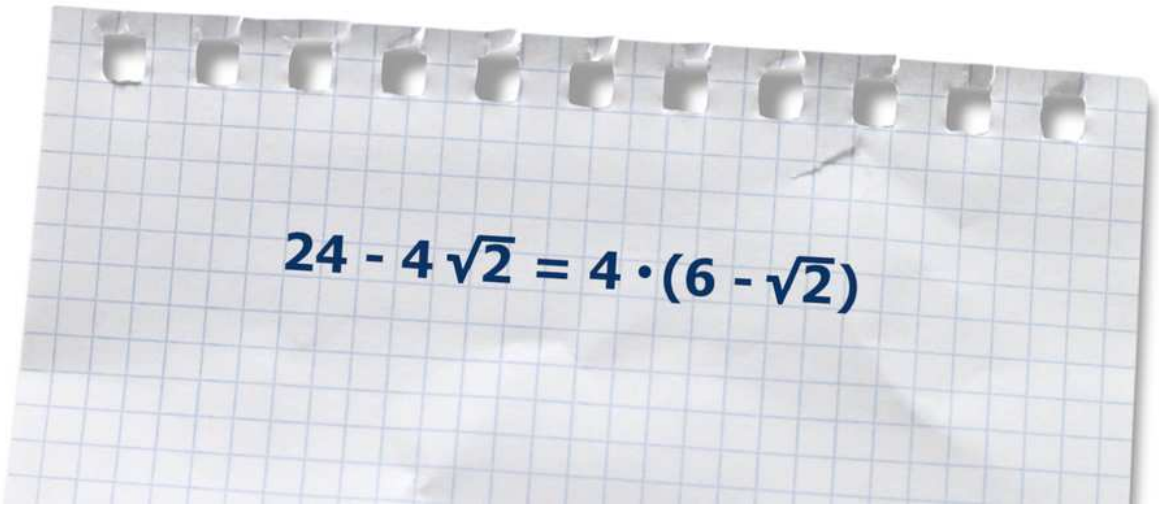
$$(a+b)(x+y)=a(x+y)+b(x+y)=\mathrm{ax}+\mathrm{ay}+\mathrm{bx}+\mathrm{by}.$$

Przykład 1

Ilustracja graficzna mnożenia liczby przez sumę algebraiczną.

Zasób interaktywny dostępny pod adresem https://zpe.gov.pl/a/DfJniLIHo

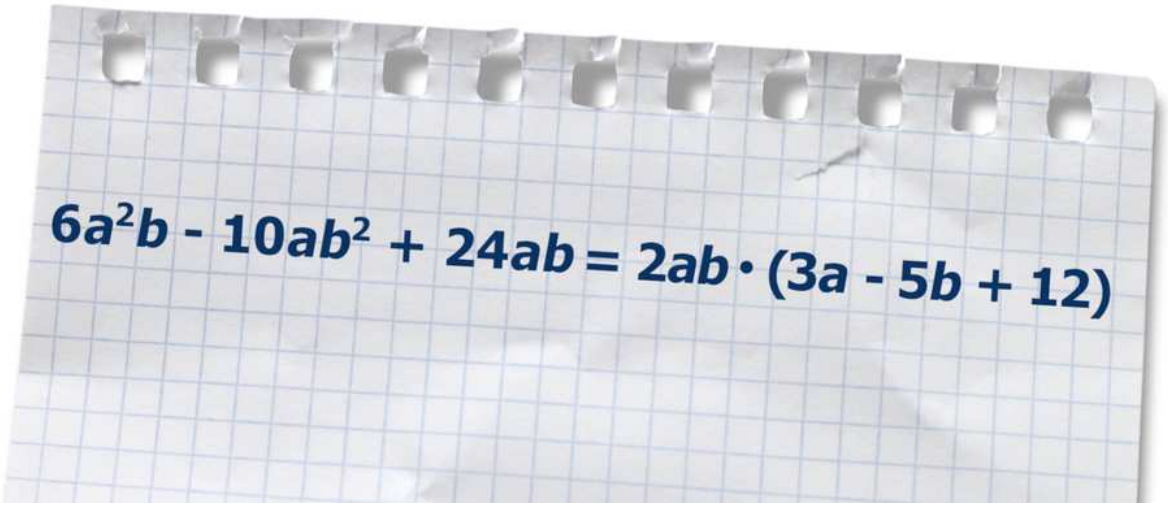
Liczba $24 - 4\sqrt{2}$ została zapisana w postaci iloczynu $4 \cdot (6 - \sqrt{2})$.



Film dostępny na portalu epodreczniki.pl

Animacja

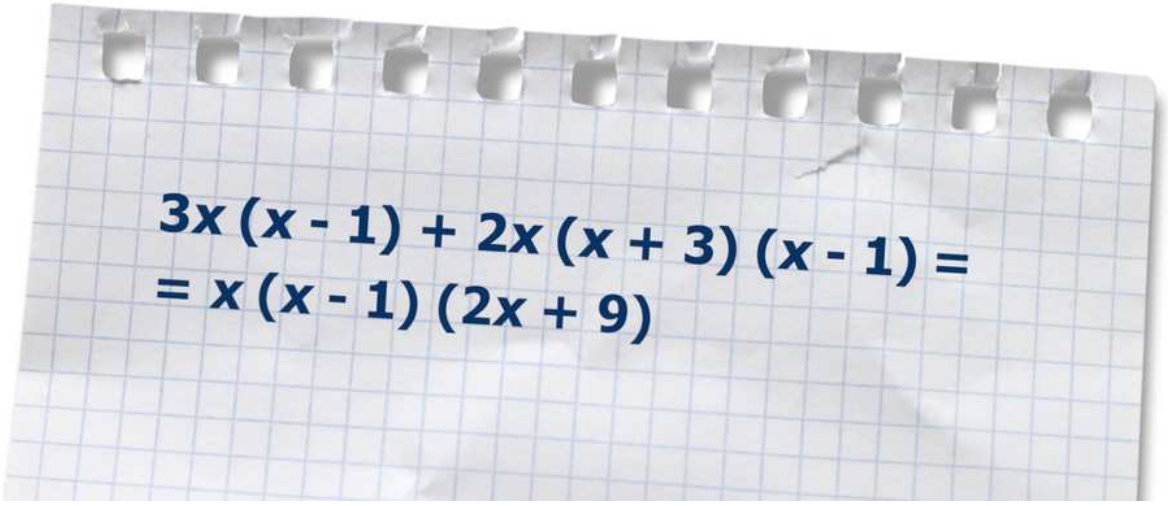
Wyrażenie $6a^2b - 10ab^2 + 24ab$ zostało zapisane jako iloczyn $2ab \cdot (3a - 5b + 12)$.



Film dostępny na portalu epodreczniki.pl

Animacja

Wyrażenie $3x(x-1)+2x(x+3)(x-1)$ zostało zapisane jako iloczyn $x(x-1)(2x+9)$.



Film dostępny na portalu epodreczniki.pl

Animacja

Zadania

Ćwiczenie 1

Wskaż poprawne stwierdzenie.

- [ ] Iloczyn $99 \bullet 89$ jest równy $9000 - 100 - 90 - 1$.
- [ ] Iloczyn $8 \bullet 1256$ jest równy $8000 + 1600 + 400 + 48$.
- [ ] Iloczyn $65 \bullet 74$ jest równy $4200 + 350 + 24 + 20$.

Ćwiczenie 2

Wskaż poprawne stwierdzenie.

- [ ] Dla dowolnej liczby x zachodzi równość $(x-2)(x+1) = x^2 - x - 2$.
- [ ] Wyrażenie $2x(3-5x) + 10\left(x^2 - x + 4\right)$ jest równe $4(10-x)$.
- [ ] Jeżeli $a = \frac{1}{2}x(5x-8)$ oraz $b = \frac{5}{2}x^2 - 4x$, to $a = b$.

Ćwiczenie 3

Wskaż poprawne stwierdzenie.

○ ○ ○

Ćwiczenie 4

Zaznacz poprawne stwierdzenie.

- [ ] Dla pewnej liczby dodatniej a jedna z przekątnych rombu jest równa $6a+5$, a druga jest od niej krótsza o 3. Z tego wynika, że pole tego rombu jest równe $36a^2+42a+10$.
- [ ] Jeden z boków prostokąta jest równy x, a drugi jest o 5 dłuższy od połowy pierwszego boku. Wtedy pole tego prostokąta jest równe $2x^2+5x$.
- [ ] W trójkącie równoramiennym wysokość opuszczona na podstawę długości $3b$ jest równa $5b-2$ (dla $b>\frac{2}{5}$). Z tego wynika, że pole tego trójkąta jest równe $4b^2-3b$.

Ćwiczenie 5

Zaznacz poprawne stwierdzenie.

- [ ] Iloczyn $\left(\sqrt{5}+1\right)\left(\sqrt{5}+2\right)$ jest równy 8.
- [ ] Liczba $\left(2\sqrt{3}-3\right)\left(3\sqrt{3}+4\right)$ jest większa od 5.
- [ ] Liczba $\left(\sqrt{2}+2\sqrt{3}\right)\left(\sqrt{3}-\sqrt{2}\right)-1$ jest dodatnia.
- [ ] Liczba $\sqrt{2}\left(\sqrt{8}+\sqrt{32}\right)$ jest całkowita.

Ćwiczenie 6

Wskaż poprawne stwierdzenie.

Dla dowolnych liczb x i y wyrażenie $x(y-4)+5(y-4)$ jest równe $(y-4)(x+5)$.

Liczba $35+7\sqrt{3}$ jest równa $7\left(5+\sqrt{3}\right)$.

Dla dowolnych liczb x i y wyrażenie $5x^3y-10xy^2$ jest równe $5\,\mathrm{xy}\left(x^2-2y\right)$.

Ćwiczenie 7

Oznaczmy: $W=x(8x+11)-(2x-1)4x+x^2$. Wtedy

- [ ] dla $x=-\frac{1}{2}$ wartość wyrażenia W jest równa $\left(-7\frac{1}{4}\right)$
- [ ] istnieje taka liczba x, dla której wartość wyrażenia W jest równa 0
- [ ] dla $x=1$ wartość wyrażenia W jest równa 1

Film dostępny pod adresem https://zpe.gov.pl/a/Dt4knqVZj

Animacja

Film dostępny pod adresem https://zpe.gov.pl/a/Dt4knqVZj

Animacja

Ćwiczenie 8

Dane są dwa prostokąty. Pierwszy o bokach a i b, drugi o bokach c i d. Odcinek a jest połową boku c, natomiast $d = b + a$. Wynika z tego, że

- [ ] pole drugiego prostokąta jest równe $b^2 + 2\,\mathrm{ab}$
- [ ] $a - b = c - d$
- [ ] $b = d - \frac{1}{2}c$
- [ ] $c = 50\,\%a$

Ćwiczenie 9

Zaznacz zdanie, które jest prawdziwe.

- ◯ Jeżeli dodatnie liczby a, b, c spełniają zależność $\mathrm{ab} = c(3c - a)$, to $a = \frac{3c}{b+c}$.
- ◯ Jeżeli dodatnie liczby x, y, z spełniają zależność $(z + y)x = 1$, to $x = \frac{1}{z+y}$.
- ◯ Jeżeli dodatnie liczby k, l ,m spełniają zależność: $2k\left(l^2 - m\right) = 5$, to $m = \frac{5-l^2}{2k}$.

Przykłady

Przykład 1

Zapisz iloczyn w postaci sumy.

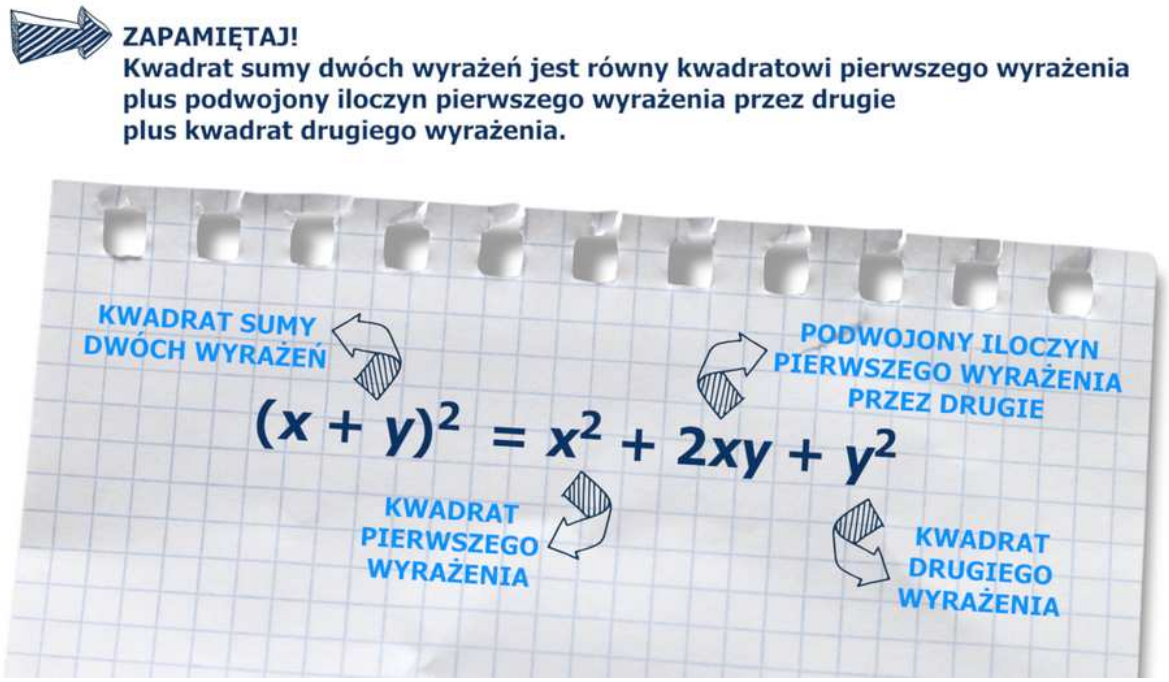
a. $(3a+2)(3a+2)$
b. $(2+4x)(2+4x)$
c. $(x+y)(x+y)$

Korzystamy z rozdzielności mnożenia względem dodawania.

a. $(3a+2)(3a+2) = (3a)^2 + 6a + 6a + 4 = 9a^2 + 12a + 4$
b. $(2+4x)(2+4x) = 4 + 8x + 8x + 16x^2 = 4 + 16x + 16x^2$
c. $(x+y)(x+y) = x^2 + \mathrm{xy} + \mathrm{xy} + y^2 = x^2 + 2\mathrm{xy} + y^2$

Iloczyn dwóch takich samych wyrażeń to inaczej kwadrat danego wyrażenia.

$$(x+y)(x+y) = (x+y)^2 = x^2 + 2\mathrm{xy} + y^2$$



Film dostępny na portalu epodreczniki.pl

Animacja

Graficznie można ten wzór zilustrować, obliczając pole kwadratu o boku $a+b$.

Kwadrat sumy dwóch wyrażeń

Pole kwadratu o boku $a+b$
jest równe sumie pól figur,
na które został on podzielony.

$$(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$$

Zasób interaktywny dostępny pod adresem https://zpe.gov.pl/a/DiDjdo3UG

Przykład 2

Oblicz.

a. $(a-3)^2$
b. $(4x-1)^2$
c. $(x-y)^2$

Różnicę dwóch wyrażeń zapisujemy w postaci sumy i korzystamy ze wzoru na kwadrat sumy. Otrzymamy wtedy

a. $(a-3)^2 = (a+(-3))^2 = a^2 + 2 \bullet (-3) \bullet a + (-3)^2 = a^2 - 6a + 9$
b. $(4x-1)^2 = (4x+(-1))^2 = (4x)^2 + 2 \bullet (-1) \bullet 4x + (-1)^2 = 16x^2 - 8x + 1$
c. $(x-y)^2 = (x+(-y))^2 = x^2 + 2 \bullet x \bullet (-y) + (-y)^2 = x^2 - 2\mathrm{xy} + y^2$

Otrzymujemy wzór na kwadrat różnicy dwóch wyrażeń

$$(x-y)^2 = x^2 - 2\mathrm{xy} + y^2.$$

Przykład 3

Zapisz iloczyn w postaci sumy.

a. $(3x-1)(3x+1)$
b. $(2a-4)(2a+4)$
c. $(x+y)(x-y)$

Korzystając z rozdzielności mnożenia względem dodawania, otrzymujemy

a. $(3x-1)(3x+1) = 9x^2 - 3x + 3x - 1 = 9x^2 - 1$
b. $(2a-4)(2a+4) = 4a^2 - 8a + 8a - 16 = 4a^2 - 16$
c. $(x+y)(x-y) = x^2 - \mathrm{xy} + \mathrm{xy} - y^2 = x^2 - y^2$

Zauważmy, że po pomnożeniu sumy dwóch wyrażeń przez ich różnicę, otrzymamy różnicę kwadratów tych wyrażeń:

$$(x+y)(x-y)=x^2-y^2.$$

Film dostępny na portalu epodreczniki.pl

Animacja

Przykład 4

Ten wzór możemy zilustrować graficznie, porównując pola sześciokąta i prostokąta.

Zasób interaktywny dostępny pod adresem https://zpe.gov.pl/a/DiDjdo3UG

Zadania, zadania generatorowe

Ćwiczenie 1

Oblicz bez użycia kalkulatora.

a. 209^2

b. 297^2

c. $203 \bullet 197$

Ćwiczenie 2

Wskaż równości prawdziwe dla wszystkich liczb rzeczywistych x i a.

- [ ] $(a+5)^2 = a^2 + 10a + 25$
- [ ] $2(x-4)(x+4) + 32 = 2x^2$
- [ ] $\left(x + 3\sqrt{2}\right)^2 = x^2 + 6x\sqrt{2} + 18$
- [ ] $\left(\frac{1}{2}x - \frac{3}{2}\right)^2 = \frac{1}{4}x^2 - \frac{3}{2}x + \frac{9}{4}$
- [ ] $(x-3)^2 = x^2 - 9$
- [ ] $(2x-4)^2 = 4x^2 - 8x + 16$

Ćwiczenie 3

Oblicz, korzystając ze wzorów skróconego mnożenia.

a. $\left(\sqrt{2}+3\right)^2$

b. $\left(3-\sqrt{5}\right)^2$

c. $\left(3\sqrt{2}+2\sqrt{3}\right)^2$

d. $\left(\frac{1}{2}\sqrt{2}-\frac{1}{3}\sqrt{3}\right)^2$

Przykład 1

- Zapisz sumę $x^2+8x+16$ w postaci potęgi, wykorzystując wzór skróconego mnożenia. Sumę

$$x^2+8x+16$$

zapiszemy w postaci kwadratu pierwszego wyrażenia, podwojonego iloczynu obu wyrażeń oraz kwadratu drugiego wyrażenia

$$x^2+8x+16=x^2+2\bullet 4\bullet x+4^2.$$

Zatem

$$x^2+8x+16=x^2+2\bullet 4\bullet x+4^2=(x+4)^2.$$

- Sprawdź, czy wyrażenie $x^2+5x+16$ można zapisać w postaci kwadratu sumy dwóch wyrażeń, wykorzystując wzór skróconego mnożenia.

Jeśli wyrażenie

$$x^2+5x+16$$

jest kwadratem sumy dwóch wyrażeń, to oznacza, że pierwszym wyrażeniem jest x, a drugim 4 (kwadraty tych wyrażeń to odpowiednio x^2 i 16). Musimy sprawdzić, czy wyrażenie $5x$ jest podwojonym iloczynem.

$$2\bullet 4\bullet x=8x\neq 5x$$

Z tego wynika, że sumy $x^2+5x+16$ nie można zapisać w postaci kwadratu sumy dwóch wyrażeń.

Przykład 2

Podane wyrażenia zapisz, jeśli będzie to możliwe w postaci iloczynu, wykorzystując wzór skróconego mnożenia na różnicę kwadratów.

- x^2-25

Wyrażenie jest różnicą kwadratów liczb x i 5. Zatem na podstawie wzoru skróconego mnożenia otrzymujemy:

$$x^2-25=x^2-5^2=(x-5)(x+5).$$

- x^2-10

Wyrażenie jest różnicą kwadratów liczb x i $\sqrt{10}$, więc

$$x^2-10=x^2-\left(\sqrt{10}\right)^2=\left(x-\sqrt{10}\right)\left(x+\sqrt{10}\right).$$

- x^2+4

Wyrażenia nie można zapisać w postaci różnicy liczb rzeczywistych nieujemnych, zatem nie możemy skorzystać ze wzoru skróconego mnożenia.

Przykład 3

Wykaż, że liczba $29+12\sqrt{5}$ jest kwadratem liczby $3+2\sqrt{5}$.
Aby przeprowadzić dowód, wystarczy wykazać, że

$$\left(3+2\sqrt{5}\right)^2=29+12\sqrt{5}.$$

Po zastosowaniu wzoru skróconego mnożenia (na kwadrat sumy) otrzymamy

$$\left(3+2\sqrt{5}.\right)^2=9+2\bullet 3\bullet 2\sqrt{5}+\left(2\sqrt{5}\right)^2=9+12\sqrt{5}+20=29+12\sqrt{5}.$$

Z tego wynika, że liczba $29+12\sqrt{5}$ jest kwadratem liczby $3+2\sqrt{5}$.

Przykład 4

Znajdź liczbę postaci $a+b\sqrt{3}$, gdzie a i b są liczbami całkowitymi, której kwadrat jest równy $19-8\sqrt{3}$.
W znalezieniu takiej liczby pomoże wzór skróconego mnożenia na kwadrat różnicy. Liczbę $8\sqrt{3}$ możemy zapisać na przykład w postaci

$$8\sqrt{3}=2\bullet 2\bullet 2\sqrt{3}$$

lub

$$8\sqrt{3} = 2 \bullet 4 \bullet \sqrt{3},$$

czyli jako podwojony iloczyn liczb odpowiednio 2 i $2\sqrt{3}$ lub 4 i $\sqrt{3}$. Sprawdzimy, w którym przypadku suma kwadratów tych liczb jest równa 19.

Dane

jeśli przyjmiemy, że $8\sqrt{3} = 2 \bullet 2 \bullet 2\sqrt{3}$, to	jeśli przyjmiemy, że $8\sqrt{3} = 2 \bullet 4 \bullet \sqrt{3}$, to
$2^2 + \left(2\sqrt{3}\right)^2 = 4 + 12 \neq 19$	$4^2 + \left(\sqrt{3}\right)^2 = 16 + 3 = 19$

Z tego wynika, że liczbę $19 - 8\sqrt{3}$ możemy zapisać jako $\left(4 - \sqrt{3}\right)^2$ lub jako $\left(\sqrt{3} - 4\right)^2$. Zatem istnieją dwie liczby, których kwadrat jest równy $19 - 8\sqrt{3}$. Jest to liczba $4 - \sqrt{3}$ i liczba do niej przeciwna $\sqrt{3} - 4$.

Przykład 5

Wykaż, że liczba $\frac{2}{2+\sqrt{2}} + \sqrt{2}$ jest całkowita.

Wykażemy, że podana liczba jest całkowita, usuwając niewymierność z mianownika ułamka. W tym celu pomnożymy licznik i mianownik ułamka przez takie wyrażenie, aby w mianowniku otrzymać różnicę kwadratów. Zatem

$$\frac{2}{2+\sqrt{2}} + \sqrt{2} = \frac{2}{2+\sqrt{2}} \bullet \frac{2-\sqrt{2}}{2-\sqrt{2}} + \sqrt{2} = \frac{2\left(2-\sqrt{2}\right)}{4-2} + \sqrt{2} = \frac{2\left(2-\sqrt{2}\right)}{2} + \sqrt{2} = 2 - \sqrt{2} + \sqrt{2} = 2$$

Liczba 2 jest całkowita, zatem liczba $\frac{2}{2+\sqrt{2}} + \sqrt{2}$ jest całkowita.

Ćwiczenie 4

Liczba $\sqrt{2}\left(5\sqrt{2} - 6\right) + 3\left(4 - 2\sqrt{2}\right) - 22$ jest równa

- ◯ 0
- ◯ $-12\sqrt{2}$
- ◯ $-6\sqrt{2}$
- ◯ $6\sqrt{2}$

Ćwiczenie 5

Dla $a = -1$ wartość wyrażenia $a(3a - 1) + 2a(a - 3)$ jest równa

- 2
- 12
- -2
- 0

Ćwiczenie 6

Dla dowolnej liczby x wyrażenie $\left(3x^2 - 4\right)\left(2x^2 + 6\right)$ jest równe

- $6x^4 + 10x^2 - 24$
- $6x^4 - 10x^2 + 24$
- $6x^4 + 10x^2 + 24$
- $6x^4 - 10x^2 - 24$

Ćwiczenie 7

Dla dowolnych liczb a i b wyrażenie $-3a^2 + 3\mathrm{ab} + 6b^2$ jest równe

- $-3(a + 2b)(a - b)$
- $-3(a - 2b)(a + b)$
- $3(a - 2b)(a + b)$
- $3(a + 2b)(a - b)$

Ćwiczenie 8

Jeżeli $a = 6x - 4$ i $b = \frac{1}{2}$ to

- $\frac{1}{2}a^2b = 9x^2 - 12x + 4$
- $\frac{1}{2}a^2b = 36x^2 - 48x + 16$
- $\frac{1}{2}a^2b = 18x^2 + 8$
- $\frac{1}{2}a^2b = 18x^2 - 24x + 8$

Ćwiczenie 9

Dla dowolnych liczb a, b i c wyrażenie $(a - c)(b - a) - (a - b)c$ jest równe

- $-a^2$
- $\mathrm{ac} - a^2$
- $\mathrm{bc} - a^2$
- $\mathrm{ab} - a^2$

Ćwiczenie 10

Dla pewnej liczby dodatniej a podstawa trójkąta jest równa $4a + 6$. Wysokość opuszczona na tę podstawę jest od niej o $2a - 2$ krótsza. Pole tego trójkąta jest równe

- $4a^2 + 10a + 6$
- $8a^2 + 44a + 48$
- $8a^2 + 20a + 12$
- $4a^2 + 22a + 24$

Ćwiczenie 11

Wyrażenie $1-5x^2$ po rozłożeniu na czynniki ma postać

- $\left(1-\sqrt{5}x\right)\left(1+\sqrt{5}x\right)$
- $(1-5x)(1+5x)$
- $\left(1-\sqrt{5}x\right)\left(1-\sqrt{5}x\right)$
- $\left(1-\sqrt{5}x\right)(1+5x)$

Ćwiczenie 12

Wartość wyrażenia$(3x-2)(3x+2)\left(9x^2+4\right)$ dla $x=\sqrt{2}$ jest równa

- 307
- 308
- 309
- 305

Ćwiczenie 13

Liczba $\frac{5}{3-2\sqrt{2}}$ jest równa

- $10\sqrt{2}+15$
- $15+10\sqrt{2}$
- $-2\sqrt{2}-3$
- $2\sqrt{2}+3$

Ćwiczenie 14

Oblicz w pamięci.

a. $7 \bullet 89$

b. $6 \bullet 203$

c. $8 \bullet 397$

Ćwiczenie 15

Oblicz.

a. $2013^{10} - 2011 \bullet 2013^{9} - 2 \bullet 2013^{9}$

b. $4004^{-25} \bullet \left(4004^{26} - 4004^{25}\right)$

Ćwiczenie 16

Wykonaj mnożenie.

a. $(1-9x)(2+6x)$

b. $(2x+3)\left(4-x^2\right)$

c. $(x+y+z)\left(\mathrm{xy}+y^3+x^2z\right)$

d. $\frac{1}{3}(5y-9)(3y+4)$

e. $\left(\frac{1}{3}x-\frac{2}{3}\right)\left(\frac{3}{2}x+\frac{2}{3}\right)$

f. $\left(3x^2+2x-1\right)(2x-4)$

g. $\left(4y^3-2y+5\right)\left(y^2+y-2\right)$

h. $\left(5x-\sqrt{3}\right)\left(\sqrt{2}x+\sqrt{6}\right)$

i. $\sqrt{3}\left(a-\sqrt{3}\right)\left(3a-4\sqrt{3}\right)$

j. $\left(\sqrt{3}x+\sqrt{2}\right)\left(2\sqrt{3}x-\sqrt{2}\right)$

Ćwiczenie 17

Wyłącz wspólny czynnik przed nawias.

a. $4ab^3 - 2a^2b + 6\,\mathrm{ab}$

b. $2x^3y + 18x^2y^2 + 9xy^3$

c. $4x(x-3) + 2x^2(x-3) - 6x^3(x-3)$

d. $3a(a+5)(a-1) + 9a(a-1)(a+3) - 6a(a-1)(a+2)$

e. $2(x-1)^2(x+3) + 4(x-1)(x+3)^2 + 6(x-1)(x+3)$

f. $x^2y^2 + x^3y + 3\,\mathrm{xy}$

g. $xz^2 + \mathrm{xyz} + x^2z + 3z + x^2y + 3x$

Ćwiczenie 18

Uprość wyrażenie, a następnie oblicz jego wartość liczbową dla podanej wartości x.

a. $(2x-3)(3x-1) - 3$ dla $x = 2\sqrt{3}$

b. $4x(x-3) + 2x(1-2x) + 3$ dla $x = \frac{1}{2} + \sqrt{2}$

c. $3x^2(2x+1) + x(4-3x)$ dla $x = \sqrt[3]{5}$

d. $(4x-1)(2-3x) - (x-1)(x-2)$ dla $x = -3\sqrt{5}$

e. $(2x-3)^2 + 2\left(x^2-4\right)\left(x^2+4\right) - 3(10-4x)$ dla $x = 3\sqrt{10}$

f. $6(x-1)(x+1) + 4(x-3)(x+3) + 2(x-5)(x+5)$ dla $\mathrm{x} = 1 + 2\sqrt{2}$

Ćwiczenie 19

Każdej figurze przyporządkuj wzór opisujący jej pole.

a. $P = 2a^2 + 5a$

b. $P = 2a^2 - \frac{5}{2}a - 3$

c. $P = 2a^2 - 3\frac{1}{2}a - 1$

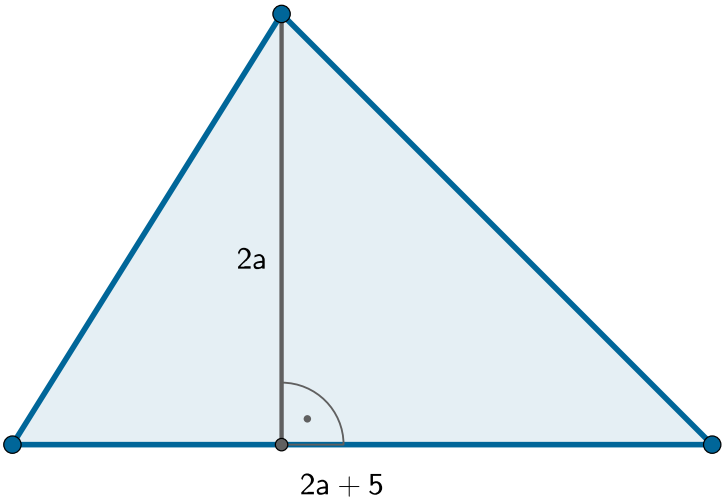
d. $P = 2a^2 + \frac{5}{2}a$

e. $P = 2a^2 - a - 6$

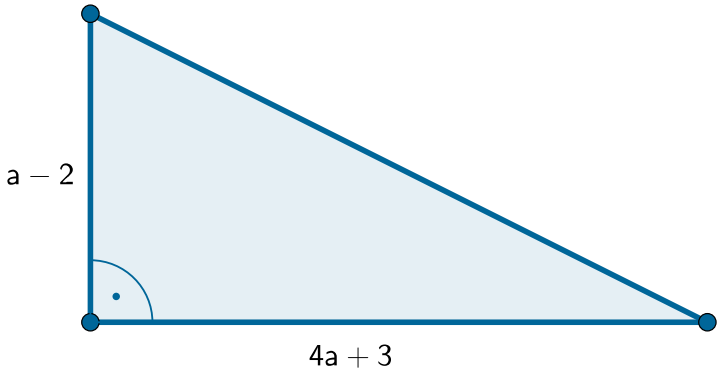
f. $P = 2a^2 + 3a$

g. $P = 2a^2 - a + 6$

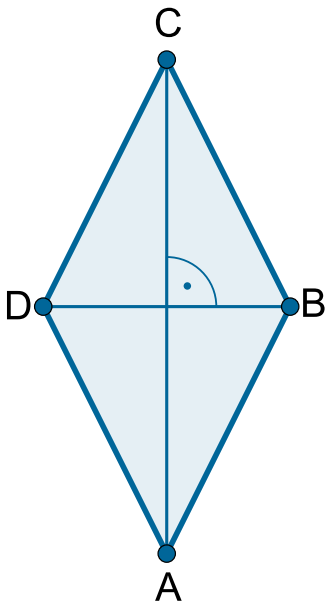
I.



II.



III.

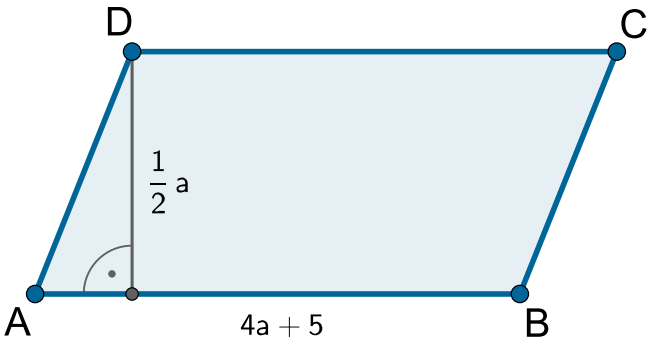


Romb, w którym długości przekątnych są równe:

$$|AC| = 4a + 1$$

$$|BD| = a - 2$$

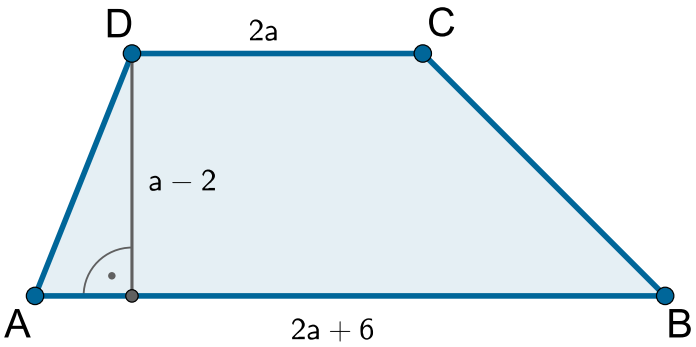
IV.



$AB \parallel CD$

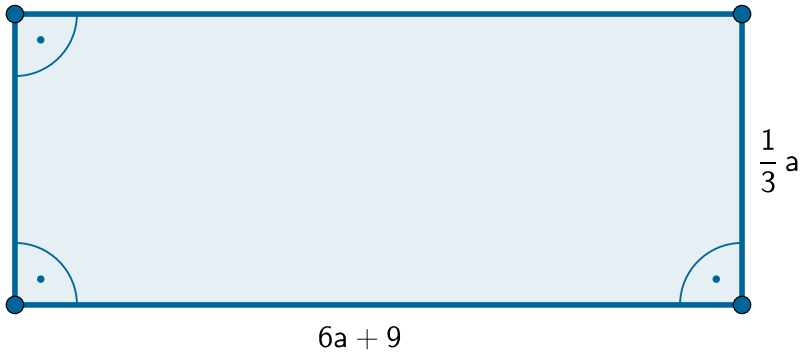
$AD \parallel BC$

V.



$AB \parallel CD$

VI.

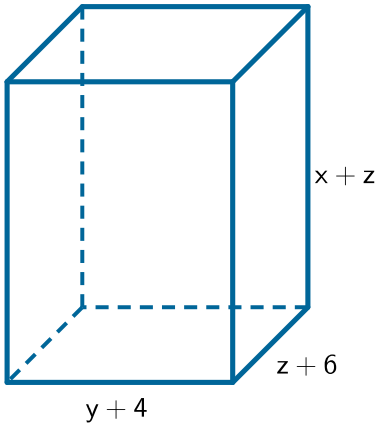


Ćwiczenie 20

Boki prostokąta są równe $a+5$ i $2a+5$, gdzie a jest liczbą dodatnią. O ile zmieni się pole prostokąta, jeśli długość pierwszego boku zwiększymy o 3, a długość drugiego zmniejszymy o 4? Podaj odpowiednie założenia.

Ćwiczenie 21

Zapisz wyrażenie opisujące pole powierzchni całkowitej prostopadłościanu przestawionego na rysunku. Krawędzie prostopadłościanu są równe $y+4$, $z+6$, $x+z$, gdzie $x,\ \mathrm{y}, z$ to liczby dodatnie.



Ćwiczenie 22

Wykaż, że równość $\frac{\sqrt{3}-1}{2\sqrt{3}+4} = \frac{3\left(\sqrt{3}-1\right)}{2} - 1$ jest prawdziwa.

Ćwiczenie 23

Połącz w pary.

$4x^2 - 1$	$(x+1)^2$
$x^2 - 2x + 1$	$(2x-1)(2x+1)$
$4x^2 - 4x + 1$	$(2x+1)^2$
$x^2 + 2x + 1$	$(x-1)^2$
$x^2 - 1$	$(2x-1)^2$
$4x^2 + 4x + 1$	$(x-1)(x+1)$

Ćwiczenie 24

Połącz w pary wyrażenia z ich słownym opisem.

suma kwadratów dwóch wyrażeń	$\frac{1}{(p-q)^2}$
potrojony kwadrat sumy dwóch wyrażeń	$(p+q)^2$
odwrotność sumy dwóch wyrażeń	$p^2 + q^2$
suma odwrotności dwóch wyrażeń	$3(p+q)^2$
odwrotność różnicy kwadratów dwóch wyrażeń	$\frac{1}{p+q}$
odwrotność kwadratu różnicy dwóch wyrażeń	$\frac{1}{p^2-q^2}$
kwadrat sumy dwóch wyrażeń	$3pq$
potrojony iloczyn dwóch wyrażeń	$\frac{1}{p} + \frac{1}{q}$

Ćwiczenie 25

Połącz w pary.

$7+4\sqrt{3}$	$\left(2-\sqrt{3}\right)^2$
$9-4\sqrt{2}$	$\left(2\sqrt{2}-1\right)^2$
$9+4\sqrt{2}$	$\left(\sqrt{3}+1\right)^2$
$4+2\sqrt{3}$	$\left(2+\sqrt{3}\right)^2$
$7-4\sqrt{3}$	$\left(\sqrt{3}-1\right)^2$
$4-2\sqrt{3}$	$\left(2\sqrt{2}+1\right)^2$

Zadania generatorowe

Ćwiczenie 26

Ćwiczenie 27

Ćwiczenie 28

Potęga o wykładniku wymiernym

> **Definicja: Potęga o wykładniku $\frac{1}{n}$**
>
> Dla dowolnej liczby nieujemnej a i liczby naturalnej n większej od 1 przyjmujemy
>
> $$a^{\frac{1}{n}} = \sqrt[n]{a}.$$

Dla liczby naturalnej n większej od 1, liczby całkowitej m i liczby dodatniej a przyjmujemy

$$a^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{a^m}$$

W szczególności, gdy $m = 1$ otrzymujemy $a^{\frac{1}{n}} = \sqrt[n]{a}$. Równość tę przyjmujemy też dla $a = 0$.
Poznane wcześniej twierdzenia o działaniach na potęgach o całkowitych wykładnikach są prawdziwe również wtedy, gdy wykładnik jest liczbą wymierną. Mamy zatem:

> **Definicja: Działania na potęgach**
>
> Dla dowolnej liczby dodatniej a i dowolnych liczb wymiernych x i y prawdziwe są równości
>
> - $a^x \bullet a^y = a^{x+y}$ (wzór na iloczyn potęg o tych samych podstawach)
> - $\frac{a^x}{a^y} = a^{x-y}$ (wzór na iloraz potęg o tych samych podstawach)
> - $(a^x)^y = a^{x \bullet y}$ (wzór na potęgę potęgi)

Dla dowolnych liczb dodatnich a i b oraz dowolnej liczby wymiernej x prawdziwe są równości

- $a^x \bullet b^x = (a \bullet b)^x$ (wzór na iloczyn potęg o tych samych wykładnikach)
- $\frac{a^x}{b^x} = \left(\frac{a}{b}\right)^x$ (wzór na iloraz potęg o tych samych wykładnikach)

Ćwiczenie 1

Połącz w pary.

$8^{\frac{1}{5}}$	$4^{\frac{1}{3}}$
$\sqrt[4]{4}$	$4^{\frac{1}{5}}$
$\sqrt{2}$	$4^{\frac{1}{4}}$
$\sqrt[3]{2}$	$2^{\frac{1}{2}}$
$8^{\frac{1}{4}}$	$\sqrt[3]{0.5}$
$\sqrt[5]{4}$	$\sqrt[4]{8}$
$(0.5)^{\frac{1}{2}}$	$2^{\frac{1}{3}}$
$\sqrt[3]{4}$	$\sqrt{0.5}$
$(0.5)^{\frac{1}{3}}$	$\sqrt[5]{8}$

Przykład 1

Wykażemy, że

$$32^{\frac{1}{2}} + 18^{\frac{1}{2}} = 98^{\frac{1}{2}}.$$

Po lewej stronie równości zamieniamy potęgi na pierwiastki.

$$32^{\frac{1}{2}} + 18^{\frac{1}{2}} = \sqrt{32} + \sqrt{18} = 4\sqrt{2} + 3\sqrt{2} = 7\sqrt{2}.$$

Po prawej stronie równości postąpimy podobnie

$$98^{\frac{1}{2}} = \sqrt{98} = 7\sqrt{2}$$

Z tego wynika, że obie strony równości są równe.

$$32^{\frac{1}{2}} + 18^{\frac{1}{2}} = 98^{\frac{1}{2}}$$

Przykład 2

Sprawdzimy, czy liczby $x = 3^{\frac{1}{2}} + 2$ oraz $y = \left(7 + 4 \bullet 3^{\frac{1}{2}}\right)^{\frac{1}{2}}$ są równe.

Podnosimy liczbę do kwadratu

$$x^2 = \left(3^{\frac{1}{2}} + 2\right)^2$$

Stosujemy wzór na kwadrat sumy.

$$\left(3^{\frac{1}{2}} + 2\right)^2 = \left(3^{\frac{1}{2}}\right)^2 + 2 \bullet 2 \bullet 3^{\frac{1}{2}} + 4 = 3 + 4 \bullet 3^{\frac{1}{2}} + 4 = 7 + 4 \bullet 3^{\frac{1}{2}}$$

Podobnie podnosimy do kwadratu liczbę y.

$$y^2 = \left(\left(7 + 4 \bullet 3^{\frac{1}{2}}\right)^{\frac{1}{2}}\right)^2 = \left(7 + 4 \bullet 3^{\frac{1}{2}}\right)^1 = 7 + 4 \bullet 3^{\frac{1}{2}}$$

Zatem

$$x^2 = y^2.$$

Liczby x oraz y są dodatnie. Stąd, że ich kwadraty są równe, wynika, że liczby również są równe.

$$x = y$$

Zadania

Ćwiczenie 1

Przeciągnij i upuść.

$\sqrt{27} =$ [ ], $\sqrt{11^5} =$ [ ], $\sqrt[4]{6^3} =$ [ ],
$5^{\frac{5}{3}} =$ [ ], $\left(\sqrt[3]{6}\right)^4 =$ [ ], $3^{\frac{4}{5}} =$ [ ],
$\sqrt[4]{125} =$ [ ], $11^{\frac{5}{6}} =$ [ ], $11^{\frac{2}{5}} =$ [ ],
$\sqrt{0.1} =$ [ ], $5^{-\frac{2}{3}} =$ [ ], $\sqrt[3]{6^{-4}} =$ [ ],

$\sqrt[5]{81}$ $\left(\sqrt[3]{5}\right)^5$ $3^{\frac{3}{2}}$ $\left(\sqrt[6]{11}\right)^5$ $6^{-\frac{4}{3}}$ $5^{\frac{3}{4}}$ $\sqrt[3]{0.04}$ $\sqrt[5]{121}$ $6^{\frac{3}{4}}$ $6^{\frac{4}{3}}$
$10^{-\frac{1}{2}}$ $11^{\frac{5}{2}}$

Ćwiczenie 2

Zapisz liczbę w postaci potęgi o podstawie 3 i wykładniku wymiernym.

a. $\sqrt{243}$

b. $9\sqrt[4]{3}$

c. $3\sqrt[3]{3}$

d. $\frac{\sqrt{3^5}}{9}$

e. $\sqrt{\sqrt{3}}$

f. $\sqrt[3]{3\sqrt{3}}$

Ćwiczenie 3

Oblicz iloczyn. Wynik zapisz w postaci potęgi o wykładniku wymiernym.

a. $\sqrt[3]{9} \bullet \sqrt{27}$

b. $\sqrt[4]{0{,}2} \bullet \sqrt[3]{25}$

c. $\sqrt{125} \bullet \sqrt[4]{125}$

d. $8\sqrt{2} \bullet 4\sqrt[3]{2}$

Ćwiczenie 4

Sprawdź, czy liczba $x = 2\sqrt[3]{4}$ spełnia nierówność $x < 2^{\frac{7}{3}}$.

Ćwiczenie 5

Uporządkuj liczby w kolejności od najmniejszej do największej.

a. $5^{-\frac{1}{5}},\ 5^{\frac{1}{5}}, 5^{\frac{2}{3}}, 5^{\frac{3}{4}},\ 5^{-\frac{3}{4}}, 5^{-\frac{2}{3}}$

b. $(0{,}3)^{\frac{1}{3}}$,$(0{,}3)^{-3}$, $(0{,}3)^{-\frac{1}{2}}$, $(0{,}3)^{-\frac{5}{6}}$, $(0{,}3)^{\frac{3}{7}}$, $(0{,}3)^{\frac{5}{8}}$

c. $\sqrt[3]{16}$, $\sqrt[3]{4}$, $\sqrt[4]{128}$, $\sqrt[4]{32}$, $\sqrt[3]{256}$, $\sqrt{8}$

Ćwiczenie 6

Liczba $5\sqrt[5]{125} \bullet 0{,}4\sqrt[4]{25}$ jest równa

- $2 \bullet 5^{\frac{11}{10}}$
- $5^{2\frac{1}{10}}$
- $5^{-2\frac{1}{10}}$
- $5^{-\frac{1}{10}}$

Ćwiczenie 7

Dane są liczby $x = \sqrt{2\sqrt{\sqrt{2}}}$ i $y = \sqrt[8]{32}$. Prawdziwa jest zależność

- $x > y$
- $x = y$
- $x = 2y$
- $x < y$

Ćwiczenie 8

Liczba $4^{\frac{1}{2}} \bullet 64^{-\frac{1}{4}}$ jest równa

- $\left(\sqrt[4]{0{,}25}\right)^5$
- $\sqrt[4]{0{,}25}$
- $\sqrt[4]{4^5}$
- $\sqrt[4]{4}$

Ćwiczenie 9

Liczba $x = \frac{\sqrt[3]{32}}{\sqrt{8}}$ spełnia nierówność

- $x > 2^{\frac{1}{3}}$
- $x > 2^{\frac{5}{12}}$
- $x > 2^{\frac{1}{12}}$
- $x > 2^{\frac{1}{4}}$

Ćwiczenie 10

Dane są liczby $a = \left(\sqrt{3}-1\right)^{\frac{1}{2}}$, $b = \left(\sqrt{3}-1\right)^{\frac{3}{4}}$, $c = \left(\sqrt{3}-1\right)^{\frac{5}{6}}$. Prawdziwa jest nierówność

- ◯ $c < b < a$
- ◯ $b < a < c$
- ◯ $c < a < b$
- ◯ $a < b < c$

Ćwiczenie 11

Zapisz w postaci potęgi o podstawie 6 i wykładniku wymiernym.

a. $\sqrt[4]{216}$

b. $36\sqrt[3]{6}$

c. $\left(\frac{324}{9}\right)^{\frac{1}{2}} \bullet \sqrt[4]{36}$

d. $\frac{1}{36} \bullet \left(\sqrt{6}\right)^{-2} \bullet \sqrt[3]{6^8}$

Ćwiczenie 12

Połącz w pary.

$\sqrt[3]{8}$	$\sqrt[6]{64}$
$\sqrt{5}$	$\sqrt[9]{216}$
$\sqrt{3}$	$\sqrt[8]{16}$
$\sqrt{2}$	$\sqrt[4]{9}$
$\sqrt[3]{6}$	$\sqrt[4]{25}$

Ćwiczenie 13

Oblicz. Wynik zapisz w postaci potęgi o podstawie będącej liczbą naturalną.

a. $3^{\frac{2}{3}} \bullet \sqrt[3]{3^4} \bullet \left(\frac{1}{9}\right)^{2,5}$

b. $8 \bullet \sqrt[4]{4} \bullet (0,5)^{\frac{1}{2}}$

c. $\frac{1}{\sqrt[4]{6}} \bullet \left(\sqrt[3]{36}\right)^2 \bullet \left(6^{\frac{3}{4}}\right)^{-1}$

d. $\left(\frac{1}{8}\right)^{-3,5} \bullet \left(\frac{1}{4}\right)^{2,5}$

e. $9^{0,4} \bullet \sqrt{3^{0,5}} \bullet \left(\frac{1}{27}\right)^{\frac{1}{3}}$

f. $\sqrt{27} : 3^{-\frac{5}{2}}$

g. $\frac{1}{4}\sqrt{8} \bullet \left(\frac{1}{64}\right)^{-2} \bullet 16^{-2,5}$

h. $\frac{5^{-3} \bullet (0,2)^{1,5} \bullet \sqrt{5}}{\sqrt{0,04^3} \bullet 5^{-0,5}}$

i. $\frac{(0,125)^{-3,5} \bullet \sqrt[3]{64} \bullet 4^{\frac{2}{3}}}{\left(32\sqrt{2}\right)^{-2}}$

Ćwiczenie 14

Niech x będzie liczbą dodatnią. Oblicz i zapisz wynik w postaci jednej potęgi o podstawie x.

a. $x^{\frac{1}{2}} \bullet x^{\frac{3}{4}} \bullet \frac{1}{x}$

b. $\sqrt{x} \bullet \sqrt[3]{x^2} \bullet \sqrt[4]{x^3}$

c. $\frac{x^{-1,5} \bullet x^{2,5} \bullet x^3}{\left(x^{3,5}\right)^2}$

d. $\frac{x^{\frac{3}{2}} \bullet \sqrt[4]{x^6} \bullet \left(x^{3,5}\right)^{-1}}{x^{-1} \bullet \sqrt{x^6}}$

e. $\sqrt[3]{\sqrt[4]{x^3}}$

f. $\left(\sqrt{x^3} \ : \sqrt[4]{x^5}\right)^{-\frac{1}{3}}$

g. $\sqrt[3]{\left(x^{\frac{1}{2}}\right)^3 \bullet \left(x^{\frac{5}{2}}\right)^{-1}}$

Ćwiczenie 15

Przeciagnij liczby z dolnej sekcji do górnej.

liczby mniejsze od

$2^{\frac{3}{2}}$

liczby większe od

$2^{\frac{3}{2}}$

liczby równe liczbie

$2^{\frac{3}{2}}$

$\left(16^{-\frac{1}{2}}\sqrt{8}\right)^{-4}$

$\left(\sqrt{0,25}\right)^{5}$

$\left(\sqrt[3]{0,25}\right)^{-2}$

$\sqrt[4]{2}$

$2\sqrt[3]{32}$

$\sqrt[3]{16}$

$\sqrt[4]{4^3}$

$\left(\sqrt[4]{0,125}\right)^{2}$

$\sqrt{\sqrt{4}\ \sqrt[4]{16}\ \sqrt[8]{256}}$

$\left(\sqrt{16^{\frac{1}{4}}}\right)^{3}$

$\left(\sqrt{0,25}\right)^{-3}$

$\sqrt[5]{4^4}$

$\left(\sqrt[8]{8}\right)^{3}$

$\sqrt{\sqrt{2}}$

Ćwiczenie 16

Oblicz, korzystając ze wzorów skróconego mnożenia.

a. $\left(2+5^{\frac{1}{2}}\right)^2+\left(2-5^{\frac{1}{2}}\right)^2$

b. $\left(3-7^{0,5}\right)\left(3+7^{0,5}\right)$

c. $\left(12^{\frac{1}{2}}-27^{\frac{1}{2}}\right)^2-\left(12^{\frac{1}{2}}+27^{\frac{1}{2}}\right)^2$

d. $\left(\left(6+11^{\frac{1}{2}}\right)^{\frac{1}{2}}+\left(6-11^{\frac{1}{2}}\right)^{\frac{1}{2}}\right)^2$

e. $\left(\left(4-3^{\frac{1}{2}}\right)^{\frac{1}{2}}-\left(4+3^{\frac{1}{2}}\right)^{\frac{1}{2}}\right)^2$

Ćwiczenie 17

Wykaż, że

a. $12^{\frac{1}{2}}+27^{\frac{1}{2}}=75^{\frac{1}{2}}$

b. $12^{\frac{1}{2}}+48^{\frac{1}{2}}=108^{\frac{1}{2}}$

c. $32^{\frac{1}{3}}+108^{\frac{1}{3}}=500^{\frac{1}{3}}$

d. $3^{\frac{5}{3}}+3^{\frac{8}{3}}=4\bullet 3^{\frac{5}{3}}$

Wskazówka: zamień potęgi o wykładnikach wymiernych na pierwiastki.

Ćwiczenie 18

Wykaż, że podana równość jest prawdziwa.

a. $\left(4+12^{\frac{1}{2}}\right)^{\frac{1}{2}}-\left(4-12^{\frac{1}{2}}\right)^{\frac{1}{2}}=2$

b. $\left(14+6\bullet 5^{\frac{1}{2}}\right)^{\frac{1}{2}}+\left(14-6\bullet 5^{\frac{1}{2}}\right)^{\frac{1}{2}}=6$

Wskazówka: podnieś do kwadratu obie strony równości.

Ćwiczenie 19

Wykaż, że $\left(6+20^{\frac{1}{2}}\right)^{\frac{1}{2}}-\left(6-20^{\frac{1}{2}}\right)^{\frac{1}{2}}$ jest liczbą całkowitą.
Wskazówka: oblicz kwadrat tej liczby.

Równania i nierówności liczbowe. Przedziały liczbowe

Już wiesz

Szukając liczb, które spełniają równanie, możemy to równanie przekształcać równoważnie. Stosujemy następujące zasady

- po obu stronach równania można wykonać wskazane działania (np. wykorzystując wzory skróconego mnożenia),
- do obu stron równania możemy dodać to samo wyrażenie, pod warunkiem że nie zmienimy dziedziny równania (wyrażenia możemy przenosić z jednej strony równania na drugą pod warunkiem zmiany znaku tego wyrażenia na przeciwny),
- możemy mnożyć lub dzielić obie strony równania przez dowolną liczbę różną od zera.

Przykład 1

- Rozwiąż równanie

$$\frac{x+1}{2} = 2 - \frac{x-3}{4}.$$

Mnożymy obie strony równania przez 4.

$$2(x+1) = 8 - (x-3)$$

$$2x + 2 = 8 - x + 3$$

$$2x + x = 8 - 2 + 3$$

$$3x = 9$$

$$x = 3$$

Rozwiązaniem równania $\frac{x+1}{2} = 2 - \frac{x-3}{4}$ jest liczba 3.

- Rozwiąż równanie

$$3(x-5) = x + 2(x+4).$$

Przekształcając kolejno, otrzymujemy

$$3(x-5) = x + 2(x+4)$$

$$3x - 15 = x + 2x + 8$$

$$3x - x - 2x = 15 + 8$$

$$0 \bullet x = 23$$

Otrzymaliśmy sprzeczność, ponieważ $0 \neq 23$. Zatem nie istnieje liczba, która spełnia to równanie. Jest to równanie sprzeczne.

- Wyznacz liczby, które spełniają równanie

$$(x-3)(x+2)+1 = (x-1)(x+5) - 5x.$$

Po przekształceniach otrzymujemy

$$x^2 - 3x + 2x - 6 + 1 = x^2 - x + 5x - 5 - 5x$$

$$x^2 - x - 5 = x^2 - x - 5.$$

Po obu stronach równania otrzymaliśmy to samo wyrażenie. Z tego wynika, że równanie jest spełnione dla dowolnej liczby x. Jest to równanie tożsamościowe.

Przykład 2

Rozwiąż nierówność

$$3x - 4 < 5x + 2.$$

Przy rozwiązywaniu nierówności możemy wykorzystywać zasady podobne do tych, które pozwalały rozwiązywać równania. Mnożąc lub dzieląc obie strony nierówności przez liczbę ujemną, musimy zmienić zwrot nierówności.

Zapamiętaj!

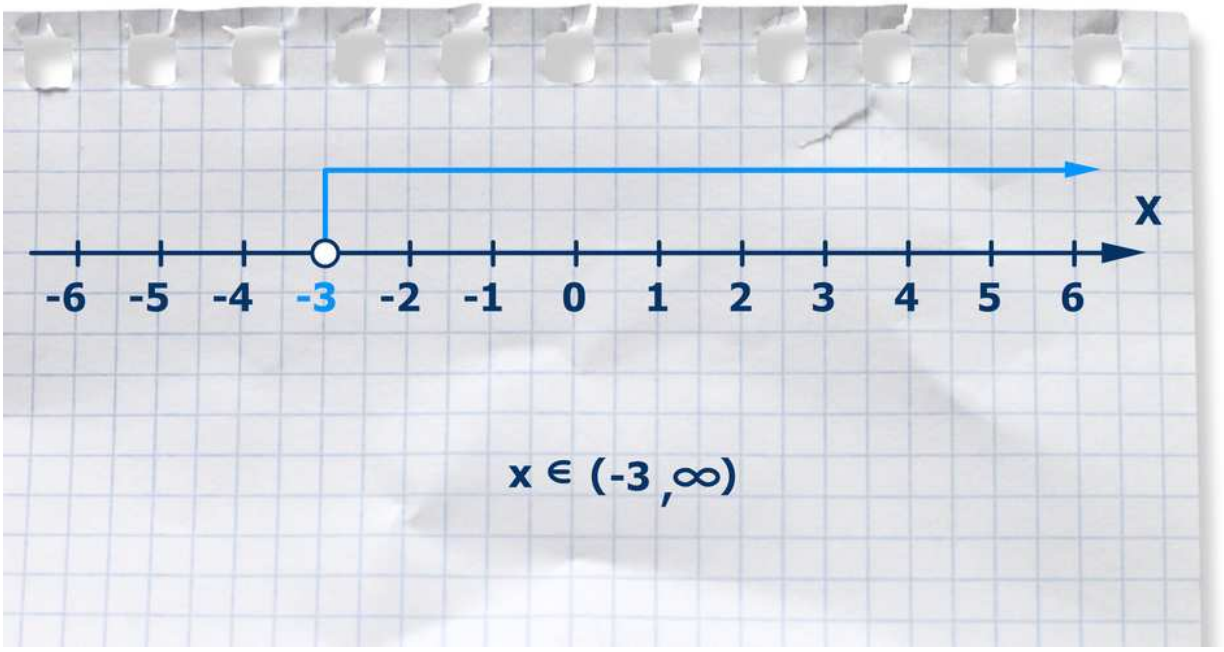
Obie strony nierówności możemy mnożyć lub dzielić przez dowolną liczbę:

- dodatnią – wtedy zachowujemy ten sam zwrot nierówności,
- ujemną – wtedy zmieniamy zwrot nierówności na przeciwny.

W każdym przypadku otrzymamy nierówność równoważną danej.

Przykład 3

Zaznaczmy na osi liczbowej liczby spełniające nierówność $x > -3$.



Film dostępny pod adresem /preview/resource/RYtc7lhDsn3rb

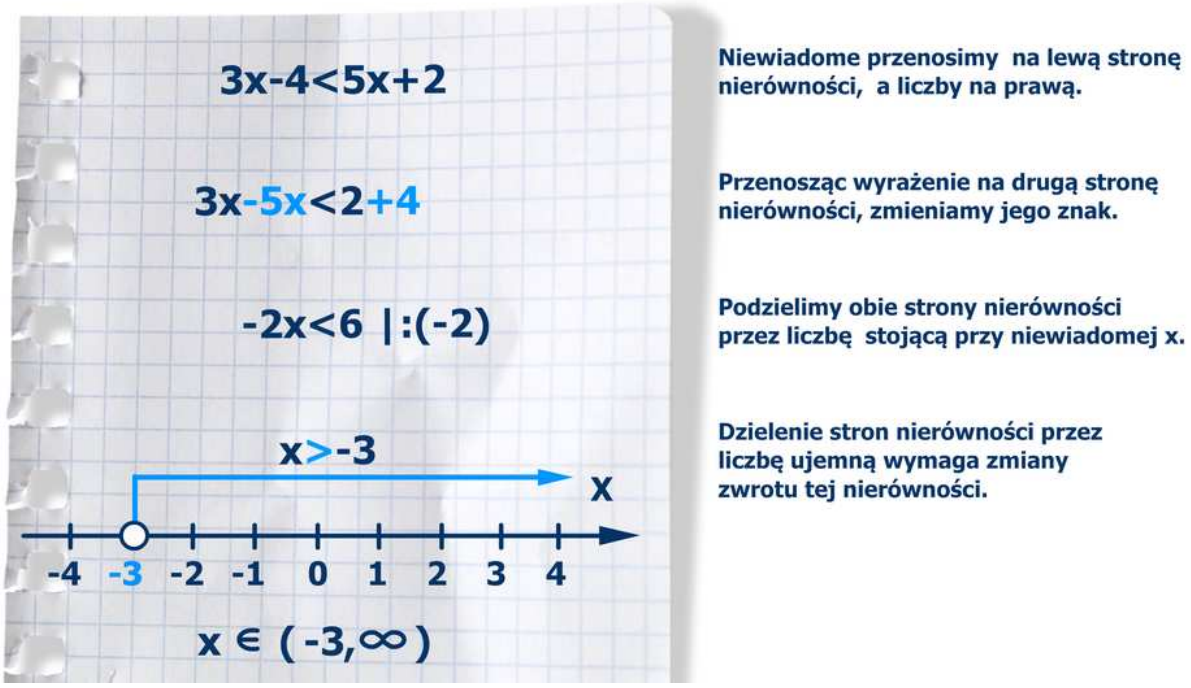
Nierownosci przedzialy odleglosc_atrapa_animacji_289

Animacja przedstawia oś liczbową z zaznaczonymi punktami od -6 do 6. W punkcie o współrzędnej -3 niezamalowane kółko. Na osi zaznaczone liczby większe od -3. Zapis: x należy (-3, nieskończoność).

Do zbioru $(-3, +\infty)$ należą liczby większe od (-3). Zbiór taki nazywamy przedziałem nieograniczonym lewostronnie otwartym. Zapis $x \in (-3, +\infty)$ oznacza, że liczba x należy do tego przedziału, np. $4 \in (-3, \ +\infty)$, a zapis $x \notin (-3 + \infty)$ oznacza, że liczba x nie należy do tego przedziału np.$-5 \notin (-3 + \infty)$.

Przykład 4

Prześledzimy rozwiązanie „krok po kroku”.



Film dostępny pod adresem /preview/resource/R62Bw71J8hl2A

Nierownosci przedzialy odleglosc_atrapa_animacji_288

Animacja przedstawia rozwiązanie „krok po kroku" nierówności 3x -4 <5x +4.
Niewiadome przenosimy na lewą stronę nierówności a liczby na prawą. 3x -5x <2 +4.
Przenosząc wyrażenie na drugą stronę nierówności zmieniamy jego znak. -2x<6.
Dzielimy obie strony nierówności przez liczbę stojącą przy niewidomej x. x> -3. Dzielenie stron nierówności przez liczbę ujemną wymaga zmiany zwrotu tej nierówności.
Rozwiązanie nierówności na osi liczbowej z zaznaczonymi punktami od -4 do 4.
W punkcie o współrzędnej -3 niezamalowane kółko. Na osi zaznaczone liczby większe od -3. Zapis: x należy (-3, nieskończoność).

Przykład 5

Rozwiąż nierówność

$$\frac{5x+7}{2} > 3x + 5.$$

Przekształcamy nierówność równoważnie.

$$\frac{5x+7}{2} > 3x + 5$$

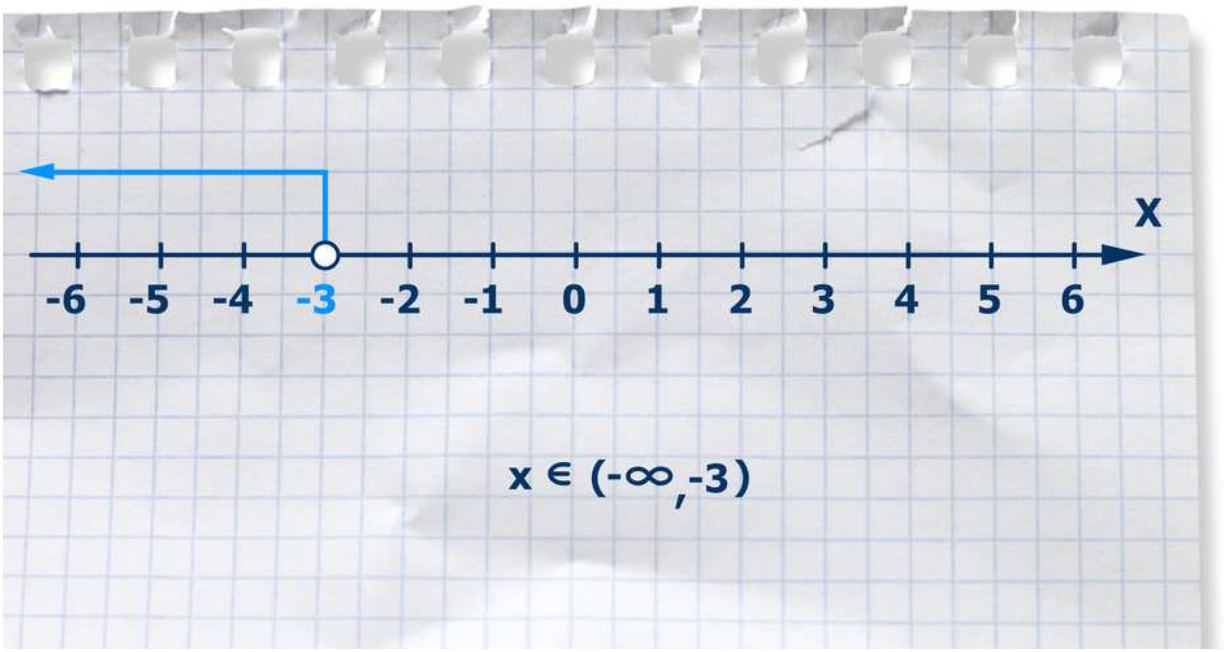
$$5x + 7 > 6x + 10$$

$$5x - 6x > 10 - 7$$

$$-x > 3$$

$$x < -3.$$

Rozwiązaniem nierówności $\frac{5x+7}{2} > 3x + 5$ jest każda liczba mniejsza od (-3).
Zaznaczymy wszystkie liczby spełniające nierówność $x < -3$ na osi liczbowej.



Film dostępny pod adresem /preview/resource/R1ILa7fOB7i3N
Nierownosci przedzialy odleglosc_atrapa_animacji_290

Animacja przedstawia oś liczbową z zaznaczonymi punktami od -6 do 6. W punkcie o współrzędnej -3 niezamalowane kółko. Na osi zaznaczone liczby mniejsze od -3. Zapis: x należy (minus nieskończoność, -3).

Zbiór $(-\infty, -3)$ nazywamy przedziałem nieograniczonym prawostronnie otwartym. Należą do niego liczby mniejsze od (-3).

Przykład 6

Rozwiąż nierówność

$$(x-2)^2 \leq (x+4)(x+1) - 9.$$

Zaznacz na osi liczbowej wszystkie liczby, które spełniają tę nierówność.
Rozwiązujemy nierówność.

$$(x-2)^2 \leq (x+4)(x+1) - 9$$

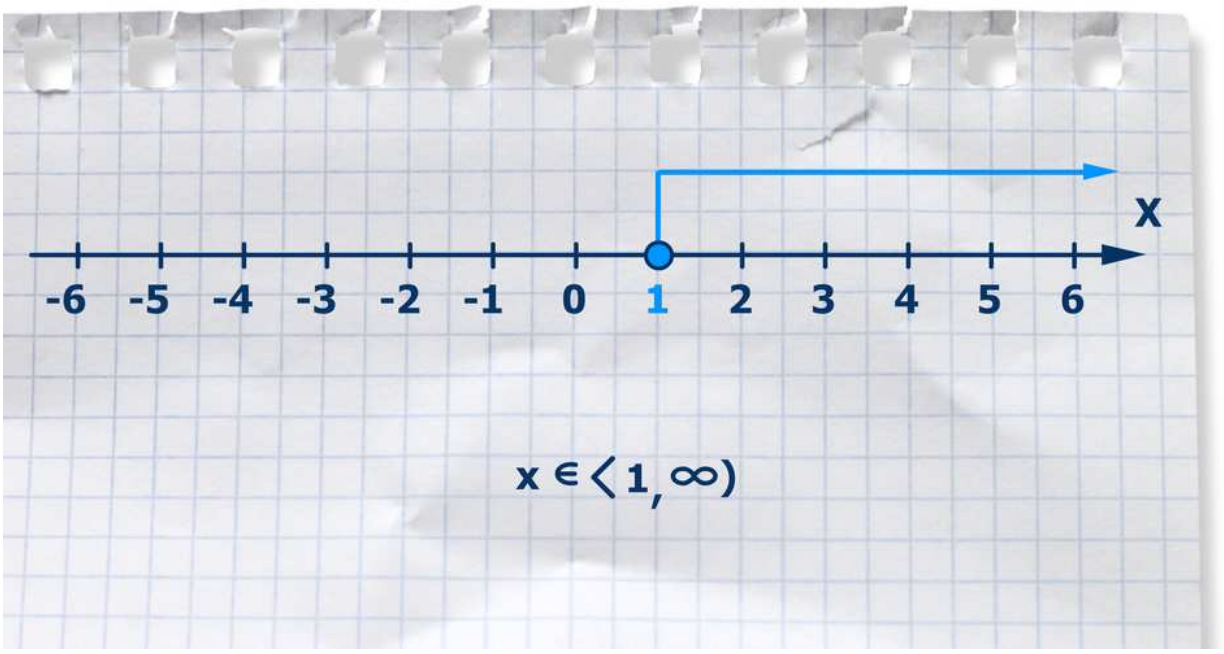
$$x^2 - 4x + 4 \leq x^2 + 4x + x + 4 - 9$$

$$x^2 - 4x - 4x - x - x^2 \leq 4 - 9 - 4$$

$$-9x \leq -9$$

$$x \geq 1$$

Rozwiązaniem nierówności $(x-2)^2 \leq (x+4)(x+1)-9$ jest każda liczba większa lub równa 1.
Zaznaczymy wszytskie liczby spełniające nierówność $x \geq 1$ na osi liczbowej.



Film dostępny pod adresem /preview/resource/R1TrnOTIH8Dzw
Nierownosci przedzialy odleglosc_atrapa_animacji_290

Animacja przedstawia oś liczbową z zaznaczonymi punktami od -6 do 6. W punkcie o współrzędnej 1 zamalowane kółko. Na osi zaznaczone liczby większe lub równe 1. Zapis: x należy <1, nieskończoność).

Zbiór $\langle 1,\ \infty)$ nazywamy przedziałem nieograniczonym lewostronnie domkniętym. Należą do niego liczby większe od 1, razem z liczbą 1.
Przykład 7

Zaznacz na osi liczbowej liczby spełniające nierówność

$$x-3 \leq \frac{2x-3}{5}.$$

Rozwiążemy nierówność.

$$x-3 \leq \frac{2x-3}{5}$$

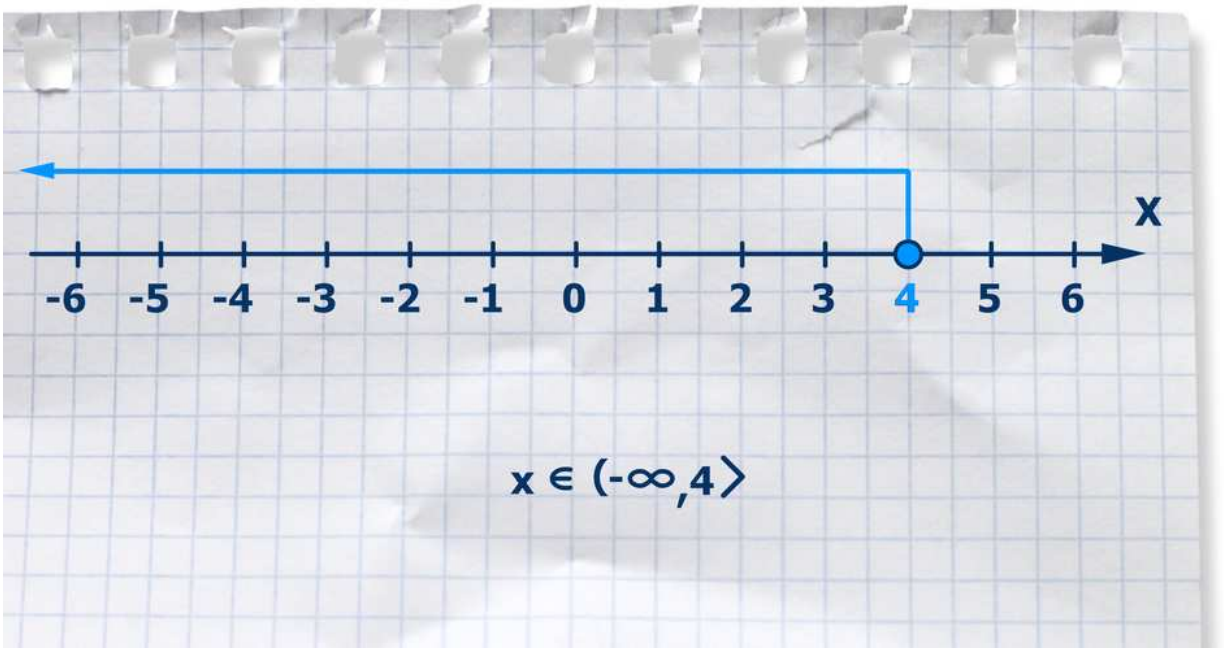
$$5(x-3) \leq 2x-3$$

$$5x-15 \leq 2x-3$$

$$3x \leq 12$$

$$x \leq 4$$

Rozwiązaniem nierówności $x - 3 \leq \frac{2x-3}{5}$ jest każda liczba mniejsza lub równa 4. Zaznaczymy wszystkie liczby spełniające nierówność $x \leq 4$na osi liczbowej.



Film dostępny pod adresem /preview/resource/R1ESCxD2MmEx3

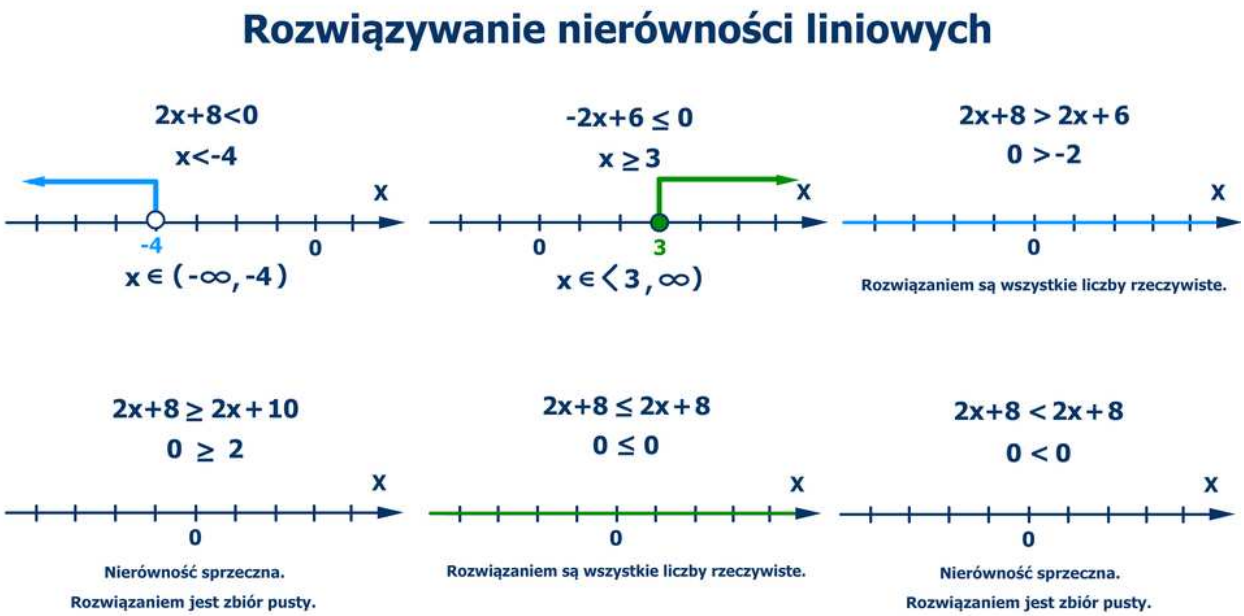
Nierownosci przedzialy odleglosc_atrapa_animacji_292

Animacja przedstawia oś liczbową z zaznaczonymi punktami od -6 do 6. W punkcie o współrzędnej 4 zamalowane kółko. Na osi zaznaczone liczby mniejsze lub równe 4. Zapis: x należy (minus nieskończoność, 4>.

Zbiór $(-\infty, 4\rangle$ nazywamy przedziałem nieograniczonym prawostronnie domkniętym. Należą do niego liczby mniejsze od 4, razem z liczbą 4.

Przedziały liczbowe. Przedziały jako zbiory

Już wiesz



Film dostępny na portalu epodreczniki.pl

Animacja ilustruje na osi liczbowej rozwiązywanie nierówności liniowych. Pierwsza nierówność: 2x +8 <0. Przenosimy liczbę 8 na drugą stronę nierówności. 2x <-8. Stronami dzielimy przez 2. x <-4. Na osi liczbowej w punkcie o współrzędnej -4 niezamalowane kółko. Zaznaczone liczby mniejsze od -4. Zapis: x należy (minus nieskończoność, -4). Druga nierówność: -2x +6 mniejsze lub równe 0. Przenosimy liczbę 6 na drugą stronę nierówności. -2x mniejsze lub równe -6. Stronami dzielimy przez -2. x większe lub równe 3. Na osi liczbowej w punkcie o współrzędnej 3 zamalowane kółko. Zaznaczone liczby większe lub równe 3. Zapis: x należy <3, nieskończoność). Trzecia nierówność: 2x +8 >2x +6 Przenosimy niewiadome na lewą stronę nierówności, a liczby na prawą. 2x -2x >6 -8. 0 >-2. Na osi liczbowej zaznaczone wszystkie liczby. Rozwiązaniem są wszystkie liczby rzeczywiste. Czwarta nierówność: 2x +8 większe lub równe 2x +10. Przenosimy niewiadome na lewą stronę, a liczby na prawą stronę. 2x -2x większe lub równe 10 -8. 0 większe lub równe 2. Na osi liczbowej niezaznaczone żadne liczby. Nierówność sprzeczna. Rozwiązaniem jest zbiór pusty. Piąta nierówność: 2x +8 mniejsze lub równe 2x +8. Przenosimy niewiadome na lewą stronę, a liczby na prawą stronę. 2x -2x mniejsze lub równe 8 -8. 0 mniejsze lub równe 0. Na osi liczbowej zaznaczone wszystkie liczby. Rozwiązaniem są wszystkie liczby rzeczywiste. Szósta nierówność: 2x +8 <2x +8. Przenosimy niewiadome na lewą stronę, a liczby na prawą stronę. 2x -2x <8 -8. 0 <0. Na

osi liczbowej niezaznaczone żadne liczby. Nierówność sprzeczna. Rozwiązaniem jest zbiór pusty.

Rozwiązania powyższych nierówności doprowadziły nas do zdefiniowania przedziałów nieograniczonych

Definicja: Przedziały nieograniczone

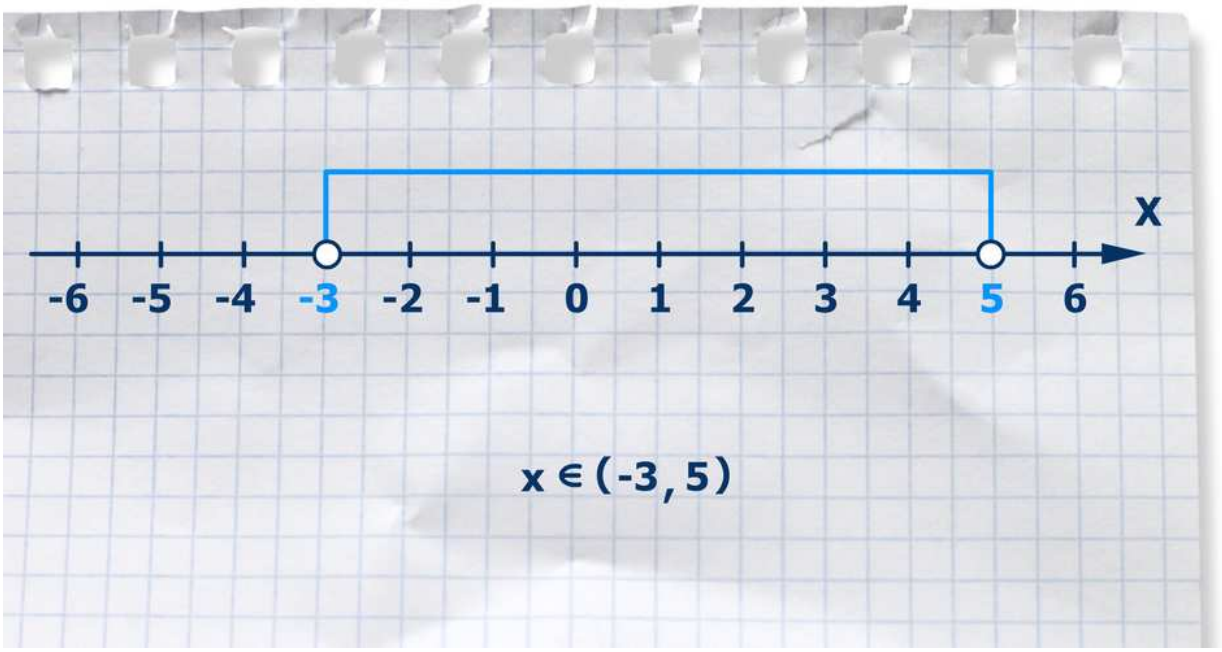
Niech a będzie dowolną liczbą rzeczywistą.

- Zbiór liczb spełniających nierówność $x > a$ nazywamy przedziałem nieograniczonym lewostronnie otwartym. Taki przedział oznaczamy (a, ∞).
- Zbiór liczb spełniających nierówność $x \geq a$ nazywamy przedziałem nieograniczonym lewostronnie domkniętym. Taki przedział oznaczamy $\langle a, \ \infty)$.
- Zbiór liczb x spełniających nierówność $x < a$ nazywamy przedziałem nieograniczonym prawostronnie otwartym. Taki przedział oznaczamy $(-\infty, a)$.
- Zbiór liczb x spełniających nierówność $x \leq a$ nazywamy przedziałem nieograniczonym prawostronnie domkniętym. Taki przedział oznaczamy $(-\infty, \ a\rangle$.

Przyjrzyjmy się teraz przedziałom ograniczonym.

Przykład 1

- Zaznacz na osi liczbowej wszystkie liczby, które jednocześnie spełniają nierówności $x > -3$ i $x < 5$.

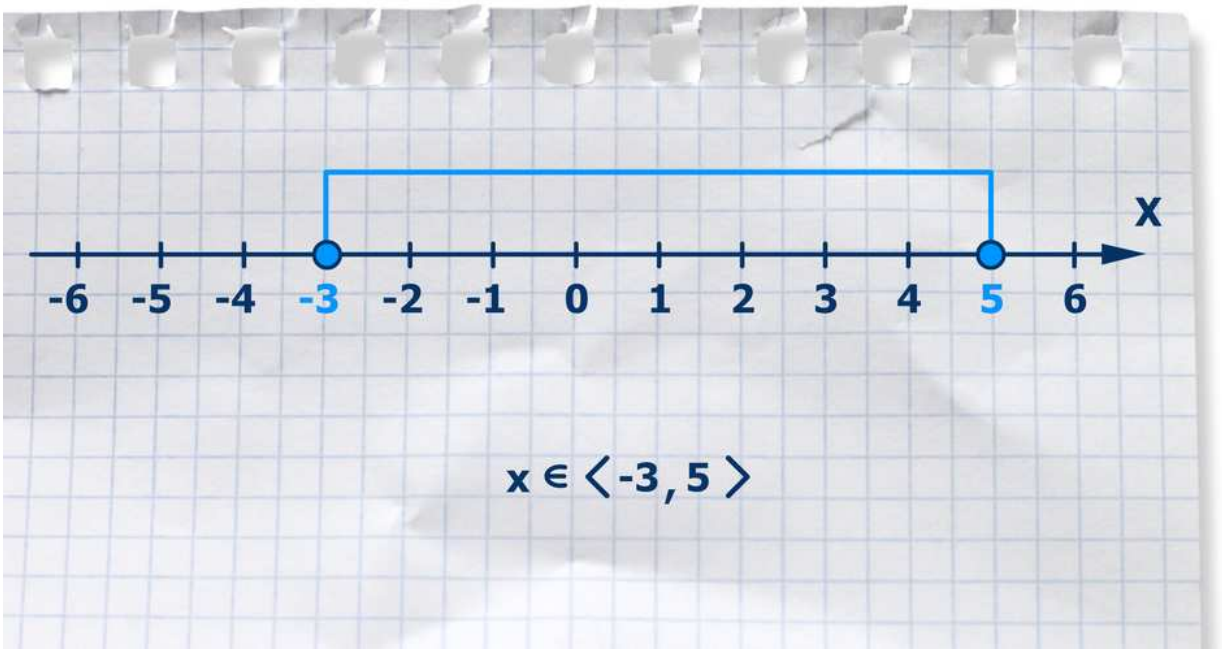


Film dostępny na portalu epodreczniki.pl

Animacja przedstawia oś liczbową z zaznaczonymi punktami od -6 do 6. W punktach o współrzędnych -3 i 5 niezamalowane kółka. Zaznaczone liczby większe od -3 i mniejsze od 5. Zapis: x należy (-3, 5).

Taki przedział nazywamy otwartym. Należą do niego wszystkie liczby większe od (-3) i jednocześnie mniejsze od 5. Przedział otwarty oznaczamy $(-3,5)$ .Nierówności $x > -3$ i $x < 5$ możemy zastąpić nierównością podwójną $-3 < x < 5$.

- Zaznacz na osi liczbowej wszystkie liczby, które spełniają warunek $-3 \leq x \leq 5$.

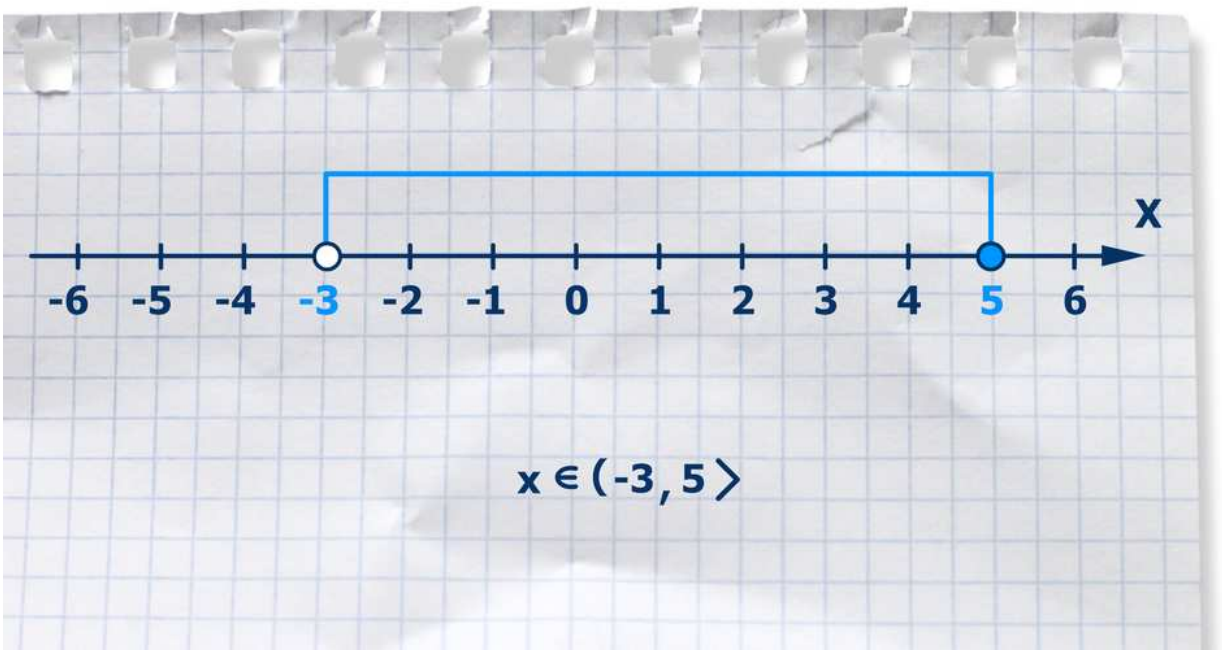


Film dostępny na portalu epodreczniki.pl

Animacja przedstawia oś liczbową z zaznaczonymi punktami od -6 do 6. W punktach o współrzędnych -3 i 5 zamalowane kółka. Zaznaczone liczby większe lub równe -3 i mniejsze lub równe 5. Zapis: x należy <-3, 5>.

Taki przedział nazywamy domkniętym. Należą do niego wszystkie liczby większe lub równe (-3) i jednocześnie mniejsze lub równe 5. Przedział domknięty oznaczamy $\langle -3,\ 5\rangle$.

- Zaznacz na osi liczbowej wszystkie liczby, które spełniają warunek $-3 < x \leq 5$.

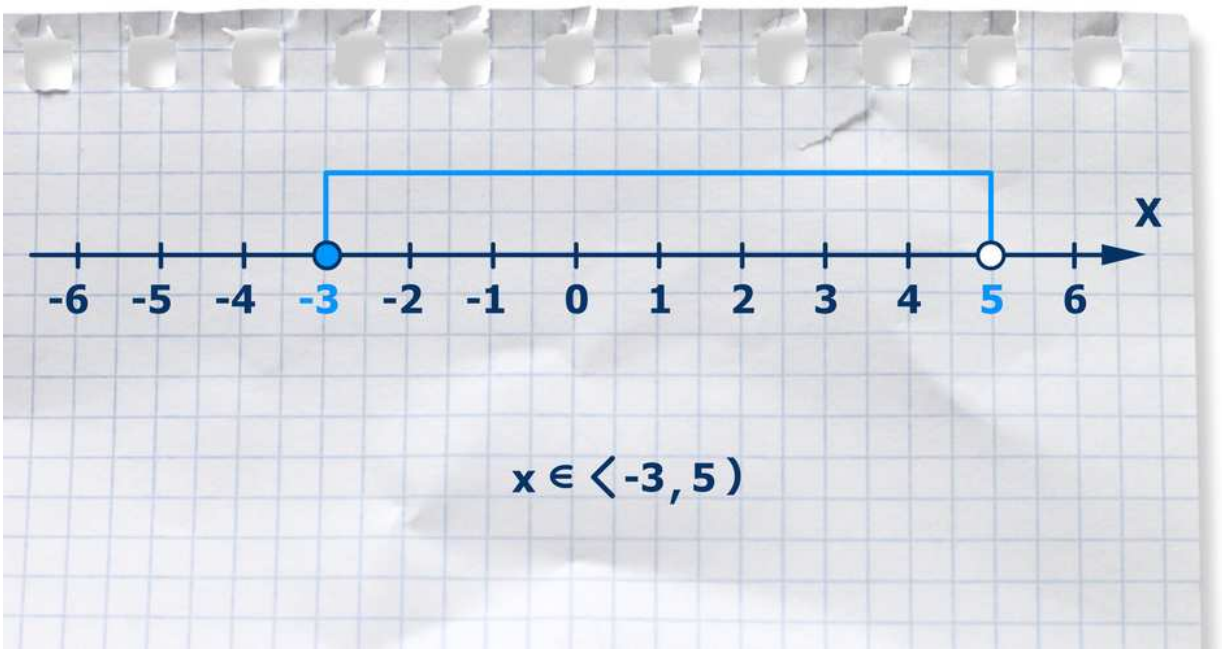


Film dostępny na portalu epodreczniki.pl

Animacja przedstawia oś liczbową z zaznaczonymi punktami od -6 do 6. W punkcie o współrzędnej -3 niezamalowane kółko, w punkcie 5 zamalowane kółko. Zaznaczone liczby większe od -3 i mniejsze lub równe 5. Zapis: x należy (-3, 5>.

Taki przedział jest otwarty z lewej strony i domknięty z prawej. Należą do niego wszystkie liczby większe od (-3) i jednocześnie mniejsze lub równe 5. Musimy pamiętać, że liczba (-3) nie należy do tego przedziału, a liczba 5 do niego należy. Przedział ten oznaczamy $(-3,\ \ 5\rangle$.

- Zaznacz na osi liczbowej wszystkie liczby, które spełniają warunek $-3 \leq x < 5$.



Film dostępny na portalu epodreczniki.pl

Animacja przedstawia oś liczbową z zaznaczonymi punktami od -6 do 6. W punkcie o współrzędnej -3 zamalowane kółko, w punkcie 5 niezamalowane kółko. Zaznaczone liczby większe lub równe -3 i mniejsze od 5. Zapis: x należy <-3, 5).

Taki przedział jest domknięty z lewej strony i otwarty z prawej. Należą do niego wszystkie liczby większe lub równe (-3) i jednocześnie mniejsze od 5. Musimy pamiętać, że liczba (-3) należy do tego przedziału, a liczba 5 do niego nie należy. Przedział ten oznaczamy $\langle -3,\ 5)$.

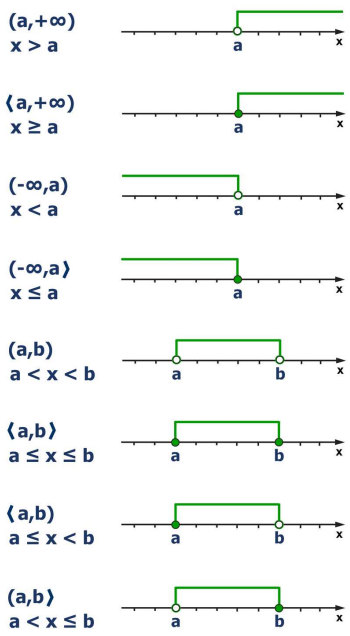
Definicja: Przedziały ograniczone

Niech a i b będą dowolnymi liczbami rzeczywistymi, przy czym $a < b$.

- Przedziałem obustronnie otwartym nazywamy zbiór liczb x spełniających warunek $a < x < b$. Przedział ten oznaczamy $(a,\ \mathrm{b})$.
- Przedziałem obustronnie domkniętym nazywamy zbiór liczb x spełniających warunek $a \leq x \leq b$. Przedział ten oznaczamy $\langle a,\ \mathrm{b}\rangle$.

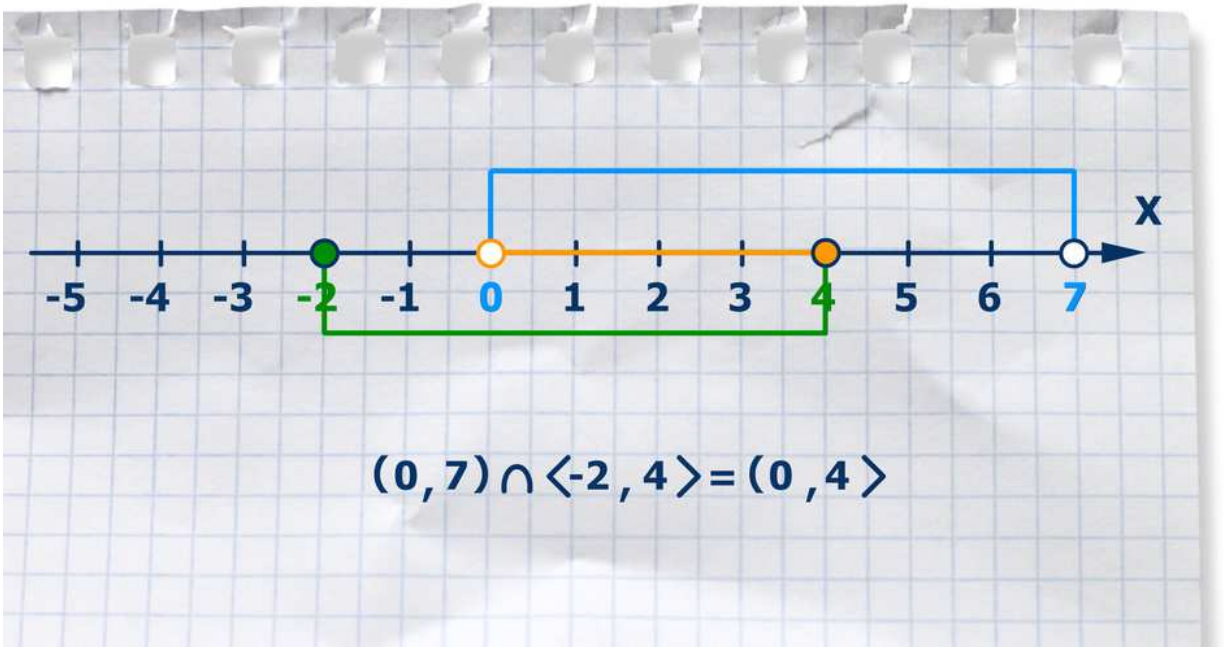
Przykład 2

Usystematyzujemy wiadomości dotyczące przedziałów.



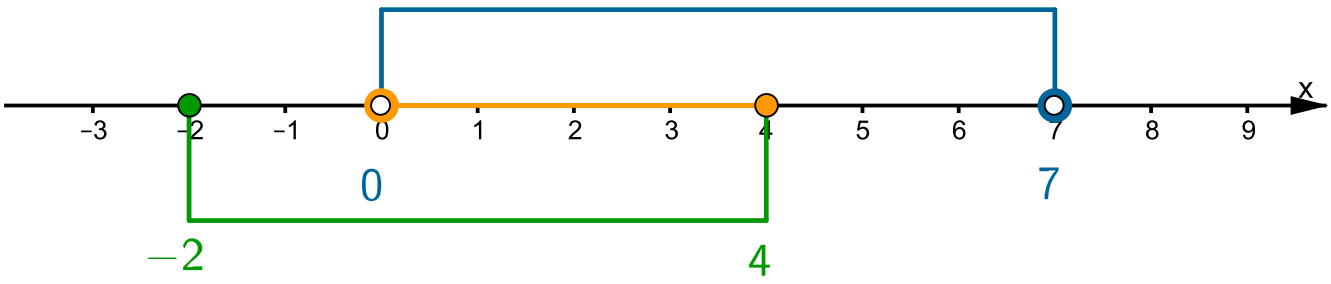
Przykład 3

Zaznacz na osi liczbowej wszystkie liczby należące jednocześnie do przedziału $(0,\ 7)$ i do przedziału $\langle -2{,}4\rangle$.



Film dostępny na portalu epodreczniki.pl

Animacja przedstawia oś liczbową z zaznaczonymi punktami od -5 do 7. W punktach o współrzędnych -2 i 7 zamalowane kółka, w punktach 0 i 7 niezamalowane kółka. Zaznaczone przedziały (0, 7) i <-2, 4> oraz ich część wspólna. Zapis: (0, 7) iloczyn zbioru <-2, 4> =(0, 4>.

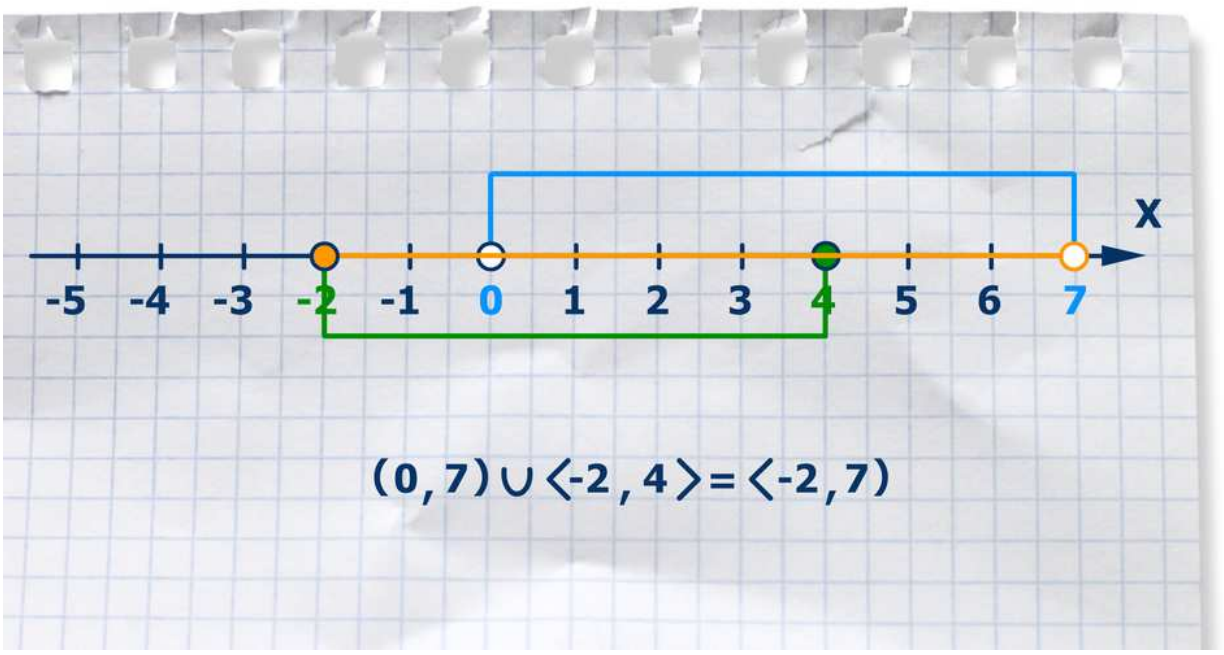


Przedział $(0,\ 4\rangle$ zawiera liczby, które należą do obu przedziałów jednocześnie. Przedział $(0,\ 4\rangle$ jest częścią wspólną (iloczynem) przedziałów $(0,\ 7)$ i $\langle -2{,}4\rangle$.
Symbolicznie zapisujemy

$$(0,\ 7) \cap \langle -2{,}4\rangle = (0,\ 4\rangle.$$

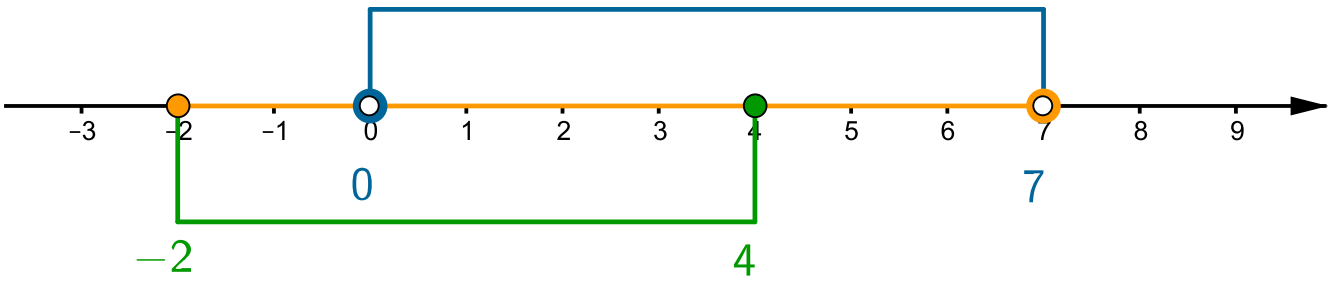
Przykład 4

Zaznacz na osi liczbowej wszystkie liczby należące do przedziału $(0,\ 7)$ lub do przedziału $\langle -2{,}4\rangle$.



Film dostępny na portalu epodreczniki.pl

Animacja przedstawia oś liczbową z zaznaczonymi punktami od -5 do 7. W punktach o współrzędnych -2 i 4 zamalowane kółka, w punktach 0 i 7 niezamalowane kółka. Zaznaczone przedziały (0, 7) i <-2, 4> oraz ich suma. Zapis: (0, 7) suma zbioru <-2, 4> = <-2, 7).



Przedział $\langle -2,\ \ 7)$ zawiera liczby, które należą do jednego z dwóch przedziałów (lub do obu jednocześnie). Przedział $\langle -2,\ \ 7)$ jest sumą przedziałów $\langle 0,7)$ i $\langle -2,4\rangle$. Symbolicznie zapisujemy

$$(0,\ 7) \cup \langle -2,4\rangle = \langle -2,\ \ 7).$$

Definicja: Część wspólna przedziałów. Suma przedziałów

- Częścią wspólną (iloczynem) przedziałów A i B nazywamy zbiór złożony z liczb, które należą jednocześnie do obu przedziałów. Iloczyn przedziałów oznaczamy $A \cap B$.

- Sumą przedziałów A i B nazywamy zbiór złożony z tych liczb, które należą tylko do jednego z przedziałów A lub B albo do obu przedziałów jednocześnie. Sumę przedziałów oznaczamy $A \cup B$.

Ćwiczenie 1

Zaznacz na osi liczbowej liczby, które

a. należą do sumy przedziałów $(-3,4)$ oraz $(0,\infty)$

b. należą do sumy przedziałów $(-5,\ -2\rangle$ oraz $\langle -2,5\rangle$

c. należą do części wspólnej przedziałów $(-\infty,5)$ i $\langle -2,4\rangle$

d. należą do części wspólnej przedziałów $(4,\ 6\rangle$ i $\langle 6,10\rangle$

Wartość bezwzględna - definicja

Definicja: Wartość bezwzględna

Niech a będzie dowolną liczbą rzeczywistą.

- Odległość liczby a od liczby 0 na osi liczbowej nazywamy wartością bezwzględną liczby a.
- Wartość bezwzględną liczby a oznaczamy $|a|$.

Własność: Własności wartości bezwzględnej

Zauważmy, że z definicji wartości bezwzględnej wynikają jej własności:

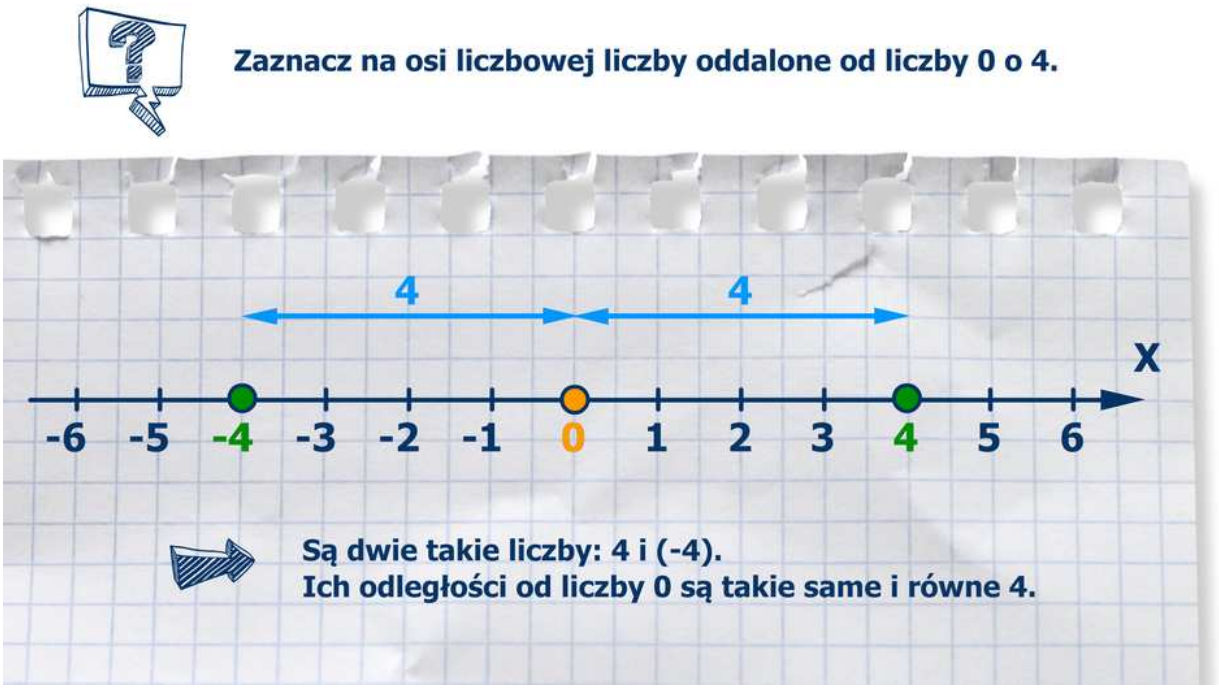
- wartość bezwzględna liczby jest dodatnia lub równa 0, czyli

$|x| \geq 0$, dla dowolnej liczby rzeczywistej x,

- jeśli $|x| = 0$, to $x = 0$,
- wartości bezwzględne liczb przeciwnych są równe, czyli

$|x| = |-x|$ dla dowolnej liczby rzeczywistej x.

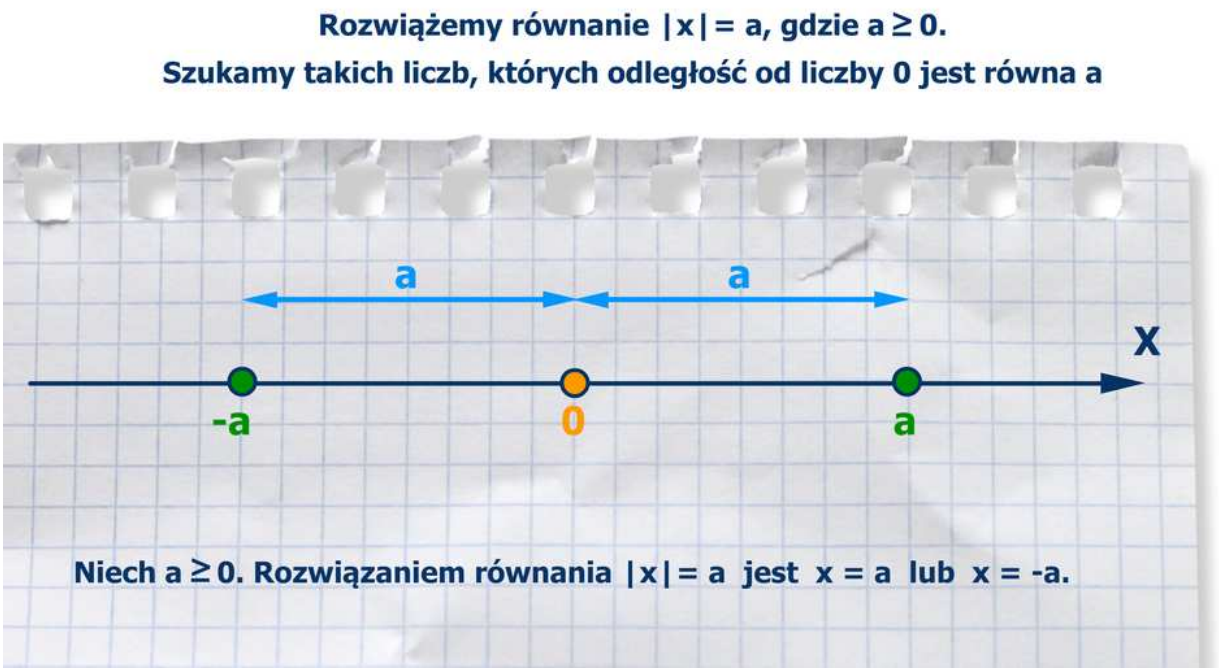
Przykład 1



Film dostępny na portalu epodreczniki.pl

Animacja przedstawia oś liczbową z zaznaczonymi punktami od -6 do 6. Należy zaznaczyć liczby oddalone od liczby 0 o 4. Są dwie takie liczby: 4 i -4. Ich odległości od liczby 0 są takie same i wynoszą 4.

Przykład 2



Film dostępny na portalu epodreczniki.pl

Animacja pokazuje rozwiązanie równania: wartość bezwzględna z liczby x =a, gdzie a większe lub równe 0. Szukamy takich liczb, których odległość od liczby 0 jest równa a. Na osi zaznaczona odległość liczby a od liczby 0, równa a oraz odległość liczby –a od liczby 0, równa a. Zapis: Niech a większe lub równe 0. Rozwiązaniem równania wartość bezwzględna z liczby x =a jest x =a lub x =–a.

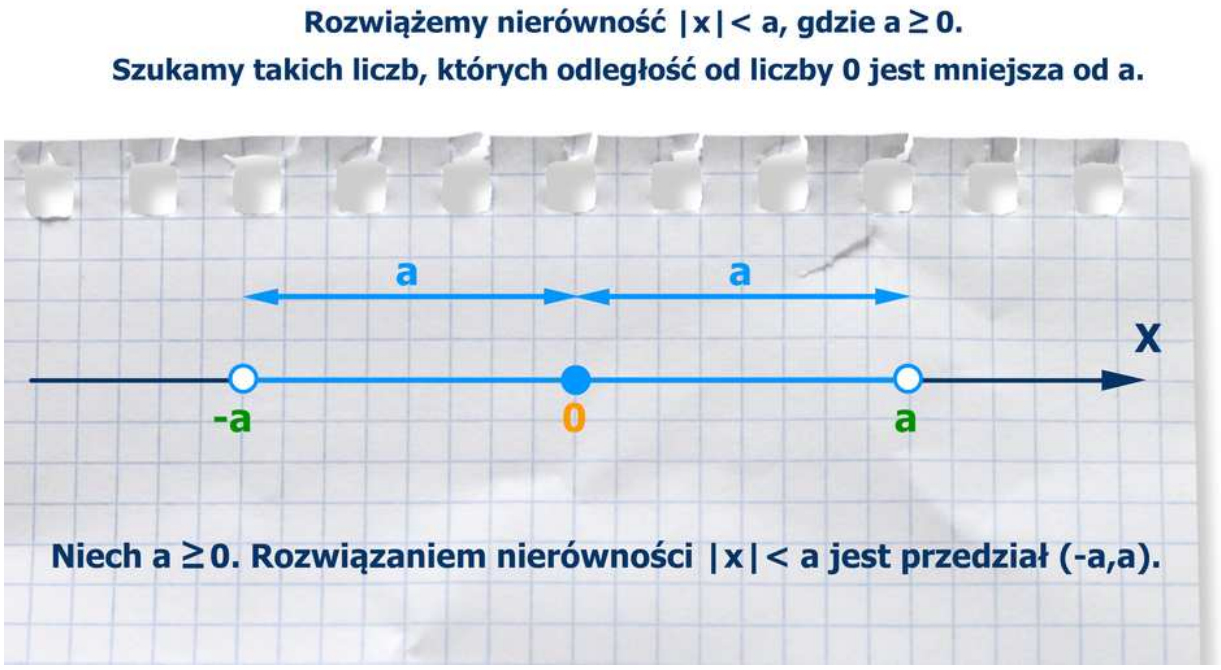
Ćwiczenie 1

Zaznacz na osi liczbowej liczby spełniające równanie.

a. $|x| = 6$

b. $|x| = \sqrt{5}$

c. $|x| = \sqrt{29} - 1$



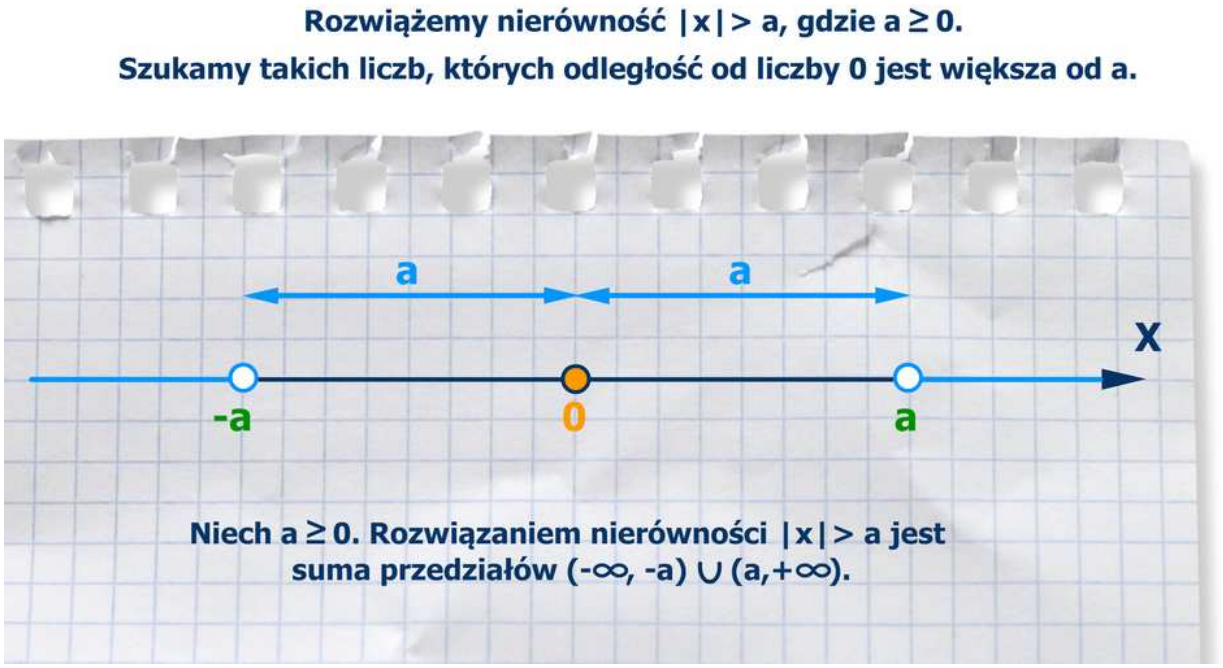
Film dostępny na portalu epodreczniki.pl

Animacja pokazuje na osi liczbowej rozwiązanie nierówności: wartość bezwzględna z liczby x <a, gdzie a większe lub równe 0. Szukamy takich liczb, których odległość od liczby 0 jest mniejsza od a. Na osi zaznaczona odległość liczby a od liczby 0, równa a oraz odległość liczby –a od liczby 0, równa a. Zapis: Niech a większe lub równe 0. Rozwiązaniem nierówności wartość bezwzględna z liczby x <a jest przedział (–a, a).

Przykład 3

Film dostępny na portalu epodreczniki.pl

Animacja przedstawia oś liczbową z zaznaczonymi punktami od -6 do 6. Należy znaleźć na osi liczbowej wszystkie liczby, których odległość od liczby 0 jest mniejsza niż 4. W tym celu na osi liczbowej zaznaczamy odległości od liczby 0 liczb -4 i 4, równe 4. Liczby, których odległość od 0 jest mniejsza niż 4 należą do przedziału(-4, 4). Możemy zatem powiedzieć, że przedział (-4, 4) zawiera liczby, które spełniają nierówność wartość bezwzględna z liczby x <4.



Film dostępny na portalu epodreczniki.pl

Animacja pokazuje na osi liczbowej rozwiązanie nierówności: wartość bezwzględna z liczby x >a, gdzie a większe lub równe 0. Szukamy takich liczb, których odległość od liczby 0 jest większa od a. Na osi zaznaczona odległość liczby a od liczby 0, równa a oraz odległość liczby –a od liczby 0, równa a. Zapis: Niech a większe lub równe 0. Rozwiązaniem nierówności wartość bezwzględna z liczby x > a jest suma przedziałów (minus nieskończoność, -a) i (a, plus nieskończoność).

Przykład 4

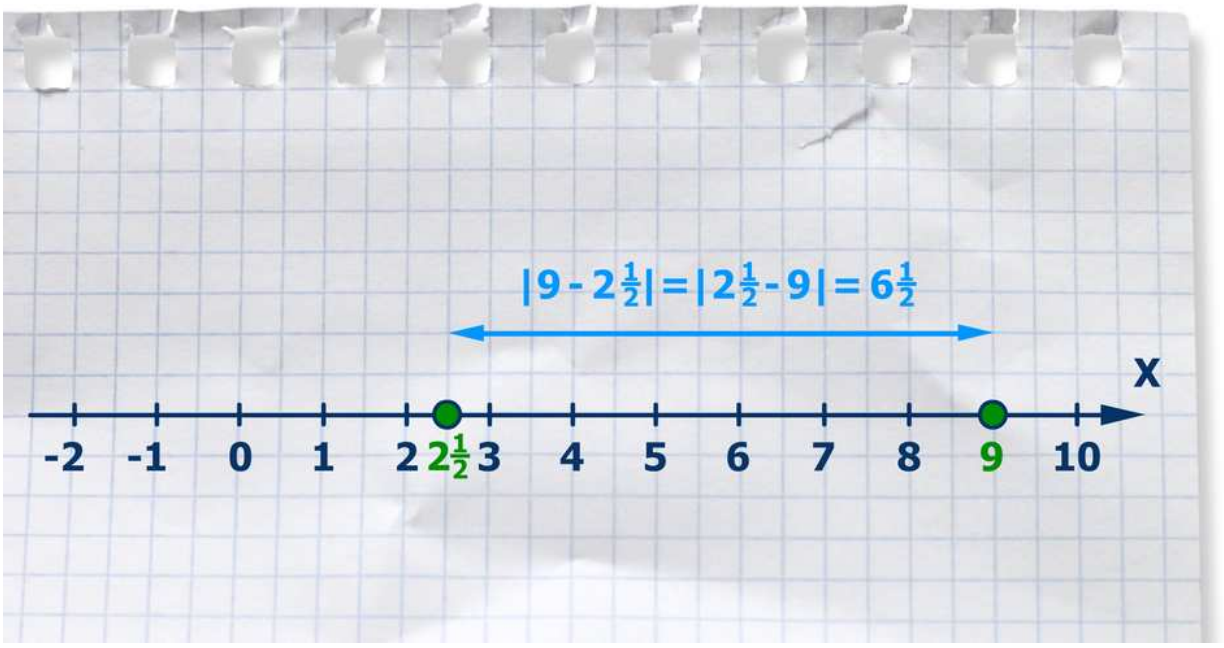
Film dostępny na portalu epodreczniki.pl

Animacja przedstawia oś liczbową z zaznaczonymi punktami od -6 do 6. Należy znaleźć na osi liczbowej wszystkie liczby, których odległość od liczby 0 jest większa niż 4. W tym celu na osi liczbowej zaznaczamy odległości od liczby 0 liczb -4 i 4, równe 4. Liczby, których odległość od 0 jest większa niż 4 należą do sumy przedziałów (minus nieskończoność, -4) i (4, plus nieskończoność). Możemy zatem powiedzieć, że zbiór przedziałów (minus nieskończoność, -4) i (4, plus nieskończoność) zawiera liczby, które spełniają nierówność wartość bezwzględna z liczby x >4.

Wartość bezwzględna liczby jest przydatna do definiowania odległości miedzy liczbami na osi liczbowej.

Przykład 5

Oblicz odległość na osi liczbowej liczb 2,5 i 9.



Film dostępny na portalu epodreczniki.pl

Animacja przedstawia zaznaczoną na osi liczbowej odległość między liczbami 9 oraz dwa i jedna druga. Zapis: wartość bezwzględna z liczby (9 – dwa i jedna druga) = wartość bezwzględna z liczby (dwa i jedna druga -9) = sześć i jedna druga.

Odległość między tymi liczbami obliczyliśmy, odejmując mniejszą z nich od większej, czyli

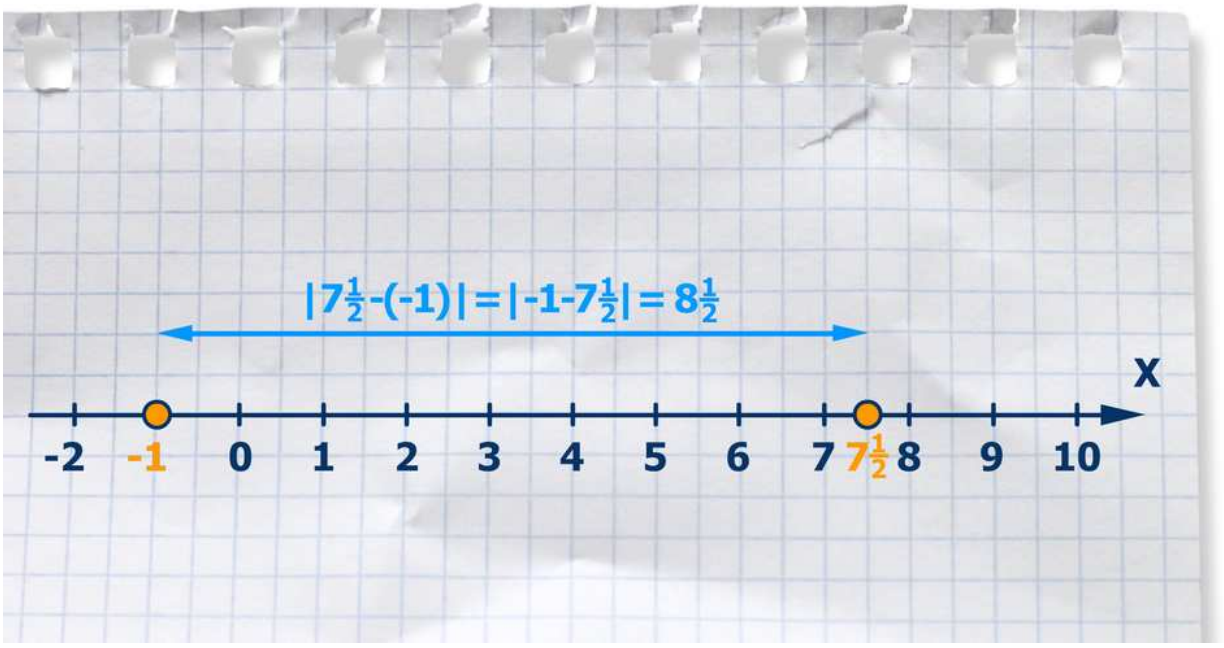
$$9 - 2{,}5 = 6{,}5.$$

Odległość jest zawsze liczbą nieujemną. Ponieważ nie zawsze możemy łatwo stwierdzić, która z danych liczb jest większa, a która mniejsza, wykorzystamy wartość bezwzględną.

$$|9 - 2{,}5| = |2{,}5 - 9| = 6{,}5.$$

Przykład 6

Oblicz odległość na osi liczbowej liczb -1 i $7{,}5$.



Film dostępny na portalu epodreczniki.pl

Animacja przedstawia zaznaczoną na osi liczbowej odległość między liczbami -1 oraz siedem i jedna druga. Zapis: wartość bezwzględna z liczby [siedem i jedna druga -(-1)] = wartość bezwzględna z liczby (-1, siedem i jedna druga) = osiem i jedna druga.

Definicja: Odległość liczb na osi liczbowej

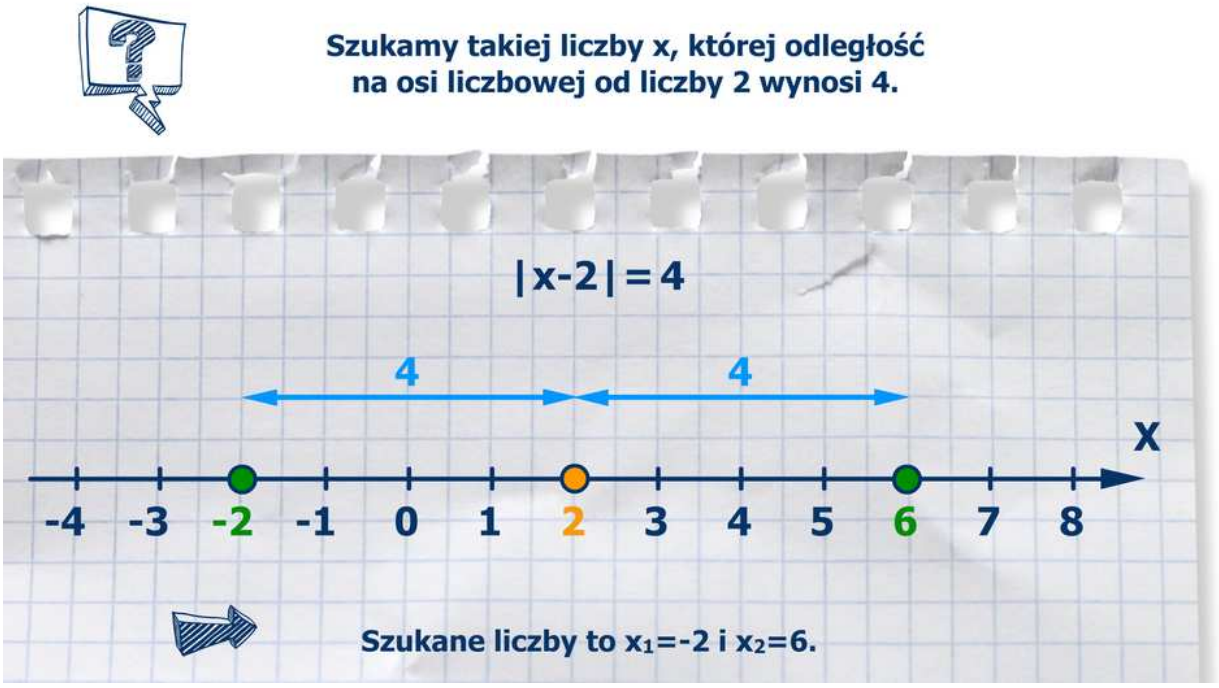
- Odległość liczb a i b na osi liczbowej jest równa wartości bezwzględnej ich różnicy $|a-b|$.
- Zapis $|x-5|=3$ możemy czytać następująco: odległość liczby x od liczby 5 na osi liczbowej jest równa 3.

Przykład 7

Zaznacz na osi liczbowej liczby, które spełniają równanie

$$|x-2|=4.$$

Aby rozwiązać równanie, należy znaleźć takie liczby x, których odległość na osi liczbowej od 2 jest równa 4.



Film dostępny na portalu epodreczniki.pl

Animacja przedstawia na osi liczbowej rozwiązanie równania: wartość bezwzględna z liczby x -2 =4. Szukamy takiej liczby x, której odległość na osi liczbowej od liczby 2 wynosi 4. W tym celu zaznaczamy na osi punkt o współrzędnej 2. Od liczby 2 zaznaczamy odległość 4 do liczb -2 i 6. Szukane liczby to x z indeksem dolnym jeden =-2 i x z indeksem dolnym dwa =6.

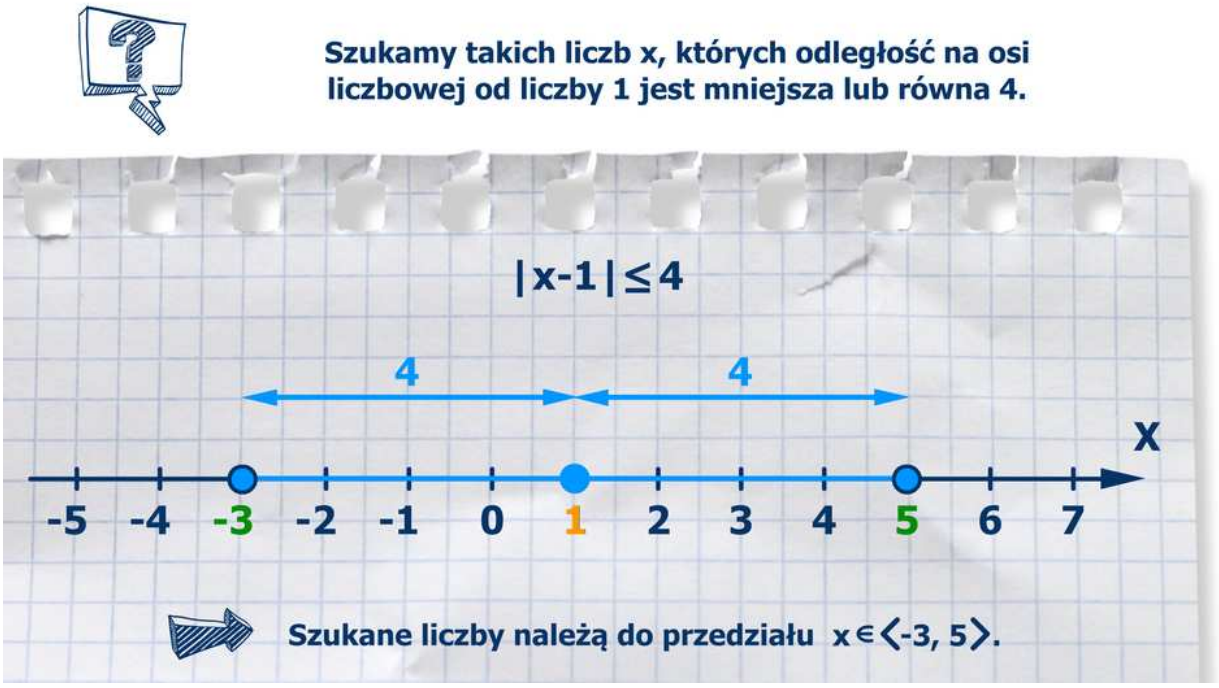
Korzystając z interpretacji geometrycznej nierówności, zauważamy, że w odległości 4 od liczby 2 znajdują się liczby -2 i 6. Są to liczby spełniające równanie.

$$|x-2|=4.$$

Przykład 8

Wyznacz liczby, które są rozwiązaniem nierówności

$$|x-1|\leq 4.$$



Film dostępny na portalu epodreczniki.pl

Animacja przedstawia na osi liczbowej rozwiązanie nierówności: wartość bezwzględna z liczby (x -1) mniejsza lub równa 4. Szukamy takich liczb x, której odległość na osi liczbowej od liczby 1 jest mniejsza lub równa 4. W tym celu zaznaczamy na osi punkt o współrzędnej 1. Od liczby 1 zaznaczamy odległość 4 do liczb -3 i 5. Szukane liczby należą do przedziału <-3, 5>.

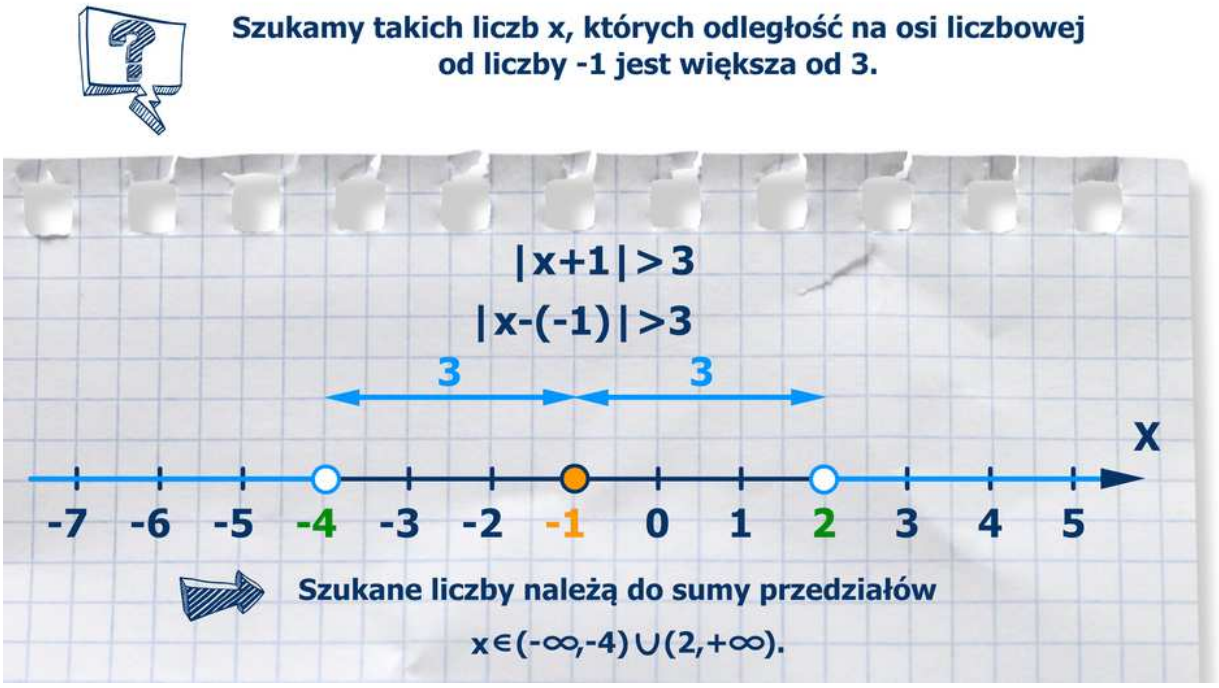
Korzystając z interpretacji geometrycznej nierówności, zauważamy, że nierówność $|x-1| \leq 4$ spełniają liczby należące do przedziału $\langle -3, 5 \rangle$.

Przykład 9

Wyznacz liczby, które są rozwiązaniem nierówności

$$|x+1| > 3.$$

Jeśli nierówność $|x+1| > 3$ zapiszemy jako $|x-(-1)| > 3$, to będzie można ją odczytać: odległość liczby x od liczby (-1) jest większa od 3 .
Zaznaczymy liczby spełniające nierówność na osi liczbowej.



Film dostępny na portalu epodreczniki.pl

Animacja przedstawia na osi liczbowej rozwiązanie nierówności: wartość bezwzględna z liczby (x +1) >3. Wartość bezwzględna z liczby [x –(-1)] >3. Szukamy takich liczb x, której odległość na osi liczbowej od liczby 1 jest większa od 3. W tym celu zaznaczamy na osi punkt o współrzędnej -1. Od liczby -1 zaznaczamy odległość 3 do liczb -4 i 2. Szukane liczby należą do sumy przedziałów (minus nieskończoność, -4) i (2, plus nieskończoność).

Nierówność $|x+1|>3$ spełniają wszystkie liczby należące do sumy przedziałów $(-\infty,-4)\cup(2,\infty)$.

Ćwiczenie 2

Połącz w pary nierówności z odpowiednimi opisami słownymi.

$\|x-7\|>2$	odległość liczby x od liczby (-2) jest nie większa niż 7
$\|x-2\|\leq 7$	odległość liczby x od liczby 7 jest nie większa niż 2
$\|x+7\|\leq 2$	odległość liczby x od liczby (-7) jest mniejsza lub równa 2
$\|x+7\|>2$	odległość liczby x od liczby (-7) jest większa od 2
$\|x+2\|\leq 7$	odległość liczby x od liczby 7 jest większa od 2
$\|x-7\|\leq 2$	odległość liczby x od liczby 2 jest mniejsza lub równa 7

Ćwiczenie 3

Rozwiązaniem nierówności $|x|<3$ jest zbiór

- ◯ $(-\infty,-3)\cup(3,+\infty)$
- ◯ $(-\infty,\ -3\rangle\cup\langle 3,\ +\infty)$
- ◯ $\langle -3{,}3\rangle$
- ◯ $(-3{,}3)$

Ćwiczenie 4

Liczby spełniające równanie $|x-5|=4$ to

- -1 oraz -9
- 1 oraz 9
- -4 oraz 4
- -5 oraz 5

Ćwiczenie 5

Rozwiązaniem nierówności $|x+4| \leq 6$ jest przedział

- $(-10,2)$
- $(-2,10)$
- $\langle -10,2 \rangle$
- $\langle -2,10 \rangle$

Ćwiczenie 6

Przeciągnij i upuść.

Przedział (-3,5) jest rozwiązaniem nierówności [ ].

$|x-3|<5$ $|x+3|<5$ $|x+1|<4$ $|x-1|<4$

Ćwiczenie 7

Liczba $\sqrt{1\frac{5}{4}}$ należy do przedziału

- [ ] $\left(\frac{5}{4}, \frac{3}{2}\right\rangle$
- [ ] $\left(\frac{6}{7}, \frac{11}{10}\right)$
- [ ] $\left(\frac{3}{5}, \frac{5}{3}\right)$
- [ ] $\left\langle\frac{2}{3}, \frac{7}{6}\right\rangle$

Ćwiczenie 8

Równanie $-2x + 4 = 1$ spełnia liczba należąca do przedziału

- ( ) $\left\langle-\frac{3}{2}, -1\right\rangle$
- ( ) $\left\langle 1, \frac{3}{2}\right\rangle$
- ( ) $\left(-\frac{3}{2}, -1\right)$
- ( ) $\left(1, \frac{3}{2}\right)$

Ćwiczenie 9

Liczba $x = \left(\frac{1}{3}\right)^{-2}$ spełnia warunek

- $2x - 3 \geq x + 7$
- $2x - 3 > x + 7$
- $2x - 3 > x + 6$
- $2x - 3 \geq x + 6$

Ćwiczenie 10

Rozwiązaniem nierówności $(x + 1)^2 \geq x^2$ jest przedział

- $\left(-\infty, \frac{1}{2}\right\rangle$
- $\left\langle \frac{1}{2}, \infty\right)$
- $\left\langle -\frac{1}{2}, \infty\right)$
- $\left(-\infty, -\frac{1}{2}\right\rangle$

Ćwiczenie 11

Liczba $5 - \sqrt{5}$ należy do przedziału

- $(1,2)$
- $(0,1)$
- $(2,3)$
- $(-1,0)$

Ćwiczenie 12

Liczby należące jednocześnie do przedziałów $(-5,\ 3\rangle$ i $(-1,5)$ przedstawione są na rysunku.

Ćwiczenie 13

Ile liczb całkowitych należy do przedziału $(-3,\ 2\rangle$?

- 5
- 3
- 6
- 4

Ćwiczenie 14

Dane są liczby $a = 3 \bullet 2^{\frac{1}{2}} + \left(\frac{1}{4}\right)^{-2} \bullet \left(\frac{1}{2}\right)^{3}$ oraz $b = 1,(6) - 3\sqrt{2}$. Liczba $a + b$ należy do przedziału

- $\left(4,\ 4\frac{1}{2}\right)$
- $\left(3,\ 3\frac{1}{2}\right)$
- $\left(4\frac{1}{2}, 5\right)$
- $\left(3\frac{1}{2}, 4\right)$

Ćwiczenie 15

Wskaż nierówność, którą spełniają liczby należące do przedziału zaznaczonego na rysunku.

- $|x+3| \leq 6$
- $|x+6| \leq 3$
- $|x-3| \leq 6$
- $|x-6| \leq 3$

Ćwiczenie 16

Które zdanie jest prawdziwe?

- Liczba $\sqrt{7}-3$ spełnia nierówność $|x+2|<1$.
- Liczba $\sqrt{8}+4$ spełnia nierówność $|x-5|>2$.
- Liczba $2+\sqrt{5}$ spełnia nierówność $|x-1| \geq 3$.
- Liczba $1-\sqrt{3}$ spełnia nierówność $|x|>1$.

Ćwiczenie 17

Rozwiąż nierówności.

a. $-4x-6 \leq 0$

b. $-\frac{4}{5}x+3 \leq 4$

c. $7(x-6) > -3x+5$

d. $3\left(x+\frac{1}{6}\right) < \frac{1}{3}x-5$

e. $\frac{x+7}{4} < \frac{2x-3}{6}$

f. $\frac{3x-4}{3} \geq \frac{2x-3}{5}+x$

Ćwiczenie 18

Rozwiąż nierówności.

a. $2\left(-\sqrt{3}x-6\right) \leq 3\sqrt{3}x+4$

b. $\sqrt{5}x-6 > 7-2\sqrt{5}x$

c. $\sqrt{2}x+6 < 7+\sqrt{8}x$

d. $\sqrt{6}x+4 \leq 7+\sqrt{12}x$

e. $\sqrt{7}x-3 \leq 7+\sqrt{21}x$

f. $\frac{\sqrt{2}x+7}{4} < \frac{2\sqrt{3}x-3}{6}$

Ćwiczenie 19

Rozwiąż nierówności.

a. $4(x+3)^2 - 4(x+2)(x-2) < 5$

b. $(x+2)^2 > x^2 + 4$

c. $(2x+3)^2 + (1-2x)(1+2x) < 2x - 4$

d. $9\left(x + \frac{1}{6}\right)^2 < \frac{1}{3}x - 5 + \left(3x - \frac{1}{6}\right)^2$

e. $\left(\frac{x}{\sqrt{3}} - 2\right)\left(\frac{x}{\sqrt{3}} + 2\right) < \frac{(x-2)^2}{3}$

f. $\frac{(3x-4)^2}{3} \geq 3(x-3)^2 + x$

Ćwiczenie 20

Zapisz przedział, do którego należą wszystkie liczby spełniające warunek

a. $x \geq \sqrt{13}$

b. $x < 2\sqrt{2}$

c. $x \geq 1 + \sqrt{3}$

d. $-7 \leq x \leq 8$

e. $3 < x \leq \sqrt{7}$

f. $x \leq -3$ lub $x > 5$

g. $x \geq -4$ i $x < 10$

Ćwiczenie 21

Wypisz wszystkie liczby całkowite

a. należące do przedziału$(-\infty, 3)$ i do przedziału $(-2,\ 1\rangle$

b. należące do przedziału$(-4,\ 8\rangle$ i do przedziału $\langle 0,\ 6)$

c. należące do przedziału$(-5, -3)$ i do przedziału $(-4, \infty)$

d. należące do przedziału$(-5,\ -3\rangle$

Ćwiczenie 22

Zapisz za pomocą układu nierówności zbiór wszystkich liczb, które należą do przedziału

a. $(42,43)$

b. $\langle -126, -116\rangle$

c. $\left(-2^{15},\ 2^{10}\right\rangle$

d. $\left\langle 5-\sqrt{6},\ 5-\sqrt{2}\right\rangle$

e. $\left(-\infty, 5^{18}\right)$

f. $\left\langle -\sqrt{7},\ \infty\right)$

g. $(-\infty, 5) \cup \langle 9,\ \infty)$

Ćwiczenie 23

Rozwiąż równanie.

a. $|x-10|=6$

b. $|x+55|=11$

c. $\left|x-\frac{1}{2}\right|=\frac{1}{3}$

d. $\left|x+5\frac{3}{4}\right|=3\frac{1}{4}$

e. $2|x-4|=7$

f. $|3x-5|=9$

g. $|4-x|=6$

h. $|5+x|=\frac{7}{8}$

i. $\left|x-\sqrt{2}\right|=\sqrt{3}$

Ćwiczenie 24

Wyznacz liczby spełniające równanie.

a. $|x|=6{,}25 \bullet 10^{15}$

b. $\left|x-2^{10}\right|=2^9$

c. $\left|x+3{,}2 \bullet 10^{-15}\right|=4 \bullet 10^{-15}$

d. $|x-2,(32)|=2$

e. $|x+4|=2,(21)$

Ćwiczenie 25

Zaznacz na osi liczbowej i zapisz w postaci przedziału wszystkie liczby spełniające podany warunek.

a. $-3 < x < 3$ i $x \geq \frac{3}{2}$ i $x < \sqrt{3}$

b. $|x| > 5$ i $-7 \leq x \leq 10$

Zadania generatorowe

Ćwiczenie 26

Zadania

Ćwiczenie 1

Rozwiązaniem nierówności $|x| < 3$ jest przedział

- ◯ $\langle -3,3 \rangle$
- ◯ $(-\infty, -3) \cup (3, +\infty)$
- ◯ $(-\infty, -3\rangle \cup \langle 3, +\infty)$
- ◯ $(-3,3)$

Ćwiczenie 2

Liczbami spełniające równanie $|x - 5| = 4$ są

- ◯ -1 oraz -9
- ◯ -4 oraz 4
- ◯ -5 oraz 5
- ◯ 1 oraz 9

Ćwiczenie 3

Rozwiązaniem nierówności $|x+4| \leq 6$ jest przedział

- [ ] $(-10,2)$
- [ ] $\langle -10,2 \rangle$
- [ ] $\langle -2,10 \rangle$
- [ ] $(-2,10)$

Ćwiczenie 4

Przeciągnij i upuść.

Przedział (-3,5) jest rozwiązaniem nierówności [ ].

$|x+3|<5$ $|x-3|<5$ $|x-1|<4$ $|x+1|<4$

Ćwiczenie 5

Liczba $\sqrt{1\frac{5}{4}}$ należy do przedziału

- ( ) $\left(\frac{5}{4}, \frac{3}{2}\right)$
- ( ) $\left\langle \frac{2}{3}, \frac{7}{6} \right\rangle$
- ( ) $\left(\frac{6}{7}, \frac{11}{10}\right)$
- ( ) $\left(\frac{3}{5}, \frac{5}{3}\right)$

Ćwiczenie 6

Równanie $-2x + 4 = 1$ spełnia liczba należąca do przedziału

- $\langle -\frac{3}{2}, -1 \rangle$
- $\langle 1, \frac{3}{2} \rangle$
- $\left(-\frac{3}{2}, -1\right)$
- $\left(1, \frac{3}{2}\right)$

Ćwiczenie 7

Liczba $x = \left(\frac{1}{3}\right)^{-2}$ spełnia warunek

- $2x - 3 \geq x + 6$
- $2x - 3 > x + 7$
- $2x - 3 \geq x + 7$
- $2x - 3 > x + 6$

Ćwiczenie 8

Rozwiązaniem nierówności $(x+1)^2 \geq x^2$ jest przedział

- $\left(-\infty, \frac{1}{2}\right\rangle$
- $\left\langle \frac{1}{2}, \infty\right)$
- $\left\langle -\frac{1}{2}, \infty\right)$
- $\left(-\infty, -\frac{1}{2}\right\rangle$

Ćwiczenie 9

Liczba $5-\sqrt{5}$ należy do przedziału

- $(1,2)$
- $(0,1)$
- $(2,3)$
- $(-1,0)$

Ćwiczenie 10

Liczby należące jednocześnie do przedziałów $(-5,\ 3\rangle$ i $(-1,5)$ przestawione są na rysunku

Ćwiczenie 11

Ile liczb całkowitych należy do przedziału $(-3,\ 2\rangle$?

- ◯ 5
- ◯ 6
- ◯ 4
- ◯ 3

Ćwiczenie 12

Dane są liczby $a = 3 \bullet 2^{\frac{1}{2}} + \left(\frac{1}{4}\right)^{-2} \bullet \left(\frac{1}{2}\right)^{3}$ oraz $b = 1,(6) - 3\sqrt{2}$. Liczba $a + b$ należy do przedziału:

- ◯ $\left(3\frac{1}{2}, 4\right)$
- ◯ $\left(4\frac{1}{2}, 5\right)$
- ◯ $\left(3,\ 3\frac{1}{2}\right)$
- ◯ $\left(4,\ 4\frac{1}{2}\right)$

Ćwiczenie 13

Rozwiąż nierówności.

a. $2\left(-\sqrt{3}x-6\right) \leq 3\sqrt{3}x+4$

b. $\sqrt{5}x-6>7-2\sqrt{5}x$

c. $\sqrt{2}x+6<7+\sqrt{8}x$

d. $\sqrt{6}x+4 \leq 7+\sqrt{12}x$

e. $\sqrt{7}x-3 \leq 7+\sqrt{21}x$

f. $\frac{\sqrt{2}x+7}{4}<\frac{2\sqrt{3}x-3}{6}$

Ćwiczenie 14

Rozwiąż nierówności.

a. $4(x+3)^2-4(x+2)(x-2)<5$

b. $(x+2)^2>x^2+4$

c. $(2x+3)^2+(1-2x)(1+2x)<2x-4$

d. $9\left(x+\frac{1}{6}\right)^2<\frac{1}{3}x-5+\left(3x-\frac{1}{6}\right)^2$

e. $\left(\frac{x}{\sqrt{3}}-2\right)\left(\frac{x}{\sqrt{3}}+2\right)<\frac{(x-2)^2}{3}$

f. $\frac{(3x-4)^2}{3} \geq 3(x-3)^2+x$

Ćwiczenie 15

Zapisz przedział, do którego należą wszystkie liczby spełniające warunek

a. $x \geq \sqrt{13}$

b. $x < 2\sqrt{2}$

c. $x \geq 1 + \sqrt{3}$

d. $-7 \leq x \leq 8$

e. $3 < x \leq \sqrt{7}$

f. $x \leq -3$ lub $x > 5$

g. $x \geq -4$ i $x < 10$

Ćwiczenie 16

Wypisz wszystkie liczby całkowite

a. należące do przedziału$(-\infty, 3)$ lub do przedziału $(-2,\ 1\rangle$,

b. należące do przedziału$(-4,\ 8\rangle$ i do przedziału $\langle 0,\ 6)$,

c. należące do przedziału$(-5, -3)$ i do przedziału $(-4, \infty)$,

d. należące do przedziału$(-5,\ -3\rangle$ i do przedziału.

Ćwiczenie 17

Zapisz za pomocą układu nierówności zbiór wszystkich liczb, które należą do przedziału

a. $(42,43)$

b. $\langle -126, -116 \rangle$

c. $\left(-2^{15},\, 2^{10}\right\rangle$

d. $\left\langle 5-\sqrt{6},\, 5-\sqrt{2}\right\rangle$

e. $\left(-\infty, 5^{18}\right)$

f. $\left\langle -\sqrt{7},\, +\infty\right)$

g. $(-\infty, 5) \cup \langle 9,\, +\infty)$

Ćwiczenie 18

Rozwiąż równanie.

a. $|x-10|=6$

b. $|x+55|=11$

c. $\left|x-\frac{1}{2}\right|=\frac{1}{3}$

d. $\left|x+5\frac{3}{4}\right|=3\frac{1}{4}$

e. $2|x-4|=7$

f. $|3x-5|=9$

g. $|4-x|=6$

h. $|5+x|=\frac{7}{8}$

i. $\left|x-\sqrt{2}\right|=\sqrt{3}$

Ćwiczenie 19

Wyznacz liczby spełniające równanie

a. $|x|=6{,}25 \bullet 10^{15}$

b. $\left|x-2^{10}\right|=2^9$

c. $\left|x+3{,}2 \bullet 10^{-15}\right|=4 \bullet 10^{-15}$

d. $|x-2,(32)|=2$

e. $|x+4|=2,(21)$

Ćwiczenie 20

Zaznacz na osi liczbowej i zapisz w postaci przedziału wszystkie liczby spełniające podany układ warunków

a. $-3 < x < 3$ i $x \geq \frac{3}{2}$ i $x < \sqrt{3}$

b. $|x| > 5$ i $-7 \leq x \leq 10$

Ćwiczenie 21

Wykaż, że

a. $12^{\frac{1}{2}} + 27^{\frac{1}{2}} = 75^{\frac{1}{2}}$

b. $8^{\frac{1}{2}} + 72^{\frac{1}{2}} = 128^{\frac{1}{2}}$

c. $12^{\frac{1}{2}} + 48^{\frac{1}{2}} = 108^{\frac{1}{2}}$

d. $32^{\frac{1}{3}} + 108^{\frac{1}{3}} = 500^{\frac{1}{3}}$

e. $3^{\frac{5}{3}} + 3^{\frac{8}{3}} = 4 \bullet 3^{\frac{5}{3}}$

Wskazówka: zamień potęgi o wykładnikach wymiernych na pierwiastki.

Ćwiczenie 22

Wykaż, że prawdziwa jest równość.

a. $\left(4 + 12^{\frac{1}{2}}\right)^{\frac{1}{2}} - \left(4 - 12^{\frac{1}{2}}\right)^{\frac{1}{2}} = 2$

b. $\left(14 + 6 \bullet 5^{\frac{1}{2}}\right)^{\frac{1}{2}} + \left(14 - 6 \bullet 5^{\frac{1}{2}}\right)^{\frac{1}{2}} = 6$

Wskazówka: sprawdź, czy kwadraty liczb po obu stronach równości są sobie równe.

Ćwiczenie 23

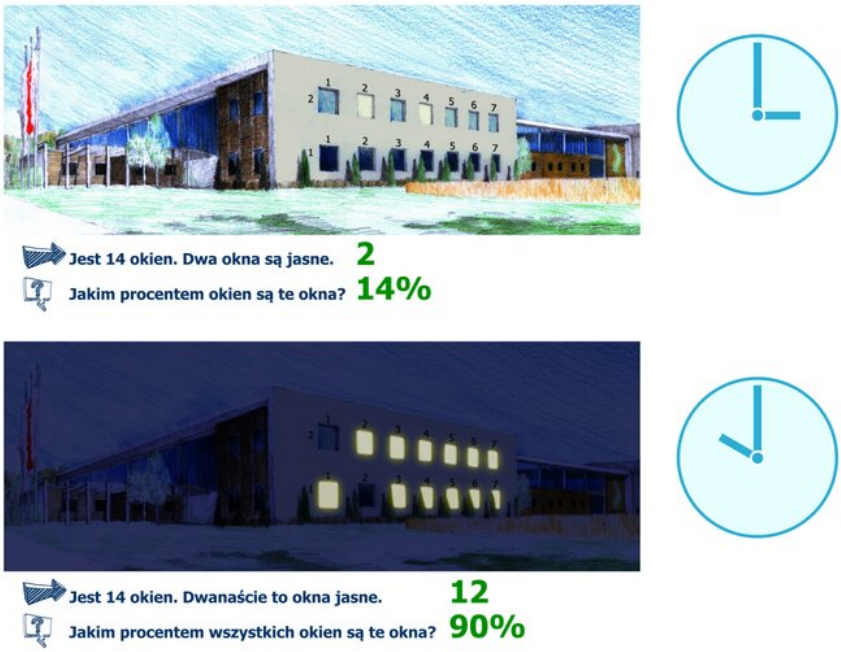
Wykaż, że $\left(6+20^{\frac{1}{2}}\right)^{\frac{1}{2}}-\left(6-20^{\frac{1}{2}}\right)^{\frac{1}{2}}$ jest liczbą całkowitą.

Wskazówka: oblicz kwadrat tej liczby.

Przybliżenia i zaokrąglenia liczb

W praktycznych zastosowaniach matematyki bardzo często zachodzi konieczność zaokrąglania wartości liczbowych lub posługiwania się wartościami przybliżonymi.

Przykład 1



Film dostępny na portalu epodreczniki.pl

Animacja

Przykład 2

Cena netto zestawu akcesoriów rowerowych jest równa $155{,}60$ zł. Aby otrzymać cenę brutto, musimy doliczyć jeszcze $23\,\%$ podatku VAT. Zatem cena brutto jest równa

$$155{,}6 \text{ zł} \bullet 1{,}23 = 191{,}388 \text{ zł}.$$

Jest to wartość dokładna. Ponieważ najmniejszą jednostką monetarną w Polsce jest 1 grosz, to obliczoną cenę musimy zaokrąglić do drugiego miejsca po przecinku.

$$191{,}388 \text{ zł} \approx 191{,}39 \text{ zł}.$$

Przykład 3

W rozliczeniach podatku PIT stosuje się zasadę, że ostateczna kwota należnego podatku zaokrąglana jest do pełnych złotych.

Jeśli zatem obliczony podatek jest równy $8562{,}15$ zł, to po prawidłowym zaokrągleniu będzie równy 8562 zł, natomiast jeśli obliczony podatek jest równy $8562{,}78$ zł, to po zaokrągleniu będzie równy 8563 zł.

Reguła: zaokrąglania liczb

Jeżeli liczbę dodatnią zaokrąglamy do ustalonego rzędu wielkości, np. do tysięcy, setek, dziesiątek, jedności, części dziesiątych, części setnych itd., to wszystkie cyfry stojące po prawej stronie ostatniej (licząc od strony lewej) cyfry znaczącej zastępujemy zerami.
Z cyframi znaczącymi postępujemy następująco:

- gdy pierwsza cyfra z prawej strony ostatniej cyfry znaczącej jest mniejsza od 5, to wszystkie cyfry znaczące pozostawiamy bez zmian,
- gdy pierwsza cyfra z prawej strony ostatniej cyfry znaczącej jest co najmniej równa 5, a ostatnia cyfra znacząca jest mniejsza od 9, to tę cyfrę zwiększamy o 1, a wszystkie poprzednie cyfry znaczące pozostawiamy bez zmian. Jeśli natomiast ostatnią cyfrą znaczącą jest 9, to zamiast niej piszemy cyfrę 0 i tę samą procedurę stosujemy do poprzednich cyfr znaczących.

Zastosowanie tej reguły pokażemy na kilku przykładach.

Przykład 4

- Liczbę $207\ 195\ 468$ zaokrąglimy do tysięcy. Cyfry znaczące tego zaokrąglenia to: $2,\ 0,\ 7,\ 1,\ 9{,}5$. Pierwsza cyfra stojąca po prawej stronie ostatniej cyfry znaczącej to 4 , a więc jest mniejsza od 5. Zatem wszystkie cyfry znaczące pozostawiamy bez zmian, a pozostałe zastępujemy zerami. Zatem zaokrągleniem liczby $207\ 195\ 468$ do tysięcy jest liczba $207\ 195\ 000$.

$$207195468 \approx 207195000$$

- Tę samą liczbę $207\ 195\ 468$ zaokrąglimy do setek tysięcy. Cyfry znaczące tego zaokrąglenia to: $2,\ 0,\ 7{,}1$. Pierwsza cyfra stojąca po prawej stronie ostatniej cyfry znaczącej to 9, ostatnia cyfra znacząca to 1, a więc jest mniejsza od 9. Zatem ostatnią cyfrę znaczącą zwiększamy o 1, pozostałe cyfry znaczące pozostawiamy bez zmian, cyfry nieznaczące zastępujemy zerami. Zatem zaokrągleniem liczby $207\ 195\ 468$ do setek tysięcy jest liczba $207\ 200\ 000$.

$$207195468 \approx 207200000$$

- Raz jeszcze zaokrąglimy liczbę $207\ 195\ 468$, tym razem do dziesiątek tysięcy. Cyfry znaczące tego zaokrąglenia to: $2,\ 0,\ 7,\ 1{,}9$. Pierwsza cyfra stojąca po prawej stronie ostatniej cyfry znaczącej to 5, ostatnia cyfra znacząca to 9. Zatem ostatnią cyfrę znaczącą zastępujemy cyfrą 0. Przedostatnią (jest ona równa 1, a więc mniejsza od 9) zwiększamy o 1, pozostałe cyfry znaczące pozostawiamy bez zmian. Cyfry

nieznaczące zastępujemy zerami. Zatem zaokrągleniem liczby $207\ 195\ 468$ do dziesiątek tysięcy jest liczba $207\ 200\ 000$.

$$207195468 \approx 207200000$$

- Zaokrąglimy liczbę $\sqrt{37}$ do części tysięcznych, czyli do trzeciego miejsca po przecinku. Rozwinięcie dziesiętne liczby$\sqrt{37}$ to $6{,}0827625\ldots$. Cyfry znaczące tego zaokrąglenia to: $6, 0, 8, 2$. Pierwsza cyfra stojąca po prawej stronie ostatniej cyfry znaczącej to 7, a ostatnia cyfra znacząca to 2, a więc mniejsza od 9. Zatem ostatnią cyfrę znaczącą zwiększamy o 1, pozostałe cyfry znaczące pozostawiamy bez zmian, cyfry nieznaczące zastępujemy zerami, których w tym przypadku możemy nie pisać. Zatem zaokrągleniem liczby $\sqrt{37}$ do części tysięcznych jest liczba $6{,}083$.

$$\sqrt{37} \approx 6{,}083$$

Przykład 5

Główny Urząd Statystyczny podaje, że w 2012 roku w Polsce mieszkało $38{,}54$ mln ludzi. Jest to oczywiście wielkość przybliżona, ponieważ niemożliwe jest podanie liczby ludności kraju z dokładnością do 1 osoby.
Jeśli zachodzi taka konieczność, możemy zaokrąglać duże liczby do zadanego rzędu.
Np. liczba $65\ 846\ 236$ może być zapisana z dokładnością do:

Dane

dziesiątek	65 846 240
setek	65 846 200
tysięcy	65 846 000
dziesiątek tysięcy	65 850 000
setek tysięcy	65 800 000
milionów	66 000 000

Ze względów praktycznych tak zaokrąglone liczby możemy zapisać w skrócie: 66 mln lub $65{,}8$ mln lub $65{,}85$ mln.

Ćwiczenie 1

Rozstrzygnij, które zdanie jest prawdziwe, a które fałszywe.

- [ ] Liczba $\frac{28}{13} = 2,153846153846154\ldots$ zaokrąglona do dwóch miejsc po przecinku jest równa $2{,}16$.
- [ ] Liczba $\frac{28}{13} = 2,153846153846154\ldots$ zaokrąglona do czterech miejsc po przecinku jest równa $2{,}1538$.
- [ ] Liczba $\frac{28}{13} = 2,153846153846154\ldots$ zaokrąglona do jednego miejsca po przecinku jest równa $2{,}2$.
- [ ] Liczba $\frac{28}{13} = 2,153846153846154\ldots$ zaokrąglona do trzech miejsc po przecinku jest równa $2{,}154$.

Ćwiczenie 2

Rozstrzygnij, które zdanie jest prawdziwe, a które fałszywe.

- [ ] Liczba $6\ 455$ zaokrąglona do setek jest równa $6{,}5$ tys.
- [ ] Liczba $74\ 899\ 654$ zaokrąglona do tysięcy jest równa $74\ 899\ 000$.
- [ ] Liczbę $56\ 836$ w zaokrągleniu do setek możemy zapisać jako $56\ 800$.

Definicja: Przybliżenie

Przybliżeniem liczby dodatniej a z ustaloną dokładnością $\mathrm{d} > 0$ jest każda liczba, która różni się od liczby a o nie więcej niż d.

Przykład 6

Bardzo często używanym w praktyce przybliżeniem liczby π z dokładnością do dwóch miejsc po przecinku jest liczba $3{,}14$. Jest to liczba mniejsza od π. Mówimy wtedy, że jest to przybliżenie z niedomiarem. Archimedes $(\mathrm{III}\ \mathrm{w}.\ p.\ n.\ e)$ w obliczeniach przyjmował, że stosunek długości okręgu do jego średnicy (a więc liczba π) jest równy $\frac{22}{7}$, czyli $3{,}142857142857\ldots$. Jest to liczba większa od π, a więc jest przybliżeniem liczby π z nadmiarem. Dokładność tego przybliżenia jest mniejsza od $0{,}01$ ale większa od $0{,}001$.

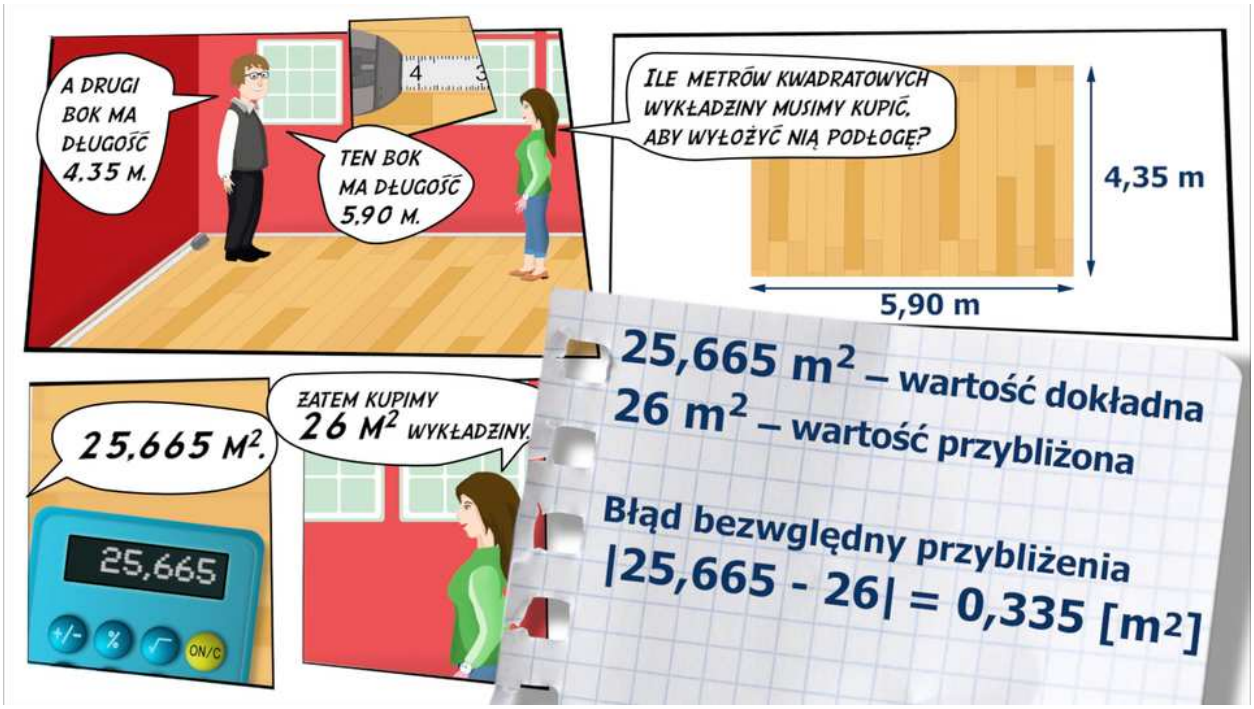
> Zwróć uwagę, że nie każde przybliżenie jest zaokrągleniem. Liczba $\frac{22}{7}$ jest przybliżeniem liczby π, ale nie jest jej zaokrągleniem.

Wartości przybliżonych należy używać rozważnie, w przeciwnym razie może to prowadzić do błędu.

> **Przykład 7**
>
> Sprawdź, czy liczba $\frac{11}{2-\sqrt{3}}$ jest większa od 41.
> W obliczeniach wykorzystamy liczbę $1{,}73$, a więc przybliżenie liczby $\sqrt{3}$ z dokładnością do drugiego miejsca po przecinku.
>
> $$\frac{11}{2-\sqrt{3}} \approx \frac{11}{2-1{,}73} = \frac{11}{0{,}27} = 40{,}740740\ldots$$
>
> Stąd można by wywnioskować, że liczba $\frac{11}{2-\sqrt{3}}$ jest mniejsza od 41. Wniosek ten jest jednak błędny.
> Wykażemy, że liczba $\frac{11}{2-\sqrt{3}}$ jest większa od 41. Usuwając niewymierność z mianownika, otrzymujemy
>
> $$\frac{11}{2-\sqrt{3}} = \frac{11\left(2+\sqrt{3}\right)}{\left(2-\sqrt{3}\right)\left(2+\sqrt{3}\right)} = \frac{11\left(2+\sqrt{3}\right)}{4-3} = 11\left(2+\sqrt{3}\right) = 22+11\sqrt{3}.$$
>
> Po odjęciu 22 od obu stron nierówności $22+11\sqrt{3} > 41$ otrzymujemy $11\sqrt{3} > 19$, co jest prawdą, gdyż
>
> $$11\sqrt{3} = \sqrt{121}\cdot\sqrt{3} = \sqrt{363},$$
>
> $$19 = \sqrt{361}.$$

Błąd bezwzględny, błąd względny

Przykład 1



Film dostępny na portalu epodreczniki.pl

Animacja

Należy pomalować lakierem podłogę w prostokątnym pokoju o wymiarach $5{,}9\ \text{m}$ i $4{,}35\ \text{m}$. Powierzchnia podłogi jest równa $5{,}9\ \text{m} \bullet 4{,}35\ \text{m} = 25{,}665\ m^2$. W celu oszacowania, ile lakieru należy kupić, możemy przyjąć, że powierzchnia podłogi jest równa $26\ m^2$. Pomylimy się wtedy o $0{,}335\ m^2$.
Jest to błąd bezwzględny tego przybliżenia.

Definicja: Błąd bezwzględny

Jeżeli liczba a_p jest przybliżeniem liczby a, to liczbę $|a - a_p|$ nazywamy błędem bezwzględnym tego przybliżenia.

- Błąd bezwzględny zawsze wyrażamy w takich samych jednostkach jak przybliżaną wielkość.
- Błąd bezwzględny jest zawsze liczbą nieujemną.

Przykład 2

Prostokątną podłogę balkonu zmierzono taśmą mierniczą z dokładnością do 1 cm. Określono, że podłoga ma wymiary 250 cm na 145 cm. Na tej podstawie obliczono, że pole powierzchni podłogi jest równe $250 \text{ cm} \bullet 145 \text{ cm} = 36250 \text{ cm}^2$. Jaki największy błąd bezwzględny mógł być popełniony?
Ponieważ pomiaru dokonano taśmą z podziałką centymetrową, zatem możliwy błąd popełniony przy pomiarze długości każdego z boków wynosi 1 cm (z nadmiarem lub z niedomiarem).

Dane

długość podłogi balkonu (250 cm)	szerokość podłogi balkonu (145 cm)	powierzchnia $(36250 \ cm^2)$	błąd bezwzględny
249 cm	144 cm	$36856 \ cm^2$	$\lvert 36250 - 36856 \rvert = 394 \ (\text{cm}^2)$
251 cm	146 cm	$36646 \ cm^2$	$\lvert 36250 - 36646 \rvert = 396 \ (\text{cm}^2)$

Zatem największy możliwy błąd bezwzględny jest równy 396 cm^2.

Przykład 3

Film dostępny na portalu epodreczniki.pl

Animacja

Prostokątna podłoga w sali gimnastycznej długości $24{,}1$ m i szerokości $10{,}65$ m wymaga wymiany parkietu. Dokładne pole powierzchni podłogi tej sali jest równe

$$24{,}1 \text{ m} \bullet 10{,}65 \text{ m} = 256{,}665\ m^2.$$

Jeśli przyjmiemy, że pole powierzchni jest równe $257\ m^2$, to popełniony przez nas błąd bezwzględny będzie równy $257 - 256{,}665 = 0{,}335\ m^2$, czyli dokładnie tyle samo, ile błąd bezwzględny obliczony w pierwszym przykładzie.

Błędy bezwzględne w obu przypadkach są równe, ale odnoszą się do różnych wielkości. Obliczmy, jaką częścią przybliżanej wielkości jest każdy z błędów:

- w przypadku pokoju: $\frac{0{,}335}{25{,}665} \approx 0{,}013053 \approx 1{,}3\,\%$,
- w przypadku sali gimnastycznej: $\frac{0{,}335}{256{,}665} \approx 0{,}0013053 \approx 0{,}13\,\%$.

Możemy więc powiedzieć, że w pewnym sensie błąd popełniony w pierwszej sytuacji jest 10 razy większy od błędu popełnionego w drugiej sytuacji.

Definicja: Błąd względny

Jeżeli liczba a_p jest przybliżeniem liczby a, to liczbę $\frac{|a-a_p|}{a}$ nazywamy błędem względnym tego przybliżenia.
Błąd względny jest wielkością, którą możemy wyrazić w procentach.

Przykład 4

Michał robi zakupy w supermarkecie. Oszacował, że za wybrane produkty będzie musiał zapłacić 250 zł. Po dokładnym policzeniu okazało się, że koszt zakupów wyniósł $317{,}78$ zł. Przyjmując, ze wartością dokładną jest faktyczny koszt zakupu, oblicz błąd względny oszacowania jakiego dokonał Michał.
Błąd bezwzględny jest równy

$$|250 - 317{,}78|\text{zł} = 67{,}78 \text{ zł}.$$

Błąd względny jest równy

$$\frac{67{,}78}{317{,}78} \approx 21{,}33\,\%.$$

Michał pomylił się o więcej niż $15\,\%$.

Zadania

Ćwiczenie 1

Zaokrąglenie liczby $\sqrt{23} = 4{,}79583152\ldots$ do drugiego miejsca po przecinku jest równe

- [ ] $4{,}7$
- [ ] $4{,}79$
- [ ] $4{,}80$
- [ ] $4{,}795$

Ćwiczenie 2

Liczbę $\frac{25}{14} = 1{,}7(857142)$ zaokrąglono do dwunastego miejsca po przecinku. Wskaż ostatnią cyfrę otrzymanego zaokrąglenia.

- [ ] 1
- [ ] 6
- [ ] 4
- [ ] 2

Ćwiczenie 3

Przyjmujemy, że pole kwadratu o boku długości $5{,}62\ \mathrm{cm}$ jest równe $32\ cm^2$. Błąd bezwzględny tego przybliżenia jest równy

- [ ] $0{,}3844\ cm^2$
- [ ] $0{,}4156\ cm^2$
- [ ] $0{,}5844\ cm^2$
- [ ] $0{,}0844\ cm^2$

Ćwiczenie 4

Mount Everest, najwyższy szczyt świata ma wysokość $8848\ \mathrm{m\ n.}\,p.\,m.$ Jeśli przyjmiemy, że Mount Everest ma wysokość $8{,}5\ \mathrm{km\ n.}\,p.\,m.$, to błąd względny przybliżenia jest

- [ ] większy od $0{,}04\%$, ale mniejszy od $0{,}4\%$
- [ ] mniejszy od $0{,}04\%$
- [ ] większy od 4%
- [ ] większy od $0{,}4\%$, ale mniejszy od 4%

Ćwiczenie 5

Liczba $x = \frac{38}{\sqrt{3}-1}$ spełnia nierówność

- [ ] $54 < x < 55$
- [ ] $53 < x < 54$
- [ ] $51 < x < 52$
- [ ] $52 < x < 53$

Ćwiczenie 6

Zaokrąglij liczbę do dwóch miejsc po przecinku.

a. $234{,}5622$

b. $32{,}779$

c. $23{,}499$

d. $6{,}9888$

Ćwiczenie 7

Zaokrąglij liczbę 35768914 do podanego rzędu wielkości.

a. setek

b. tysięcy

c. milionów

Ćwiczenie 8

Podaj przybliżenie liczby z nadmiarem, z dokładnością do $0{,}0001$.

a. $\frac{4}{13}$

b. $\frac{16}{17}$

c. $\frac{7}{19}$

d. $\frac{\sqrt{5}}{15}$

e. $\frac{2\sqrt{11}}{7}$

Ćwiczenie 9

Oblicz.

a. Jakim procentem doby jest 1 godzina?

b. Jakim procentem godziny jest 17 minut?

c. Jakim procentem godziny jest 15 minut i 50 sekund?

Wynik zaokrąglij do drugiego miejsca po przecinku.

Ćwiczenie 10

W hurtowni cena netto $1\ \mathrm{l}$ lakieru jest równa $38{,}70\ \text{zł}$. Na pomalowanie podłogi w szkolnej sali gimnastycznej potrzeba $26\ \mathrm{l}$ lakieru. Do ceny netto lakieru doliczone jest $23\,\%$ podatku VAT. Ile trzeba zapłacić za 26 litrów lakieru w tej hurtowni?

Ćwiczenie 11

W teleturnieju bierze udział dwóch zawodników. Pytanie w eliminacjach brzmi:
”Jaką wysokość ma najwyższy budynek świata Burj Khalifa w Dubaju? Możesz pomylić się nie więcej niż o $0{,}5\,\%$”
Pierwszy zawodnik podał wysokość $823\ \mathrm{m}$, a drugi $831\ \mathrm{m}$. Który z zawodników zmieścił się w granicach dopuszczalnego błędu, jeśli rzeczywista wysokość tego budynku to $828\ \mathrm{m}$?

Ćwiczenie 12

Produkowane w Polsce zapałki mają długość około $43\ \mathrm{mm}$ i grubość od $1\ \mathrm{mm}$ do $1{,}5\ \mathrm{mm}$ .Pakowane są najczęściej w pudełka od 38 do 42 sztuk (w zależności od producenta). Standardowe pudełko zawiera 40 sztuk zapałek. Na podstawie powyższych informacji oblicz, jaki jest dopuszczalny błąd względny liczby zapałek w pudełku, w zależności od producenta.

Ćwiczenie 13

Wykaż, że liczba $t = \frac{4}{3-\sqrt{5}}$ spełnia nierówność podwójną $5 < t < 6$.

Ćwiczenie 14

Wypisz wszystkie liczby całkowite spełniające układ nierówności $\frac{1}{2+\sqrt{3}} < x < \frac{1}{2-\sqrt{3}}$.

Ćwiczenie 15

Określ przybliżenie liczby $194{,}41$, które należy podać, aby popełniony błąd względny był równy

a. $3\,\%$

b. $0{,}9\,\%$

c. mniej niż $0{,}5\,\%$

Ćwiczenie 16

Przybliżenie liczby π z dowolną dokładnością możemy uzyskać, wykorzystując wzór

$$\pi = \sqrt{6 \cdot \left(\frac{1}{1^2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \ldots\right)}.$$

Każde takie przybliżenie z niedomiarem jest tym dokładniejsze, im więcej weźmiemy początkowych składników sumy $\frac{1}{1^2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \ldots$ występującej w tym wzorze (jest to suma odwrotności kwadratów kolejnych liczb całkowitych dodatnich).

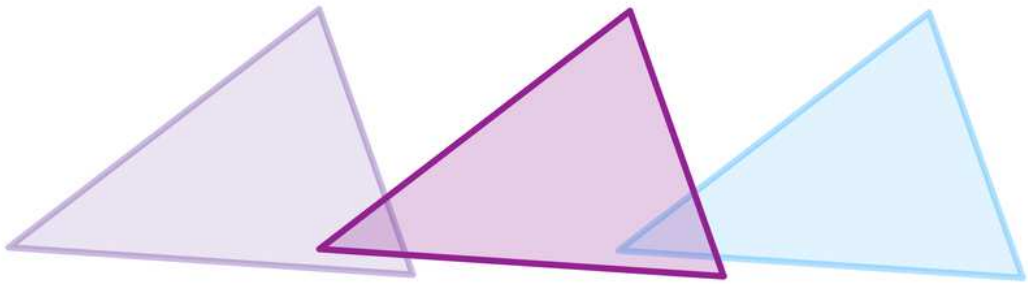
a. Wykorzystaj tylko cztery początkowe składniki sumy $\frac{1}{1^2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \ldots$, oblicz za pomocą podanego wzoru przybliżenie liczby π. Sprawdź, czy błąd bezwzględny tego przybliżenia jest mniejszy od $0{,}1$.

b. Ile co najmniej początkowych składników sumy należy dodać, aby otrzymać przybliżenie większe od 3?

Do rozwiązania zadania wykorzystaj kalkulator.

Przystawanie trójkątów

W tym rozdziale przypomnimy podstawowe związki między kątami i bokami w figurach geometrycznych.
Udowadniając wiele własności figur geometrycznych, często wykorzystujemy cechy przystawania trójkątów.



Trójkąty są przystające.

Film dostępny na portalu epodreczniki.pl

Animacja.

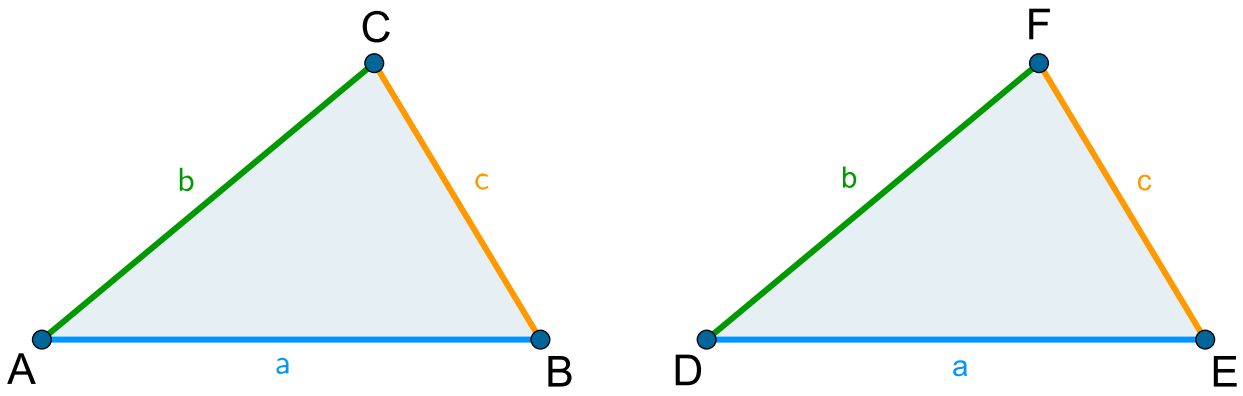
Twierdzenie: Cechy przystawania trójkątów

Przystawanie trójkątów ABC i DEF wynika z każdej z następujących cech przystawania trójkątów:

- cecha przystawania bok-bok-bok (bbb)

Trójkąty ABC i DEF są przystające wtedy i tylko wtedy, gdy długości boków jednego trójkąta są odpowiednio równe długościom boków drugiego trójkąta.

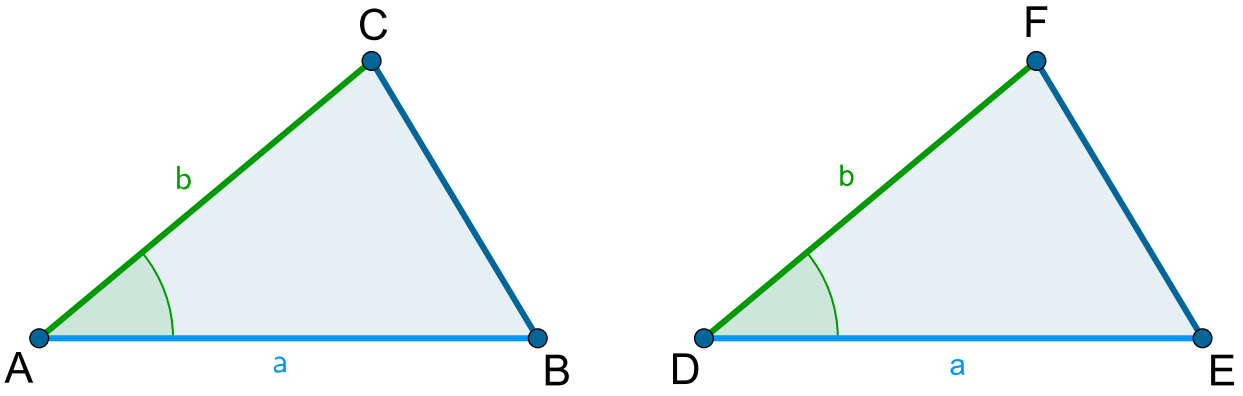
$$|AB| = |DE|, \ |AC| = |DF|, \ |BC| = |EF|.$$



- cecha przystawania bok-kąt-bok (bkb)

Trójkąty ABC i DEF są przystające wtedy i tylko wtedy, gdy długości dwóch boków i kąt między tymi bokami w jednym trójkącie są odpowiednio równe dwóm bokom i kątowi między tymi bokami w drugim trójkącie

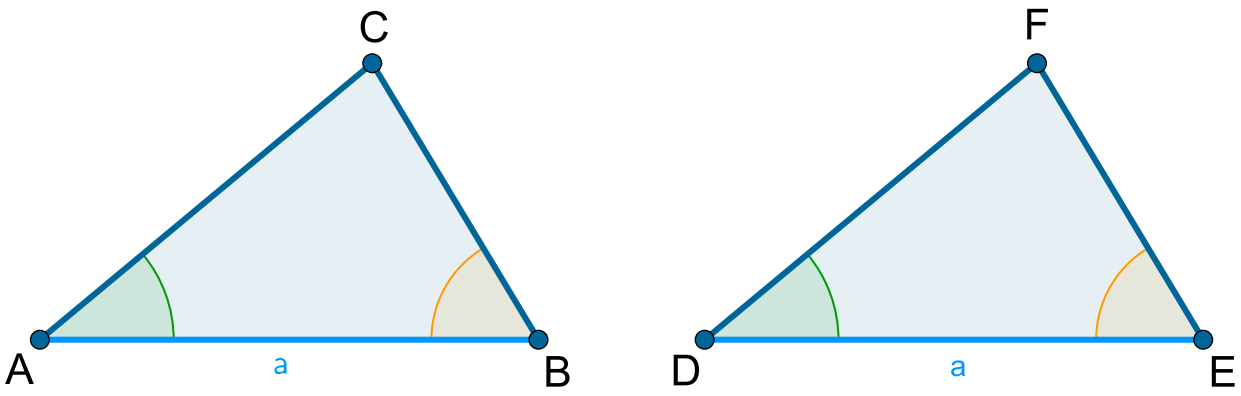
$$|AB| = |DE|,\ |AC| = |DF|,\ |\sphericalangle BAC| = |\sphericalangle EDF|.$$



- cecha przystawania kąt-bok-kąt (kbk)

Trójkąty ABC i DEF są przystające wtedy i tylko wtedy, gdy długości boku i miary kątów przyległych do tego boku w jednym trójkącie są odpowiednio równe długości boku i miarom kątów przyległych do tego boku w drugim trójkącie

$$|\mathrm{AB}| = |\mathrm{DE}|, \quad |\sphericalangle \mathrm{BAC}| = |\sphericalangle \mathrm{EDF}|, \quad |\sphericalangle \mathrm{ABC}| = |\sphericalangle \mathrm{DEF}|.$$

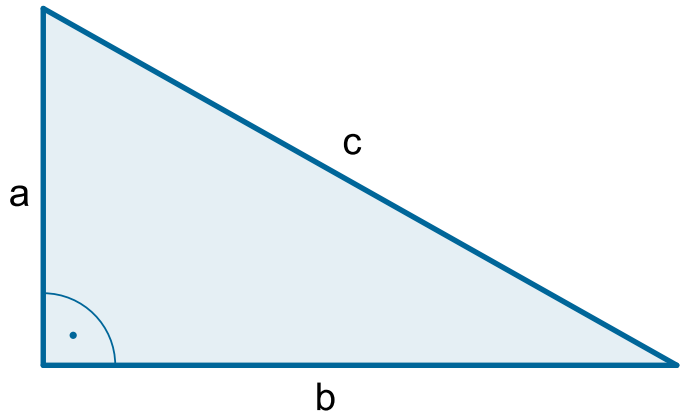


Twierdzenie Pitagorasa

Twierdzenie: Pitagorasa

W trójkącie prostokątnym suma kwadratów długości przyprostokątnych jest równa kwadratowi długości przeciwprostokątnej

$$a^2 + b^2 = c^2.$$



Dowód

Zasób interaktywny dostępny pod adresem https://zpe.gov.pl/a/DNFXdqF2m

Prawdziwe jest też twierdzenie odwrotne do Twierdzenia Pitagorasa.

Twierdzenie: odwrotne do twierdzenia Pitagorasa

Jeżeli suma kwadratów długości dwóch boków trójkąta jest równa kwadratowi długości trzeciego boku, to trójkąt jest prostokątny.

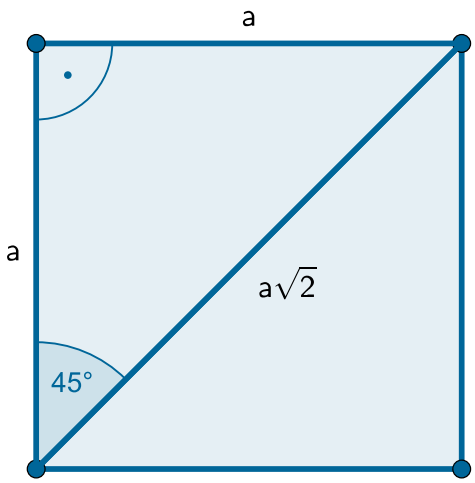
Przykład 1

Sprawdź, czy trójkąt o bokach $9,\ 12$ i 15 jest trójkątem prostokątnym.
Jeżeli trójkąt będzie prostokątny, to przeciwprostokątną będzie najdłuższy z boków.
Obliczmy kwadraty długości boków.
$9^2 = 81, 12^2 = 144, 15^2 = 225$ i zauważmy, że

$$9^2 + 12^2 = 81 + 144 = 225 = 15^2$$

Zatem z twierdzenia odwrotnego do twierdzenia Pitagorasa ten trójkąt jest trójkątem prostokątnym.

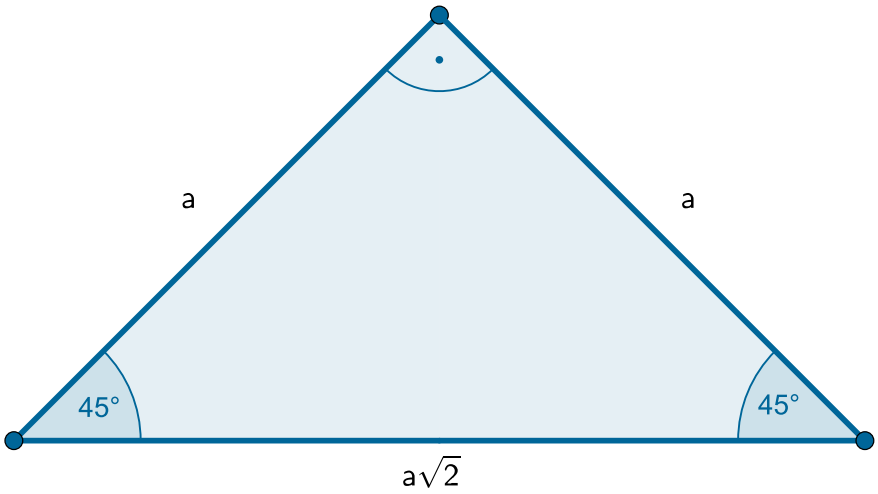
Związki miarowe wynikające z twierdzenia Pitagorasa



Przekątna w kwadracie o boku a ma długość

$$\sqrt{a^2 + a^2} = \sqrt{2a^2} = a\sqrt{2}.$$

Zatem w trójkącie równoramiennym prostokątnym długości boków pozostają w zależności.

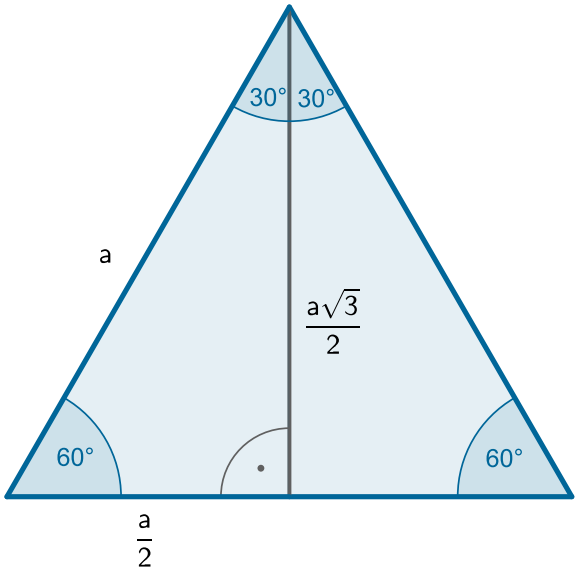


Rozważmy teraz trójkąt równoboczny o boku a. Jego wysokość liczymy w następujący sposób

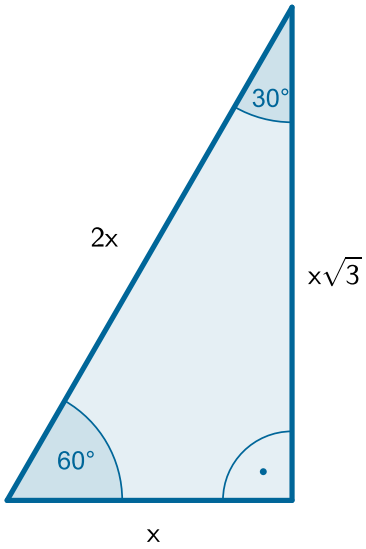
$$h = \sqrt{a^2 - \left(\frac{a}{2}\right)^2} = \sqrt{a^2 - \frac{a^2}{4}} = \sqrt{\frac{3a^2}{4}} = \frac{a\sqrt{3}}{2}$$

Pole trójkąta równobocznego o boku a jest więc równe

$$P = \frac{1}{2}a \bullet h = \frac{1}{2} \bullet a \bullet \frac{a\sqrt{3}}{2} = \frac{a^2\sqrt{3}}{4}$$



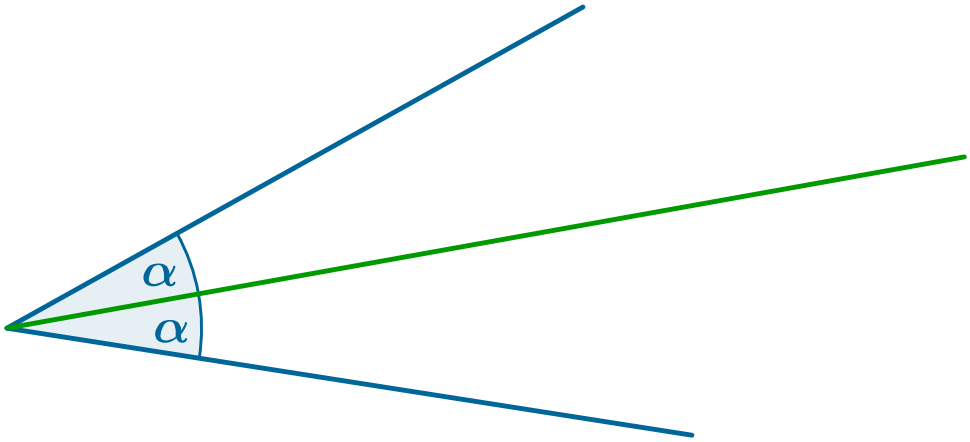
Oznaczmy przez x najkrótszy z boków trójkąta prostokątnego, w którym kąty ostre mają miary 30° i 60°. Wtedy długości boków tego trójkąta są równe $x,\ 2x,\ x\sqrt{3}$. O takim trójkącie mówi się czasami, że jest to „trójkąt piękny".


30°
2x
x√3
60°
x

Dwusieczne kąta

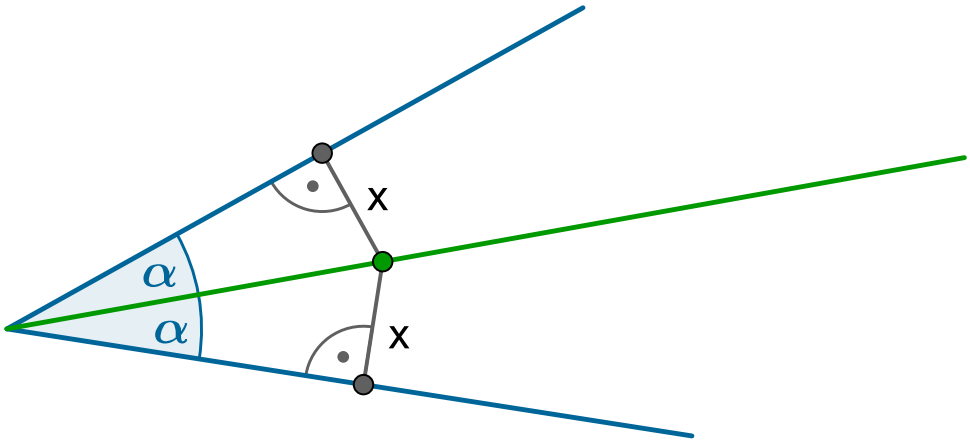
Definicja: Dwusieczna kąta

Dwusieczną kąta nazywamy półprostą, której początkiem jest wierzchołek kąta i która dzieli dany kąt na dwa równe kąty.



Twierdzenie: o punktach leżących na dwusiecznej kąta

Jeżeli punkt leży na dwusiecznej kąta, to jego odległości od obu ramion kąta są równe.



Dowód

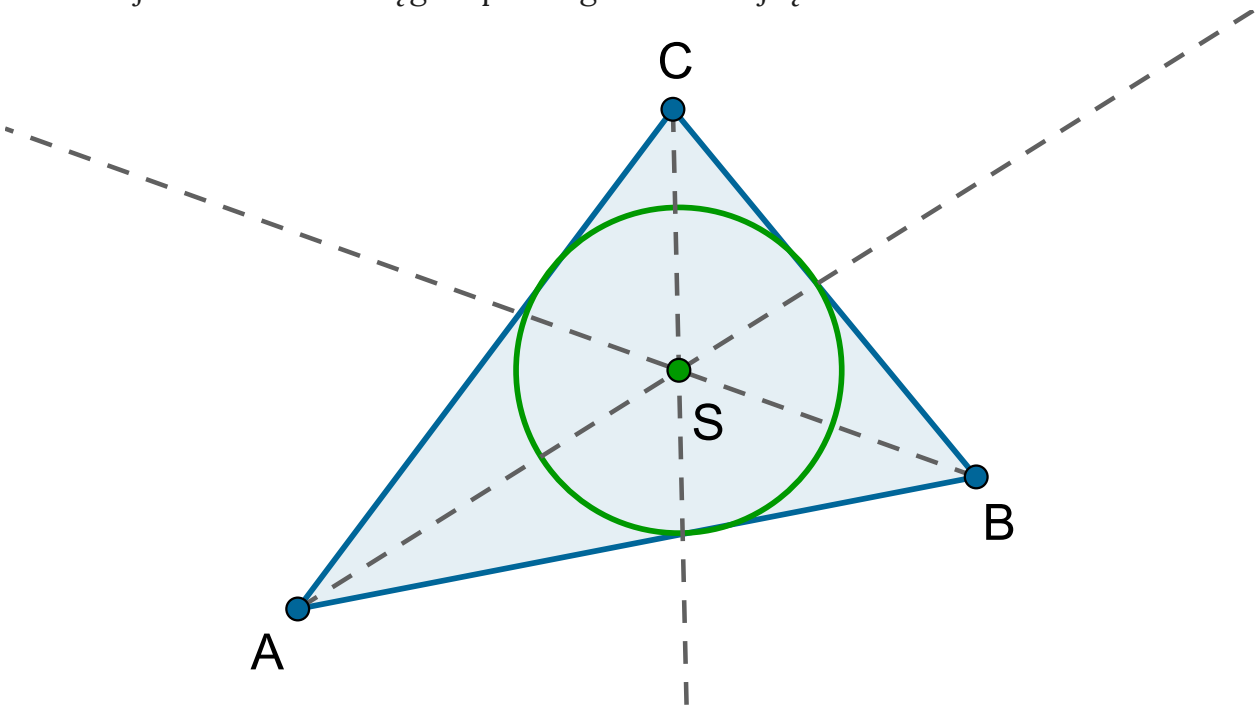
Zasób interaktywny dostępny pod adresem https://zpe.gov.pl/a/DUrHJoqXs

Uwaga!

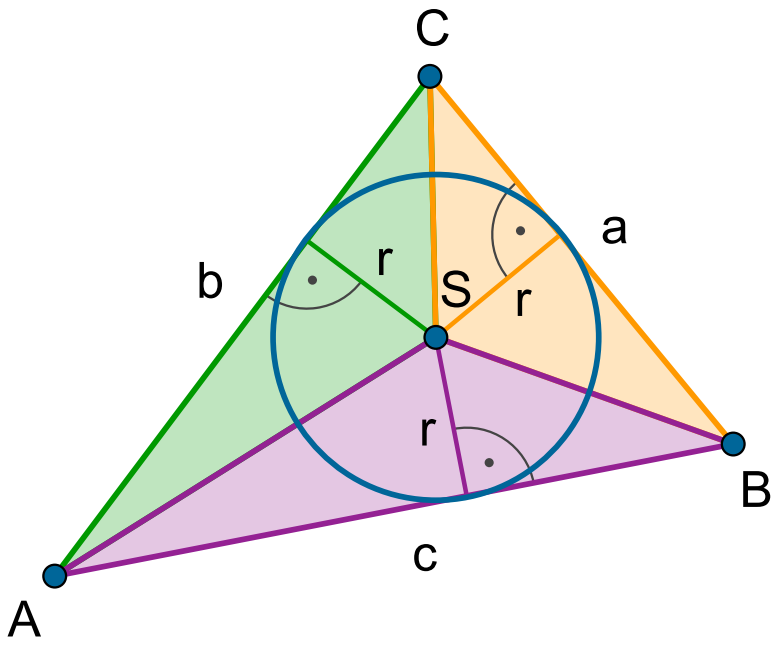
Dla kątów, których miara jest mniejsza od 180° prawdziwe jest też twierdzenie odwrotne. Jeżeli punkt należący do kąta jest równoodległy od jego ramion, to leży na dwusiecznej tego kąta.

Twierdzenie: o dwusiecznych kątów trójkąta

Dwusieczne każdego z kątów w trójkącie przecinają się w jednym punkcie.
Punkt ten jest środkiem okręgu wpisanego w ten trójkąt.



Odcinki łączące środek S okręgu wpisanego w trójkąt ABC z wierzchołkami tego trójkąta podzieliły trójkąt na trzy trójkąty ABS, BCS i ACS.
Wysokość każdego z tych trójkątów jest równa promieniowi okręgu wpisanego w trójkąt ABC (jak na rysunku).



Pole trójkąta ABC jest równe sumie pól trójkątów BCS, ACS i ABS

$$P_{\mathrm{ABC}} = P_{\mathrm{BCS}} + P_{\mathrm{ACS}} + P_{\mathrm{ABS}} = \frac{1}{2}\mathrm{ar} + \frac{1}{2}\mathrm{br} + \frac{1}{2}\mathrm{cr} = \frac{a+b+c}{2} \bullet r.$$

Wyprowadziliśmy w ten sposób wzór na pole trójkąta, w którym występują długości jego boków oraz promień okręgu wpisanego w ten trójkąt.

Twierdzenie: Pole trójkąta

Pole trójkąta o bokach długości a, b, c oraz promieniu r okręgu wpisanego w ten trójkąt wyraża się wzorem

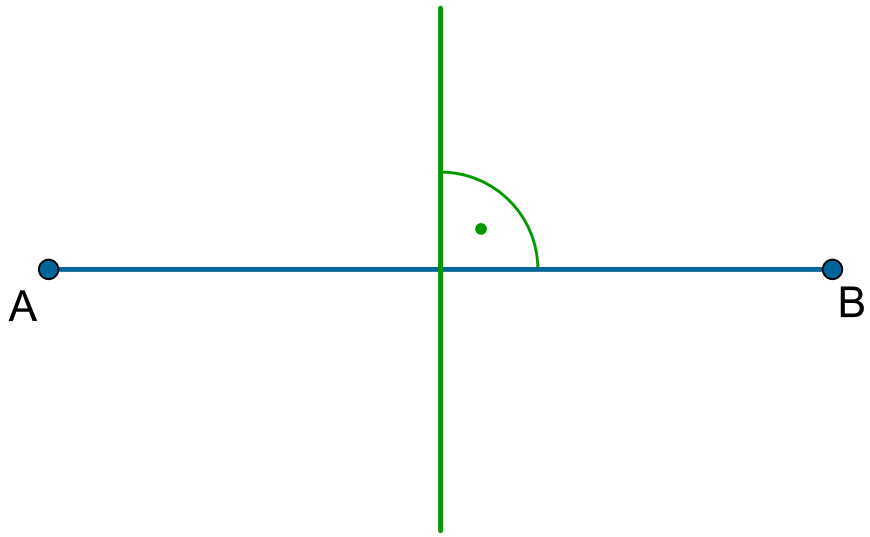
$$P = \frac{a+b+c}{2}\ \mathrm{r}.$$

Gdy oznaczymy $\frac{a+b+c}{2} = p$, wzór przyjmuje postać $P = \mathrm{pr}$.

Symetralna odcinka. Symetralne boków trójkąta

Definicja: Symetralna odcinka

Symetralną odcinka AB nazywamy prostą prostopadłą do tego odcinka i przechodzącą przez jego środek.



Twierdzenie: o punkcie leżącym na symetralnej odcinka

Jeżeli punkt leży na symetralnej odcinka, to jest równoodległy od końców tego odcinka.

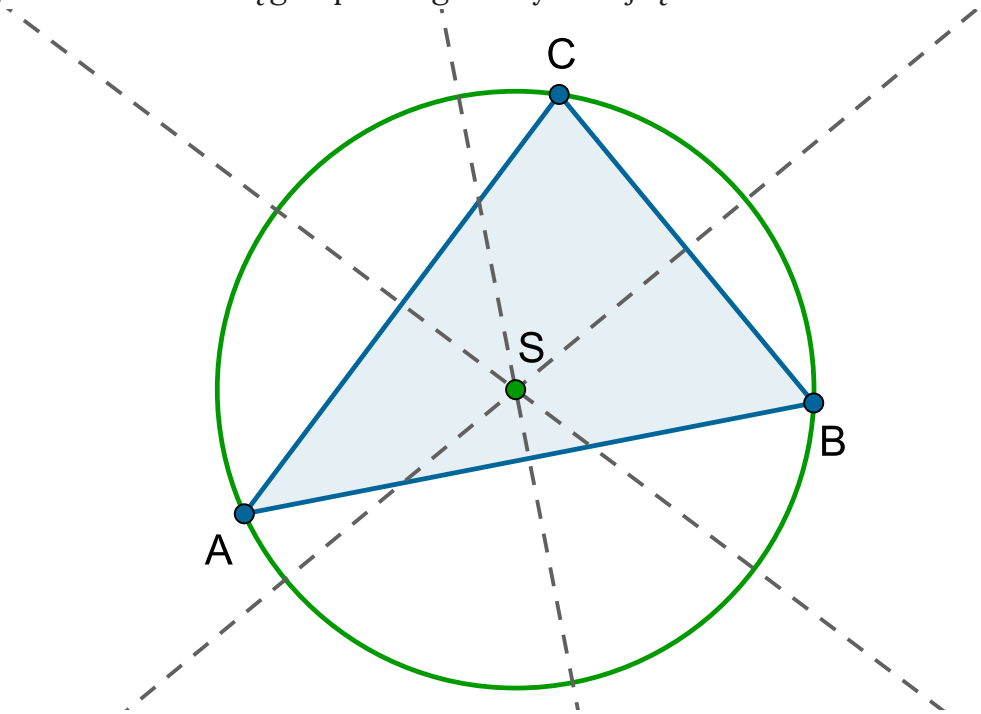
Jeżeli punkt płaszczyzny jest równoodległy od końców odcinka, to leży na symetralnej tego odcinka.

Zasób interaktywny dostępny pod adresem https://zpe.gov.pl/a/Ddmb8PCWV

Prawdziwe jest też twierdzenie odwrotne.

Twierdzenie: o symetralnych boków trójkąta

Symetralne trzech boków trójkąta przecinają się w jednym punkcie.
Punkt ten jest środkiem okręgu opisanego na tym trójkącie.



Dowód

Zasób interaktywny dostępny pod adresem https://zpe.gov.pl/a/Ddmb8PCWV

Uwaga!

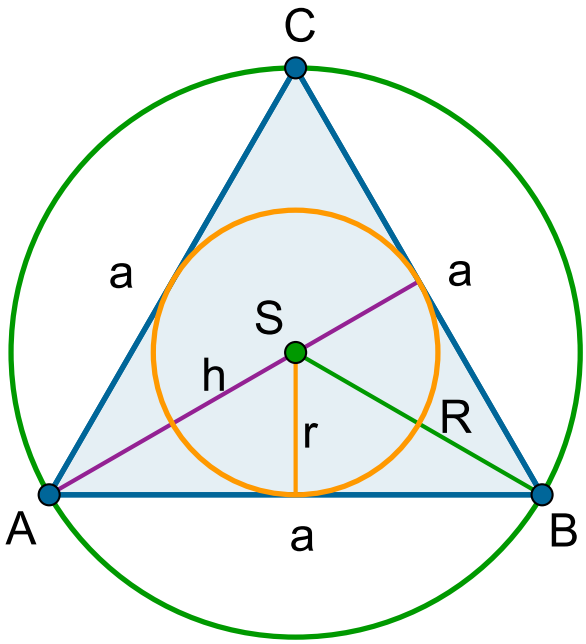
Przypadki szczególne

a. Trójkąt równoboczny

W trójkącie równobocznym wysokości, dwusieczne kątów, symetralne boków i środkowe pokrywają się. Stąd:

- środek okręgu wpisanego w trójkąt i środek okręgu opisanego na trójkącie pokrywają się,

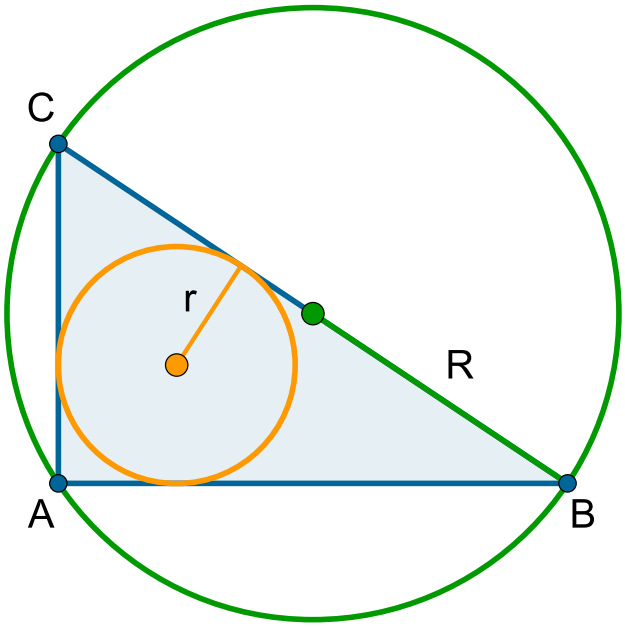
- środek okręgu wpisanego w trójkąt i środek okręgu opisanego na trójkącie leżą w punkcie przecięcia się wysokości,
- środki okręgów wpisanego i opisanego na trójkącie leżą w punkcie przecięcia środkowych. Punkt przecięcia środkowych dzieli każdą z nich w stosunku $2:1$, licząc od wierzchołka.



$$R = \frac{2}{3}h, r = \frac{1}{3}h, h = \frac{a\sqrt{3}}{2}, P = \frac{a^2\sqrt{3}}{4}$$

a. Trójkąt prostokątny

Środek okręgu opisanego na trójkącie prostokątnym leży na przeciwprostokątnej i dzieli ją na dwa odcinki równej długości. Wynika stąd, że długość promienia okręgu opisanego na trójkącie prostokątnym jest równa połowie długości przeciwprostokątnej tego trójkąta.



Już wiesz

Wzory na pola wielokątów

Dany jest trójkąt ABC
o podstawie a i wysokości h.

Przesuń suwak.

Czy potrafisz napisać wzór
na pole trójkąta?

Zasób interaktywny dostępny pod adresem https://zpe.gov.pl/a/Ddmb8PCWV

Zasób interaktywny dostępny pod adresem https://zpe.gov.pl/a/Ddmb8PCWV

Zasób interaktywny dostępny pod adresem https://zpe.gov.pl/a/Ddmb8PCWV

Przykład 1

Zasób interaktywny dostępny pod adresem https://zpe.gov.pl/a/Ddmb8PCWV

Przykład 2

Zasób interaktywny dostępny pod adresem https://zpe.gov.pl/a/Ddmb8PCWV

Zadania

Ćwiczenie 1

Dany jest prostokąt ABCD, w którym przekątna BD ma długość 17, a bok AB ma długość 10. Oblicz długość bokuBC.

Ćwiczenie 2

Zaznacz poprawne stwierdzenie.

- W prostokącie przekątna ma długość$7\sqrt{2}$, a kąt między tą przekątną i jednym z boków ma miarę 45°. Wtedy boki tego prostokąta mają długości 7 i $7\sqrt{2}$.
- Boki prostokąta mają długości 3 i 6. Wtedy kąt między przekątną i dłuższym bokiem ma miarę 30°.
- W prostokącie dłuższy bok ma długość 4, a kąt między przekątną i krótszym bokiem ma miarę 60°. Wtedy długość krótszego boku tego prostokąta wynosi 2.
- W prostokącie przekątna ma długość 8, a kąt między przekątną i dłuższym bokiem ma miarę 30°. Wtedy długość krótszego boku tego prostokąta jest równa 4.

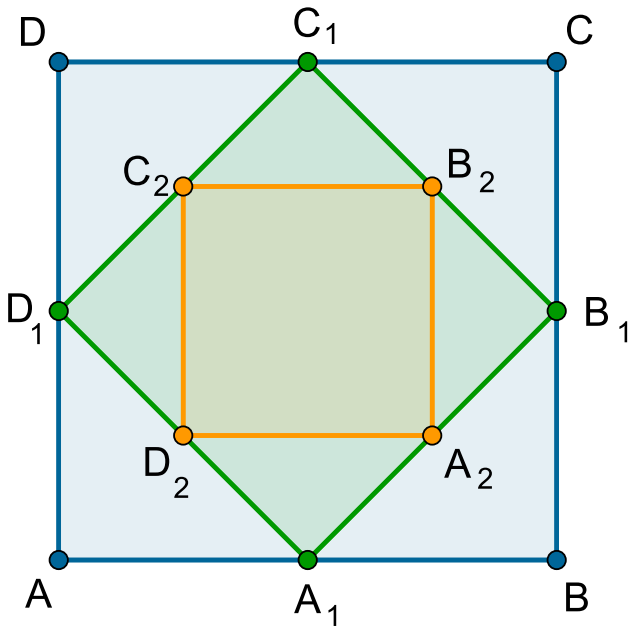
Ćwiczenie 3

W trójkącie równoramiennym ABC dane są długości ramion $|\mathrm{BC}| = |\mathrm{AC}| = 7$ oraz wysokość $|\mathrm{CD}| = 3$. Wówczas

- pole tego trójkąta wynosi $4\sqrt{10}$
- długość drugiej wysokości tego trójkąta wynosi $\frac{12}{7}\sqrt{10}$
- długość podstawy AB tego trójkąta wynosi $2\sqrt{10}$

Ćwiczenie 4

Na rysunku przedstawione są kwadraty. Długość boku pierwszego kwadratu jest równa 16. Wierzchołki drugiego to środki boków pierwszego. Wierzchołki trzeciego to środki boków drugiego kwadratu.

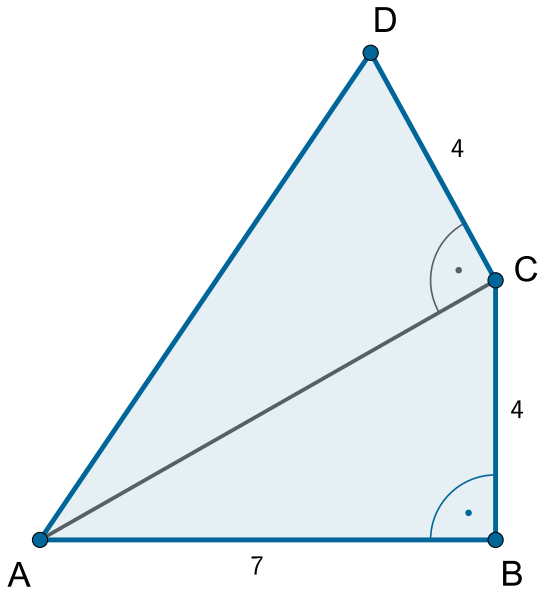


Wówczas

- [ ] długość boku trzeciego kwadratu jest równa 8
- [ ] długość odcinka A_1B_2 jest równa $4\sqrt{5}$
- [ ] długość boku drugiego kwadratu jest równa $4\sqrt{2}$

Ćwiczenie 5

Przekątna AC czworokąta $ABCD$ dzieli go na dwa trójkąty prostokątne. Długości trzech jego boków zostały podane na rysunku. Ile wynosi obwód tego czworokąta?



Ćwiczenie 6

Zaznacz poprawne stwierdzenie.

- [ ] Stosunek długości przekątnych rombu wynosi $5:8$. Obwód rombu jest równy $4\sqrt{89}$. Wynika z tego, że długość dłuższej przekątnej jest równa 10.
- [ ] Obwód prostokąta wynosi 70. Stosunek długości jego boków jest równy $2:3$. Wówczas długość krótszego boku tego prostokąta wynosi 21.
- [ ] Stosunek długości przekątnych rombu wynosi $6:8$. Wówczas stosunek boku rombu do dłuższej przekątnej wynosi $5:8$.

Ćwiczenie 7

Zaznacz poprawne stwierdzenie.

- [ ] Dane są dwa trójkąty równoboczne T_1 i T_2. Długość boku trójkąta T_2 jest o 10% większa od długości boku trójkąta T_1. Wynika stąd, że pole trójkąta T_2 jest o 21% większe od pola trójkąta T_1.
- [ ] Wysokość trójkąta równobocznego jest o 2 krótsza od długości boku. Wtedy pole tego trójkąta wynosi $P = 28 + 48\sqrt{3}$.
- [ ] Pole trójkąta równobocznego wynosi $9\sqrt{3}$. Wówczas bok tego trójkąta ma długość 6.

Ćwiczenie 8

Zaznacz poprawne stwierdzenie.

- [ ] Długość boku trójkąta równobocznego jest równa $7\sqrt{3}$. Wówczas promień okręgu wpisanego w ten trójkąt jest równy 7.
- [ ] Długość boku trójkąta równobocznego jest równa $2\sqrt{3}$. Wówczas promień okręgu opisanego na tym trójkącie jest równy 2.
- [ ] Wysokość trójkąta równobocznego jest równa 15. Wówczas promień okręgu wpisanego w ten trójkąt jest równy 5, a promień okręgu opisanego na trójkącie jest równy 10.

Ćwiczenie 9

Zaznacz poprawne stwierdzenie.

- ◯ Jeżeli stosunek długości przyprostokątnych w trójkącie prostokątnym wynosi $3:5$, to stosunek długości promienia okręgu opisanego na tym trójkącie do długości dłuższej przyprostokątnej trójkąta wynosi $17:10$.
- ◯ Przyprostokątne w trójkącie prostokątnym mają długości 8 i $4\sqrt{5}$. Wtedy długość promienia okręgu opisanego na tym trójkącie wynosi 6.

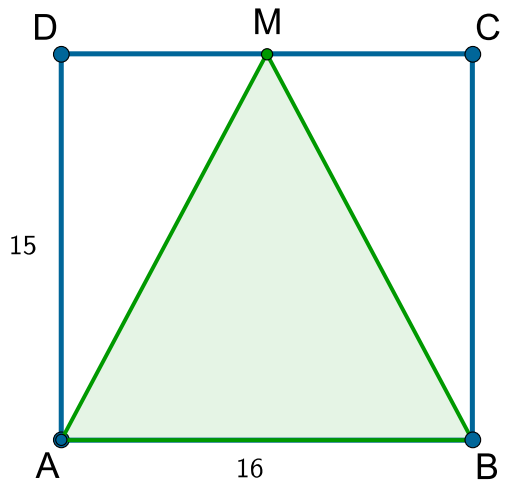
Ćwiczenie 10

a. Kąt między ramionami trójkąta równoramiennego jest prosty. Wysokość opuszczona na podstawę tego trójkąta jest równa 5. Oblicz długość środkowej tego trójkąta, której jednym z końców jest wierzchołek kąta ostrego.

b. W trójkącie równoramiennym kąt między ramionami jest równy 120°. Wysokość opuszczona na podstawę tego trójkąta jest równa 2. Oblicz długość środkowej tego trójkąta, której jednym z końców jest wierzchołek kąta ostrego.

Ćwiczenie 11

Podstawą AB trójkąta równoramiennego ABM jest dłuższy bok prostokąta ABCD. Wierzchołek M leży na boku CD, jak pokazano na rysunku.



G1_Planimetria_ZadZamniete1

Obwód tego trójkąta wynosi

- $10\sqrt{7}+12$
- 50
- 48
- $2\sqrt{481}+16$

Ćwiczenie 12

W trójkącie prostokątnym długości przyprostokątnych są równe 2 i$2\sqrt{3}$. Większy z kątów ostrych w tym trójkącie ma miarę

- ◯ 30°
- ◯ 15°
- ◯ 60°
- ◯ 45°

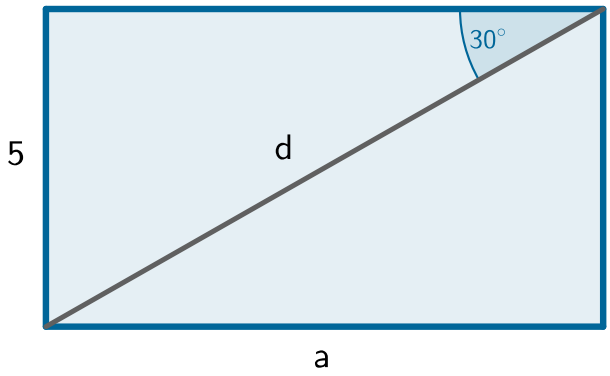
Ćwiczenie 13

Liczby $6{,}14$, x są długościami boków trójkąta równoramiennego. Wtedy x wynosi

- ◯ $x = \sqrt{113}$
- ◯ $x = 14$
- ◯ $x = 8$
- ◯ $x = 12$

Ćwiczenie 14

Na rysunku przedstawiony jest prostokąt.



P1_Przyklad1_ZZ4_pop

Długość a dłuższego boku oraz długość d przekątnej tego prostokąta wynoszą

- $a = 5\sqrt{3}, d = 10$
- $a = \frac{5}{\sqrt{3}}, d = \frac{5\sqrt{3}}{3}$
- $a = \frac{5\sqrt{3}}{3}, d = 10$
- $a = 5\sqrt{3}, d = \frac{10\sqrt{3}}{3}$

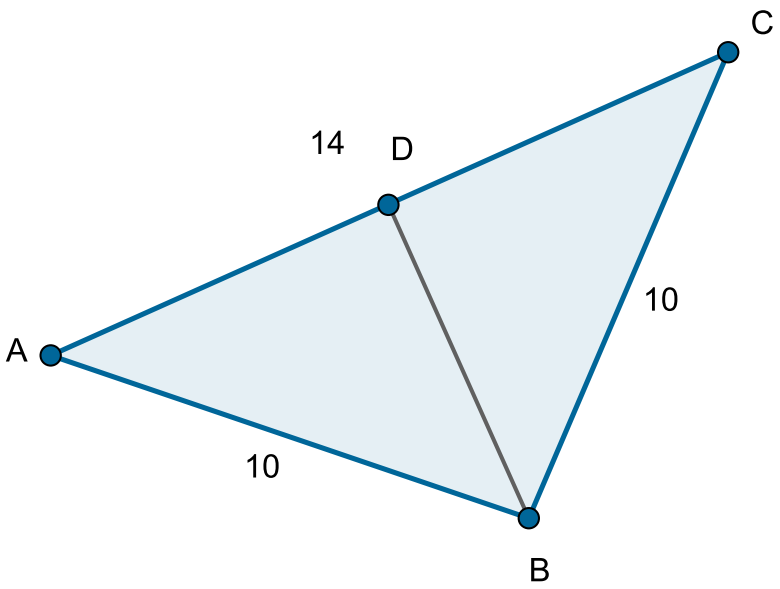
Ćwiczenie 15

W trójkącie prostokątnym dwa dłuższe boki mają długości 15 i 17. Obwód tego trójkąta jest równy

- $39{,}5$
- $\sqrt{514}+32$
- 40
- $40{,}5$

Ćwiczenie 16

W trójkącie równoramiennym ABC dane są długości boków $|AB| = |BC| = 10$ oraz $|AC| = 14$.



G1_Planimetria_ZadZamkniete6_nowy

Pole tego trójkąta jest równe

- $20\sqrt{6}$
- $7\sqrt{51}$
- $28\sqrt{6}$
- 49

Ćwiczenie 17

Długość boku trójkąta równobocznego jest równa $\frac{\sqrt{21}}{2}$. Promień r okręgu wpisanego w ten trójkąt i promień R okręgu opisanego na tym trójkącie są równe odpowiednio

- ◯ $r = \frac{\sqrt{21}}{8}, R = \frac{\sqrt{21}}{4}$
- ◯ $r = \frac{\sqrt{21}}{4}, R = \frac{\sqrt{21}}{8}$
- ◯ $r = \frac{\sqrt{14}}{4}, R = \frac{\sqrt{14}}{2}$
- ◯ $r = \frac{\sqrt{7}}{4}, R = \frac{\sqrt{7}}{2}$

Ćwiczenie 18

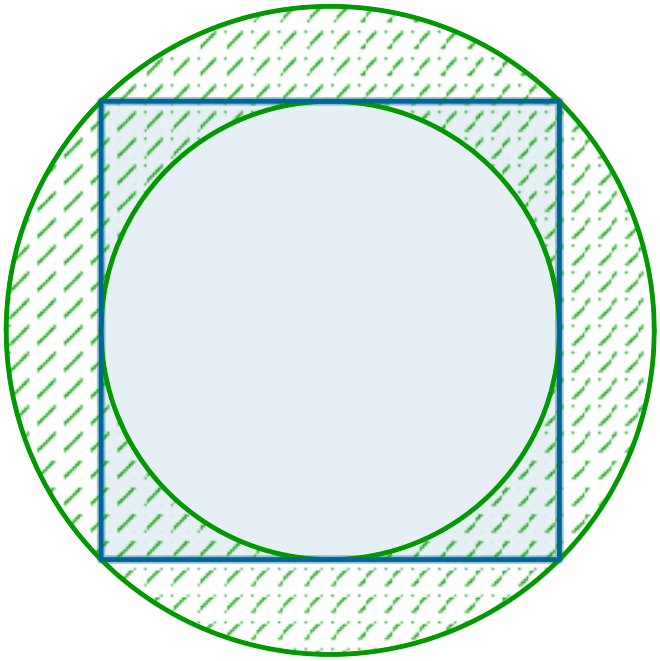
W prostokącie długość jednego z boków jest równa $3\sqrt{2}$, a przekątna ma długość $3\sqrt{6}$. Oblicz długość drugiego boku prostokąta.

Ćwiczenie 19

Dane są trzy czworokąty. Pierwszy jest prostokątem o bokach długości 2 i 4. Wierzchołki drugiego czworokąta to środki boków pierwszego, a wierzchołki trzeciego to środki boków drugiego czworokąta. Oblicz sumę obwodów tych wielokątów.

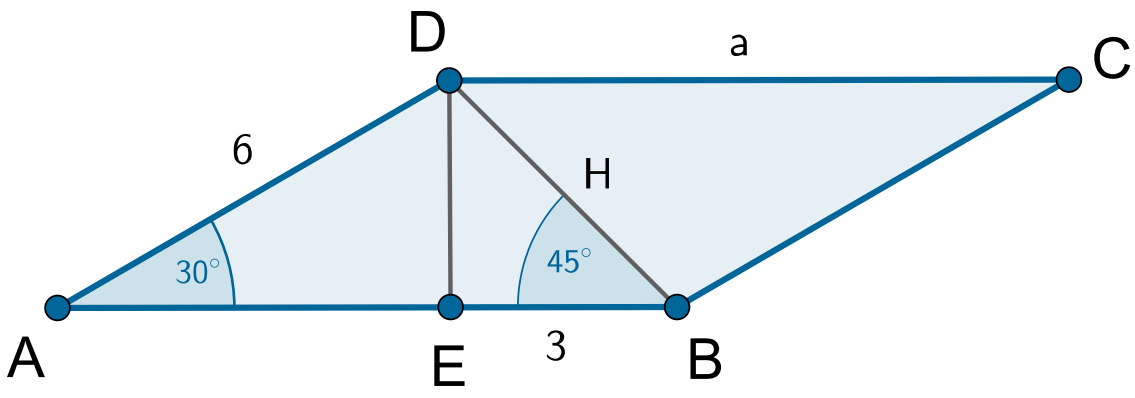
Ćwiczenie 20

W kwadrat wpisano okrąg i na tym samym kwadracie opisano okrąg, jak pokazano na rysunku. Pole zaznaczonego pierścienia jest równe 5π. Oblicz obwód kwadratu.



Ćwiczenie 21

Dany jest równoległobok, w którym jeden z boków ma długość $b = 6$. Kąt ostry równoległoboku ma miarę 30°, kąt między krótszą przekątną a bokiem a ma miarę 45°, jak na rysunku. Oblicz pole tego równoległoboku.



Ćwiczenie 22

W trójkąt równoramienny ABC o podstawie długości $|\mathrm{AB}| = 6$ i ramionach długości $|\mathrm{AC}| = |\mathrm{BC}| = 5$ wpisano okrąg. Oblicz promień tego okręgu.

Kąty przyległe, wierzchołkowe, naprzemianległe i odpowiadające

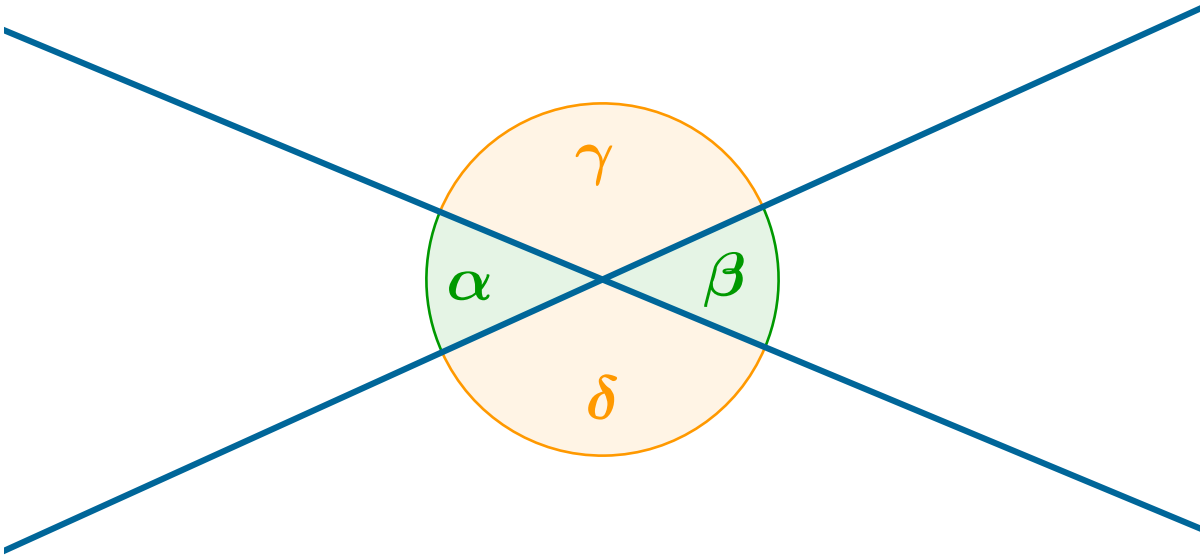
W tej części podręcznika usystematyzujemy zdobyte wcześniej wiadomości na temat własności figur płaskich i rozszerzymy je w oparciu o nowe narzędzia algebraiczne.

Zasób interaktywny dostępny pod adresem https://zpe.gov.pl/a/DJjfYtCMW

Zasób interaktywny dostępny pod adresem https://zpe.gov.pl/a/DJjfYtCMW

Definicja: Kąty przyległe i wierzchołkowe

- Kąty przyległe to dwa kąty, które mają jedno ramię wspólne, a pozostałe ramiona dopełniają się do prostej.
- Kąty wierzchołkowe to dwa kąty, które mają wspólny wierzchołek i przedłużeniem ramion jednego kąta są odpowiednie ramiona drugiego kąta.



Na przykład α i γ na rysunku są kątami przyległymi. Pary kątów wierzchołkowych to α i β oraz γ i δ.

Zasób interaktywny dostępny pod adresem https://zpe.gov.pl/a/DJjfYtCMW

Twierdzenie: Suma miar kątów przyległych

Suma miar kątów przyległych jest równa 180°.

Wprost z twierdzenia o sumie miar kątów przyległych wynika, że

$$\alpha + \gamma = 180^\circ$$

oraz

$$\beta + \gamma = 180^\circ.$$

Stąd $\alpha = \beta$. Udowodniliśmy w ten sposób następujące twierdzenie.

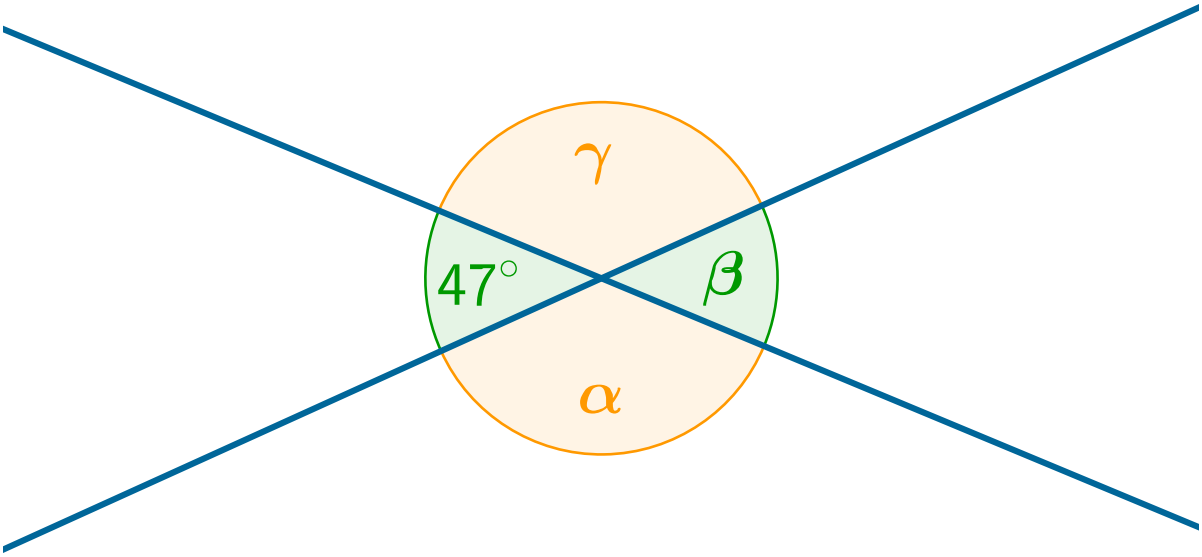
Zasób interaktywny dostępny pod adresem https://zpe.gov.pl/a/DJjfYtCMW

Twierdzenie: o kątach wierzchołkowych

Kąty wierzchołkowe są równe.

Przykład 1

Obliczmy miary kątów α, β i γ zaznaczonych na rysunku.



Kąty 47° i β są wierzchołkowe, więc $\beta = 47^\circ$. Każdy z kątów α i γ jest przyległy do kąta 47°. Zatem

$$\alpha = \gamma = 180^\circ - 47^\circ = 133^\circ.$$

Przykład 2

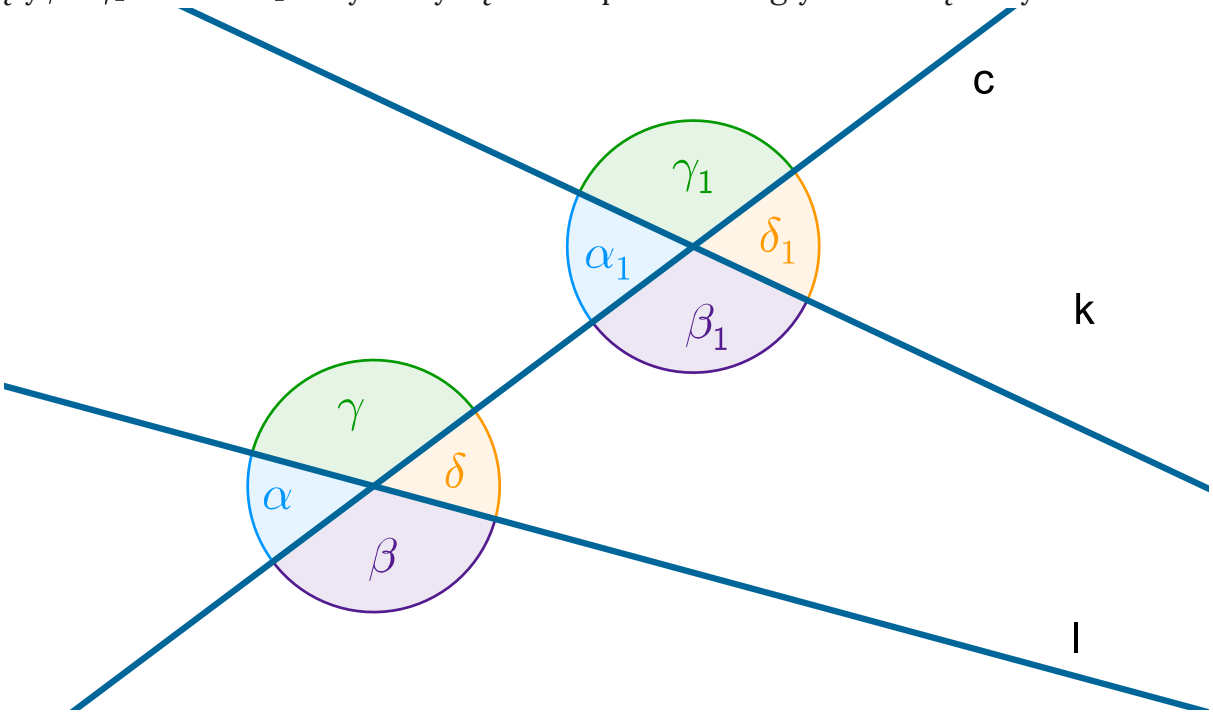
Zasób interaktywny dostępny pod adresem https://zpe.gov.pl/a/DJjfYtCMW

Przykład 3

Zasób interaktywny dostępny pod adresem https://zpe.gov.pl/a/DJjfYtCMW

Definicja: Kąty naprzemianległe i odpowiadające

- Kąty: α i α_1, β i β_1, γ i γ_1 oraz δ i δ_1 nazywamy kątami odpowiadającymi.
- Kąty α_1 i δ oraz β_1i γ nazywamy kątami naprzemianległymi wewnętrznymi.
- Kąty β i γ_1 oraz α i δ_1 nazywamy kątami naprzemianległymi zewnętrznymi.

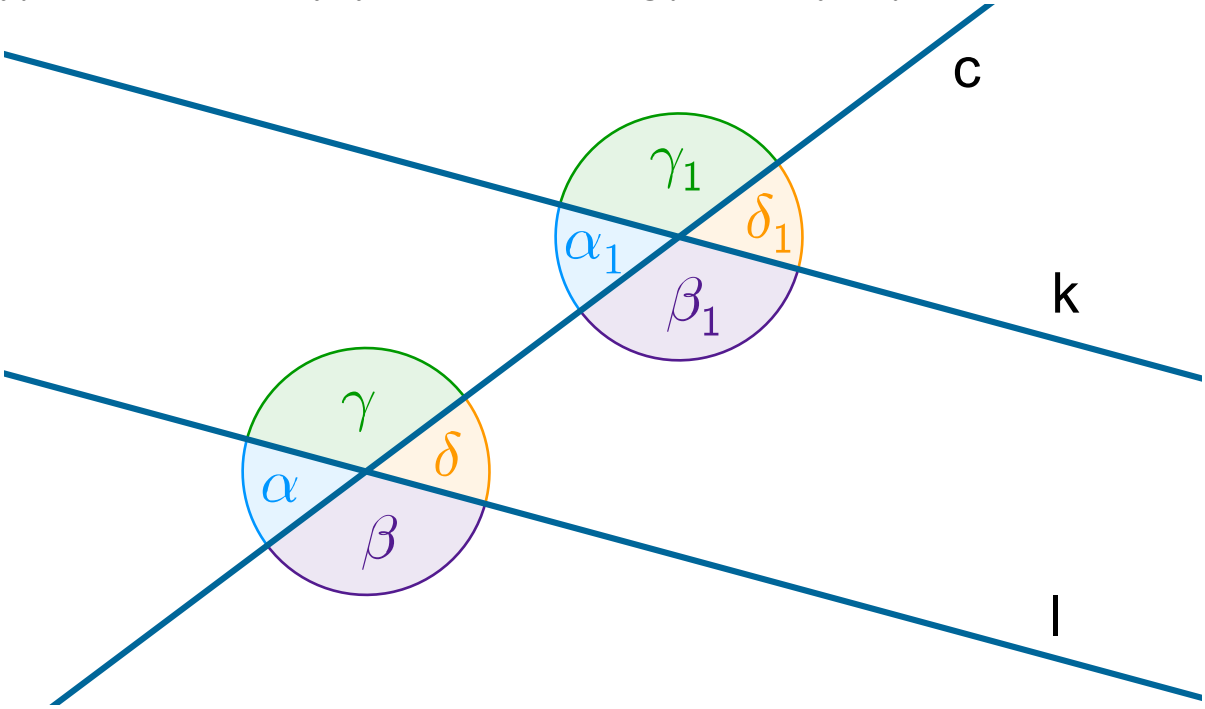


Przykład 4

W przypadku, gdy proste k i l są równoległe

- Kąty: α i α_1, β i β_1, γ i γ_1 oraz δ i δ_1 są kątami odpowiadającymi.
- Kąty α_1 i δ oraz β_1i γ są kątami naprzemianległymi wewnętrznymi.

- Kąty β i γ_1 oraz α i δ_1 są kątami naprzemianległymi zewnętrznymi.



Przykład 5

Zasób interaktywny dostępny pod adresem https://zpe.gov.pl/a/DJjfYtCMW

Zasób interaktywny dostępny pod adresem https://zpe.gov.pl/a/DJjfYtCMW

Przykład 6

Zasób interaktywny dostępny pod adresem https://zpe.gov.pl/a/DJjfYtCMW

Przykład 7

Zasób interaktywny dostępny pod adresem https://zpe.gov.pl/a/DJjfYtCMW

Twierdzenie: Proste równoległe

Jeżeli dwie proste równoległe przetniemy trzecią prostą, to tak utworzone kąty naprzemianległe są równe i kąty odpowiadające są równe.

Twierdzenie: Kąty naprzemianległe

- Jeżeli proste k i l przetniemy trzecią prostą i tak utworzone kąty naprzemianległe są równe, to proste k i l są równoległe.

Zasób interaktywny dostępny pod adresem https://zpe.gov.pl/a/DJjfYtCMW

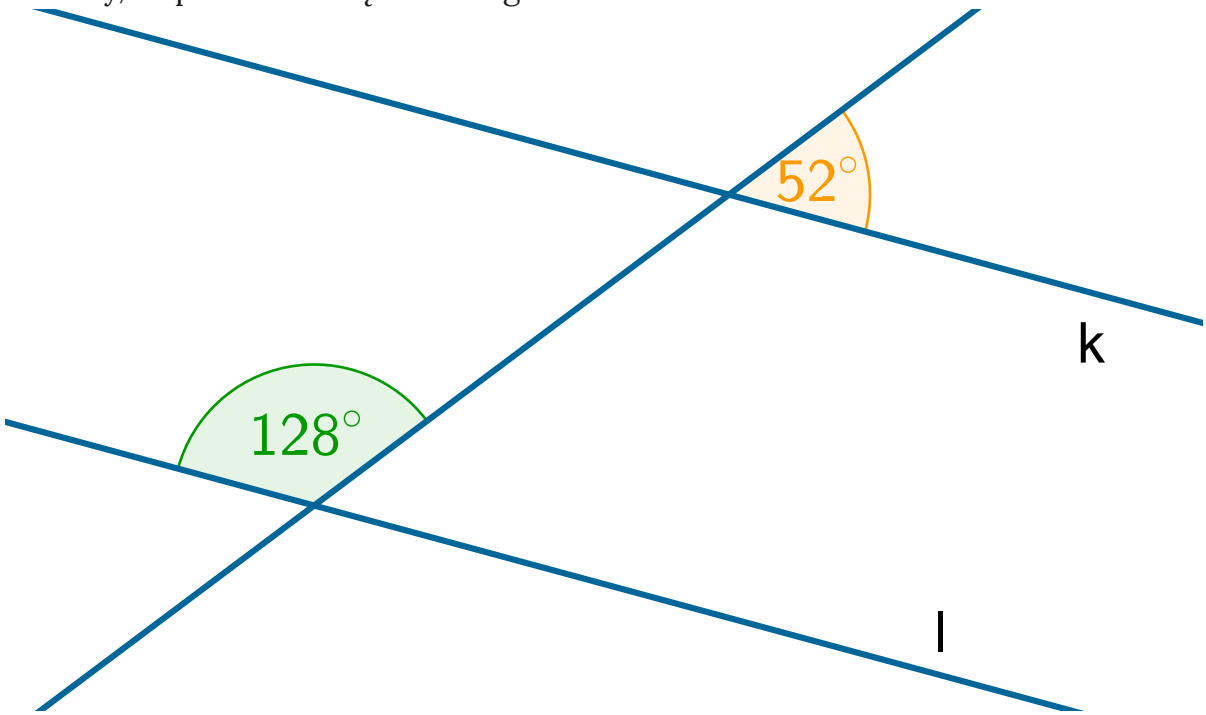
Twierdzenie: Kąty odpowiadające

- Jeżeli proste k i l przetniemy trzecią prostą i tak utworzone kąty odpowiadające są równe, to proste k i l są równoległe.

Zasób interaktywny dostępny pod adresem https://zpe.gov.pl/a/DJjfYtCMW

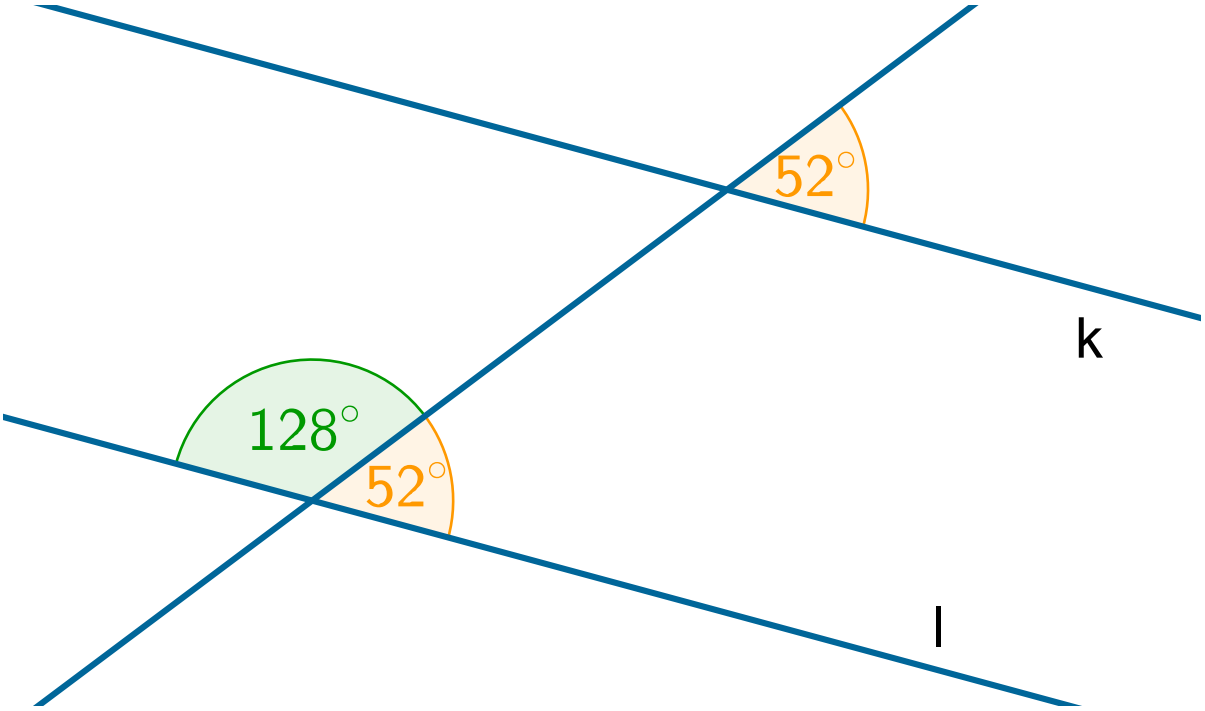
Przykład 8

Proste k i l zostały przecięte trzecią prostą. Miary kątów zaznaczono na rysunku. Uzasadnimy, że proste k i l są równoległe.



Zaznaczmy kąt przyległy do kąta 128°. Jego miara jest równa

$$180^\circ - 128^\circ = 52^\circ.$$



Dwa kąty odpowiadające mają taką samą miarę 52°, skąd wynika, że proste k i l są równoległe.

Przykład 9

Konstrukcja kątów naprzemianległych.

Zasób interaktywny dostępny pod adresem https://zpe.gov.pl/a/DJjfYtCMW

Przykład 10

Konstrukcja kątów odpowiadających.

Zasób interaktywny dostępny pod adresem https://zpe.gov.pl/a/DJjfYtCMW

Ćwiczenie 1

Podaj miary kątów przy prostych równoległych.

Zasób interaktywny dostępny pod adresem https://zpe.gov.pl/a/DJjfYtCMW

Dwie proste przecięte trzecią prostą – zmienia się położenie trzeciej prostej. Dany jest jeden kąt – należy podać miary pozostałych kątów

Kąty w figurach, przekątne

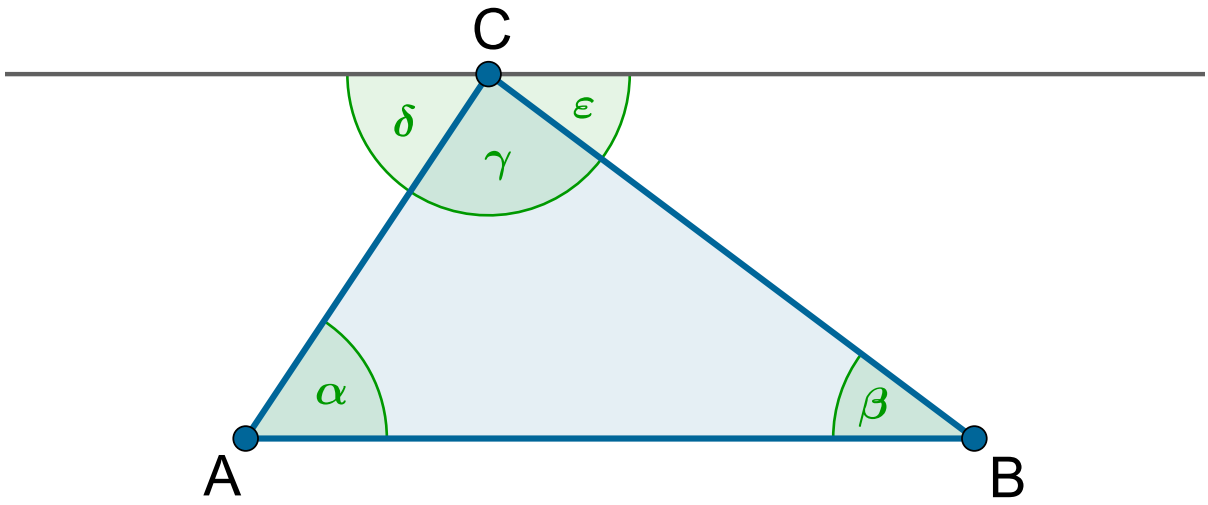
Zasób interaktywny dostępny pod adresem https://zpe.gov.pl/a/DsPsPBNGb

Twierdzenie: Suma miar kątów trójkąta

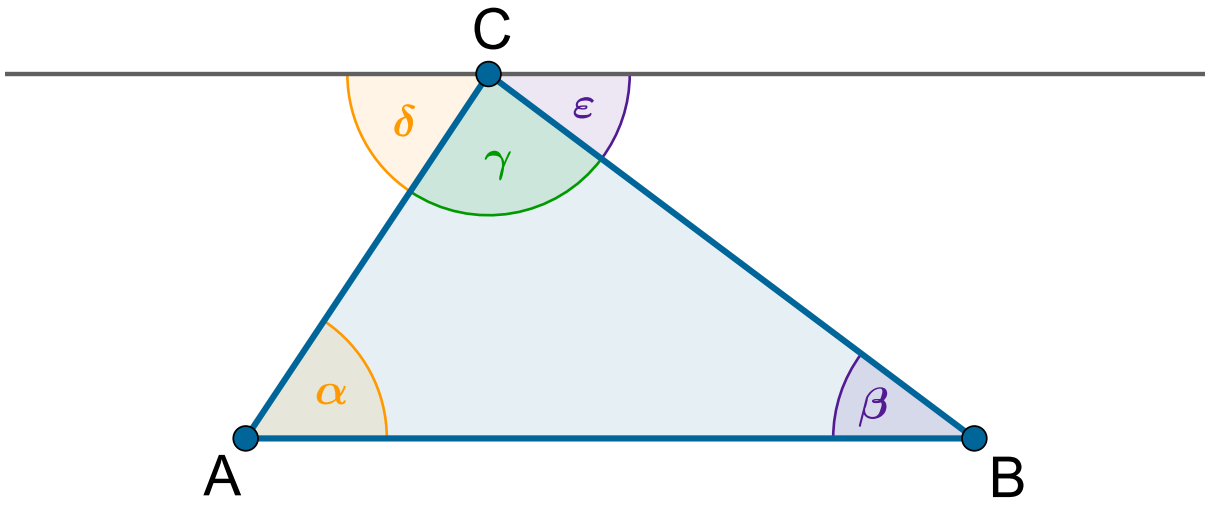
Suma miar kątów trójkąta jest równa 180°.

Dowód

Rozważmy dowolny trójkąt ABC. Rysujemy prostą równoległą do boku AB, która przechodzi przez wierzchołek C.

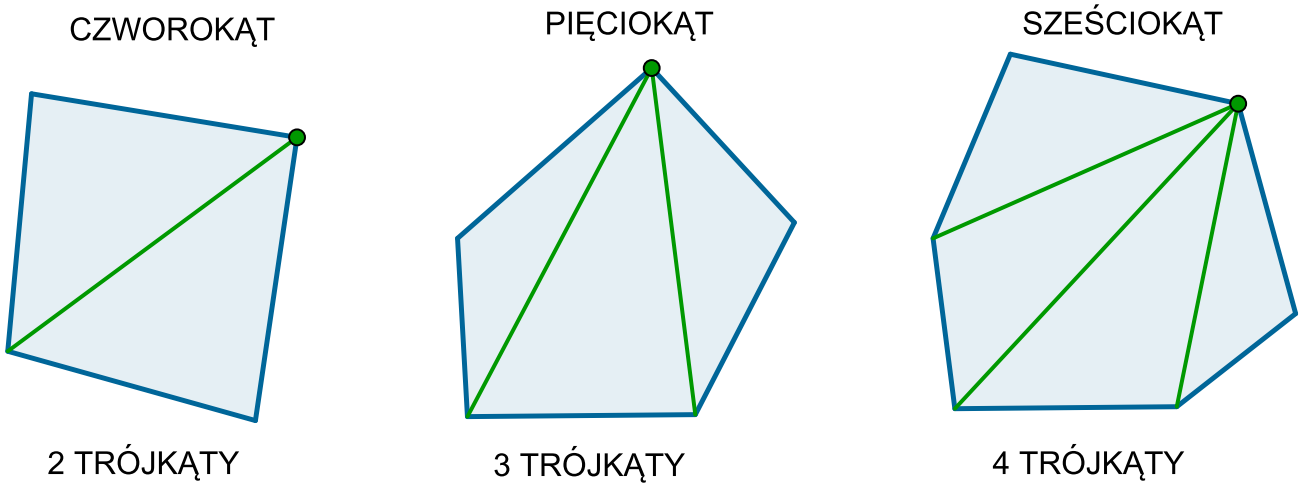


Kąty δ i α są równe jako kąty naprzemianległe wewnętrznie. Podobnie $\varepsilon = \beta$.



Suma miar kątów α, β, γ jest równa 180°.

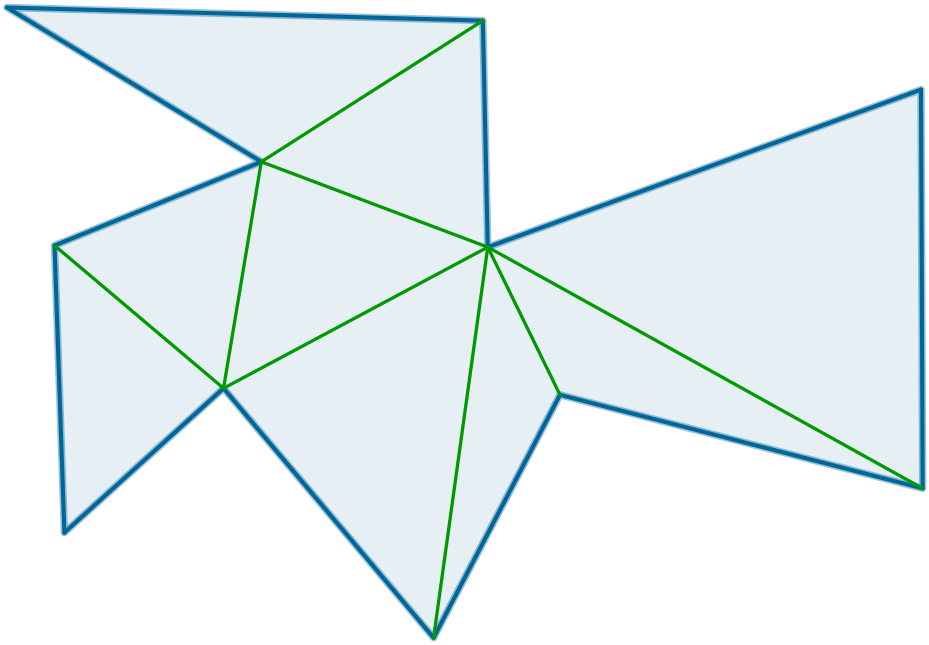
Wiemy już, że suma miar kątów w trójkącie jest równa 180°. Zastanówmy się teraz, czy można znaleźć wzór na określenie sumy miar kątów dowolnego wielokąta wypukłego. W tym celu narysujmy kilka wielokątów i podzielmy każdy z nich na trójkąty. Poprowadzimy wszystkie przekątne z jednego wierzchołka każdego z wielokątów.



Zauważmy, że liczba utworzonych trójkątów jest o 2 mniejsza od liczby wierzchołków wielokąta.
Zatem n – kąt wypukły można podzielić na $(n-2)$ trójkąty. Suma miar kątów $n-$ kąta jest więc równa sumie miar kątów tych trójkątów. W każdym z tych trójkątów suma miar kątów jest równa 180°.

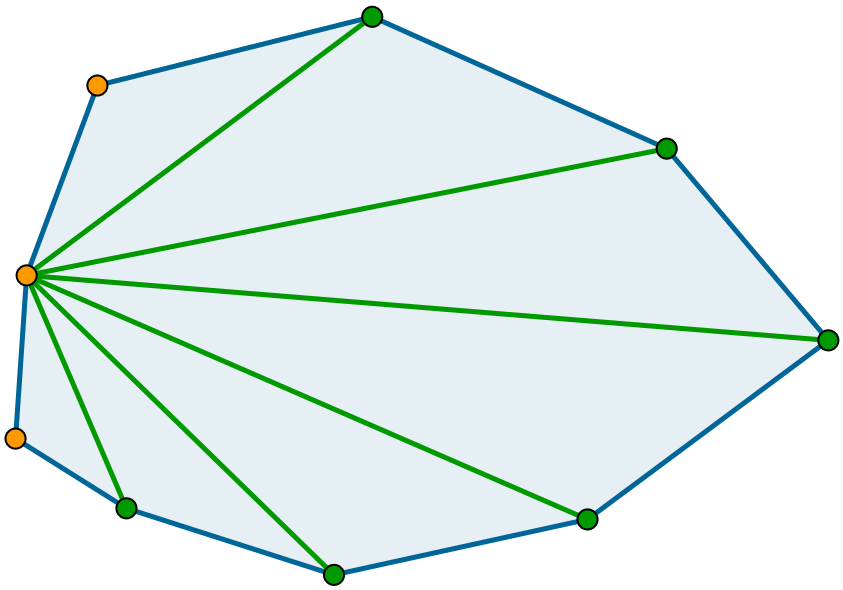
Ciekawostka

Twierdzenie dotyczące sumy miar kątów wielokąta pozostaje również prawdziwe w przypadku, gdy wielokąt nie jest wypukły (jest wklęsły). Aby udowodnić to twierdzenie, można postąpić podobnie jak poprzednio, dzieląc wielokąt na trójkąty. Trudniej jednak opisać ten podział, gdyż nie zawsze da się podzielić wielokąt na trójkąty, wykorzystując przekątne wychodzące z jednego wierzchołka.



Ten wielokąt został podzielony na 9 trójkątów, suma miar jego kątów jest równa 1620°.

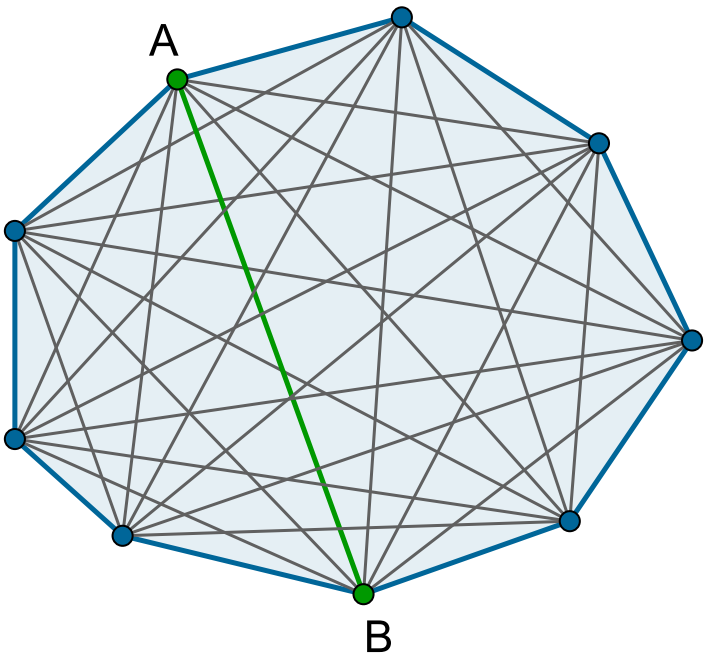
Wyprowadzimy wzór na liczbę przekątnych dowolnego wielokąta wypukłego. Rozpatrzmy jeden z wierzchołków takiego wielokąta. Ile przekątnych możemy z niego poprowadzić?



Ten wielokąt ma 9 wierzchołków. Z jednego wierzchołka można poprowadzić 6 przekątnych. Z wybranego wierzchołka nie można poprowadzić przekątnych do

wierzchołków sąsiednich, ani do tego wybranego wierzchołka.
Niech n będzie liczbą naturalną większą od 3. Rozpatrzmy dowolny n-kąt wypukły. Ponieważ mamy n wierzchołków, a z każdego wierzchołka możemy poprowadzić $n-3$ przekątne, więc ze wszystkich wierzchołków możemy poprowadzić $n(n-3)$ przekątne. Jednak w ten sposób każdą z przekątnych policzyliśmy dwukrotnie. Zatem liczba wszystkich przekątnych n-kąta wypukłego jest równa

$$\frac{n \bullet (n-3)}{2}.$$



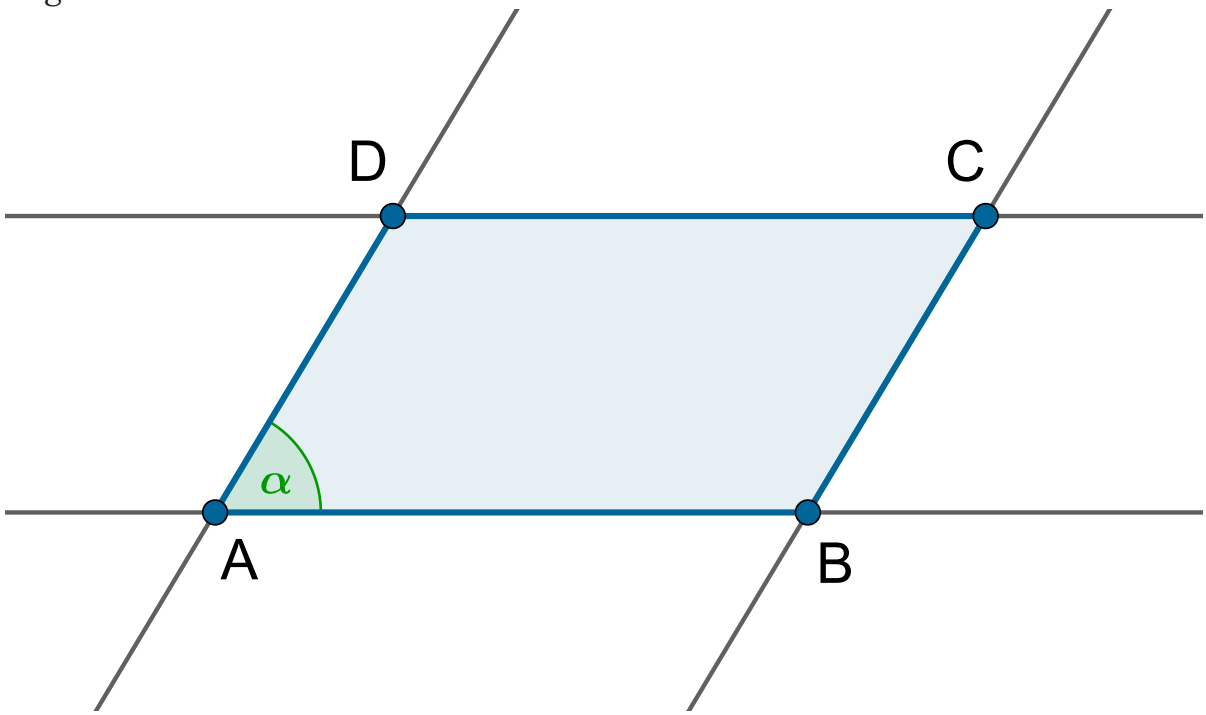
Przekątna AB wychodzi zarówno z wierzchołka A, jak i z wierzchołka B.

Twierdzenie: O przekątnych wielokąta

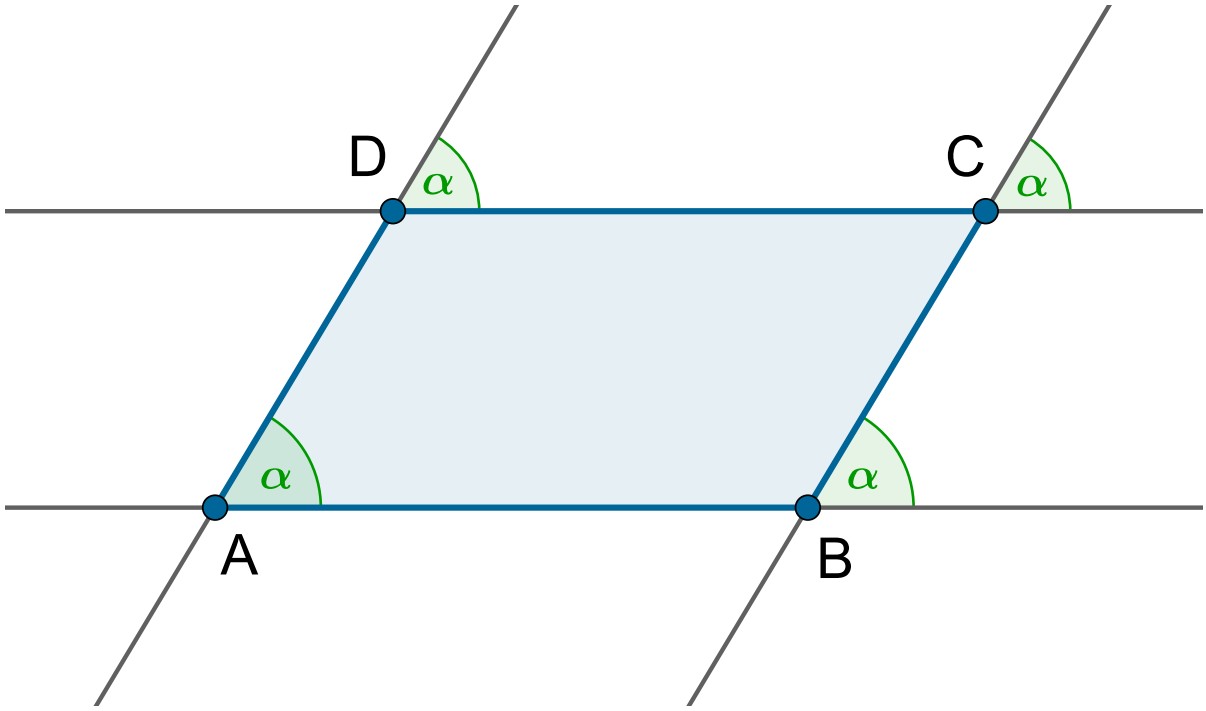
Dowolny n-kąt wypukły ma $\frac{n \bullet (n-3)}{2}$ przekątnych, gdzie n jest liczbą naturalną większą od 3.

Zasób interaktywny dostępny pod adresem https://zpe.gov.pl/a/DsPsPBNGb

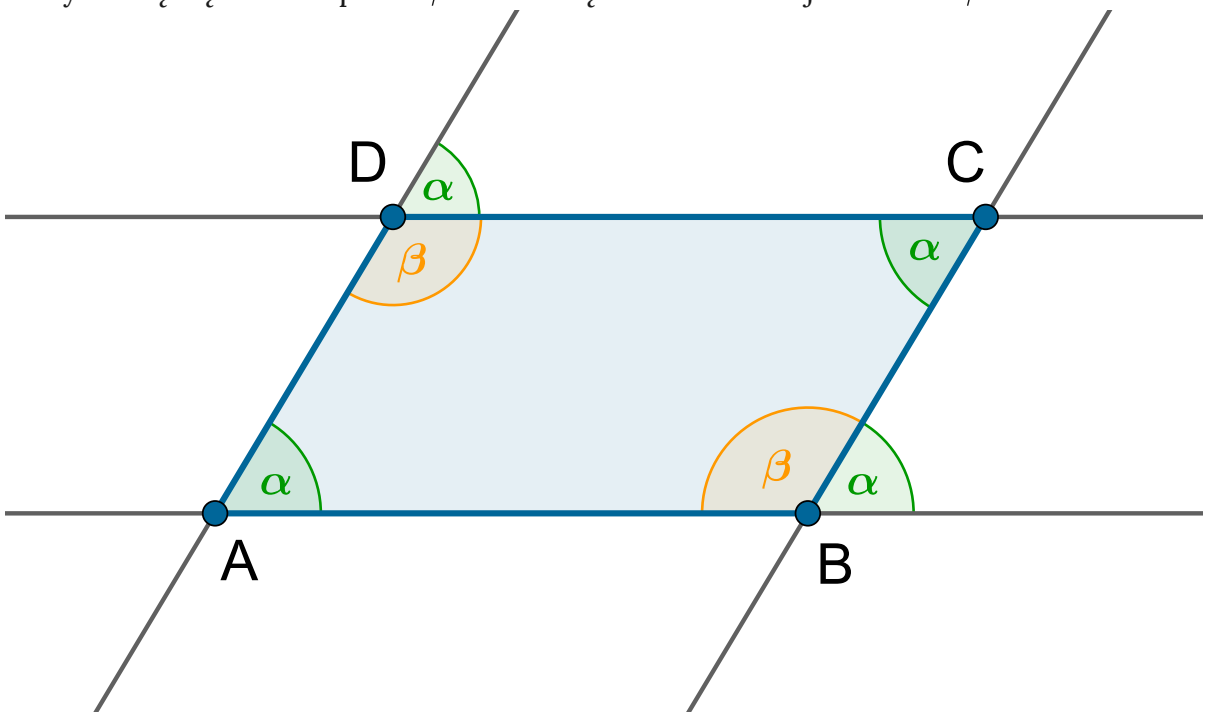
Przypomnimy teraz podstawowe własności związane z kątami w czworokątach. Rozważmy dowolny równoległobok i narysujmy proste, na których leżą boki tego równoległoboku.



Zaznaczmy kąty odpowiadające kątowi α. Ponieważ boki równoległoboku są parami równoległe, zaznaczone na rysunku kąty odpowiadające są równe.



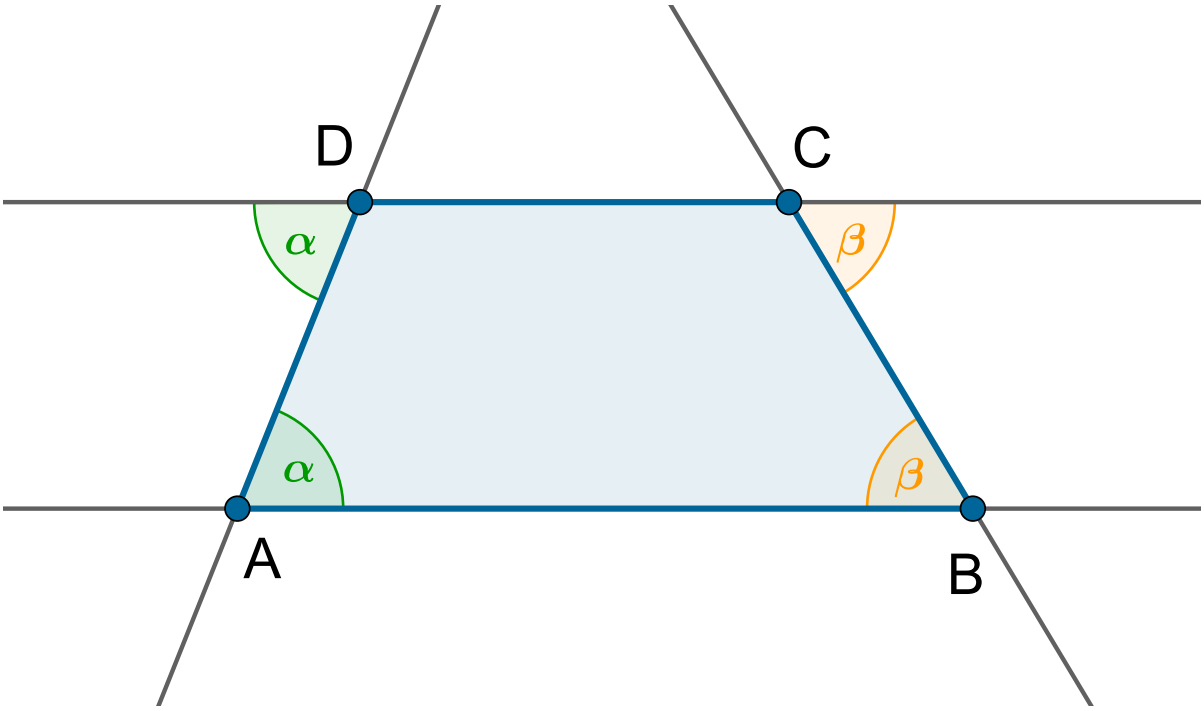
Kąty BCD i α są wierzchołkowe, więc $|\sphericalangle \mathrm{BCD}| = \alpha$.
Oznaczmy miarę kąta ADC przez β. Miara kąta CBA także jest równa β.



Kąty β i α są przyległe, zatem $\alpha + \beta = 180^\circ$.

> **Twierdzenie: Suma miar sąsiednich kątów wewnętrznych w równoległoboku**
>
> W równoległoboku suma miar sąsiednich kątów wewnętrznych jest równa 180°.

Rozważmy trapez ABCD.
Niech α, β będą kątami ostrymi w tym trapezie. Poprowadźmy proste zawierające boki tego trapezu i zaznaczmy kąty naprzemianległe do kątów α i β. Ponieważ proste AB i CD są równoległe, to miary odpowiednich kątów naprzemianległych są równe.

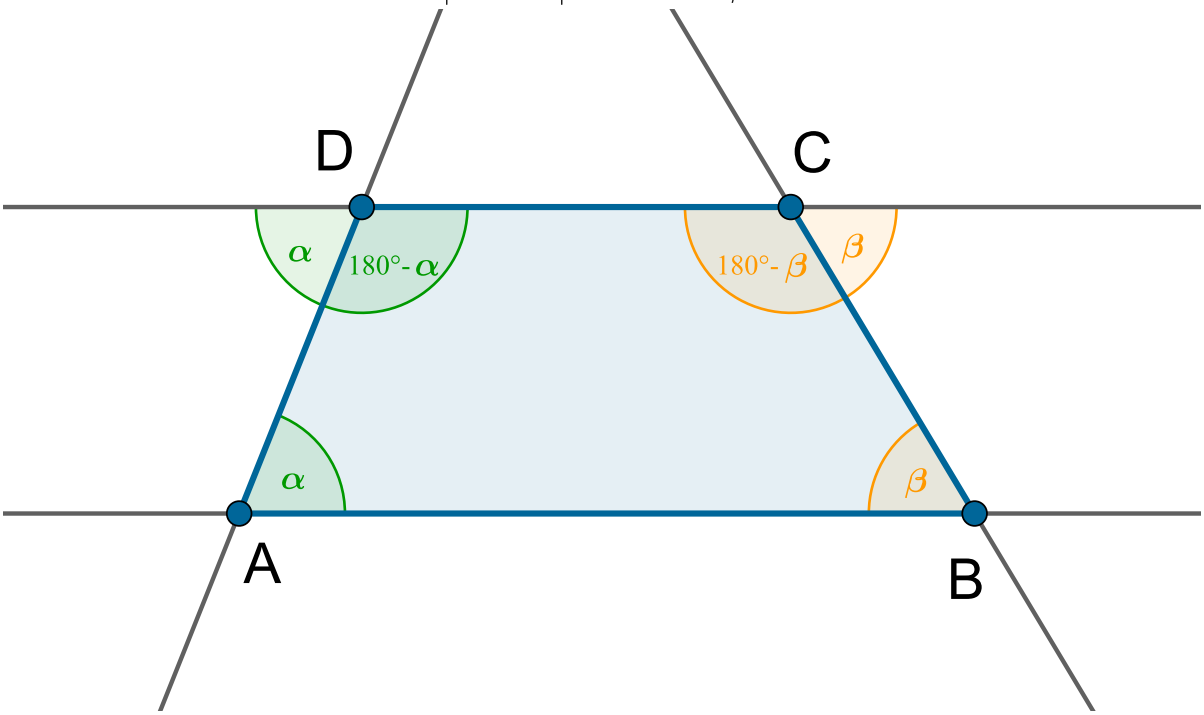


Kąt CDA jest przyległy do kąta α, zatem

$$|\sphericalangle \mathrm{CDA}| = 180^\circ - \alpha.$$

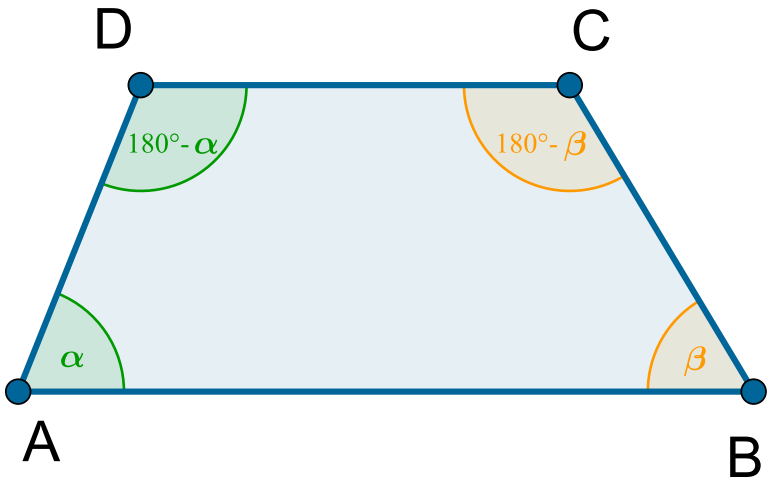
Kąt BCD jest przyległy do kąta β, zatem

$$|\sphericalangle \mathrm{BCD}| = 180^\circ - \beta.$$

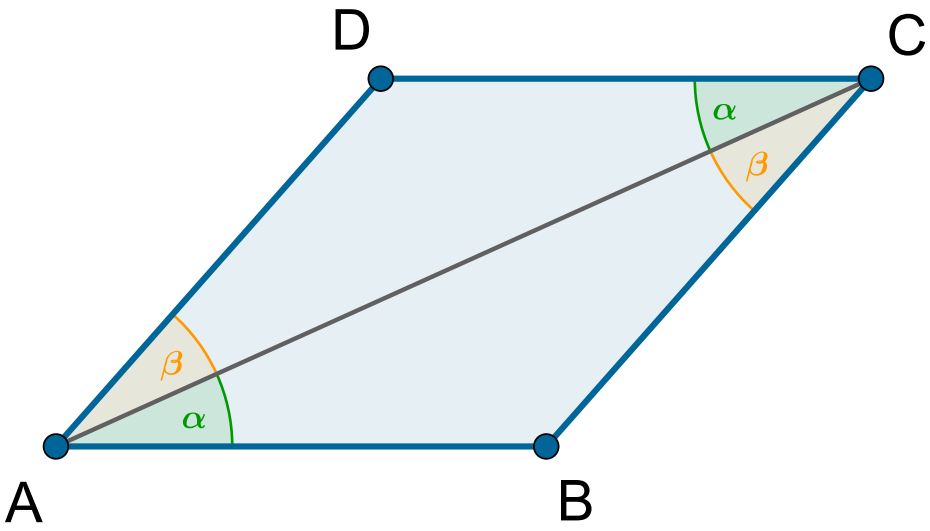


Twierdzenie: Suma miar kątów przy jednym ramieniu trapezu

W trapezie suma miar kątów przy jednym ramieniu jest równa 180°.



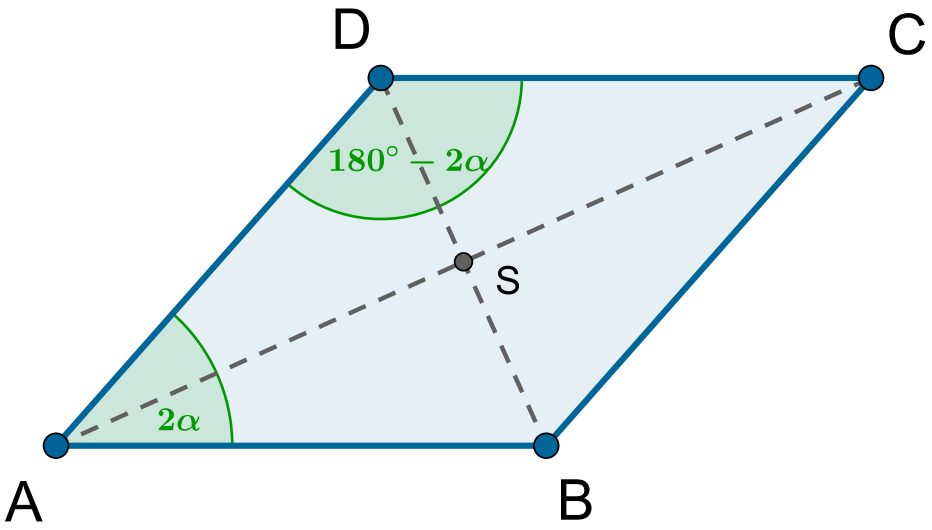
Rozpatrzmy romb $ABCD$. Wykreślmy przekątną rombu jak na rysunku i zaznaczmy powstałe kąty naprzemianległe. Ponieważ proste AB i CD są równoległe, to kąty naprzemianległe są równe.



W rombie wszystkie boki są równe, więc trójkąt ACD jest równoramienny, a jako równoramienny ma kąty przy podstawie AC równe, czyli $\alpha = \beta$. Przekątna AC zawiera się w dwusiecznej kąta DCB i DAB. Podobnie, przekątna DB zawiera się w dwusiecznej kąta ADC i (ABC).
Niech S będzie punktem przecięcia przekątnych rombu. Romb jest równoległobokiem, więc

$$|\sphericalangle ADS| = \frac{180^\circ - 2\alpha}{2}$$

$$|\sphericalangle \mathrm{ADS}| = 90^\circ - \alpha.$$



W trójkącie ADS kąt DAS ma miarę α, a kąt ADS ma miarę $90^\circ - \alpha$.
Zatem miara kąta ASD jest równa

$$180^\circ - (\alpha + 90^\circ - \alpha) = 90^\circ.$$

Możemy więc sformułować twierdzenie

> **Twierdzenie: Kąt przecięcia przekątnych rombu**
>
> Przekątne rombu zawierają się w dwusiecznych jego kątów wewnętrznych i przecinają się pod kątem prostym.

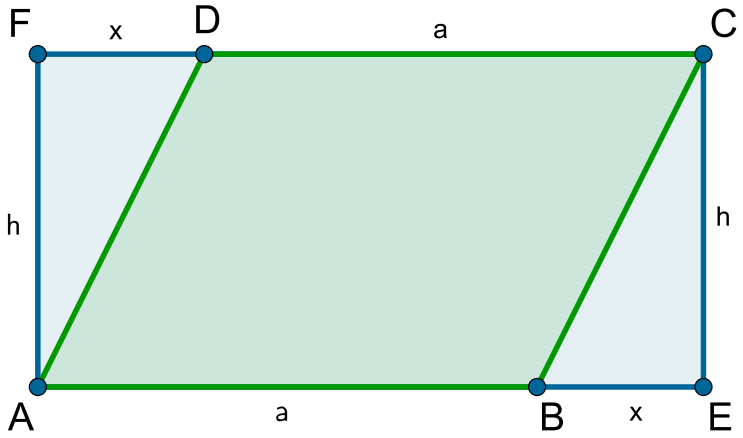
Pola wielokątów

Przypomnijmy znane wzory na pola czworokątów.

- Pole równoległoboku

$$P = a \bullet h,$$

gdzie a jest długością jednego z boków oraz h jest wysokością opuszczoną na ten bok.



Umieśćmy równoległobok ABCD w prostokącie AECF, jak pokazano na rysunku. Trójkąty ADF i CBE są przystające, czyli

$$|BE| = |\mathrm{DF}|.$$

Oznaczmy $|\mathrm{BE}| = x$
Pole równoległoboku ob liczymy odejmując od pola prostokąta sumę pól trójkątów ADF i CBE. Z tych trójkątów można utworzyć prostokąt o bokach h, x. Pole równoległoboku jest równe

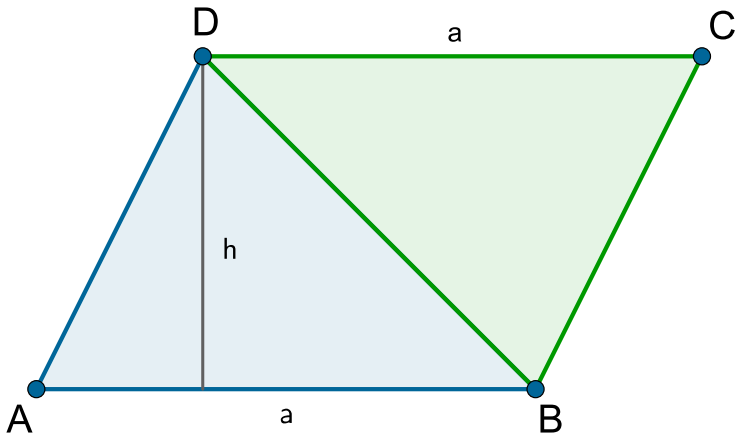
$$P = (a + x)h - \mathrm{xh} = \mathrm{ah}.$$

Zasób interaktywny dostępny pod adresem https://zpe.gov.pl/a/DsPsPBNGb

- Pole trójkąta

$$\mathrm{P} = \frac{1}{2} a \bullet h,$$

gdzie a jest jednym z boków trójkąta, a h jest wysokością opuszczoną na ten bok.



Podzielmy równoległobok ABCD przekątną DB na dwa trójkąty. Zauważmy, że trójkąty ABD i BCD są przystające, ponieważ mają te same długości boków. Zatem pole trójkąta jest równe połowie pola równoległoboku.

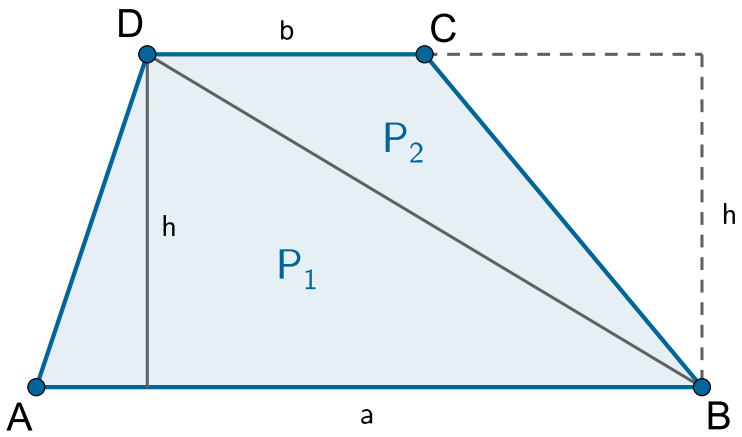
$$P = \frac{a \bullet h}{2}.$$

Zasób interaktywny dostępny pod adresem https://zpe.gov.pl/a/DsPsPBNGb

- Pole trapezu

$$P = \frac{a+b}{2} \bullet h,$$

gdzie a, b są długościami podstaw trapezu, a h jest jego wysokością.



Dzielimy trapez przekątną na dwa trójkąty. Jeden z nich ma podstawę a, drugi podstawę b oraz oba mają tę samą wysokość h.

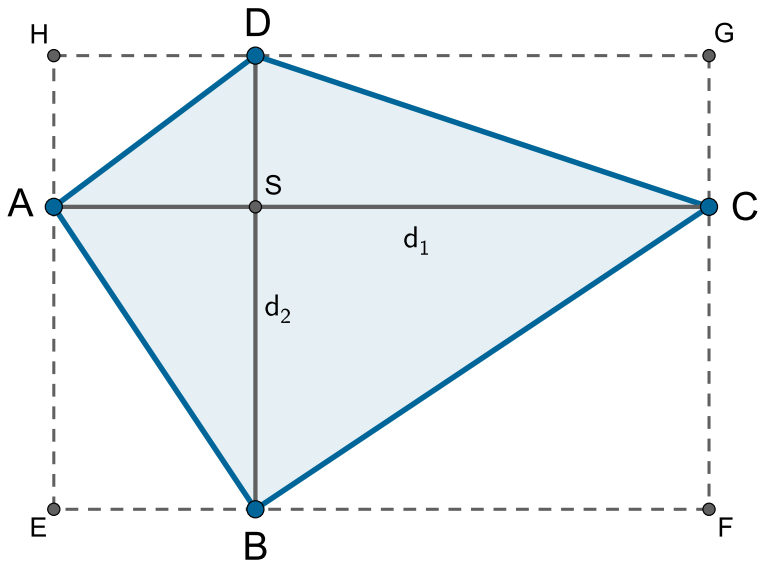
$$P = P_1 + P_2 = \frac{1}{2}\mathrm{ah} + \frac{1}{2}\mathrm{bh} = \frac{a+b}{2} \bullet h$$

Zasób interaktywny dostępny pod adresem https://zpe.gov.pl/a/DsPsPBNGb

Pole czworokąta wypukłego, w którym przekątne przecinają się pod kątem prostym

$$P = \frac{d_1 \bullet d_2}{2},$$

gdzie d_1, d_2 są przekątnymi tego czworokąta.



Czworokąt ABCD umieścimy w prostokącie EFGH, którego boki są równoległe do przekątnych. Prostokąt EFGH jest podzielony na cztery prostokąty. Otrzymujemy cztery pary trójkątów przystających:

- trójkąt ASD jest przystający do trójkąta DHA,
- trójkąt CSD jest przystający do trójkąta DGC,
- trójkąt CSB jest przystający do trójkąta BFC,
- trójkąt ASB jest przystający do trójkąta BEA.

Pole czworokąta ABCD jest więc dwa razy mniejsze od pola prostokąta EFGH, skąd otrzymujemy

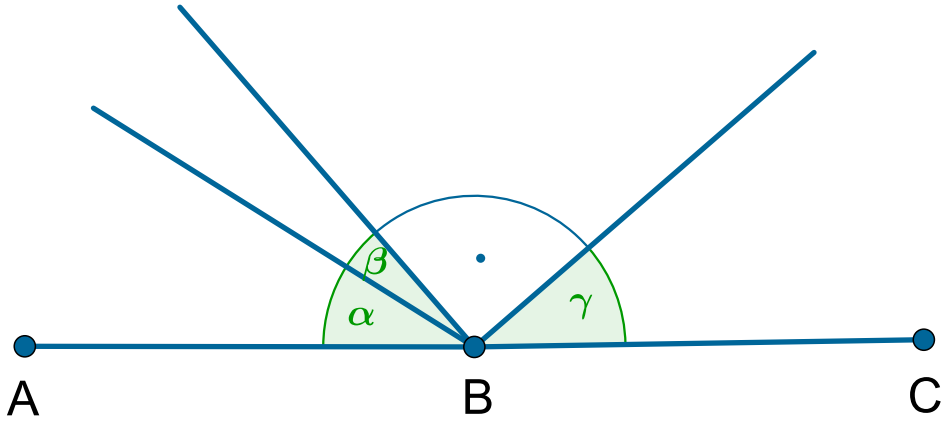
$$P = \frac{d_1 \bullet d_2}{2}.$$

Zadania

Ćwiczenie 1

Na rysunku podane są miary kątów $\alpha,\ \beta,\ \gamma$. Czy wynika z tego, że punkty A, B, C są współliniowe?

$\alpha = 32^\circ \qquad \beta = 17^\circ \qquad \gamma = 40^\circ$



Ćwiczenie 2

Podaj miary kątów przy prostych równoległych.

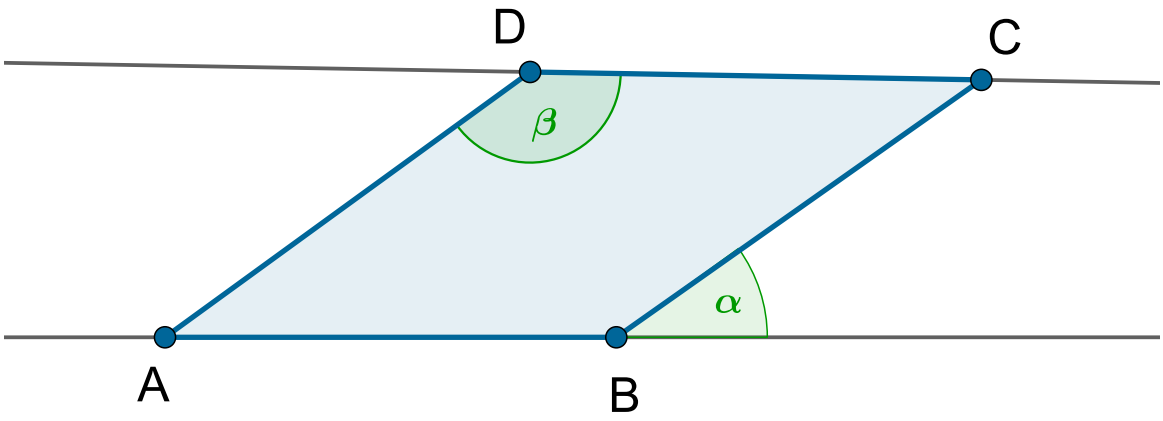
Zasób interaktywny dostępny pod adresem https://zpe.gov.pl/a/DtdP8HWAI

Dwie proste przecięte trzecią prostą – zmienia się położenie trzeciej prostej. Dany jest jeden kąt – należy podać miary pozostałych kątów

Ćwiczenie 3

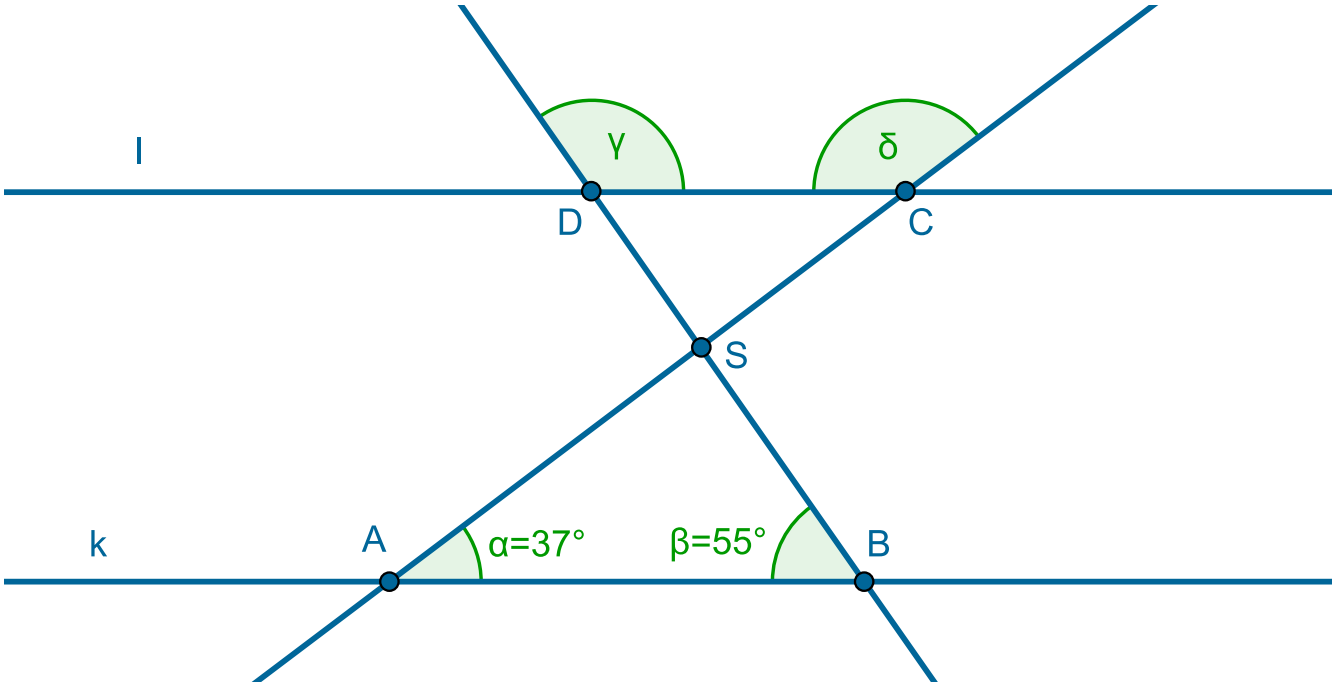
Na rysunku podane są miary kątów $\alpha,\ \beta$. Czy czworokąt $ABCD$ jest równoległobokiem?

$$\alpha = 36^\circ \qquad \beta = 143^\circ$$



Ćwiczenie 4

Proste k i l są równoległe. Miary kątów $\alpha,\ \beta$ podano na rysunku. Czy wynika stąd, że $\gamma = 125^\circ$ oraz $\delta = 143^\circ$?



Ćwiczenie 5

Zaznacz poprawne stwierdzenie.

- [ ] Miary kątów trójkąta pozostają w stosunku $1:2:3$. Wtedy najmniejszy kąt ma miarę 20°.
- [ ] Kąty między jednym z boków trójkąta ostrokątnego i wysokościami opuszczonymi na pozostałe boki mają miary 35° oraz 45°. Kąt leżący naprzeciw tego boku ma miarę 80°.
- [ ] Jeden z kątów trójkąta ma miarę 50°. Miara kąta między dwusiecznymi pozostałych kątów wewnętrznych tego trójkąta jest równa 115°.
- [ ] W trójkącie miara jednego kąta jest dwa razy większa od miary drugiego i trzy razy mniejsza od miary trzeciego kąta. Wtedy największy kąt ma miarę 120°.

Ćwiczenie 6

Zaznacz poprawne stwierdzenie.

- [ ] W osiemnastokącie foremnym miara kąta wewnętrznego wynosi 160°.
- [ ] W dziesięciokącie wypukłym suma miar kątów jest równa 1800°.
- [ ] W pewnym wielokącie wypukłym suma miar kątów wynosi 1620°. Liczba boków tego wielokąta jest równa 11.

Ćwiczenie 7

Zaznacz poprawne stwierdzenie.

- [ ] Liczba przekątnych wielokąta wypukłego jest cztery razy większa od liczby jego boków. Wielokątem tym jest jedenastokąt.
- [ ] W siedemnastokącie wypukłym liczba przekątnych jest równa 119.
- [ ] Pewien wielokąt wypukły ma 35 przekątnych. Liczba boków tego wielokąta jest równa 7.

Ćwiczenie 8

Zaznacz poprawne stwierdzenie.

- [ ] Różnica miar przeciwległych kątów trapezu równoramiennego wynosi 24°. Wówczas miara kąta wewnętrznego przy dłuższej podstawie trapezu jest równa 102°.
- [ ] Z wierzchołka kąta rozwartego równoległoboku poprowadzono dwie wysokości, które tworzą kąt o mierze 30°. Wtedy miara kąta ostrego tego równoległoboku wynosi 60°.
- [ ] Różnica miar dwóch sąsiednich kątów wewnętrznych równoległoboku jest równa 40°. Wówczas kąt rozwarty tego równoległoboku jest równy 140°.

Ćwiczenie 9

W trapezie równoramiennym $ABCD$ podstawa AB jest dwa razy dłuższa od podstawy CD. Przekątna AC zawiera się w dwusiecznej kąta DAB. Pole trapezu jest równe $27\sqrt{3}$. Wtedy

- [ ] długość ramienia trapezu jest równa 6
- [ ] przekątna AC dzieli trapez na dwa trójkąty, z których jeden ma pole dwa razy większe od drugiego
- [ ] ramię trapezu jest dwa razy dłuższe od krótszej podstawy

Ćwiczenie 10

Zaznacz poprawne stwierdzenie.

- [ ] W sześciokącie foremnym o boku długości 3, długość krótszej przekątnej jest równa 6.
- [ ] W pięciokącie foremnym kąt między dwiema przekątnymi poprowadzonymi z tego samego wierzchołka jest równy 36°.
- [ ] W dowolnym wielokącie foremnym wszystkie przekątne przecinają się w jednym punkcie.

Ćwiczenie 11

Zaznacz poprawne stwierdzenie.

- W równoległoboku o obwodzie równym 154, wysokości spełniają warunek $\frac{h_1}{h_2} = \frac{3}{4}$. Wtedy krótszy bok ma długość 44.
- W deltoidzie przekątne mają długości 10 i 7. Wtedy pole tego deltoidu wynosi 70.
- Krótsza przekątna trapezu prostokątnego dzieli go na trójkąt prostokątny i trójkąt równoboczny. Dłuższa podstawa trapezu jest równa 8. Wtedy obwód trapezu ma długość $20 + 4\sqrt{3}$.

Ćwiczenie 12

Dziewięciokąt $\mathrm{ABCDEFGHI}$ jest foremny. Wynika stąd, że

- wielokąt ten ma 27 przekątnych
- miara kąta ABC wynosi 150°
- z wierzchołka D można poprowadzić 9 przekątnych
- suma miar wszystkich kątów wewnętrznych wielokąta jest równa 1620°

Ćwiczenie 13

Jeden z kątów trójkąta ma miarę 72°. Jeden z pozostałych jest 5 razy większy od drugiego. Miary tych kątów to

- ◯ 28° i 80°
- ◯ 21° i 105°
- ◯ 20° i 100°
- ◯ 18° i 90°

Ćwiczenie 14

Dwa sąsiednie kąty równoległoboku różnią się o 20°. Kąt ostry tego równoległoboku ma miarę

- ◯ 40°
- ◯ 60°
- ◯ 80°
- ◯ 20°

Ćwiczenie 15

W trójkącie ABC poprowadzono dwusieczne kątów CAB i ABC. Dwusieczne te przecinają się w punkcie P. Kąt APB jest

- ◯ mniejszy lub równy 60°
- ◯ rozwarty
- ◯ prosty
- ◯ ostry, ale większy od 60°

Ćwiczenie 16

Obwód sześciokąta foremnego jest równy 36. Pole tego sześciokąta jest równe

- ◯ $27\sqrt{3}$
- ◯ $9\sqrt{3}$
- ◯ $54\sqrt{3}$
- ◯ $18\sqrt{3}$

Ćwiczenie 17

Stosunek długości boków równoległoboku jest równy $3:5$, a krótsza z jego wysokości ma długość 6. Wówczas druga wysokość jest równa

- 10
- 15
- 6
- $3{,}6$

Ćwiczenie 18

Dany jest trapez prostokątny $ABCD$ o dłuższej podstawie AB . Ramię AD jest prostopadłe do podstaw, a długość boku BC jest dwa razy większa od różnicy długości podstaw trapezu. Kąt ABC ma miarę

- 60°
- 30°
- 75°
- 45°

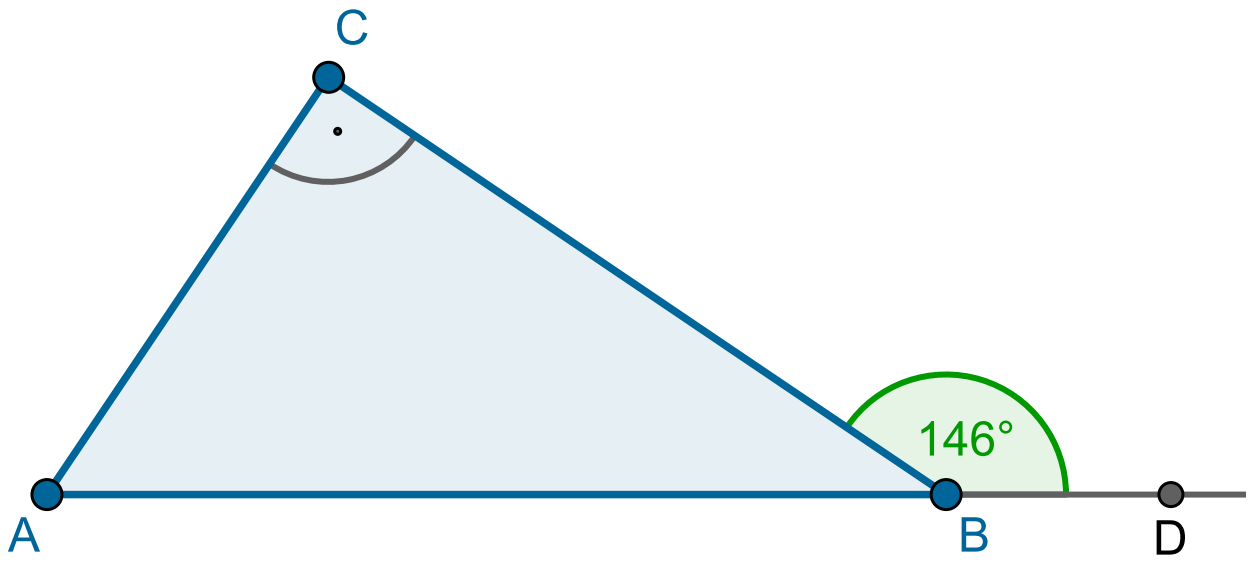
Ćwiczenie 19

Przekątna BD rombu ABCD ma taką samą długość jak bok rombu. Wynika stąd, że

- ◯ obwód rombu jest równy $2|\mathrm{AC}|$
- ◯ pole rombu jest równe $|\mathrm{BD}|^2$
- ◯ $|\mathrm{AC}| = 2|\mathrm{BD}|$
- ◯ $|\sphericalangle \mathrm{ABC}| = 120^\circ$

Ćwiczenie 20

Na rysunku przedstawiony jest trójkąt ABC.

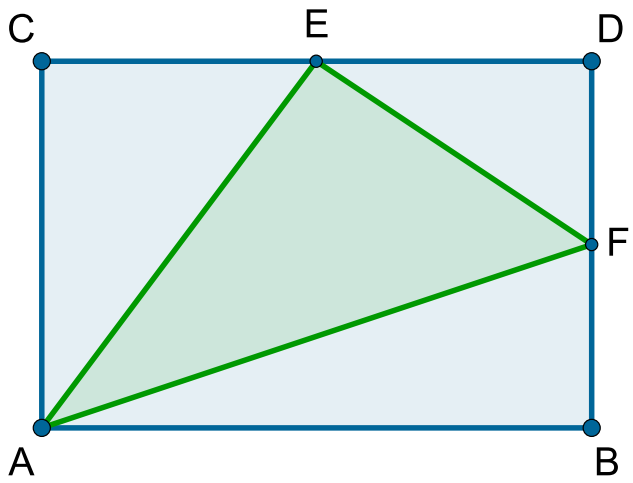


Wtedy

- $|\sphericalangle \mathrm{CAB}| = 146^\circ$
- $|\sphericalangle \mathrm{CAB}| = 34^\circ$
- $|\sphericalangle \mathrm{CAB}| = 56^\circ$
- $|\sphericalangle \mathrm{CAB}| = 68^\circ$

Ćwiczenie 21

Punkty E i F są środkami boków prostokąta ABCD.



Jaką częścią pola prostokąta jest pole trójkąta AFE?

- $\frac{7}{8}$
- $\frac{5}{8}$
- $\frac{1}{2}$
- $\frac{3}{8}$

Ćwiczenie 22

Ile boków ma wielokąt foremny, którego każdy kąt wewnętrzny ma miarę 160°?

Ćwiczenie 23

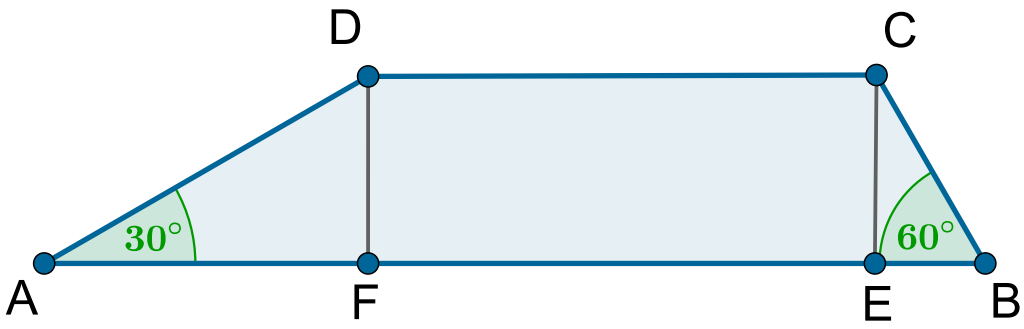
Dany jest trapez $ABCD$ o podstawach AB i CD, w którym $|AD| = |DC| = 3$.

a. Czy wysokość tego trapezu może być równa 4? Odpowiedź uzasadnij.

b. Uzasadnij, że przekątna AC zawiera się w dwusiecznej kąta DAB.

Ćwiczenie 24

Podstawy trapezu mają długości 6 i 10. Miary kątów przy dłuższej podstawie są równe 30° i 60°.
Oblicz pole trapezu.



Ćwiczenie 25

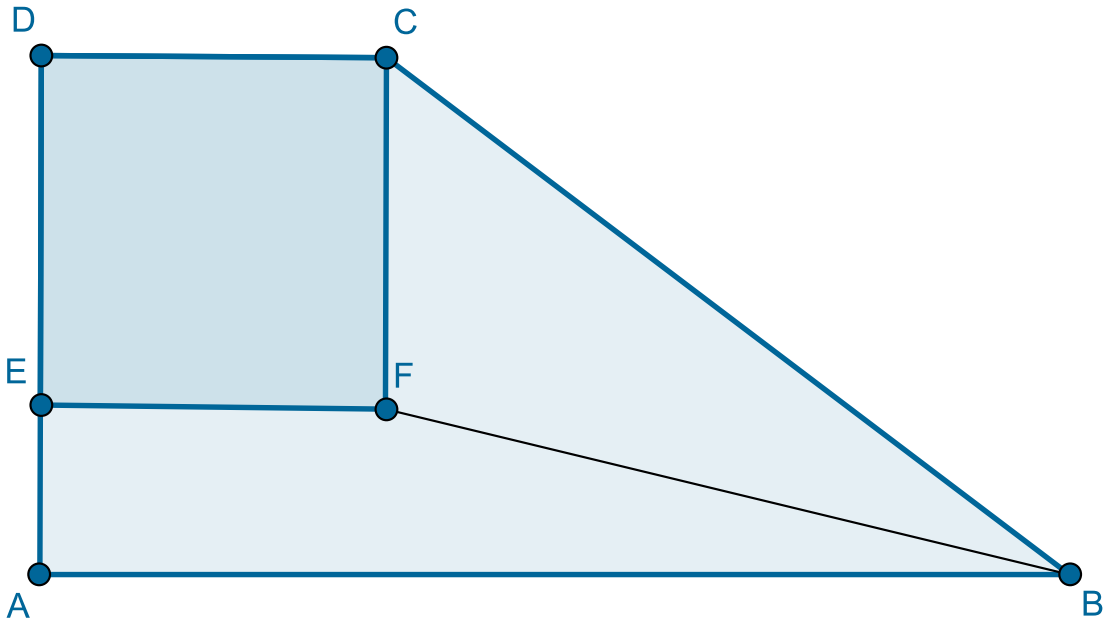
W trapezie $ABCD$ poprowadzono krótszą przekątną, która podzieliła go na trójkąt prostokątny i trójkąt równoboczny. Oblicz miary kątów tego trapezu. Rozważ wszystkie przypadki.

Ćwiczenie 26

Dany jest romb, którego kąt ostry ma miarę 45°, a jego pole jest równe $72\sqrt{2}$. Oblicz długość boku tego rombu.

Ćwiczenie 27

Trapez prostokątny $ABCD$ podzielono na trzy figury o równych polach, tak jak na rysunku. Długość boku kwadratu $CDEF$ jest równa 6. Oblicz obwód i pole trapezu $ABCD$.



Ćwiczenie 28

Jaka jest miara kąta pomiędzy dwiema przekątnymi różnej długości poprowadzonymi z tego samego wierzchołka sześciokąta foremnego ?

Ćwiczenie 29

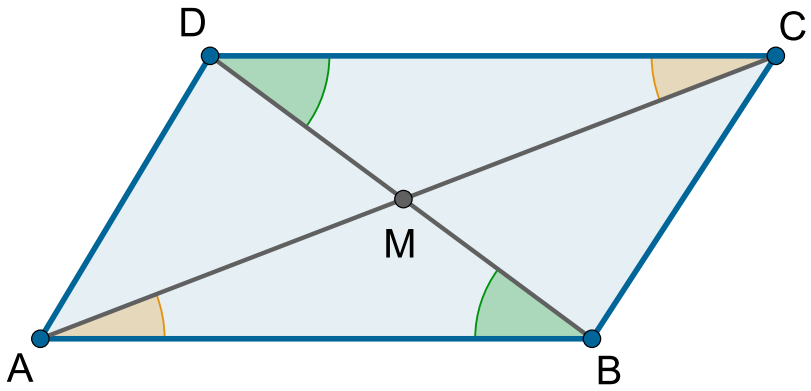
Udowodnij, że dwusieczne dwóch sąsiednich kątów równoległoboku są prostopadłe.

Przykłady

W poniższych przykładach pokażemy zastosowanie cech przystawania trójkątów w zadaniach na dowodzenie.

Przykład 1

W równoległoboku $ABCD$ przekątne AC i BD przecinają się w punkcie M. Wykaż, że trójkąty ABM i CDM są przystające.
Czworokąt $ABCD$ jest równoległobokiem, a zatem boki AB i CD są równe oraz zawierają się w prostych równoległych. Wynika stąd, że kąty CAB i DCA mają równe miary oraz kąty DBA i BDC mają równe miary.



Stąd i z równości

$$|AB| = |CD|,$$

wynika, że trójkąty ABM i CDM są przystające, co stwierdzamy na mocy cechy kąt-bok-kąt.
Uwaga. Z przystawania trójkątów ABM i CDM wynika, że $|AM| = |MC|$ i $|BM| = |MD|$. Prawdziwe jest zatem poniższe twierdzenie.

Twierdzenie: Przekątne w równoległoboku

W dowolnym równoległoboku przekątne dzielą się na połowy.

Prawdziwe jest również twierdzenie odwrotne.

Twierdzenie: Czworokąt, który jest równoległobokiem

Czworokąt, którego przekątne dzielą się na połowy jest równoległobokiem.

Dowód

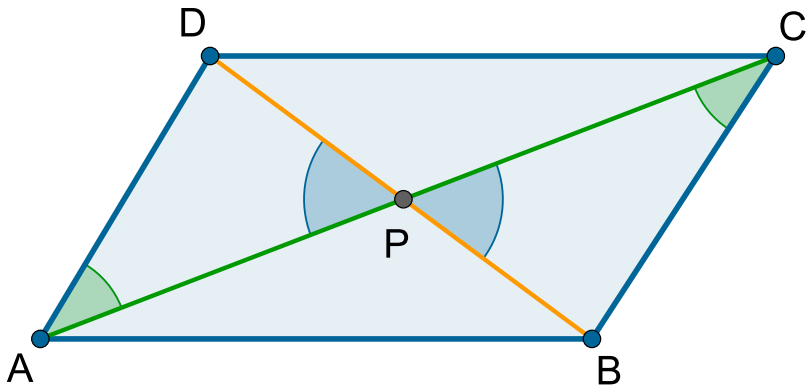
Dla dowodu rozpatrzmy czworokąt $ABCD$, którego przekątne AC i BD przecinają się w punkcie P będącym środkiem każdej z nich. Wtedy

$$|AP| = |CP|, \ |DP| = |BP|$$

oraz

$$|\sphericalangle APD| = |\sphericalangle BPC|,$$

jako kąty wierzchołkowe. Zatem trójkąty APD i BPC są przystające, co stwierdzamy na mocy cechy bok-kąt-bok.

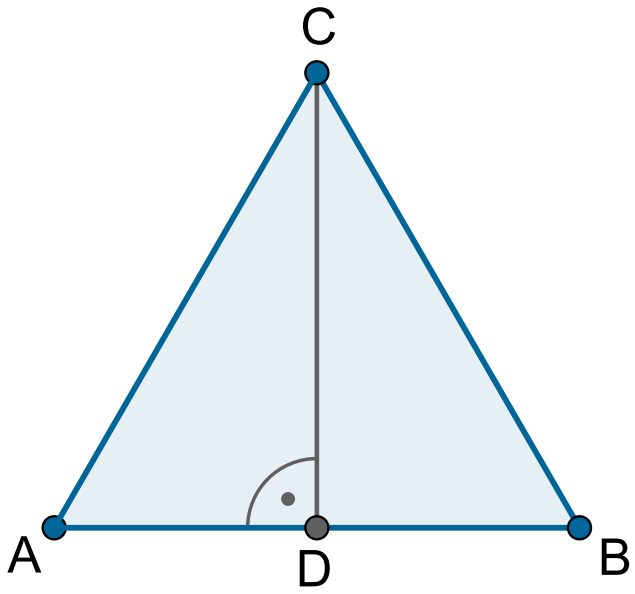


Wobec tego $|AD| = |BC|$, a także $|\sphericalangle PAD| = |\sphericalangle PCB|$, skąd wniosek, że proste AD i BC są równoległe.
Skoro dwa boki czworokąta $ABCD$ są równe i równoległe, to jest on równoległobokiem, co kończy dowód.

Przykład 2

- W trójkącie ABC środek boku AB jest spodkiem wysokości opuszczonej z wierzchołka C. Wykaż, że boki AC i BC tego trójkąta są równe.

Oznaczmy przez D środek boku AB. Trójkąty ADC i BDC są prostokątne. Mają wspólną przyprostokątną DC, a także $|AD| = |DB|$.

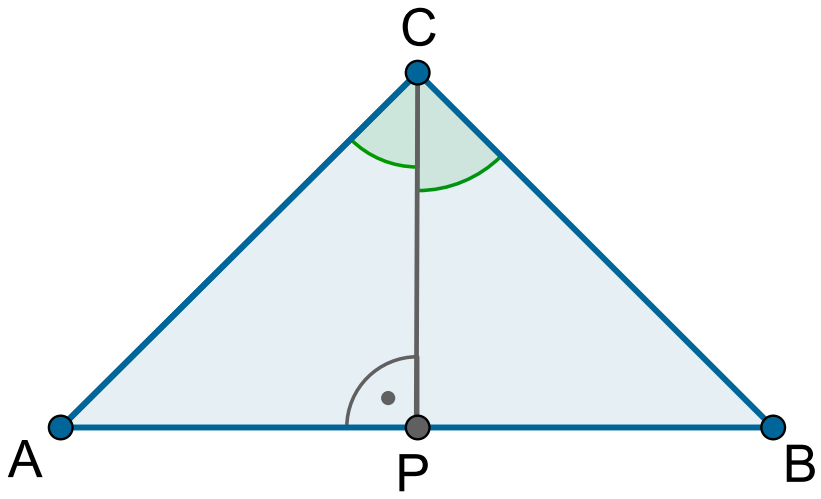


Są to więc trójkąty przystające (na mocy cechy bok-kąt-bok). Stąd wynika, że $|AC| = |BC|$. To spostrzeżenie kończy dowód.

- W trójkącie ABC spodkiem wysokości opuszczonej z wierzchołka C na bok AB jest taki punkt P, że kąty ACP i BCP mają równe miary. Wykaż, że

$$|AC| = |BC|.$$

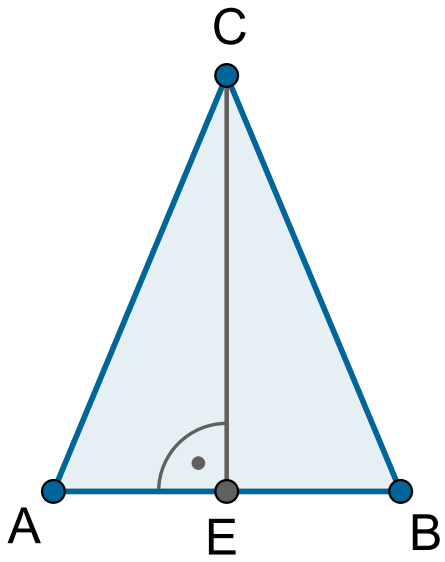
Trójkąty APC i BPC są prostokątne, mają wspólną przyprostokątną PC, a także kąty ACP i BCP mają równe miary.



Trójkąty te są zatem przystające (na mocy cechy kąt-bok-kąt). Stąd $|\mathrm{AC}| = |\mathrm{BC}|$. Koniec dowodu.

- W trójkącie ABC boki AC i BC są równe. Wykaż, że spodkiem wysokości opuszczonej z wierzchołka C tego trójkąta jest środek boku AB.

Oznaczmy przez E spodek wysokości poprowadzonej z wierzchołka C na bok AB.



Wtedy z twierdzenia Pitagorasa w trójkątach prostokątnych AEC i BEC mamy odpowiednio

$$|\mathrm{AE}|^2 + |\mathrm{EC}|^2 = |\mathrm{AC}|^2$$

$$|\mathrm{BE}|^2 + |\mathrm{EC}|^2 = |\mathrm{BC}|^2,$$

skąd

$$|\mathrm{AE}|^2 = |\mathrm{AC}|^2 - |\mathrm{EC}|^2$$

$$|\mathrm{BE}|^2 = |\mathrm{BC}|^2 - |\mathrm{EC}|^2.$$

Skoro $|\mathrm{AC}| = |\mathrm{BC}|$, to $|\mathrm{AE}|^2 = |\mathrm{BE}|^2$. Uwzględniając, że $|\mathrm{AE}| > 0$ oraz $|\mathrm{BE}| > 0$, otrzymujemy $|\mathrm{AE}| = |\mathrm{BE}|$, czyli punkt E jest środkiem boku AB, co należało wykazać.

Uwaga!

Ponieważ odpowiednie boki w trójkątach AEC i BEC są równe, to na mocy cechy bok-bok-bok stwierdzamy, że trójkąty te są przystające. Wynika z tego, że

$$|\sphericalangle \mathrm{CA}E| = |\sphericalangle \mathrm{CBE}|,$$

$$|\sphericalangle \mathrm{ACE}| = |\sphericalangle \mathrm{BCE}|.$$

Prawdziwe jest więc poniższe twierdzenie.

Twierdzenie: Trójkąt równoramienny

W dowolnym trójkącie równoramiennym

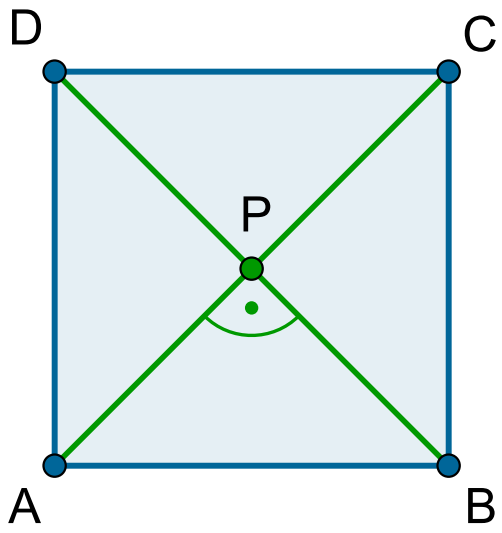
- kąty wewnętrzne przy podstawie są równe,
- środek podstawy jest spodkiem wysokości opuszczonej na tę podstawę,
- wysokość poprowadzona z wierzchołka kąta wspólnego dla ramion zawiera się w dwusiecznej tego kąta.

Przykład 3

W prostokącie ABCD przekątne AC i BD przecinają się pod kątem prostym. Wykaż, że

$$|\mathrm{AB}| = |\mathrm{BC}|.$$

Oznaczmy przez P punkt przecięcia przekątnych AC i BD prostokąta ABCD. Jest on środkiem każdej z tych przekątnych, bo czworokąt ABCD jest równoległobokiem.



Zauważmy, że punkt P jest spodkiem wysokości poprowadzonej w trójkącie ABC z wierzchołka B na bok AC. Wobec tego trójkąt ABC jest równoramienny i

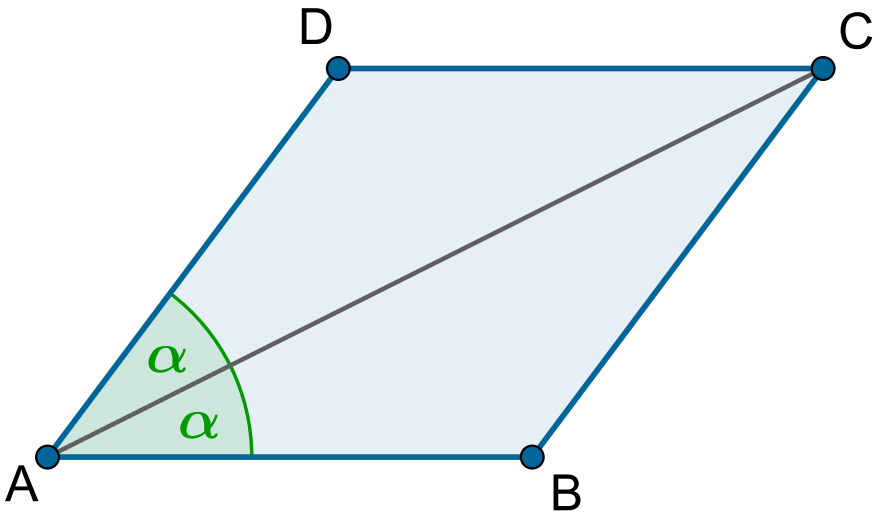
$$|\mathrm{AB}| = |\mathrm{BC}|.$$

To spostrzeżenie kończy dowód.
Udowodniliśmy więc, że prostokąt, którego przekątne przecinają się pod kątem prostym jest kwadratem.

Przykład 4

W równoległoboku ABCD przekątna AC zawiera się w dwusiecznej kąta BAD. Wykaż, że przekątne AC i BD tego równoległoboku przecinają się pod kątem prostym.
Oznaczmy przez α miarę każdego z kątów, na które dwusieczna AC podzieliła kąt BAD

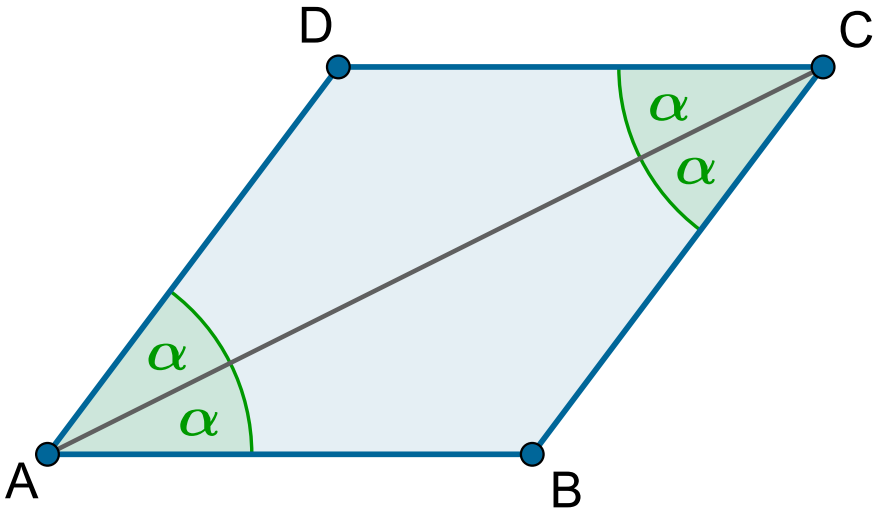
$$|\sphericalangle \mathrm{CAB}| = \alpha,\ |\sphericalangle \mathrm{CAD}| = \alpha.$$



Wtedy

$$|\sphericalangle \mathrm{ACD}| = \alpha$$

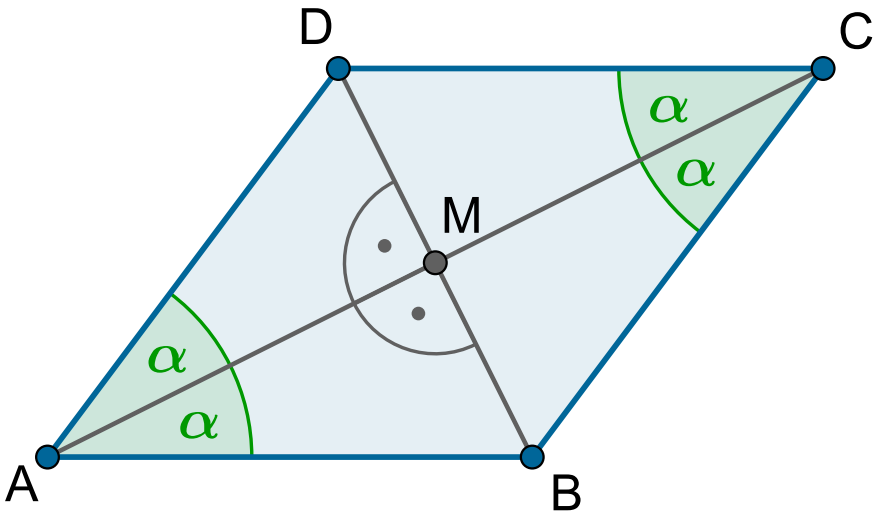
$$|\sphericalangle \mathrm{ACB}| = \alpha.$$



Trójkąty ABC i ADC są zatem równoramienne, bo w każdym z nich kąty przy podstawie AC mają miarę równą α. Zatem

$$|\mathrm{AB}| = |\mathrm{BC}| = |\mathrm{CD}| = |\mathrm{AD}|$$

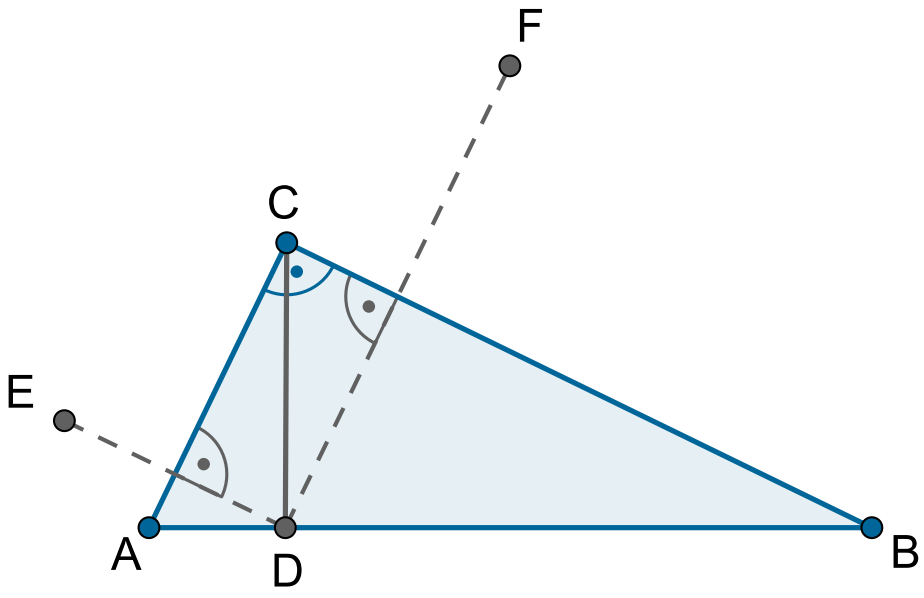
Wynika z tego, że spodkiem wysokości poprowadzonej z wierzchołka B trójkąta ABC na podstawę AC jest środek M odcinka AC, który jest również spodkiem wysokości poprowadzonej z wierzchołka D trójkąta ADC na podstawę AC.



Wobec tego miary kątów BMA i AMD sumują się do kąta półpełnego, zatem punkt M leży na przekątnej BD.
To oznacza, że przekątne AC i BD równoległoboku przecinają się pod kątem prostym.
Koniec dowodu.
Uwaga. Wykazaliśmy, że jeżeli w równoległoboku ABCD przekątna AC zawiera się w dwusiecznej kąta BAD, to równoległobok ABCD jest rombem.

Przykład 5

W trójkącie prostokątnym ABC punkt D jest spodkiem wysokości opuszczonej z wierzchołka kąta prostego C na przeciwprostokątną AB. Punkt E jest symetryczny do punktu D względem prostej AC, a punkt F jest symetryczny do punktu D względem prostej BC.

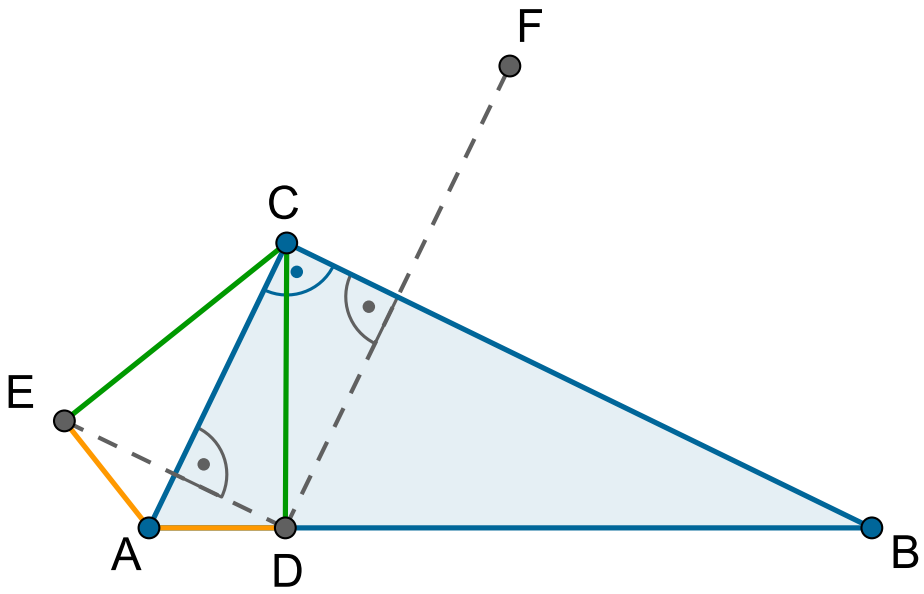


Wykażemy, że punkty C, E i F leżą na jednej prostej.
Zauważmy, że prosta AC jest symetralną odcinka DE. Wynika stąd, że

$$|\mathrm{AE}| = |\mathrm{AD}|,$$

$$|\mathrm{CE}| = |\mathrm{CD}|.$$

Wobec tego trójkąty EAC i DAC są przystające, co stwierdzamy na mocy cechy bok-bok-bok.

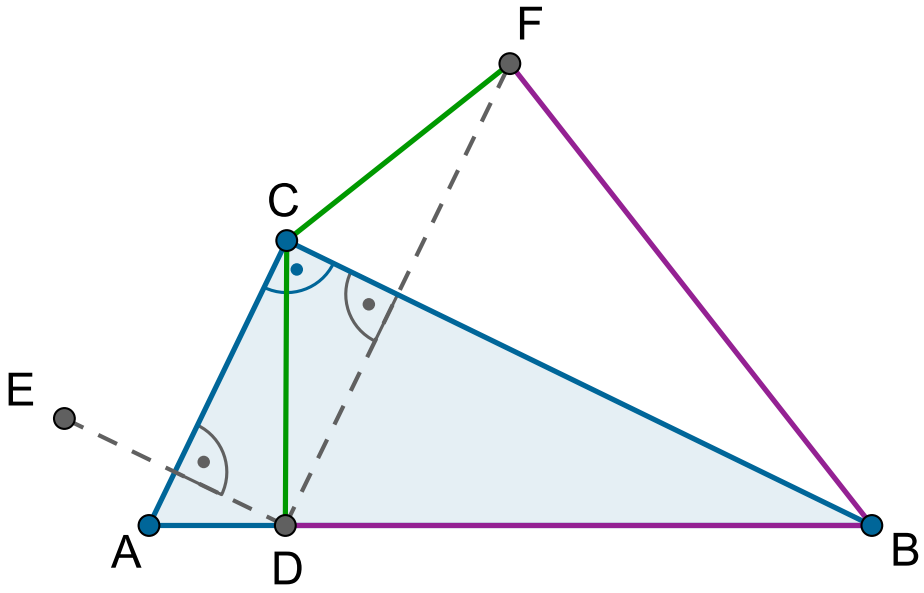


Zauważmy też, że prosta BC jest symetralną odcinka DF. Wynika stąd, że

$$|\mathrm{BF}| = |\mathrm{BD}|,$$

$$|\mathrm{CF}| = |\mathrm{CD}|.$$

Zatem trójkąty FBC i DBC są przystające, co stwierdzamy na mocy cechy bok-bok-bok.



W trójkącie ABC kąt ACB jest prosty. Oznaczmy przez α miarę kąta CAB. Wtedy

$$|\sphericalangle CBA| = 90^\circ - \alpha.$$

W trójkącie prostokątnym ADC kąt przy wierzchołku D jest prosty i

$$|\sphericalangle CAD| = \alpha,$$

więc

$$|\sphericalangle DCA| = 90^\circ - \alpha.$$

Wobec tego

$$|\sphericalangle ECA| = 90^\circ - \alpha.$$

(bo DCA i ECA to odpowiednie kąty w trójkątach przystających EAC i DAC).
W trójkącie prostokątnym BDC kąt przy wierzchołku D jest prosty i

$$|\sphericalangle DBC| = 90^\circ - \alpha.$$

Zatem

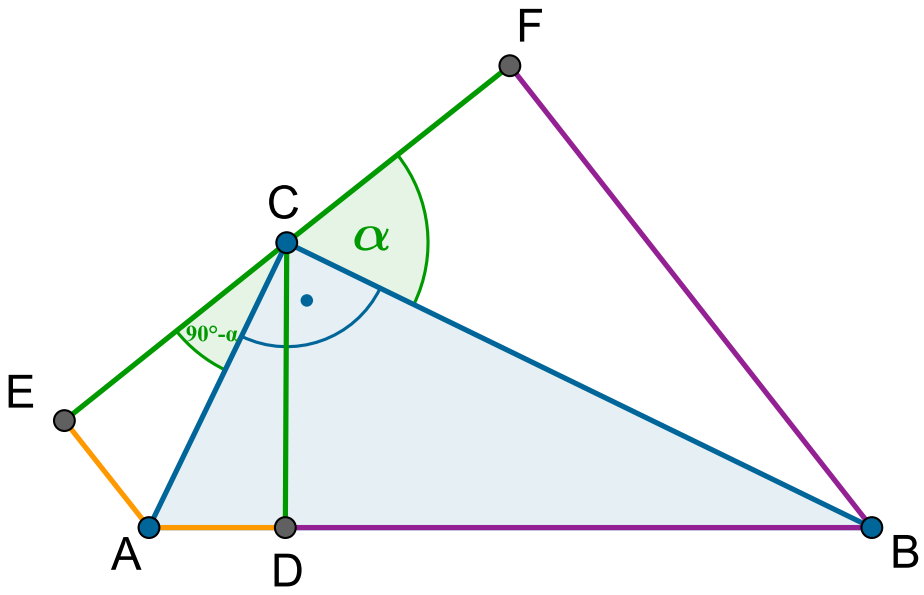
$$|\sphericalangle BCD| = \alpha.$$

Wobec tego

$$|\sphericalangle BCF| = \alpha,$$

(bo $\sphericalangle BCD$ i $\sphericalangle BCF$ to odpowiednie kąty w trójkątach przystających FBC i DBC).
Obliczmy miarę kąta ECF. Mamy

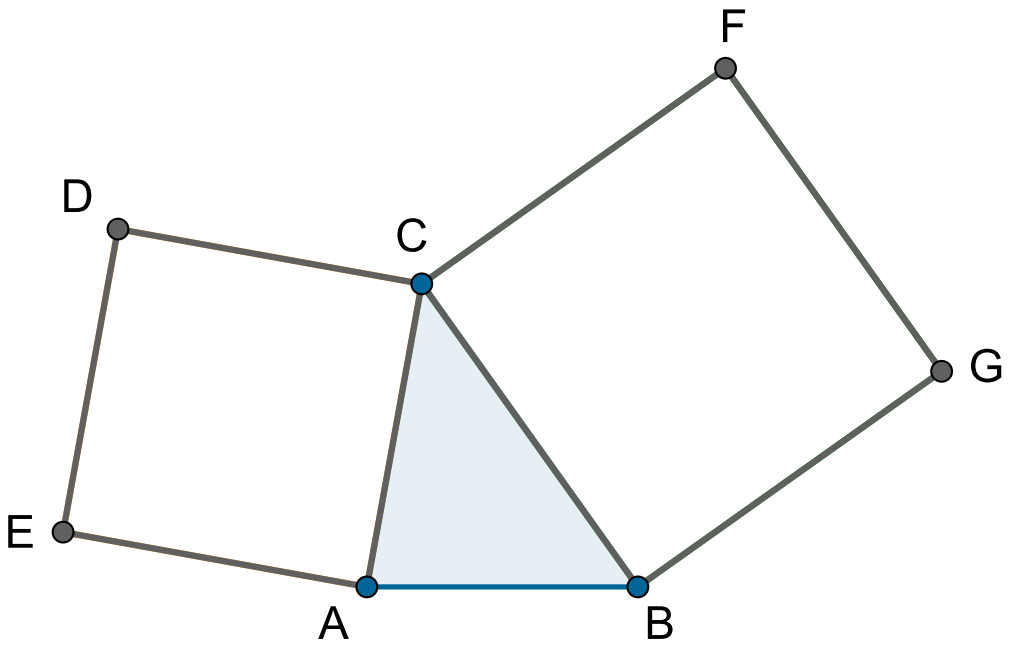
$$|\sphericalangle \mathrm{ECF}| = |\sphericalangle \mathrm{ECA}| + |\sphericalangle \mathrm{ACB}| + |\sphericalangle \mathrm{BCF}| = (90^\circ - \alpha) + 90^\circ + \alpha = 180^\circ.$$



Wynika z tego, że punkty C, E i F leżą na jednej prostej, a to właśnie należało udowodnić.

Przykład 6

Na bokach AC i BC trójkąta ostrokątnego ABC zbudowano kwadraty ACDE i BCFG.



Wykażemy, że odcinki BD i AF mają równe długości.
Oznaczmy

$$|\mathrm{AC}| = \mathrm{b},\ |\mathrm{BC}| = \mathrm{a}\,,\ |\sphericalangle \mathrm{ACB}| = \gamma.$$

Czworokąt ACDE jest kwadratem, więc $|\mathrm{CD}| = |\mathrm{AC}| = \mathrm{b}$. Czworokąt BCFG jest również kwadratem, więc

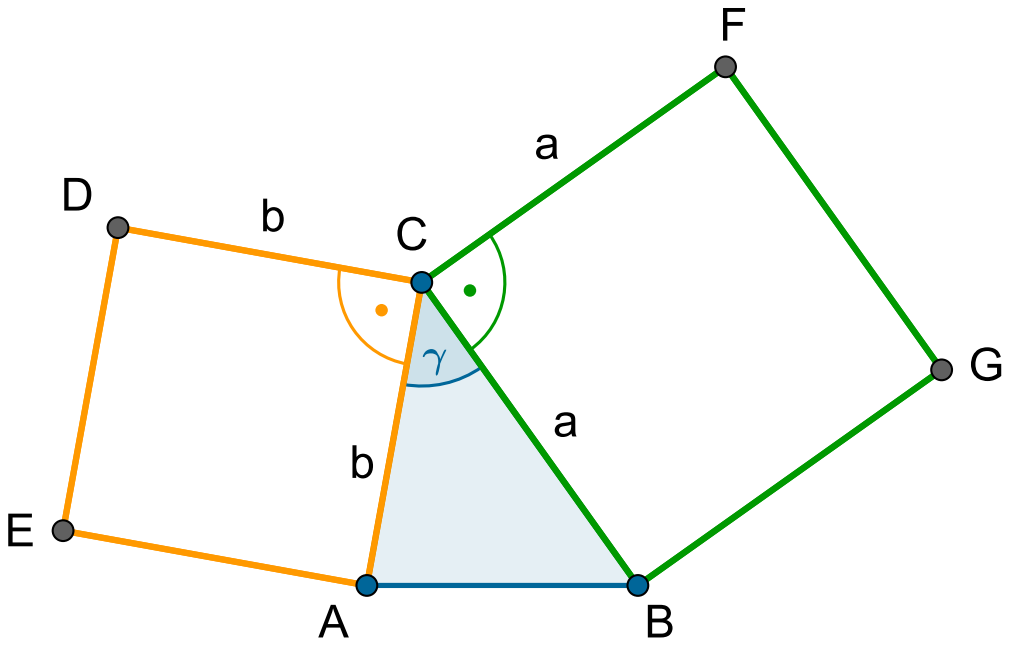
$$|\mathrm{CF}| = |\mathrm{BC}| = a.$$

Ponadto

$$|\sphericalangle \mathrm{DCB}| = |\sphericalangle \mathrm{DCA}| + |\sphericalangle \mathrm{ACB}| = 90^\circ + \gamma$$

oraz

$$|\sphericalangle \mathrm{ACF}| = |\sphericalangle \mathrm{ACB}| + |\sphericalangle \mathrm{BCF}| = \gamma + 90^\circ.$$



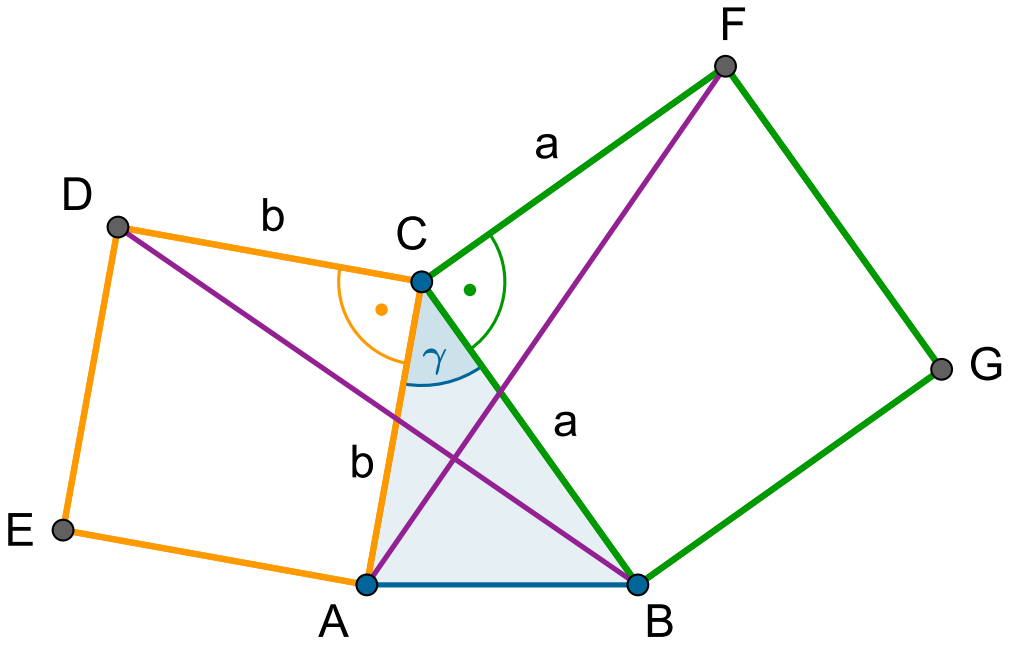
Wobec tego

$$|\mathrm{CD}| = |\mathrm{AC}| = \mathrm{b}$$

$$|\sphericalangle \mathrm{DCB}| = |\sphericalangle \mathrm{ACF}| = 90^\circ + \gamma$$

$$|\mathrm{CB}| = |\mathrm{CF}| = \mathrm{a},$$

więc trójkąty DCB i ACF są przystające, na mocy cechy bok-kąt-bok.
Wynika z tego, że $|\mathrm{BD}| = |\mathrm{AF}|$ (bo są to odpowiednie boki w trójkątach przystających).



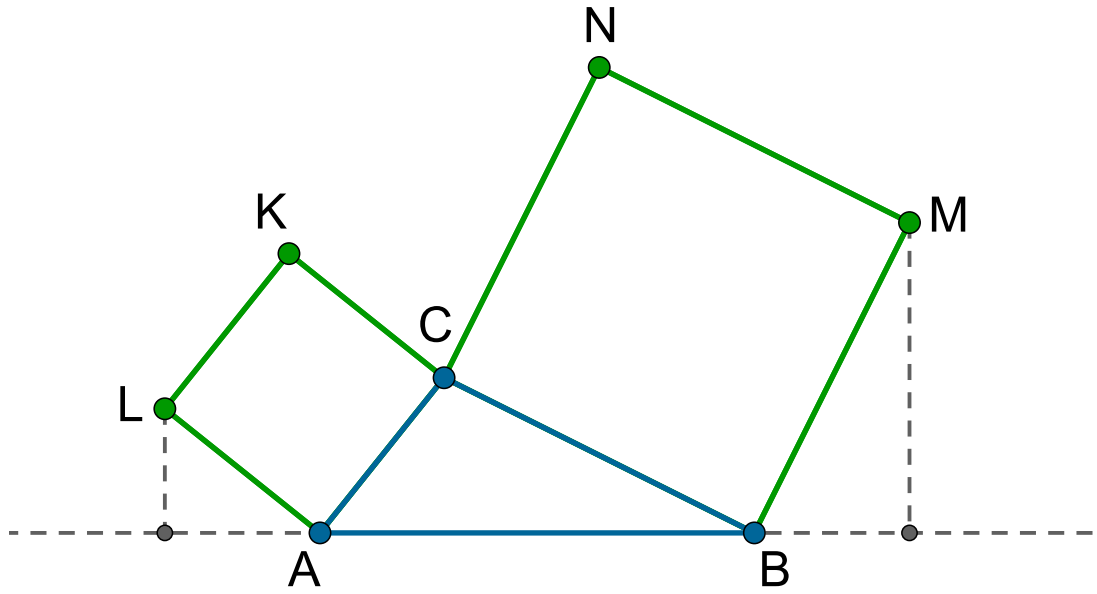
To kończy dowód.

Przykład 7

Na bokach AB, BC i CA trójkąta równobocznego ABC wybrano odpowiednio punkty K, L i M tak, że

$$|\mathrm{AK}| = |\mathrm{BL}| = |\mathrm{CM}|.$$

Wykaż, że trójkąt KLM jest równoboczny.
Oznaczmy przez a długość boku trójkąta równobocznego ABC i przez x – długość każdego z odcinków AK, BL i CM. Wtedy każdy z odcinków AM, CL i BK ma długość $a-x$.



Ponieważ

$$|\mathrm{AK}| = |\mathrm{BL}| = |\mathrm{CM}| = \mathrm{x}$$

$$|\sphericalangle \mathrm{MAK}| = |\sphericalangle \mathrm{KBL}| = |\sphericalangle \mathrm{LCM}| = 60^\circ$$

$$|\mathrm{MA}| = |\mathrm{KB}| = |\mathrm{LC}| = \mathrm{a} - \mathrm{x}$$

to trójkąty MAK, KBL i LCM są przystające, na mocy cechy bok-kąt-bok.
Wobec tego odcinki MK, KL i LM są równe, więc trójkąt KLM jest równoboczny.
Koniec dowodu.

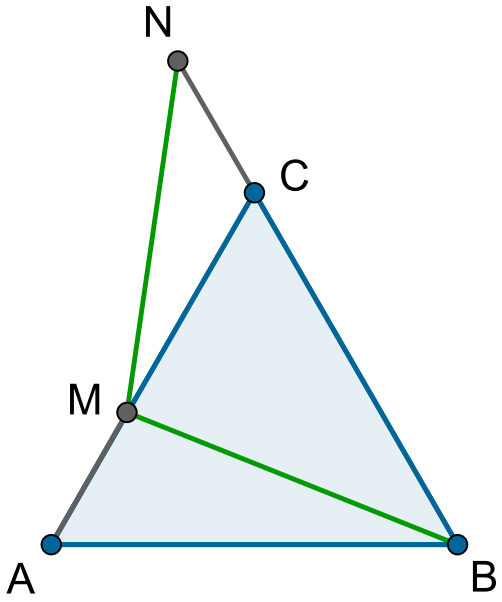
Przykład 8

Trójkąt ABC przedstawiony na poniższym rysunku jest równoboczny, a punkty B, C, N są współliniowe. Na boku AC wybrano punkt M taki, że

$$|\mathrm{AM}| = |\mathrm{CN}|.$$

Wykaż, że

$$|\mathrm{BM}| = |\mathrm{MN}|.$$

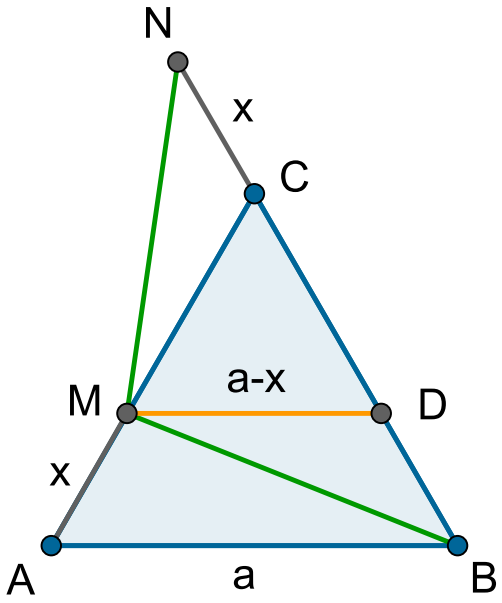


Oznaczamy

$$|\mathrm{AB}| = |\mathrm{BC}| = |\mathrm{CA}| = a, |\mathrm{AM}| = |\mathrm{CN}| = x.$$

- sposób I

Wybierzmy na boku BC taki punkt D, że odcinki MD i AB są równoległe.



Wtedy

$$|\sphericalangle \mathrm{CMD}| = |\sphericalangle \mathrm{CAB}| = 60^\circ,$$

czyli trójkąt CMD jest równoboczny, a jego bok jest równy $a-x$. Zatem

$$|\mathrm{MD}| = |\mathrm{CM}| = \mathrm{a} - \mathrm{x},$$

$$|\mathrm{BD}| = |\mathrm{BC}| - |\mathrm{CD}| = \mathrm{a} - (\mathrm{a} - \mathrm{x}) = \mathrm{x}\,, |\mathrm{CN}| = \mathrm{x},$$

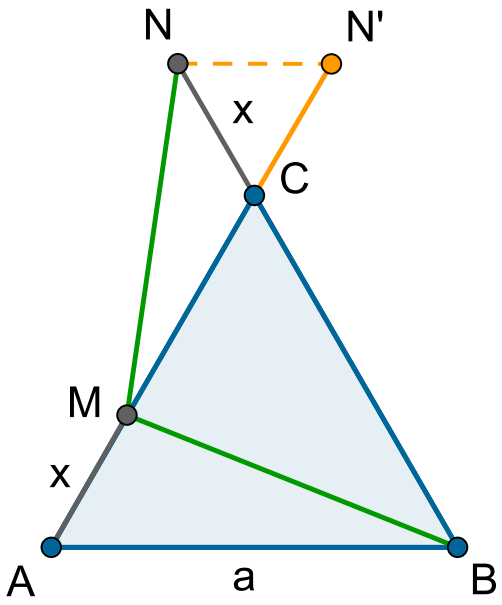
$$|\sphericalangle \mathrm{BDM}| = 120^\circ, |\sphericalangle \mathrm{NCM}| = 120^\circ,$$

więc trójkąty BDM i MCN są przystające, na mocy cechy bok-kąt-bok.
Wobec tego odcinki BM i MN są równe.
Koniec dowodu.

- sposób II

Przedłużamy bok AC o odcinek CN ’ tak, że

$$|\mathrm{MN}\,'| = a.$$



Wtedy w trójkącie NC N’ mamy

$$|\mathrm{CN}| = |\mathrm{CN'}| = \mathrm{x}$$

oraz

$$|\sphericalangle \mathrm{NCN'}| = 60^\circ,$$

więc trójkąt NCN’ jest równoboczny.
Wynika z tego, że

$$|NN'| = x.$$

Zatem

$$|MN'| = |AB| = a,$$

$$|NN'| = |MA| = x,$$

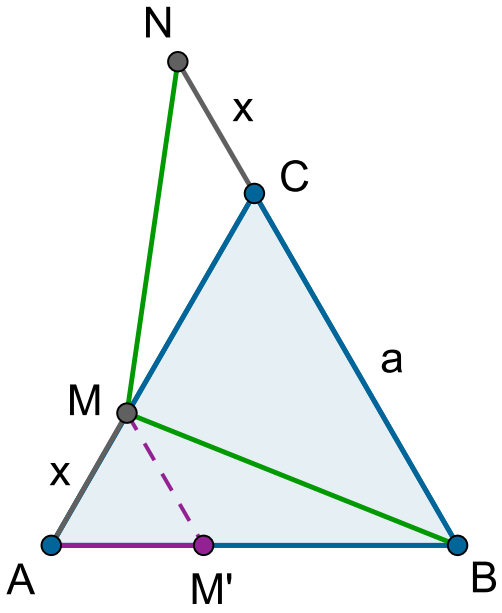
$$|\sphericalangle MN'N| = 60^\circ, \ |\sphericalangle BAM| = 60^\circ,$$

więc trójkąty MN'N i BAM są przystające, na mocy cechy bok-kąt-bok. Wobec tego odcinki BM i MN są równe. Koniec dowodu.

- sposób III

Na boku AB odkładamy taki punkt M', że

$$|AM'| = |AM| = x.$$



Wówczas trójkąt AMM' jest równoboczny, a jego bok jest równy x. Wynika z tego, że

$$|MM'| = x, |\sphericalangle BM'M| = 120^\circ.$$

Wobec tego

$$|MM'| = |NC| = x$$

$$|M'B| = |CM| = a - x$$

$$|\measuredangle \mathrm{MM'B}| = 120^\circ,\ |\measuredangle \mathrm{NCM}| = 120^\circ,$$

więc trójkąty MM'B i NCM są przystające, na mocy cechy bok-kąt-bok.
Zatem odcinki BM i MN są równe.
Koniec dowodu.

Zadania

Ćwiczenie 1

W trójkącie nierównoramiennym ABC punkt D jest środkiem boku AB. Wykaż, że odległości punktów A i B od prostej CD są równe.

Ćwiczenie 2

Pięciokąt ABCDE jest foremny. Wykaż, że wszystkie przekątne tego pięciokąta są równe.

Ćwiczenie 3

Ośmiokąt $\mathrm{ABCDEFGH}$ jest foremny. Wykaż, że czworokąt ACEG jest kwadratem.

Ćwiczenie 4

Na przekątnej AC równoległoboku ABCD wybrano punkty E i F, takie że $|\mathrm{AE}| = |\mathrm{CF}|$. Wykaż, że $|\mathrm{BF}| = |\mathrm{DE}|$.

Ćwiczenie 5

W trapezie równoramiennym ABCD podstawa AB jest dłuższa od podstawy CD. Na przekątnych AC i BD wybrano punkty odpowiednio P i Q tak, że $|\mathrm{AP}| = \frac{1}{3}|\mathrm{AC}|$ i $|\mathrm{BQ}| = \frac{1}{3}|\mathrm{BD}|$.
Wykaż, że $|\mathrm{AQ}| = |\mathrm{BP}|$.

Ćwiczenie 6

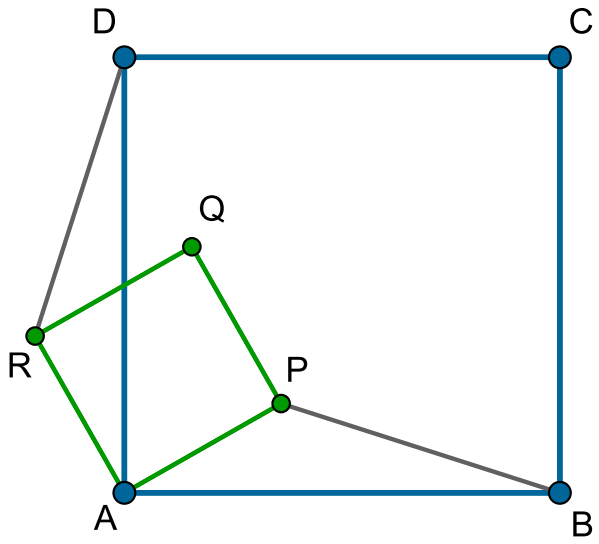
Na bokach AB, BC, CD i DA kwadratu ABCD wybrano takie punkty odpowiednio K, L, M i N, że $|\mathrm{AK}| = 3|\mathrm{KB}|$, $|\mathrm{BL}| = 3|\mathrm{LC}|$, $|\mathrm{CM}| = 3|\mathrm{MD}|$ i $|\mathrm{DN}| = 3|\mathrm{NA}|$. Wykaż, że czworokąt KLMN jest kwadratem.

Ćwiczenie 7

Na bokach AB i BC kwadratu $ABCD$ zbudowano na zewnątrz trójkąty równoboczne AEB i BFC.
Uzasadnij, że trójkąt DEF jest równoboczny.

Ćwiczenie 8

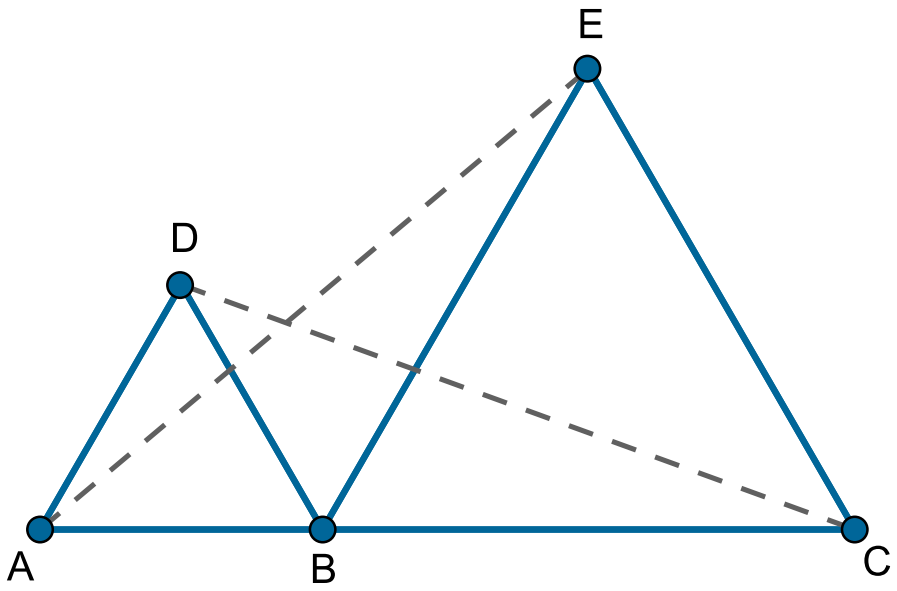
Czworokąty $ABCD$ i $APQR$, przedstawione na rysunku, są kwadratami.



Wykaż, że $|BP| = |DR|$.

Ćwiczenie 9

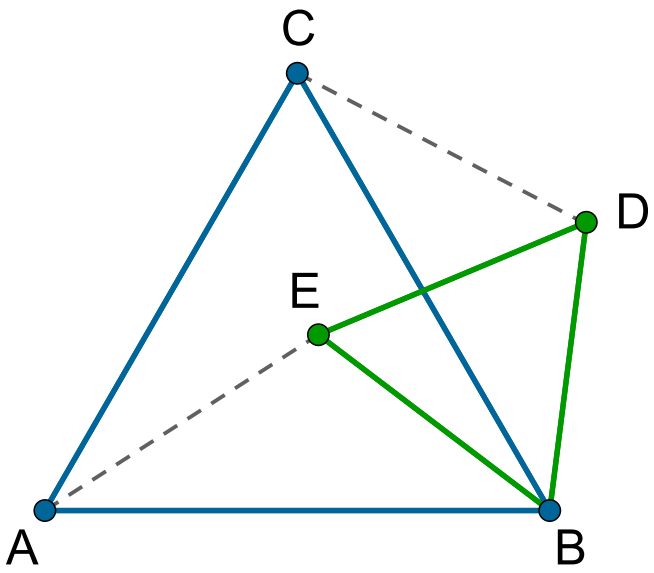
Na odcinku AC wybrano punkt B różny od końców tego odcinka. Trójkąty ABD i BCE są równoboczne.



Wykaż, że $|\mathrm{AE}| = |\mathrm{CD}|$.

Ćwiczenie 10

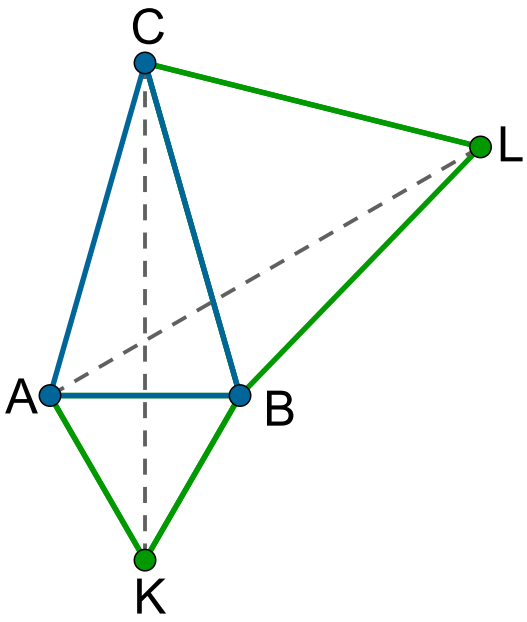
Trójkąty ABC i BDE, przedstawione na rysunku, są równoboczne.



Wykaż, że $|\mathrm{AE}| = |\mathrm{DC}|$.

Ćwiczenie 11

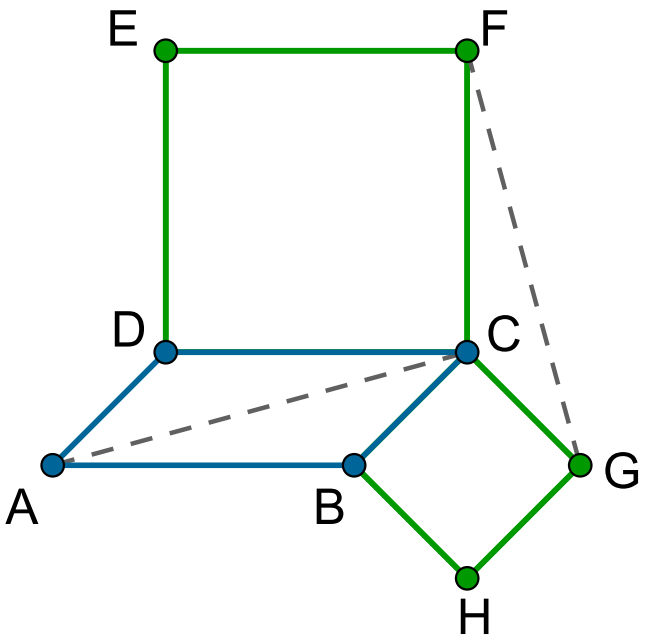
W trójkącie równoramiennym ABC boki AC i BC są równe. Na podstawie AB i ramieniu BC zbudowano trójkąty równoboczne ABK i BCL, jak przedstawiono na rysunku.



Wykaż, że $|\mathrm{AL}| = |\mathrm{CK}|$.

Ćwiczenie 12

Na bokach BC i CD równoległoboku ABCD zbudowano kwadraty CDEF i BCGH. Udowodnij, że $|\mathrm{AC}| = |\mathrm{FG}|$.

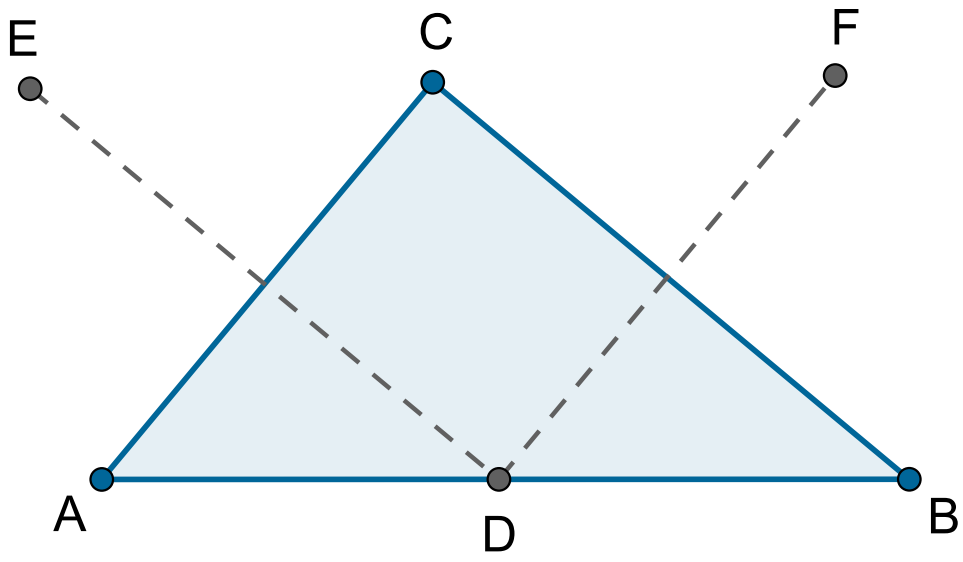


Ćwiczenie 13

W trójkącie ostrokątnym ABC na bokach BC i AC leżą odpowiednio takie punkty D i E, że $|\mathrm{AD}| = |\mathrm{BE}|$ i $|\sphericalangle \mathrm{ADC}| = |\sphericalangle \mathrm{BEC}| = 110^\circ$. Wykaż, że trójkąt ABC jest równoramienny.

Ćwiczenie 14

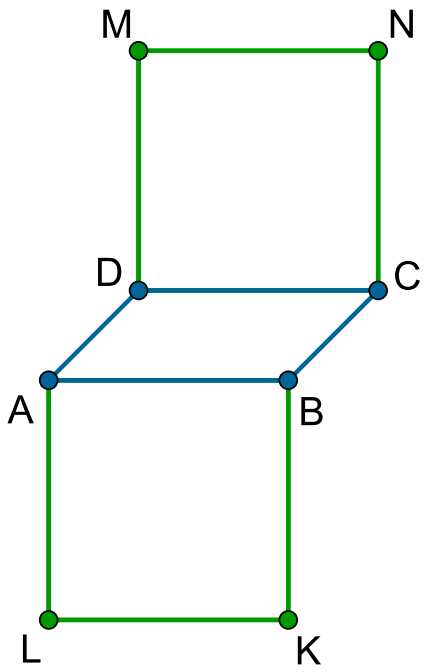
W trójkącie prostokątnym ABC punkt D leży na przeciwprostokątnej AB. Punkt E jest symetryczny do punktu D względem prostej AC, a punkt F jest symetryczny do punktu D względem prostej BC.



Wykaż, że punkty C, E i F leżą na jednej prostej.

Ćwiczenie 15

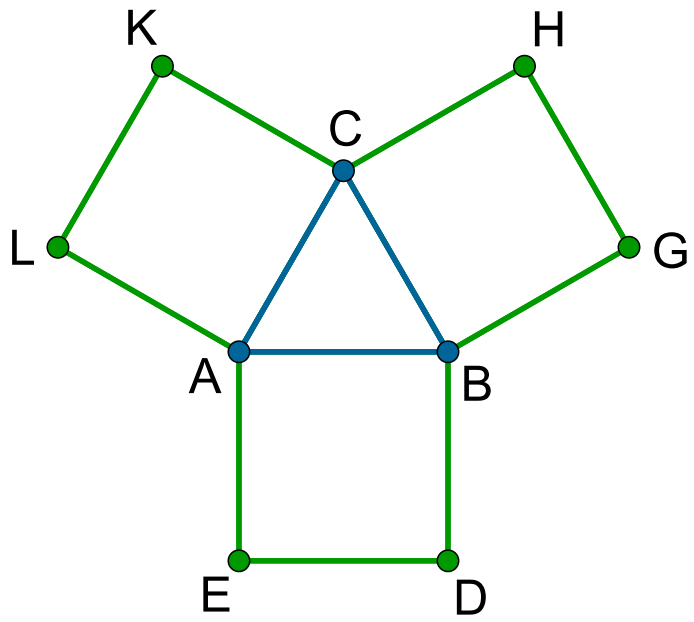
Na bokach AB i CD równoległoboku $ABCD$ zbudowano kwadraty $ABKL$ i $CDMN$.



Wykaż, że trójkąty BNK i DLM są przystające.

Ćwiczenie 16

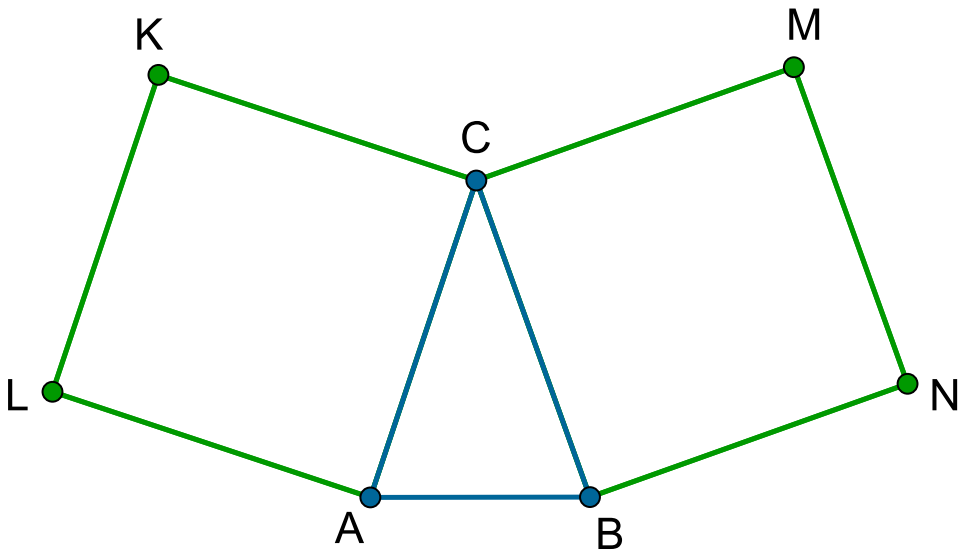
Na bokach trójkąta równobocznego ABC, przedstawionego na rysunku, zbudowano kwadraty $ABDE$, $CBGH$ i $ACKL$.



Wykaż, że trójkąt KGE jest równoboczny.

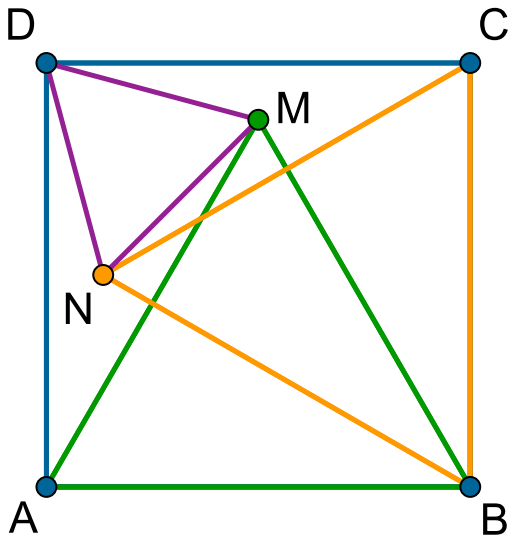
Ćwiczenie 17

Na ramionach AC i BC trójkąta równoramiennego ABC zbudowano kwadraty $ACKL$ i $BCMN$. Wykaż, że trójkąty MLA i KNB są przystające.



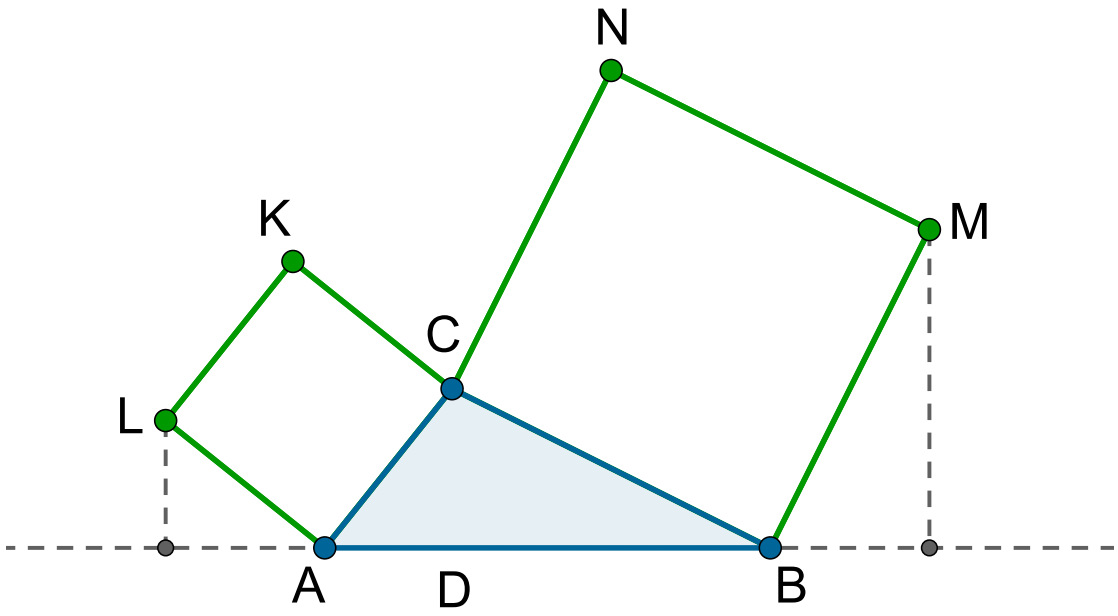
Ćwiczenie 18

Wewnątrz kwadratu $ABCD$ wybrano takie punkty M i N, że trójkąty ABM i BCN są równoboczne (zobacz rysunek). Wykaż, że trójkąt DNM jest równoboczny.



Ćwiczenie 19

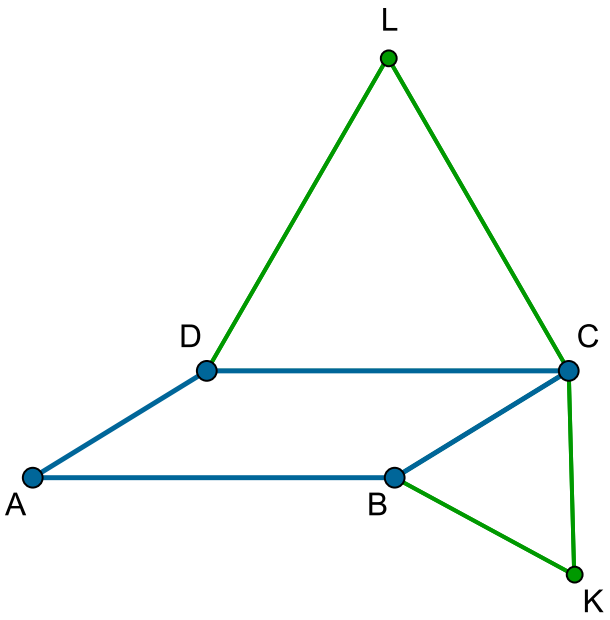
Na rysunku przedstawiony jest trójkąt prostokątny ABC. Punkt C jest wierzchołkiem kąta prostego. Na bokach AC i BC zbudowano kwadraty ACKL i CBMN.



Wykaż, że suma odległości punktów L i M od prostej AB jest równa długości przeciwprostokątnej AB.

Ćwiczenie 20

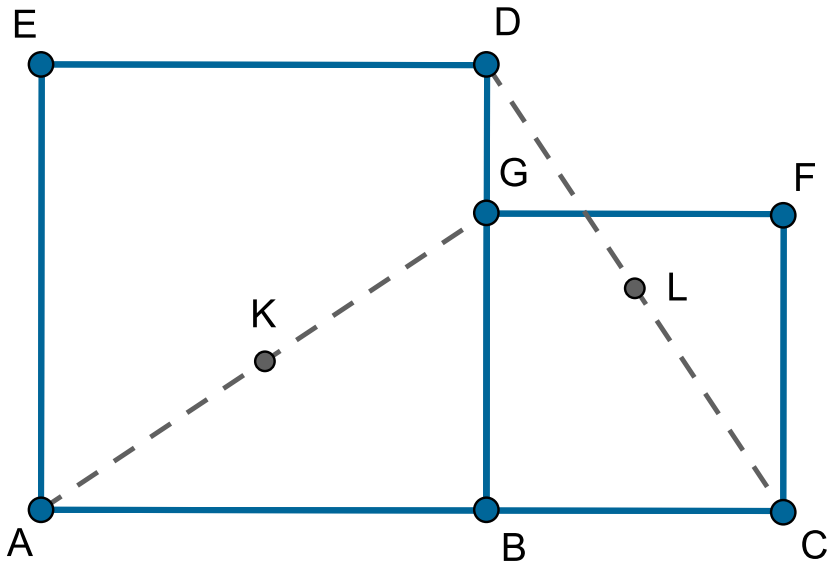
Na bokach BC i CD równoległoboku $ABCD$, przedstawionego na rysunku, zbudowano trójkąty równoboczne BCK i CDL.



Wykaż, że dwusieczna kąta LAK dzieli odcinek KL na połowy.

Ćwiczenie 21

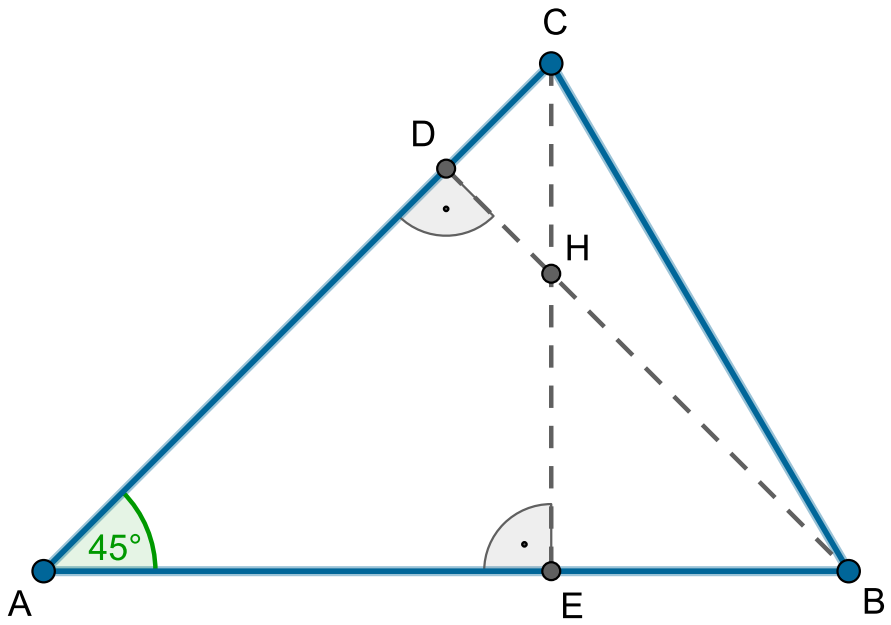
Punkty A, B, C leżą na jednej prostej, a czworokąty ABDE i BCFG przedstawione na rysunku są kwadratami.



Punkt K jest środkiem odcinka AG, punkt L jest środkiem odcinka DC. Wykaż, że $|\sphericalangle \mathrm{KBL}| = 90^\circ$.

Ćwiczenie 22

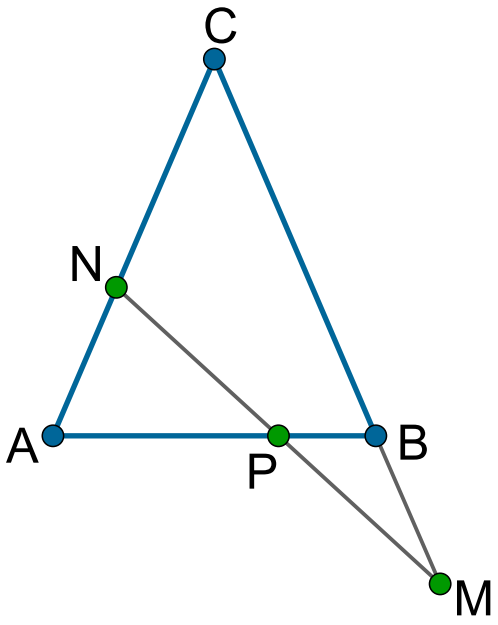
W trójkącie ostrokątnym ABC kąt przy wierzchołku A ma miarę 45°. Wysokości BD i CE tego trójkąta przecinają się w punkcie H.



Wykaż, że $|\mathrm{AH}| = |\mathrm{BC}|$.

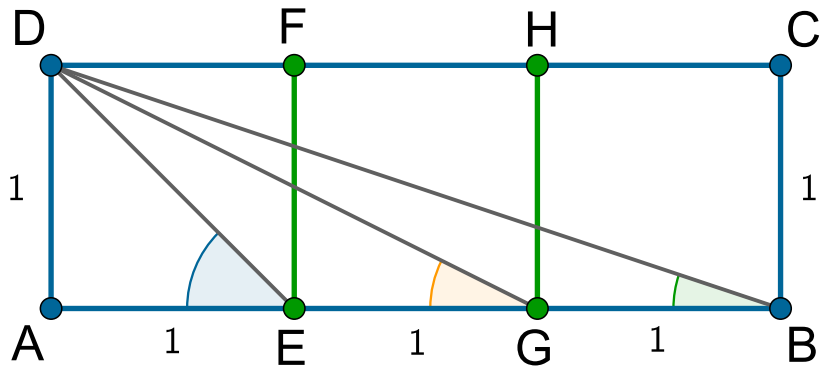
Ćwiczenie 23

Trójkąt ABC, przedstawiony na rysunku, jest równoramienny i $|\mathrm{AC}| = |\mathrm{BC}|$. Punkty C, B, M są współliniowe.
Na boku AC wybrano punkt N tak, że $|\mathrm{AN}| = |\mathrm{BM}|$. Proste NM i AB przecinają się w punkcie P. Wykaż, że $|\mathrm{NP}| = |\mathrm{PM}|$.



Ćwiczenie 24

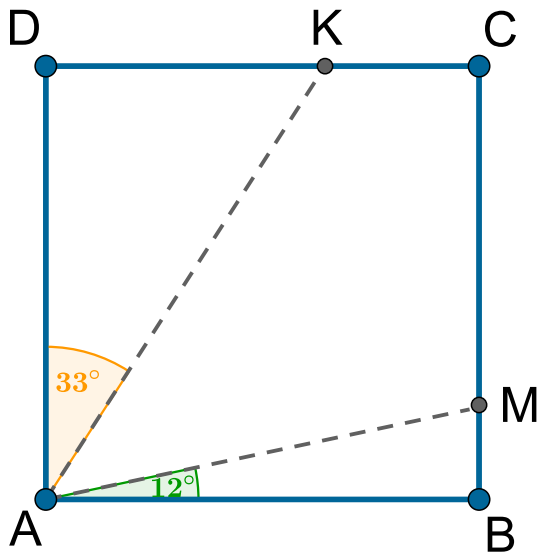
W prostokącie ABCD, przedstawionym na rysunku, dane są długości boków $|\mathrm{AB}| = 3$ i $|\mathrm{BC}| = 1$. Punkty E i G leżą na boku AB, a punkty F i H leżą na boku CD tak, że czworokąty AEFD, EGHF i GBCH są kwadratami.



Wykaż, że $|\sphericalangle \mathrm{AED}| + |\sphericalangle \mathrm{AGD}| + |\sphericalangle \mathrm{ABD}| = 90^\circ$.

Ćwiczenie 25

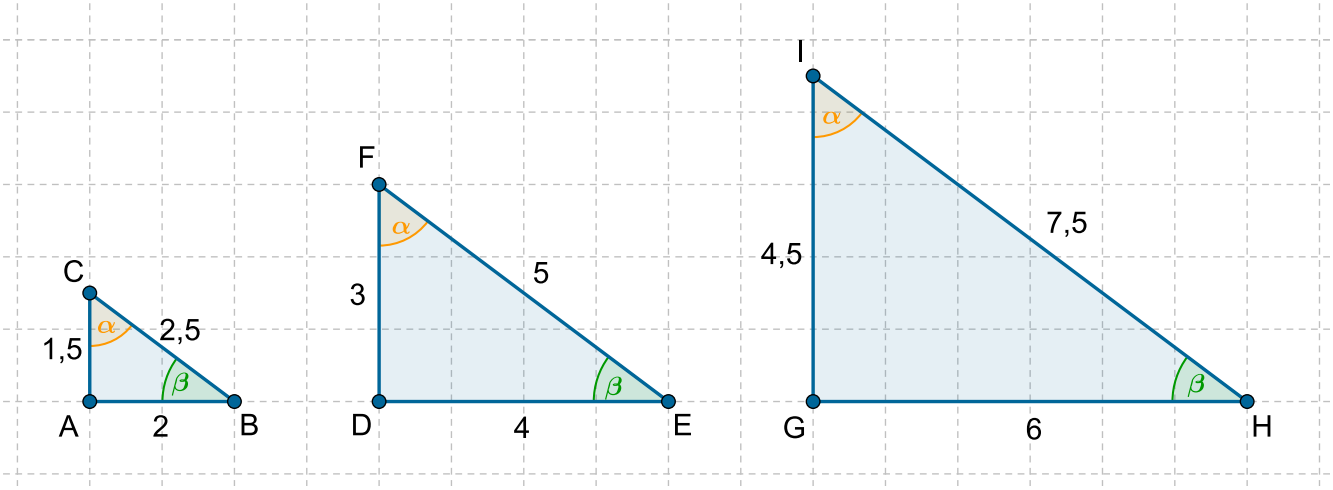
Bok kwadratu ABCD ma długość 1. Punkty M i K leżą na bokach odpowiednio BC i CD tego kwadratu, przy czym $|\sphericalangle \mathrm{BAM}| = 12^\circ$ oraz $|\sphericalangle \mathrm{DAK}| = 33^\circ$.



Wykaż, że w trójkącie MAK wysokość opuszczona z wierzchołka A na bok MK ma długość 1.

Cechy podobieństwa trójkątów

Przykład 1



Popatrz na trójkąty przedstawione na rysunku. Drugi z nich powstał przez powiększenie długości każdego boku trójkąta ABC dwa razy. Trzeci przez powiększenie długości każdego boku trójkąta ABC trzy razy.
Odpowiadające sobie kąty mają jednakowe miary, a odpowiadające sobie boki są proporcjonalne. Takie trójkąty nazywamy podobnymi.
Figury podobne to takie, które mają jednakowy kształt, a mogą się różnić wielkością. Przykładami figur podobnych są kopie tego samego obrazka, które powiększamy lub pomniejszamy.

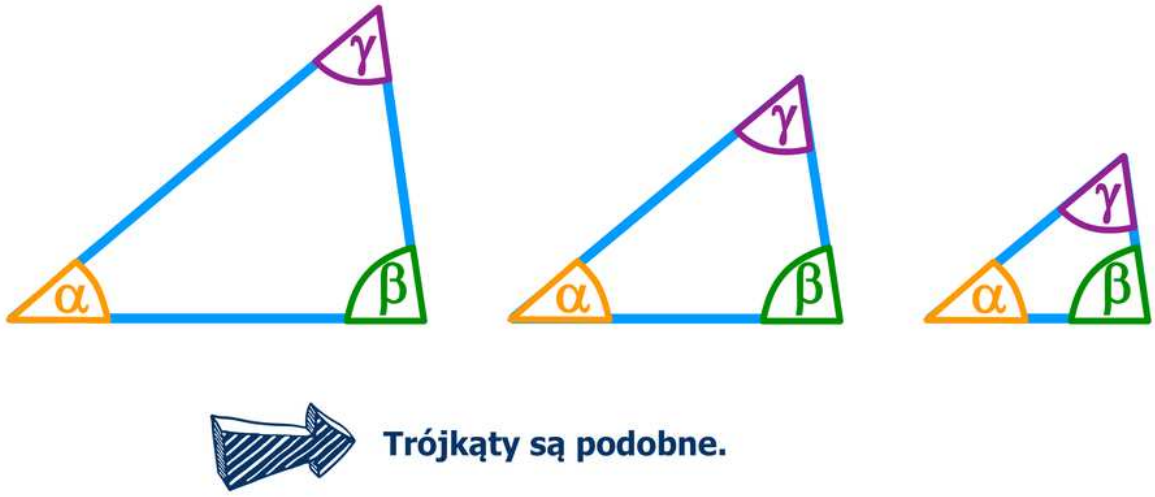
Żeby stwierdzić, czy dwa trójkąty są podobne, korzystamy z cech podobieństwa trójkątów.

Twierdzenie: Cechy podobieństwa trójkątów

- Cecha bok-bok-bok (bbb)

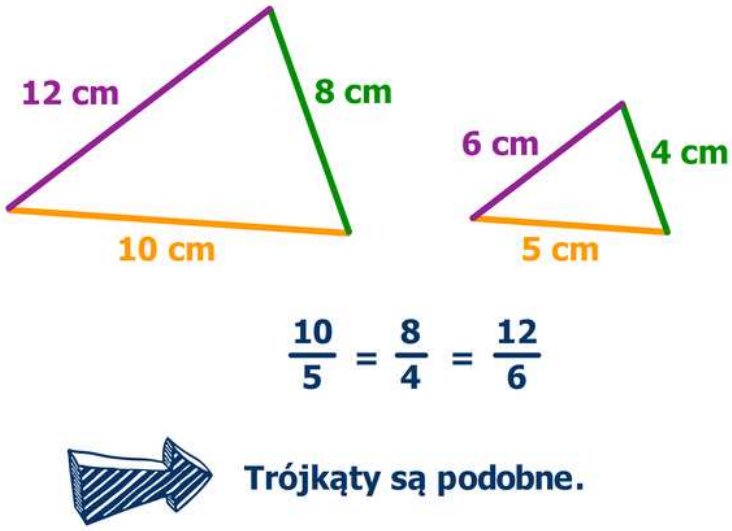
Jeżeli każdy bok trójkąta $A'B'C'$ jest proporcjonalny do odpowiedniego boku trójkąta ABC, to trójkąty te są podobne.

Zasób interaktywny dostępny pod adresem https://zpe.gov.pl/a/DXKVutM5M



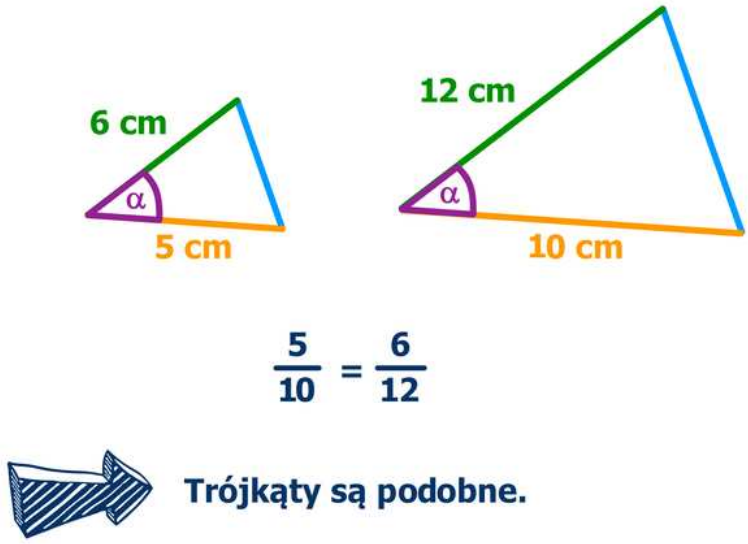
Film dostępny na portalu epodreczniki.pl

Animacja pokazuje trzy różnych wymiarów zdjęcia tej samej budowli w kształcie trójkątna ostrokątnego. Na zdjęciu największym zaznaczono kąty alfa, beta i gamma. Porównując, w dwóch etapach (zdjęcie największe i średnie a potem największe i najmniejsze) odpowiednie kąty tych budowli, zauważamy że odpowiednie kąty w tych trójkątach są tej samej miary, a więc trójkąty są podobne.



Film dostępny na portalu epodreczniki.pl

Animacja pokazuje dwa różnych wymiarów zdjęcia tej samej budowli w kształcie trójkątna ostrokątnego, na których zaznaczono długości boków 12, 10, 8 oraz 6, 5, 4. Obliczając stosunki długości każdego boku w jednym trójkącie do odpowiadającego mu boku w drugim trójkącie, zauważamy że są one równe. Trójkąty są podobne.



Film dostępny na portalu epodreczniki.pl

Animacja pokazuje dwa różnych wymiarów zdjęcia tej samej budowli w kształcie trójkątna ostrokątnego. W jednym trójkącie zaznaczono boki o długości 12 i 10 oraz między nimi kąt alfa, w drugim boki o długościach 6 i 5 oraz między nimi kąt alfa. Obliczając stosunki

długości każdego boku w jednym trójkącie do odpowiadającego mu boku w drugim trójkącie, zauważamy że są one równe, a więc trójkąty są podobne.

Twierdzenie: Skala podobieństwa trójkątów

Jeżeli trójkąty A'B'C' oraz ABC są podobne, przy czym wierzchołki A, B, C odpowiadają wierzchołkom odpowiednio A', B', C', to

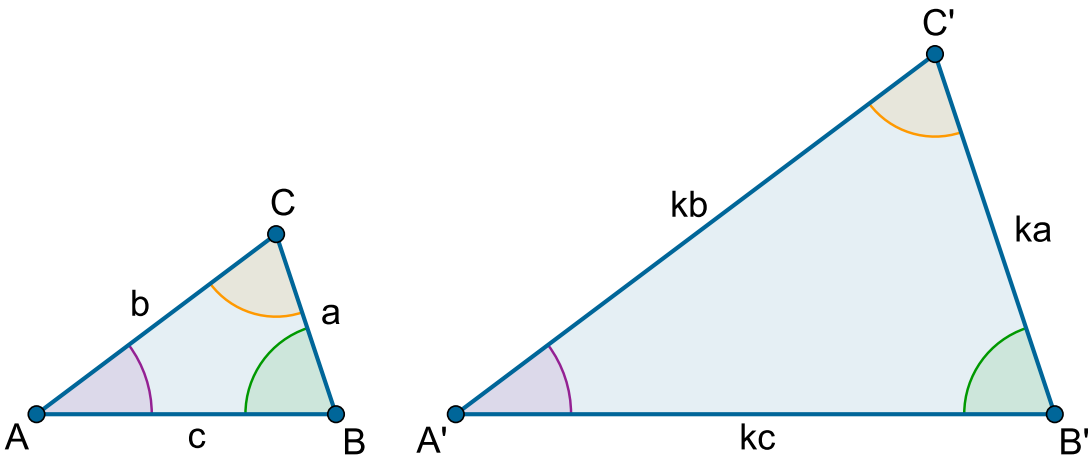
$$\frac{|A'B'|}{|AB|} = \frac{|B'C'|}{|BC|} = \frac{|C'A'|}{|CA|}$$

oraz

$$|\sphericalangle A| = |\sphericalangle A'|,\ |\sphericalangle B| = |\sphericalangle B'|, |\sphericalangle C| = |\sphericalangle C'|.$$

Skalą k podobieństwa trójkątów nazywamy iloraz długości odpowiadających sobie boków w trójkątach podobnych

$$\frac{|A'B'|}{|AB|} = \frac{|B'C'|}{|BC|} = \frac{|C'A'|}{|CA|} = k$$

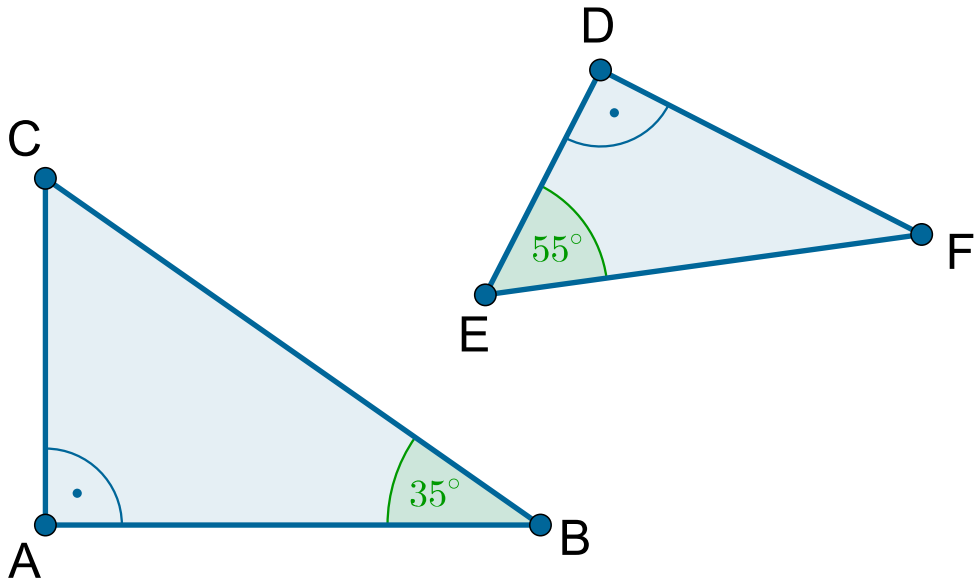


Przykłady

Przykład 1

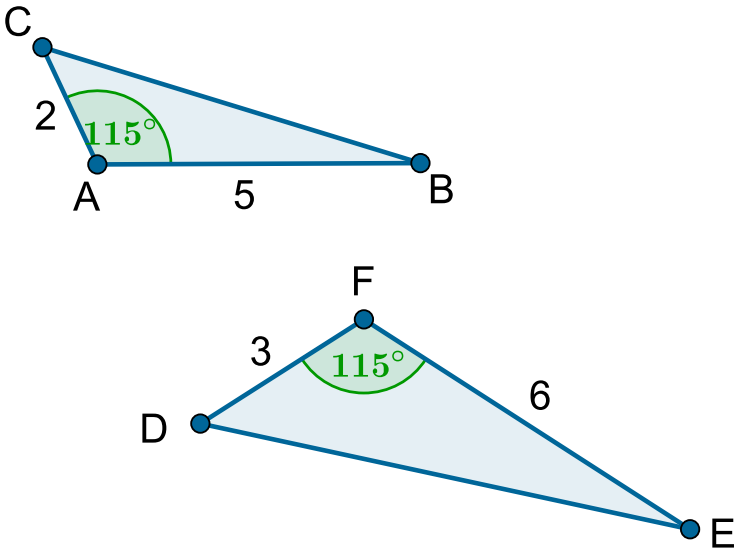
Czy trójkąty ABC i DEF są podobne?

a.



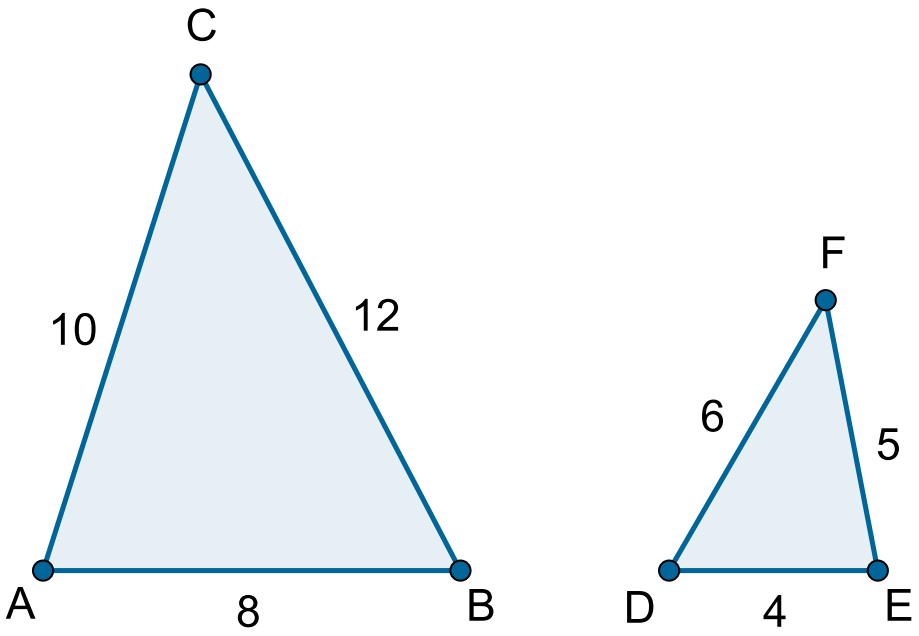
Tak. Trójkąty ABC i DEF są podobne na mocy cechy kąt $-$ kąt $-$ kąt. W każdym z tych trójkątów miary kątów są równe 35°, 55° oraz 90°.

b.



Trójkąty ABC i DEF nie są podobne. Każdy z nich ma kąt o mierze 115°. Jednak stosunki długości odpowiadających sobie boków tych trójkątów nie są równe. Rzeczywiście $\frac{|FE|}{|AB|} = \frac{6}{5}$, $\frac{|DF|}{|AC|} = \frac{3}{2}$, a $\frac{6}{5} \neq \frac{3}{2}$.

Przykład 2



Obliczymy stosunki długości odpowiadających sobie boków trójkątów ABC i DEF.

$$\frac{8}{4} = 2,\ \frac{10}{5} = 2,\ \frac{12}{6} = 2.$$

Trójkąty te na mocy cechy bok $-$ bok $-$ bok są podobne w skali $k = 2$.

Przykład 3

Trójkąt ABC ma boki długości 15, 20, 25. Trójkąt EFG jest do niego podobny. Najkrótszy bok w trójkącie EFG ma długość 30. Obliczmy stosunek obwodu trójkąta EFG do obwodu trójkąta ABC i stosunek pola trójkąta EFG do pola trójkąta ABC.
Najkrótszy bok w trójkącie EFG odpowiada najkrótszemu bokowi trójkąta ABC. Skala podobieństwa trójkąta EFG do trójkąta ABC jest więc równa

$$k = \frac{30}{15} = 2.$$

Pozostałe boki trójkąta EFG mają długości

$$20 \bullet 2 = 40,\ 25 \bullet 2 = 50.$$

Obliczamy obwody trójkątów i stosunek tych obwodów

$$L_{ABC} = 15 + 20 + 25 = 60$$

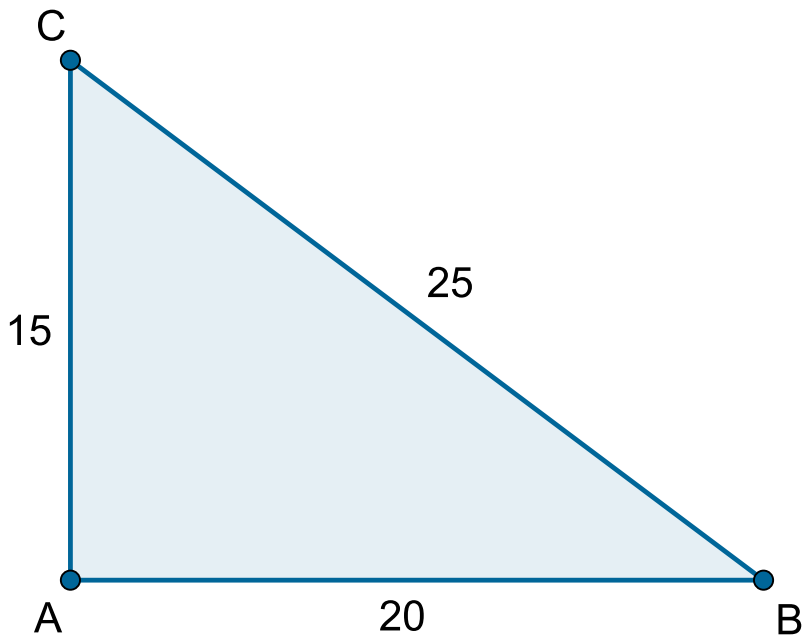
$$L_{EFG} = 30 + 40 + 50 = 120$$

$$\frac{L_{EFG}}{L_{ABC}} = \frac{120}{60} = 2 = k.$$

Zauważmy, że trójkąt ABC jest trójkątem prostokątnym

$$15^2 + 20^2 = 225 + 400 = 625 = 25^2.$$

Zatem trójkąt EFG do niego podobny też jest trójkątem prostokątnym.



Własność tę wykorzystamy, obliczając pola trójkątów i ich stosunek.

$$P_{ABC} = \frac{15 \cdot 20}{2} = 150$$

$$P_{EFG} = \frac{30 \cdot 40}{2} = 600$$

$$\frac{P_{EFG}}{P_{ABC}} = \frac{600}{150} = 4 = k^2$$

Stosunek obwodu trójkąta EFG do obwodu trójkąta ABC jest równy 2, a stosunek pola trójkąta EFG do pola trójkąta ABC jest równy 4.

Własności podobieństwa

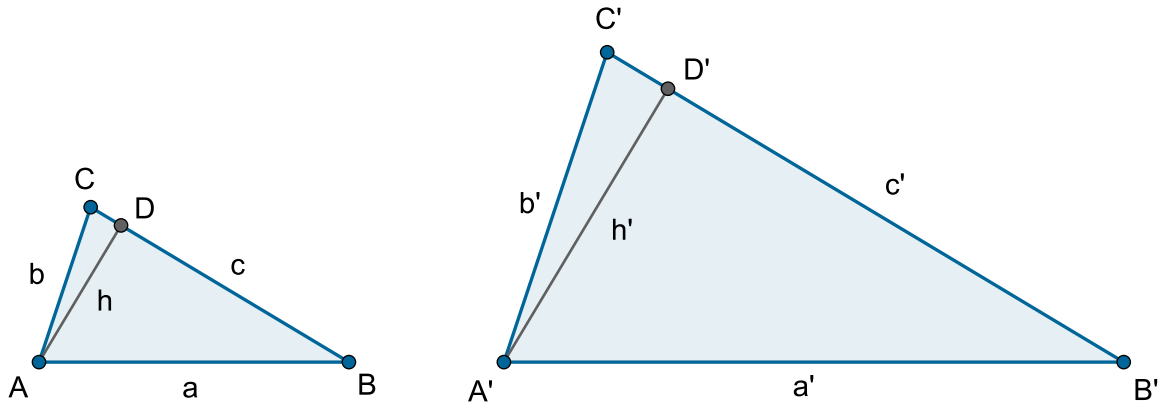
Twierdzenie: Własności podobieństwa

Jeżeli trójkąt A'B'C' jest podobny do trójkąta ABC w skali podobieństwa k, to stosunek obwodów tych trójkątów jest równy skali podobieństwa, a stosunek ich pól jest równy kwadratowi skali podobieństwa

$$\frac{L_{\mathrm{A'B'C'}}}{L_{\mathrm{ABC}}} = k$$

$$\frac{P_{\mathrm{A'B'C'}}}{P_{\mathrm{ABC}}} = k^2.$$

Rozważmy trójkąty prostokątne $A'B'C'$ oraz ABC podobne w skali k. Wysokości tych trójkątów zaznaczone na rysunku są równe odpowiednio h' i h.



Zauważmy, że skoro trójkąt $A'B'C'$ jest podobny do trójkąta ABC, to

$$\frac{|C'A'|}{|\mathrm{CA}|} = k$$

oraz

$$|\sphericalangle \mathrm{ACD}| = |\sphericalangle A'C'D'|,\ |\sphericalangle \mathrm{CDA}| = |\sphericalangle C'D'A'| = 90^\circ.$$

Stąd

$$|\sphericalangle \mathrm{CAD}| = |\sphericalangle C'A'D'| = 90^\circ - |\sphericalangle A'C'D'|.$$

Na mocy cechy podobieństwa *kąt − bok − kąt* trójkąt $A'C'D'$ jest podobny do trójkąta ACD i skala podobieństwa wynosi k. Stąd

$$\frac{h'}{h} = k,$$

czyli stosunek długości wysokości w trójkątach podobnych jest taki sam jak stosunek długości boków.

$$P_{A'B'C'} = \frac{1}{2}c'h' = \frac{1}{2}\mathrm{kc} \bullet \mathrm{kh} = \frac{1}{2}\mathrm{ch} \bullet k^2 = P_{\mathrm{ABC}} \bullet k^2$$

$$\frac{P_{A'B'C'}}{P_{\mathrm{ABC}}} = k^2$$

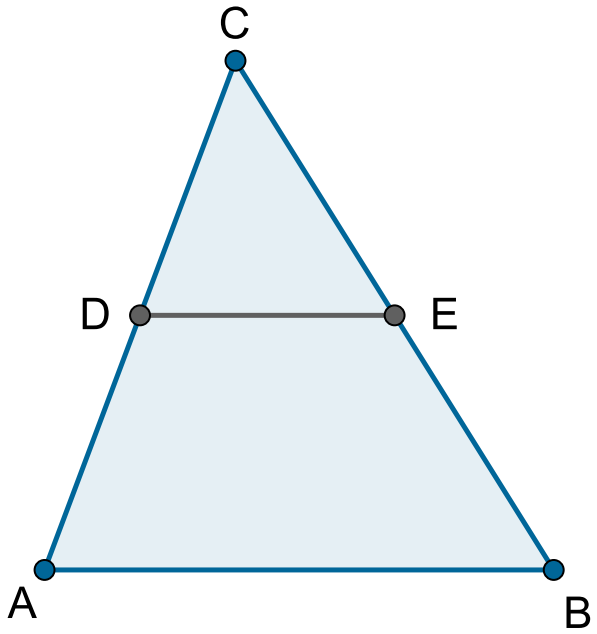
Stosunek pól trójkątów podobnych jest więc równy kwadratowi skali podobieństwa.

$$L_{A'B'C'} = a' + b' + c' = \mathrm{ka} + \mathrm{kb} + \mathrm{kc} = k(a+b+c) = k \bullet L_{\mathrm{ABC}}$$

$$\frac{L_{A'B'C'}}{L_{\mathrm{ABC}}} = k$$

Stosunek obwodów trójkątów podobnych jest równy skali podobieństwa.

Rozważmy dowolny trójkąt ABC. Zaznaczmy w nim środki dwóch boków i połączmy je odcinkiem. Taki odcinek nazywamy linią środkową trójkąta.



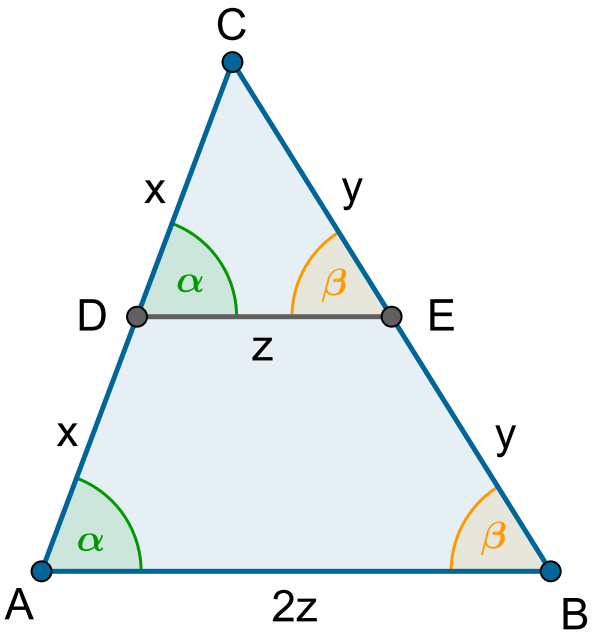
Zauważmy, że trójkąty DCE i ABC są podobne na mocy cechy bok $-$ kąt $-$ bok. Kąt DCE jest wspólny dla obu trójkątów oraz

$$\frac{|\mathrm{DC}|}{|\mathrm{AC}|} = \frac{|\mathrm{EC}|}{|\mathrm{BC}|} = \frac{1}{2}.$$

Z definicji podobieństwa wynika, że $\frac{|\mathrm{DE}|}{|\mathrm{AB}|} = \frac{1}{2}$. Mamy też równość kątów

$$|\sphericalangle \mathrm{CDE}| = |\sphericalangle \mathrm{CAB}|, \ |\sphericalangle \mathrm{CED}| = |\sphericalangle \mathrm{CBA}|.$$

Ponieważ punkty C, D, A są współliniowe, więc kąty CDE i CAB są odpowiadające. Stąd wynika równoległość DE i AB.

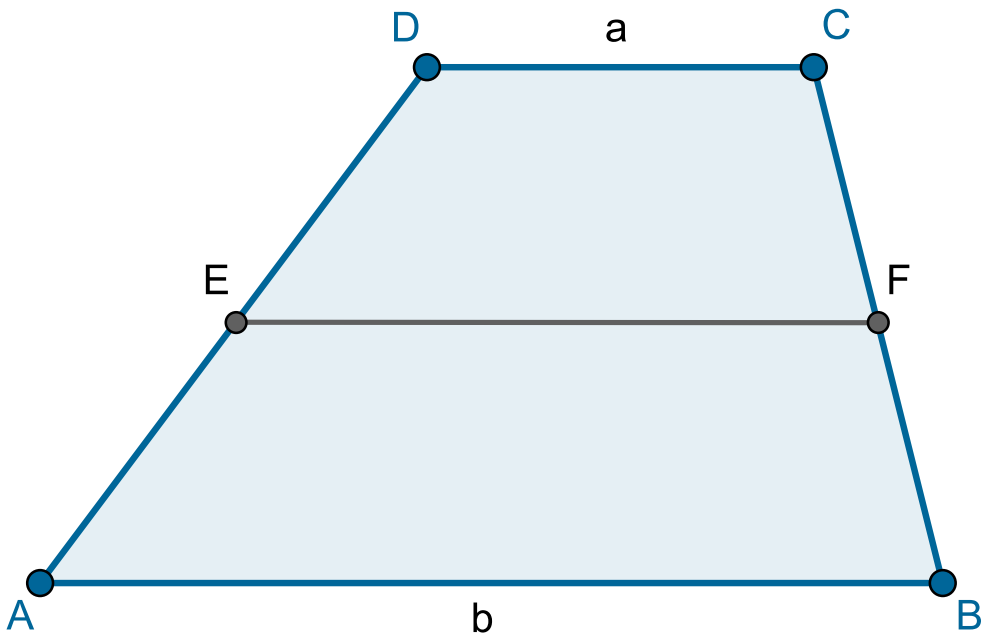


Twierdzenie: o linii środkowej trójkąta

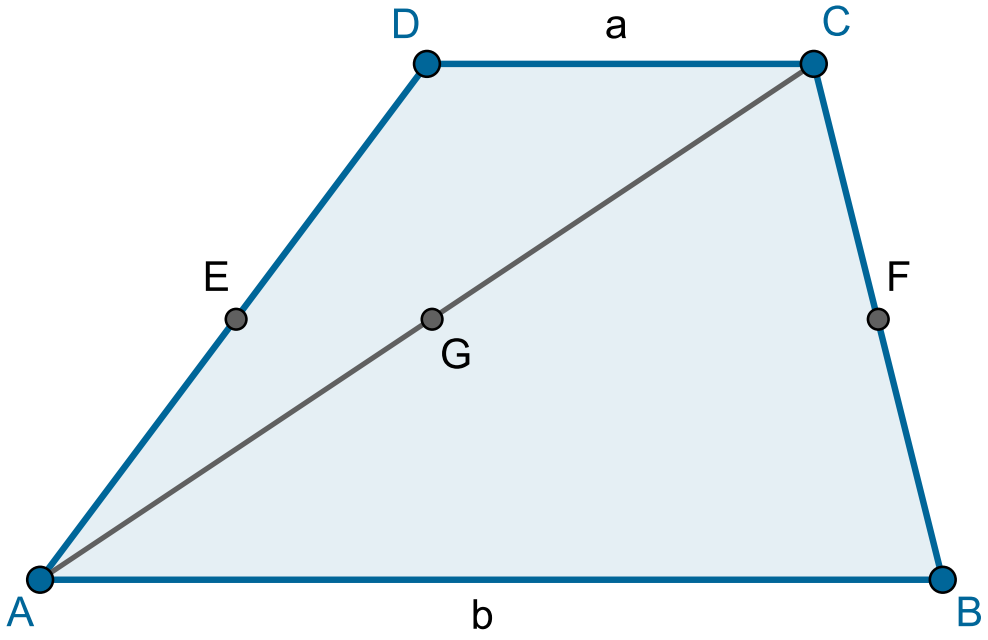
Odcinek łączący środki dwóch boków w trójkącie jest równoległy do trzeciego boku trójkąta i jest od niego dwa razy krótszy.

Zasób interaktywny dostępny pod adresem https://zpe.gov.pl/a/DvIIHTkKu

Podstawy trapezu $ABCD$ mają długości a oraz b. Punkt E jest środkiem boku AD, a punkt F jest środkiem boku CB. Odcinek łączący środki ramion trapezu nazywamy linią środkową w trapezie. Obliczymy jego długość.



Poprowadźmy przekątną AC i oznaczmy przez G jej środek.



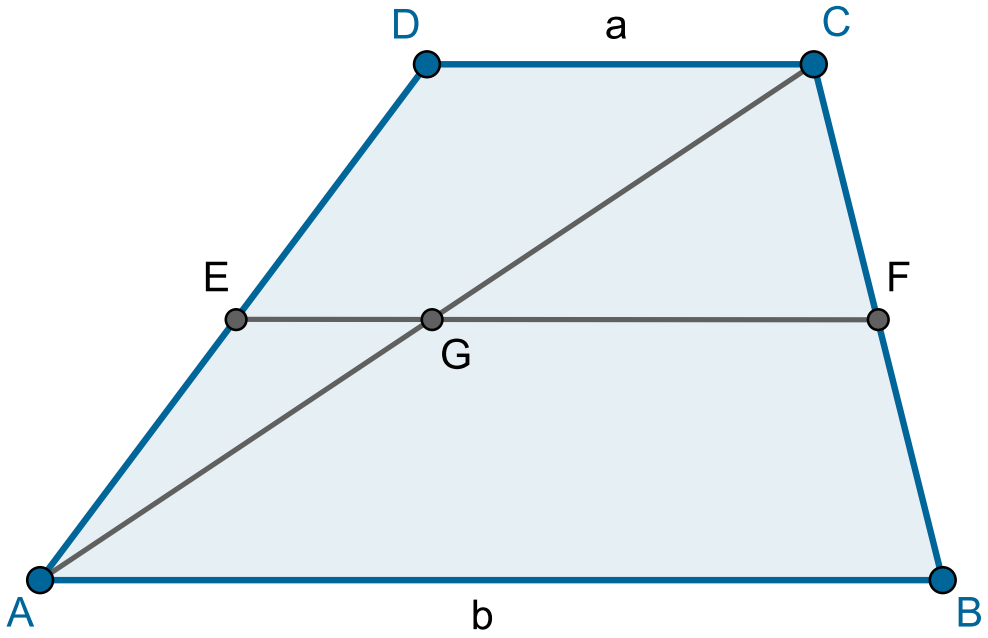
Odcinek EG jest odcinkiem łączącym środki boków w trójkącie ADC. Stąd EG jest równoległy do podstawy trapezu DC oraz

$$|\mathrm{EG}| = \tfrac{1}{2}a.$$

Podobnie odcinek GF jest odcinkiem łączącym środki boków trójkąta ABC, czyli jest równoległy do podstawy trapezu AB oraz

$$|\mathrm{GF}| = \tfrac{1}{2}b.$$

Ponieważ oba odcinki EG i GF są równoległe do podstaw trapezu, więc punkty $E,\ \mathrm{G},\ \mathrm{F}$ leżą na jednej prostej.



Mamy

$$|\mathrm{EF}| = |\mathrm{EG}| + |\mathrm{GF}| = \tfrac{1}{2}a + \tfrac{1}{2}b = \tfrac{a+b}{2}.$$

Stąd twierdzenie:

Twierdzenie: o linii środkowej w trapezie

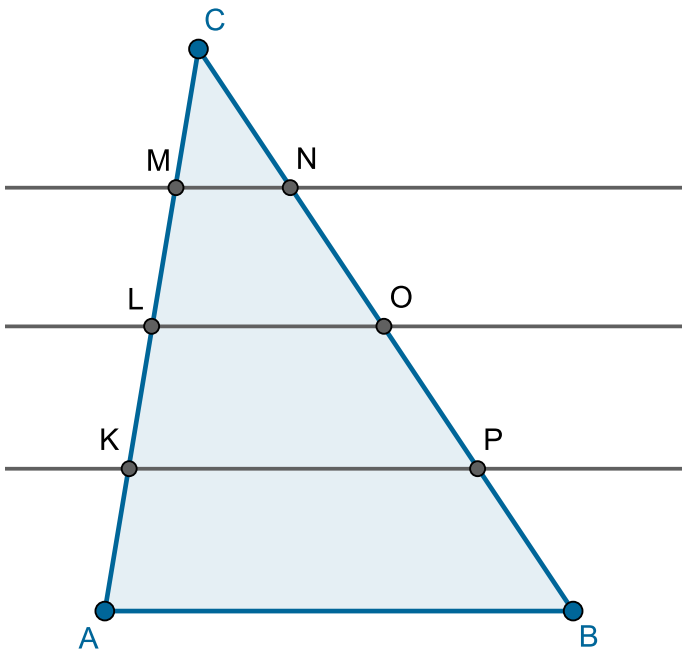
Odcinek łączący środki ramion trapezu jest równoległy do podstaw tego trapezu, a jego długość jest równa średniej arytmetycznej długości podstaw trapezu.

Zasób interaktywny dostępny pod adresem https://zpe.gov.pl/a/DvIIHTkKu

Ćwiczenie 1

Ćwiczenie 2

Punkty K, L i M dzielą ramię AC trójkąta ABC na odcinki równej długości. Punkty N, O i P wybrano na boku BC tak, że odcinki MN, LO i KP są równoległe do podstawy AB (patrz rysunek). Długość odcinka MN jest równa 2.



Wtedy

- [ ] $|\mathrm{KP}| = 8$
- [ ] $\frac{P_{\mathrm{CMN}}}{P_{\mathrm{ABC}}} = \frac{1}{16}$
- [ ] $|\mathrm{LO}| = 4$

Ćwiczenie 3

W trapezie ABCD podstawa AB jest dłuższa od podstawy CD. Ramiona AD i BC mają długości $|\mathrm{AD}| = 10$, $|\mathrm{BC}| = 12$. Proste zawierające te ramiona przecinają się w punkcie S i $|\mathrm{SD}| = 15$. Wówczas

- [ ] Długość odcinka SC jest równa 18.
- [ ] $\frac{P_{\mathrm{SAB}}}{P_{\mathrm{SDC}}} = \frac{9}{25}$
- [ ] Trójkąt SDC jest podobny do trójkąta SAB w skali $\frac{3}{5}$.

Ćwiczenie 4

a. W trapezie ABCD podstawa AB jest dłuższa od podstawy CD. Punkt przecięcia przekątnych trapezu dzieli każdą z nich w stosunku $2 : 3$. Krótsza podstawa trapezu ma długość 5. Oblicz długość drugiej podstawy.

b. W trapezie ABCD podstawy mają długości $|\mathrm{AB}| = 9$ i $|\mathrm{CD}| = 3$. Przekątna BD ma długość 8. Na jakie odcinki dzieli tę przekątną prosta AC?

c. W trapezie ABCD podstawy mają długości $|\mathrm{AB}| = 8$ i $|\mathrm{CD}| = 2$. Przekątne AC i BD przecinają się w punkcie S. Trójkąt SAB ma pole równe 10. Oblicz pole trójkąta SCD.

Ćwiczenie 5

Zaznacz poprawne stwierdzenie.

- [ ] W trójkącie prostokątnym o przyprostokątnych długości a i b wysokość poprowadzona z wierzchołka kąta prostego jest równa $\frac{\mathrm{ab}}{\sqrt{a^2+b^2}}$.
- [ ] W trójkącie prostokątnym przyprostokątne mają długości 3 i 6. Wtedy wysokość poprowadzona z wierzchołka kąta prostego dzieli przeciwprostokątną na odcinki długości $\sqrt{5}$ i $2\sqrt{5}$.
- [ ] W trójkącie prostokątnym ABC stosunek długości przyprostokątnych AB i AC jest równy 15:8. Poprowadzono wysokość AD. Pole trójkąta ACD jest równe 16. Wtedy pole trójkąta ABC jest równe $72{,}25$.

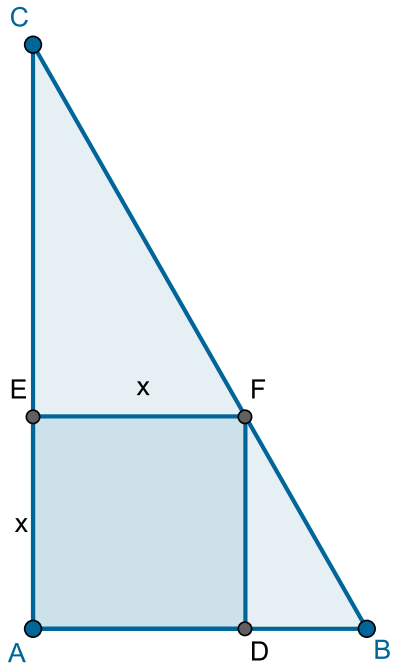
Ćwiczenie 6

Zaznacz poprawne stwierdzenie.

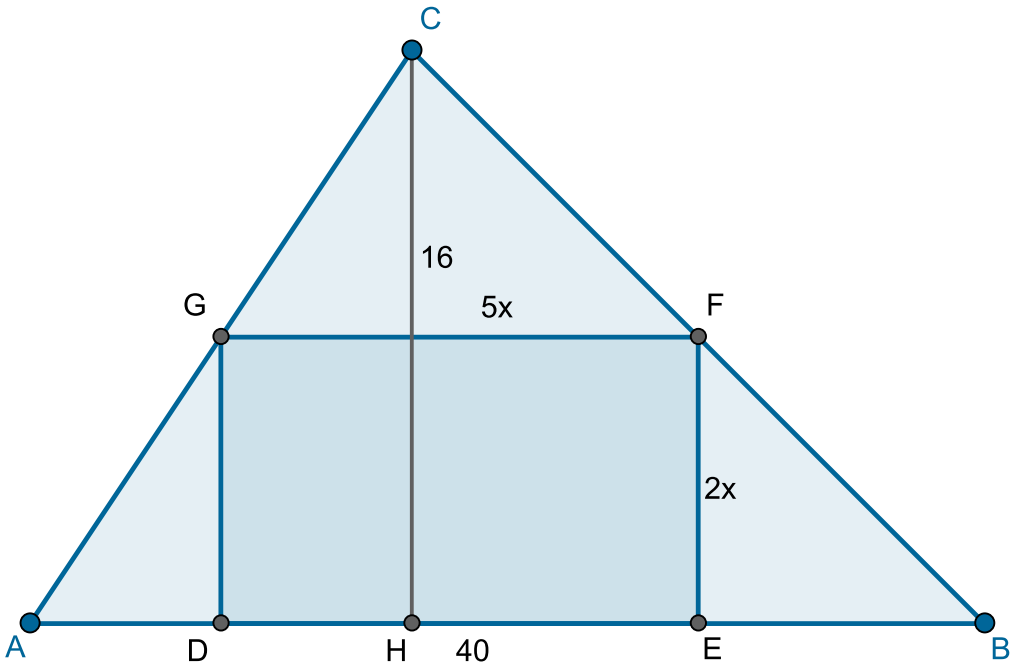
- ◯ Trójkąt ABC jest równoramienny o ramionach długości 25 i podstawie długości 30. Wtedy wysokości w tym trójkącie są równe 20 i 24.
- ◯ Odcinki <mfenced open="|" close="|" separators="|"> AD = 6 i <mfenced open="|" close="|" separators="|"> BE = 7 są wysokościami trójkąta ostrokątnego ABC, którego bok BC ma długość 8. Wtedy, <mfenced open="|" close="|" separators="|"> AC = 28 3 .

Ćwiczenie 7

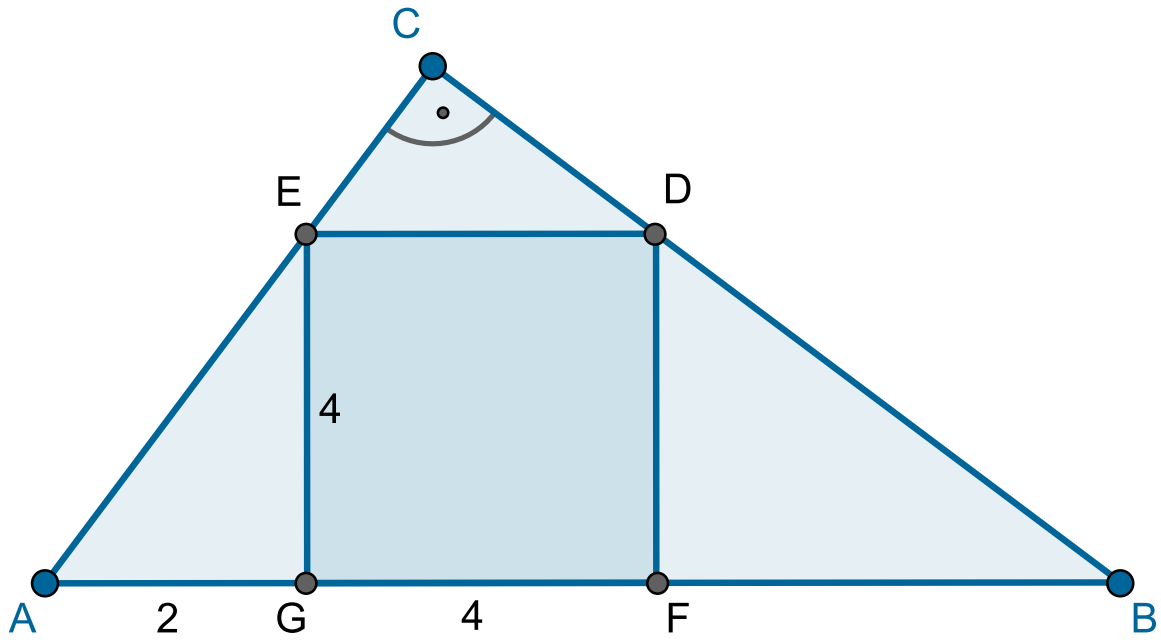
a. W trójkąt prostokątny ABC o przyprostokątnych $|\mathrm{AB}| = 4$ i $|\mathrm{AC}| = 7$ wpisano kwadrat, tak jak na rysunku. Oblicz długość boku tego kwadratu.



b. W trójkąt ABC o podstawie $|\mathrm{AB}| = 40$ i wysokości równej 16 opuszczonej z wierzchołka C na tę podstawę wpisano prostokąt, tak jak na rysunku. Długości odcinków EF i DE pozostają w stosunku $2 : 5$. Znajdź długości boków prostokąta DEFG.



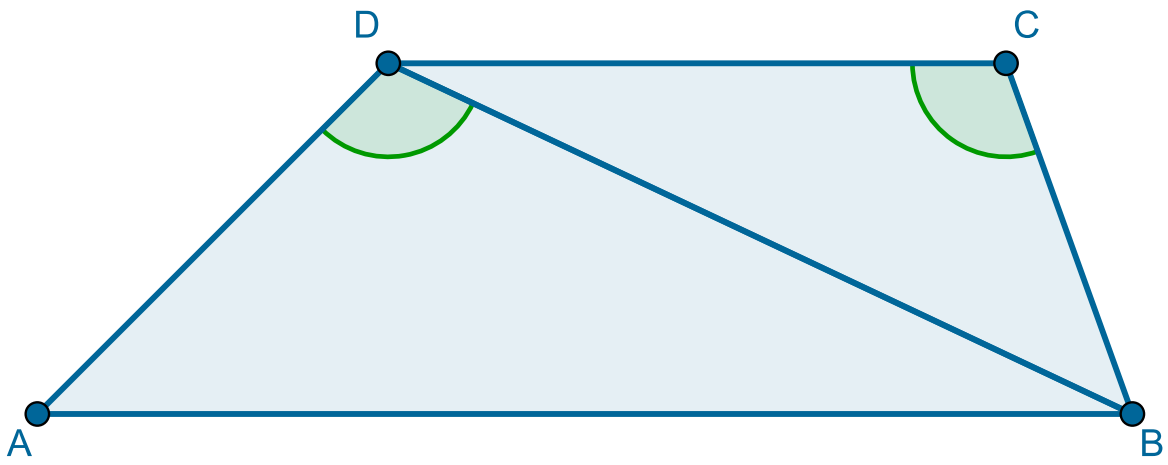
c. W trójkąt prostokątny ABC, w którym kąt ACB jest prosty, wpisano kwadrat $DEGF$ o boku długości 4. Bok GF kwadratu leży na przeciwprostokątnej AB trójkąta. Wierzchołki E, D leżą odpowiednio na przyprostokątnych AC i CB. Odcinek AG jest równy 2. Oblicz pole trójkąta ABC.



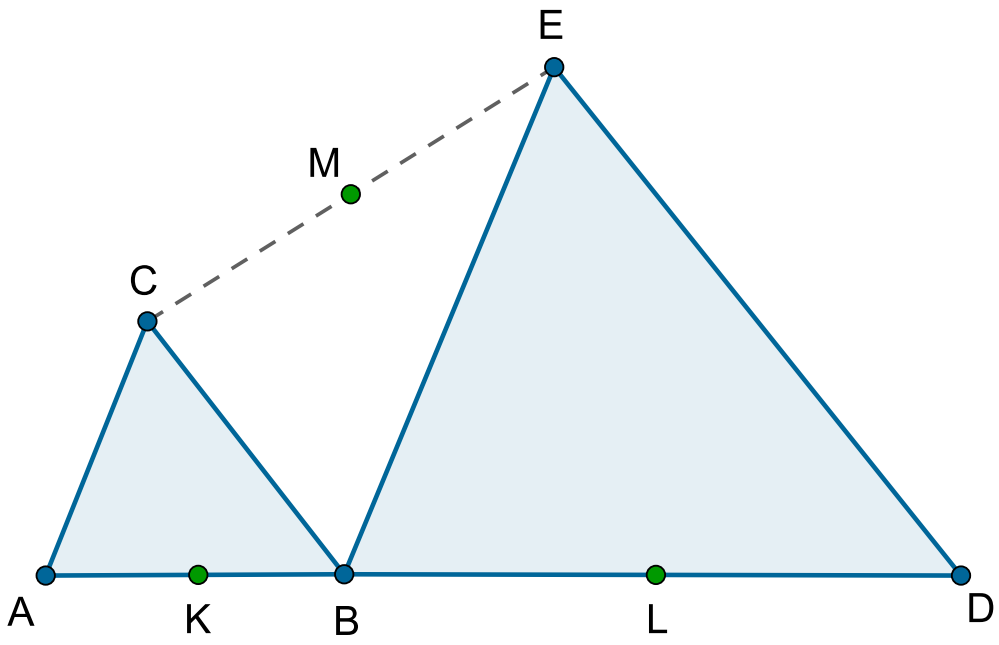
Ćwiczenie 8

Odpowiedz na pytania.

a. W trapezie $ABCD$ długość podstawy AB jest równa 28, a długości ramion trapezu AD i BC są odpowiednio równe 20 i 15. Kąty ADB i DCB, zaznaczone na rysunku, mają równe miary. Oblicz obwód tego trapezu.



b. Dwa trójkąty podobne ABC i BDE umieszczono obok siebie (patrz rysunek) tak, że punkty A, B i D leżą na jednej prostej. Punkty K, L i M są odpowiednio środkami odcinków AB, BD i CE. Udowodnij, że trójkąt KLM jest podobny do każdego z trójkątów ABC i BDE.



c. Przekątne czworokąta ABCD przecinają się w punkcie S i zachodzi równość $|\mathrm{AS}| \bullet |\mathrm{DS}| = |\mathrm{BS}| \bullet |\mathrm{CS}|$. Udowodnij, że czworokąt ABCD jest trapezem.

Ćwiczenie 9

Zaznacz poprawne stwierdzenie.

- ○ Stosunek pól dwóch trójkątów podobnych wynosi $144 : 225$. Wówczas stosunek obwodów tych trójkątów jest równy $12 : 15$.
- ○ W trójkącie ABC poprowadzono odcinek DE równoległy do podstawy AB, który ramię CB podzielił w stosunku $1 : 4$, licząc od wierzchołka C. Wówczas pole trójkąta DEC stanowi $\frac{1}{16}$ pola trójkąta ABC.
- ○ Stosunek długości przekątnych dwóch prostokątów podobnych jest równy $4 : 7$. Wówczas stosunek pól tych prostokątów jest równy $4 : 7$.

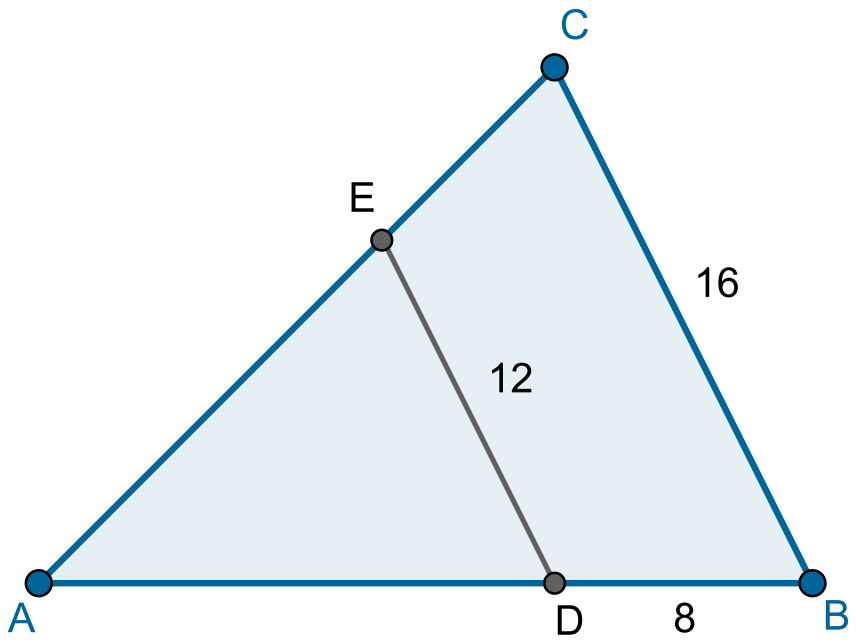
Ćwiczenie 10

Zaznacz poprawne stwierdzenie.

- ☐ W trapezie o podstawach długości a i b (gdzie $b > a$) odcinek łączący środki przekątnych ma długość $\frac{b-a}{2}$.
- ☐ Ramiona trapezu mają długości 3 i 5, a obwód trapezu jest równy 20. Wtedy długość odcinka łączącego środki ramion tego trapezu jest równa 12.
- ☐ Wysokość trapezu jest równa 4, a odcinek łączący środki ramion trapezu ma długość 5. Wtedy pole tego trapezu jest równe 20.

Ćwiczenie 11

Odcinki DE i BC są równoległe oraz $|\mathrm{DB}| = 8$, $|\mathrm{DE}| = 12$, $|\mathrm{BC}| = 16$.



Wówczas długość odcinka AD jest równa

- 24
- 4
- 8
- 12

Ćwiczenie 12

Prosta równoległa do boku AB trójkąta ABC odcina z niego trójkąt, którego pole stanowi $\frac{1}{4}$ pola trójkąta ABC. Wynika stąd, że ta prosta dzieli boki AC i BC w stosunku

- ◯ $1:3$
- ◯ $1:1$
- ◯ $1:4$
- ◯ $1:2$

Ćwiczenie 13

W prostokącie ABCD o bokach długości 6 i 8 odległość wierzchołka D od przekątnej AC jest równa

- ◯ $\frac{40}{3}$
- ◯ $7{,}5$
- ◯ $4\sqrt{3}$
- ◯ $4{,}8$

Ćwiczenie 14

W trapezie ABCD podstawa AB jest 2 razy dłuższa od podstawy CD. Punkt S jest punktem przecięcia się przekątnych. Wówczas stosunek $\frac{|\mathrm{DS}|}{|\mathrm{DB}|}$ jest równy

- ◯ $\frac{1}{3}$
- ◯ $\frac{2}{3}$
- ◯ $\frac{1}{2}$
- ◯ $\frac{2}{3}$

Ćwiczenie 15

Drzewo rzuca cień długości $12\ \mathrm{m}$. W tym samym czasie stojący obok człowiek o wzroście $180\ \mathrm{cm}$ rzuca cień długości $120\ \mathrm{cm}$. Drzewo ma wysokość

- ◯ $18\ \mathrm{m}$
- ◯ $8\ \mathrm{m}$
- ◯ $9\ \mathrm{m}$
- ◯ $12\ \mathrm{m}$

Ćwiczenie 16

Odcinek łączący środki ramion trapezu ma długość 8. Krótsza podstawa ma długość 2. Wtedy długość dłuższej podstawy jest równa

- 16
- 6
- 10
- 14

Ćwiczenie 17

W trójkąt równoboczny o boku długości 4 wpisano kwadrat, w taki sposób, że jego dwa wierzchołki leżą na jednym z boków trójkąta, a dwa pozostałe wierzchołki leżą na pozostałych dwóch ramionach trójkąta.

Rysunek trójkąta równobocznego A B C z wpisanym wewnątrz kwadratem F G H I opisanego w zadaniu.

Długość boku kwadratu jest równa

- $4\sqrt{3}-6$
- $\frac{\sqrt{3}}{2}$
- $2\sqrt{3}$
- $8\sqrt{3}-12$

Ćwiczenie 18

Dany jest trójkąt równoramienny o podstawie długości 10 i ramionach długości 13. Wysokość opuszczona na ramię tego trójkąta jest równa

- $\frac{60}{13}$
- $\frac{120}{13}$
- $\frac{156}{10}$
- $\frac{156}{5}$

Ćwiczenie 19

Trójkąt ABC ma boki długości $3,5,7$. W trójkącie $\mathrm{A'B'C'}$,podobnym do trójkąta ABC, najkrótszy bok ma długość $4\frac{1}{2}$. Obwód trójkąta $\mathrm{A'B'C'}$ jest równy

- 40
- $33\frac{3}{4}$
- 10
- $22\frac{1}{2}$

Ćwiczenie 20

Suma obwodów dwóch trójkątów podobnych jest równa 20. Stosunek pól tych trójkątów jest równy $16:1$. Obwody tych trójkątów są równe

- ◯ 6 i 14
- ◯ 2 i 18
- ◯ 4 i 16
- ◯ 8 i 12

Ćwiczenie 21

W trójkącie ABC długości boków są równe $|\mathrm{AC}| = 6$, $|\mathrm{BC}| = 9$ oraz $|\mathrm{AB}| = 12$. Na bokach AC i BC wybrano punkty D i E, które podzieliły te boki w stosunku $1:2$, licząc od wierzchołka C. Oblicz obwód trójkąta DEC.

Ćwiczenie 22

Punkty D i E leżą na boku AC trójkąta ABC i dzielą go w stosunku $1:2:3$, licząc od wierzchołka C. Przez punkty D i E poprowadzono proste równoległe do boku AB. Oblicz, w jakim stosunku pozostają pola figur, na jakie te proste podzieliły trójkąt ABC.

Ćwiczenie 23

W trapezie ABCD o podstawach długości $|\mathrm{AB}| = 18$ i $|\mathrm{CD}| = 6$ przedłużono ramiona do punktu S ich przecięcia. Długości odcinków DS i CS są równe $|\mathrm{DS}| = 3$ i $|\mathrm{CS}| = 5$. Oblicz długości ramion trapezu ABCD.

Ćwiczenie 24

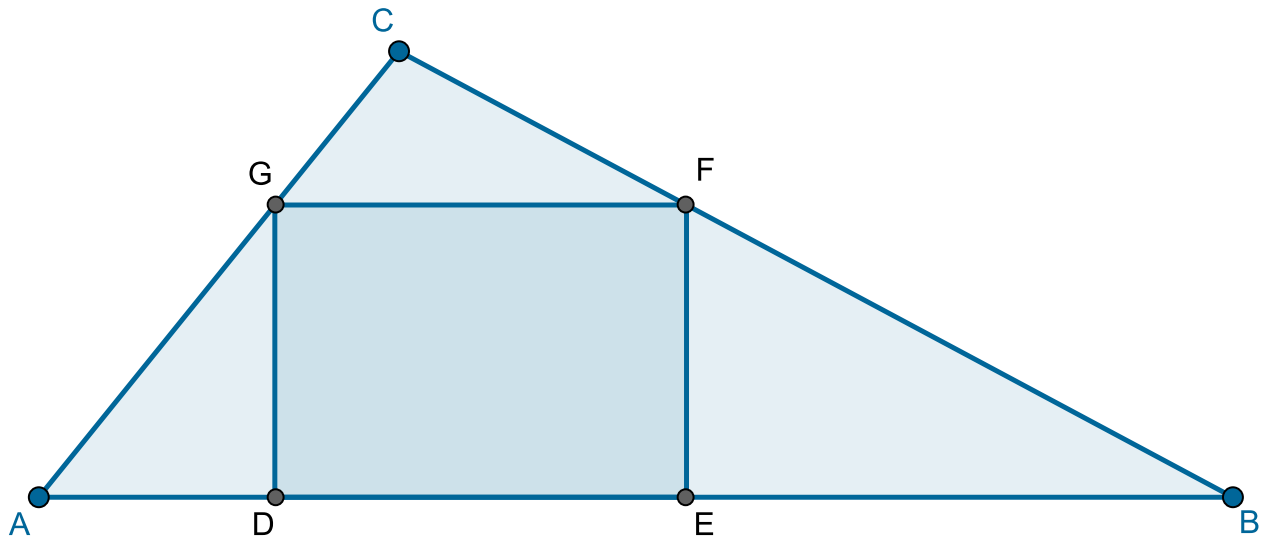
Dany jest trójkąt prostokątny ABC o kącie prostym przy wierzchołku C. Punkt D jest spodkiem wysokości poprowadzonej z wierzchołka C tego trójkąta. Wykaż, że $|\mathrm{CD}| = \sqrt{|\mathrm{AD}| \bullet |\mathrm{BD}|}$.

Ćwiczenie 25

W trapezie $ABCD$ dłuższa podstawa AB ma długość 10. Przekątne tego trapezu przecinają się w punkcie S, który dzieli każdą z nich w stosunku $3:5$. Oblicz długość krótszej podstawy.

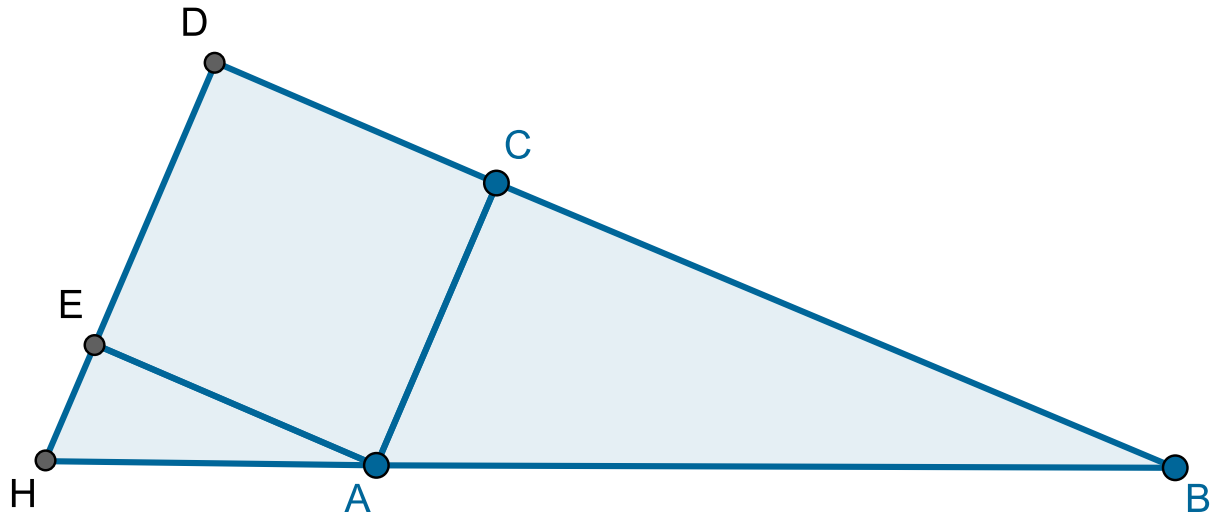
Ćwiczenie 26

W trójkącie ABC podstawa AB ma długość 24, a wysokość opuszczona na tę podstawę jest równa 9. W trójkąt ten wpisano prostokąt $DEFG$, taki jak na rysunku. Boki tego prostokąta pozostają w stosunku $3:4$, przy czym dłuższy bok leży na podstawie trójkąta ABC. Oblicz pole wpisanego prostokąta.



Ćwiczenie 27

Na zewnątrz trójkąta prostokątnego ABC, w którym kąt ACB jest prosty oraz $|\mathrm{AC}| = 5$ i $|\mathrm{BC}| = 12$, zbudowano kwadrat ACDE. Punkt H należy do prostej AB i $|\sphericalangle \mathrm{HEA}| = 90^\circ$. Oblicz pole trójkąta HAE.



Ćwiczenie 28

Dany jest równoległobok ABCD. Na przedłużeniu przekątnej AC poza punkt C, wybrano punkt P, taki że $|\mathrm{AC}| = 3|\mathrm{CP}|$. Znajdź stosunek pola trójkąta DCP do pola równoległoboku ABCD.

Ćwiczenie 29

W trójkącie ABC środkowa CD ma długość 8. Punkt K leży na środkowej CD i $|\mathrm{CK}| = 2$. Na boku AC leży taki punkt M, że proste MK i BC są równoległe. Oblicz $|\mathrm{AM}| : |\mathrm{MC}|$.

Ćwiczenie 30

W rombie ABCD kąt przy wierzchołku A jest ostry. Na boku AB leży taki punkt E, że proste DE i AB są prostopadłe. Przekątna AC przecina odcinek DE w punkcie F, przy czym $|\mathrm{DF}| = 13$ i $|\mathrm{FE}| = 12$. Oblicz pole tego rombu.

Ćwiczenie 31

W trójkącie prostokątnym ABC przyprostokątne mają długości $|\mathrm{AC}| = 13{,}6$ i $|\mathrm{BC}| = 25{,}5$. Punkt D leży na przeciwprostokątnej AB i $|\mathrm{AD}| = 8{,}5$. Na przyprostokątnej AC leży taki punkt E, że proste DE i AC są prostopadłe. Na przyprostokątnej BC leży taki punkt F, że proste DF i BC są prostopadłe. Oblicz pole czworokąta $\mathrm{DFC}\,E$.

Ćwiczenie 32

W równoległoboku ABCD dane są długości boków $|\mathrm{AB}| = 12$ i $|\mathrm{BC}| = 16$. Punkt E leży na boku AB i $|\mathrm{AE}| = 8$. Punkt F leży na boku BC i $|\mathrm{CF}| = 4$. Proste DE i DF przecinają przekątną AC w punktach odpowiednio K i L. Wykaż, że $|\mathrm{AK}| = 2\,|\mathrm{LC}|$.

Ćwiczenie 33

W trójkącie ABC kąt przy wierzchołku A ma miarę większą od kąta przy wierzchołku B. Punkt K jest środkiem boku AB. Prosta zawierająca wysokość tego trójkąta, poprowadzona z wierzchołka C, przecina bok AB w punkcie D, przy czym $|\mathrm{AD}| : |\mathrm{DB}| = 5 : 11$. Symetralna boku AB przecina bok BC w punkcie L i przedłużenie boku AC w punkcie M. Oblicz.

a. $|\mathrm{BL}| : |\mathrm{LC}|$

b. $|\mathrm{AC}| : |\mathrm{CM}|$

c. $|\mathrm{KL}| : |\mathrm{LM}|$

Ćwiczenie 34

W trapezie równoramiennym ABCD podstawy mają długości $|\mathrm{AB}| = 20$, $|\mathrm{CD}| = 5$. Przekątne AC i BD przecinają się w punkcie S. Prosta równoległa do podstawy AB i przechodząca przez punkt S przecina ramiona AD i BC w punktach odpowiednio K i L. Oblicz długość odcinka KL.

Ćwiczenie 35

W trójkącie ABC dane są długości boków $|\mathrm{AC}| = 8$, $|\mathrm{BC}| = 12$ i $|\mathrm{AB}| = 10$. Na bokach AB, BC i CA wybrano odpowiednio takie punkty D, E i F, że czworokąt CFDE jest rombem. Oblicz długość boku tego rombu oraz długości odcinków DB i DA.

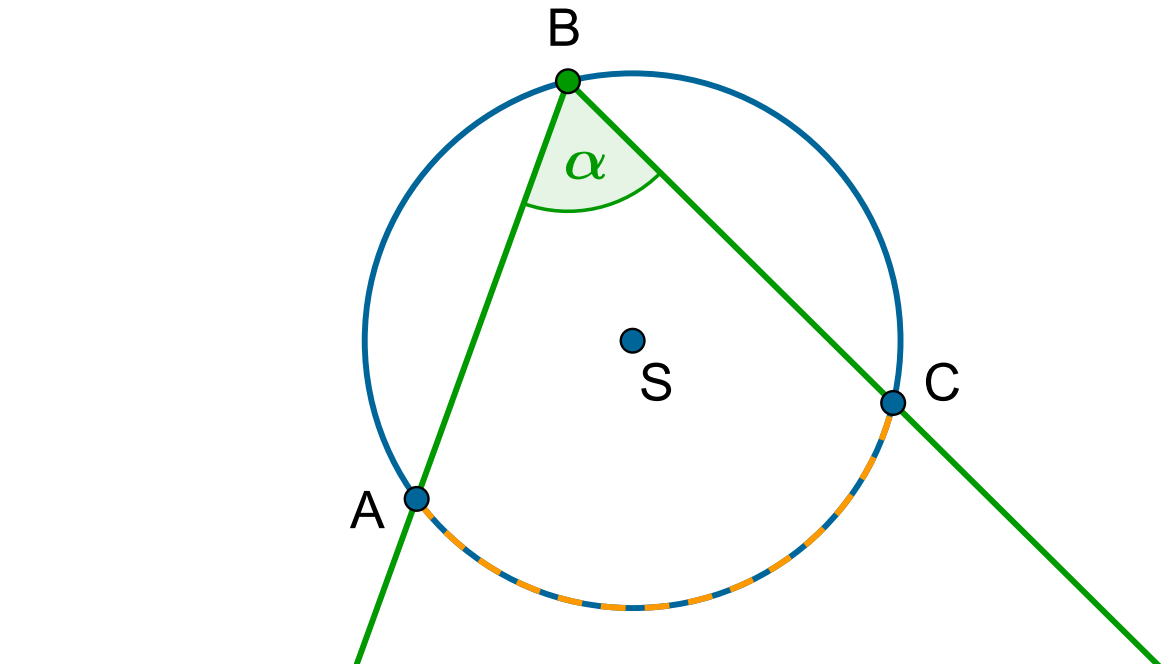
Ćwiczenie 36

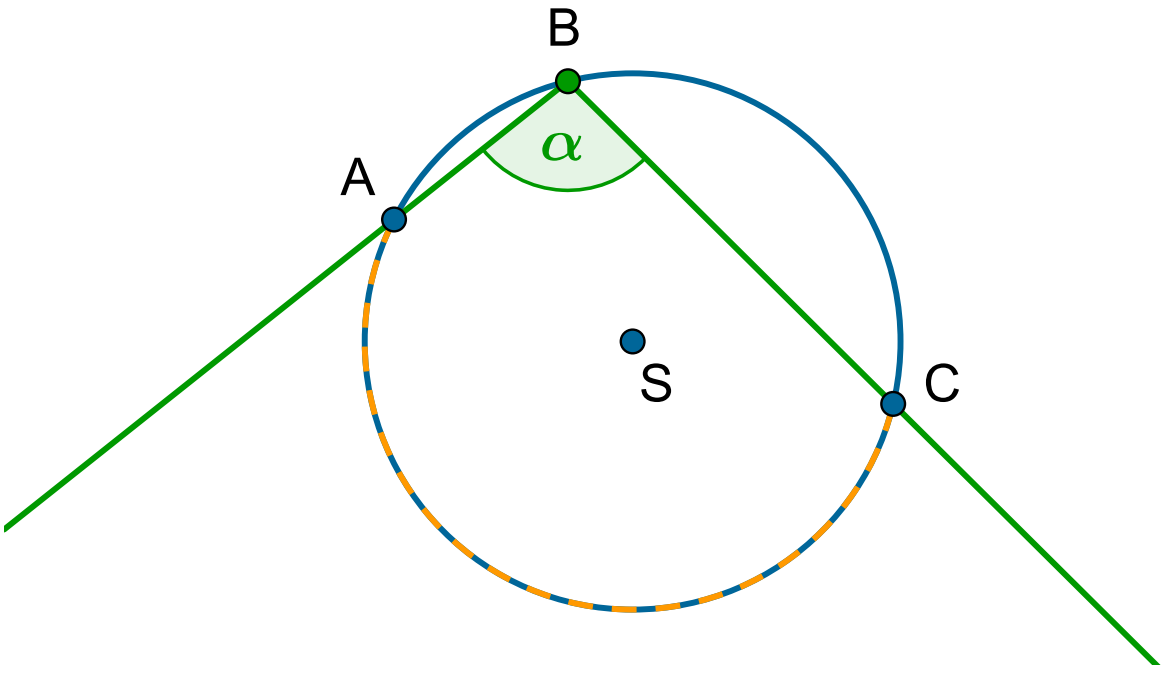
Na bokach AB, BC i AC trójkąta ABC leżą odpowiednio takie punkty D, E i F, że prosta DE jest równoległa do boku AC i prosta DF jest równoległa do boku BC. Pole trójkąta ADF jest równe 18, a pole trójkąta BDE jest równe 50. Oblicz pole trójkąta ABC.

Kąty w okręgu

Definicja: Kąt wpisany w okrąg

Kątem wpisanym w okrąg nazywamy kąt, którego wierzchołek leży na okręgu, a jego ramionami są półproste zawierające dwie cięciwy tego okręgu.



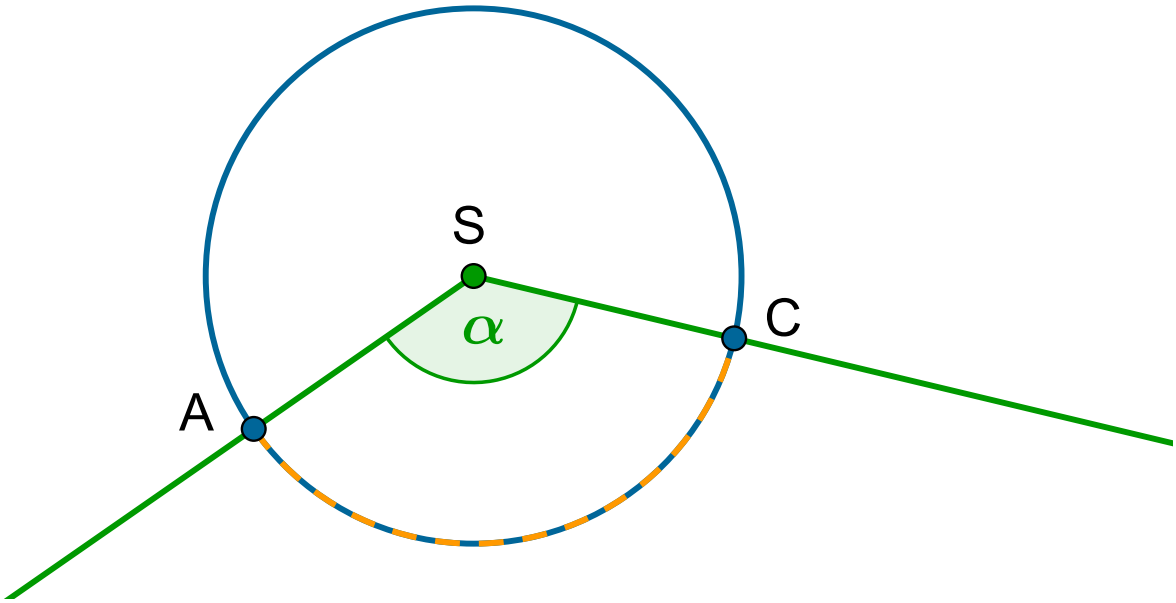


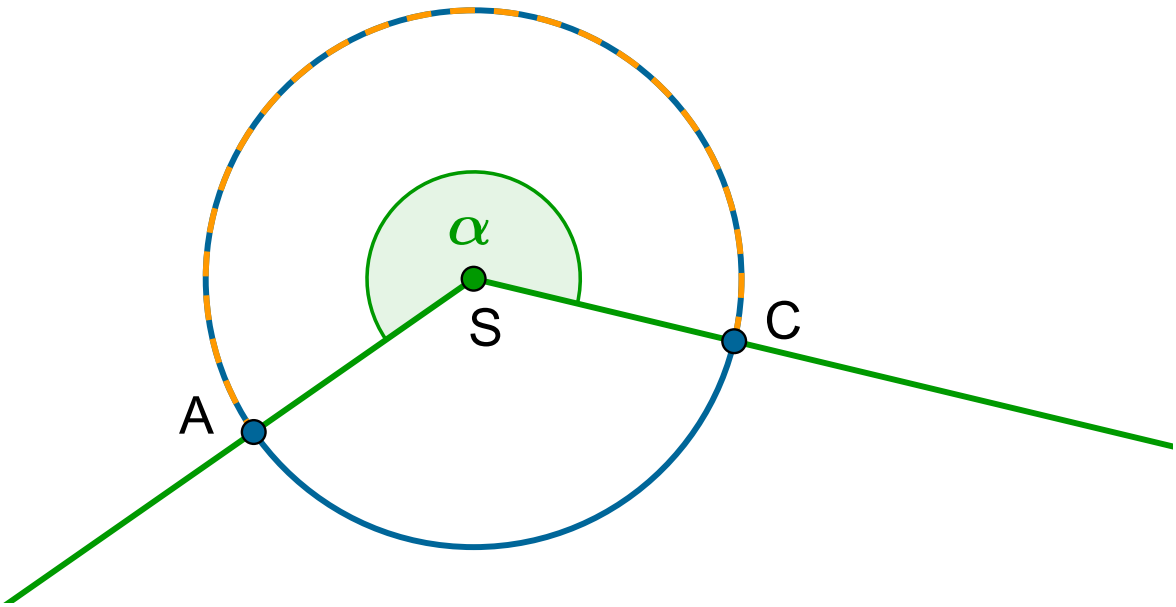
Punkty A i C wyznaczają dwa łuki na okręgu. Mówimy, że kąt wpisany α jest oparty na łuku AC, mając na myśli łuk zaznaczony na rysunku, na którym nie leży wierzchołek B (łuk zawarty w kącie ABC). Czasem mówimy też, że kąt α jest oparty na cięciwie AC.

Kąt środkowy, kąt wpisany

Definicja: Kąt środkowy okręgu

Kątem środkowym okręgu nazywamy kąt, którego wierzchołek jest środkiem okręgu.





Mówimy, że kąt środkowy α jest oparty na łuku AC, mając na myśli łuk zaznaczony na rysunku.

- w przypadku kątów mniejszych niż 180°, kąt środkowy jest oparty na krótszym z łuków AC,

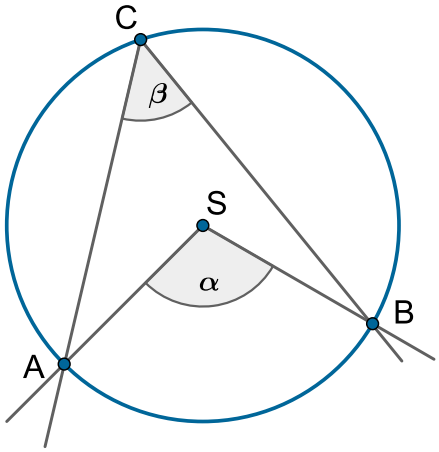
- w przypadku kątów większych niż 180°, kąt środkowy oparty jest na dłuższym z łuków AC.
- W przypadku kata równego 180°, kąt środkowy oparty jest na półokręgu.

Rozpatrzymy teraz sytuację, w której kąt środkowy i kąt wpisany oparte są na tym samym łuku okręgu.

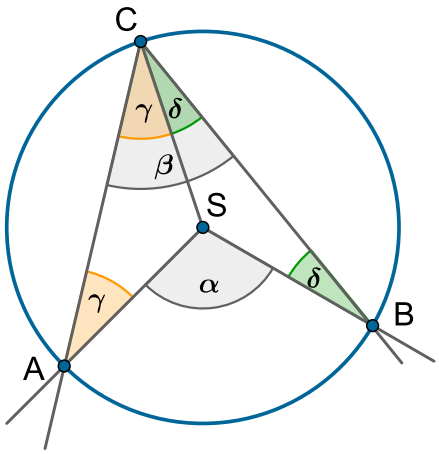
Zasób interaktywny dostępny pod adresem https://zpe.gov.pl/a/D1AXVoCXd

- I przypadek

Środek okręgu leży wewnątrz kąta wpisanego.



Na okręgu o środku w punkcie S i promieniu r zaznaczmy punkty A, B i C. Niech α będzie kątem środkowym opartym na łuku AB, a β niech będzie kątem wpisanym opartym na tym samym łuku AB.
Oznaczmy $\gamma = |\sphericalangle CAS|$ oraz $\delta = |\sphericalangle SBC|$. Poprowadźmy z punktu C promień okręgu. Utworzone w ten sposób trójkąty ACS oraz BCS są równoramienne. Zatem w każdym z tych trójkątów miary kątów przy podstawie są równe.



Zatem $|\sphericalangle \mathrm{ACS}| = |\sphericalangle \mathrm{CAS}| = \gamma$ i $|\sphericalangle \mathrm{BCS}| = |\sphericalangle \mathrm{CBS}| = \delta$.
Wtedy

$$|\sphericalangle \mathrm{ASC}| = 180^\circ - 2\gamma, \ |\sphericalangle \mathrm{BSC}| = 180^\circ - 2\delta.$$

Suma miar kątów ASC, BSC, ASB jest równa 360°

$$|\sphericalangle \mathrm{ASC}| + |\sphericalangle \mathrm{BSC}| + |\sphericalangle \mathrm{ASB}| = 360^\circ$$

Czyli

$$180^\circ - 2\gamma + 180^\circ - 2\delta + \alpha = 360^\circ$$

$$\alpha = 2\gamma + 2\delta = 2(\gamma + \delta),$$

ale

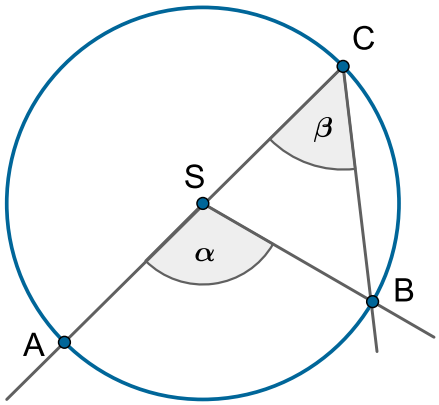
$$\gamma + \delta = \beta,$$

więc

$$\alpha = 2\beta.$$

- II przypadek

Środek okręgu leży na ramieniu kąta wpisanego.



Trójkąt BCS jest równoramienny, stąd $|\sphericalangle \mathrm{SBC}| = \beta$. Zatem

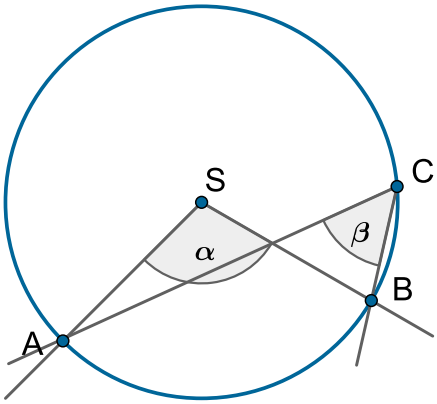
$$|\sphericalangle \mathrm{BSC}| = 180^\circ - 2\beta.$$

Z drugiej strony $|\sphericalangle \mathrm{BSC}| + \alpha = 180^\circ$.
Zatem $180^\circ - 2\beta + \alpha = 180^\circ$, więc w tym przypadku także

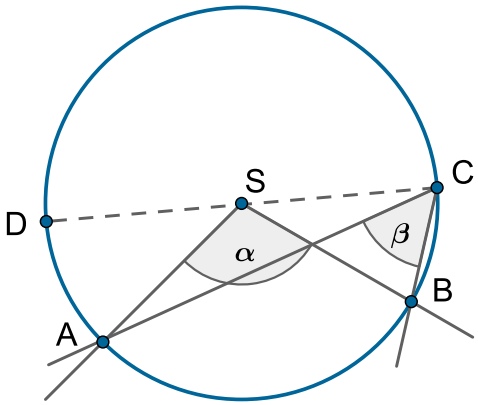
$$\alpha = 2\beta.$$

- III przypadek

Środek okręgu leży na zewnątrz kąta wpisanego.

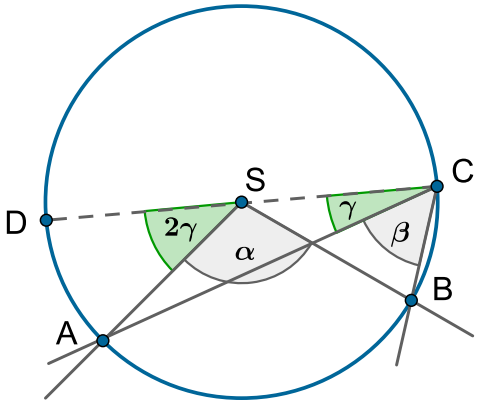


Narysujmy średnicę okręgu przechodzącą przez punkt C.



Oznaczmy przez γ kąt pomiędzy narysowaną średnicą a ramieniem AC kąta wpisanego, jak na rysunku.
Zauważmy, że kąt ASD jest kątem środkowym opartym na tym samym łuku co kąt γ i jest to sytuacja opisana w przypadku II. Zatem

$$|\sphericalangle ASD| = 2\gamma.$$



Kąt $\gamma + \beta$ jest kątem wpisanym opartym na tym samym łuku, co kąt środkowy $2\gamma + \alpha$ i jest to sytuacja opisana w przypadku II. Zatem

$$2(\gamma + \beta) = 2\gamma + \alpha.$$

Stąd ponownie otrzymujemy

$$\alpha = 2\beta.$$

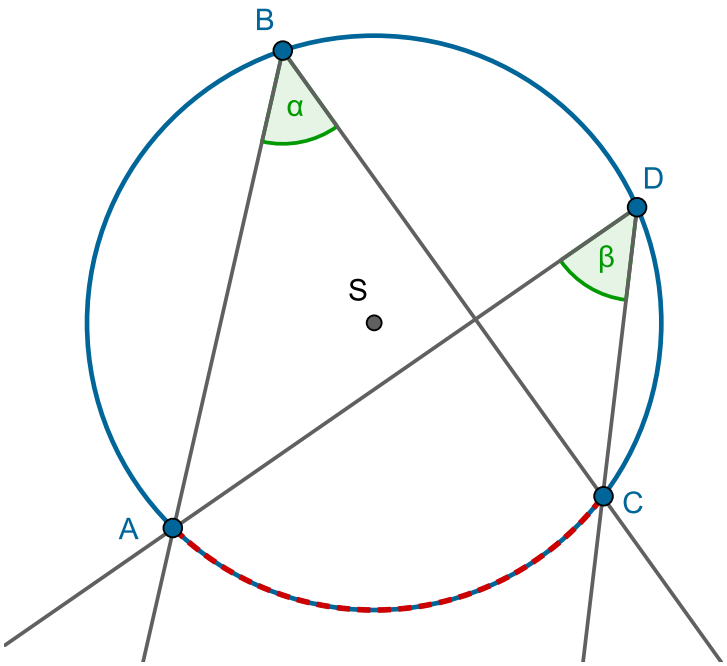
Udowodniliśmy w ten sposób twierdzenie o kącie środkowym i wpisanym.

> **Twierdzenie: o kącie środkowym i wpisanym**
>
> Kąt środkowy ma miarę dwa razy większą niż kąt wpisany oparty na tym samym łuku.

Z tego twierdzenia wynikają wprost twierdzenia zapisane poniżej.

> **Twierdzenie: o kątach wpisanych opartych na tym samym łuku okręgu**

Kąty wpisane oparte na tym samym łuku okręgu mają równe miary.

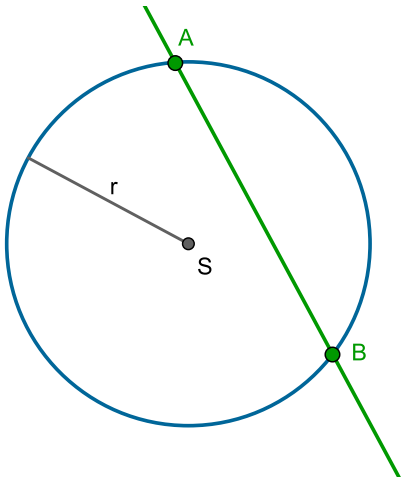


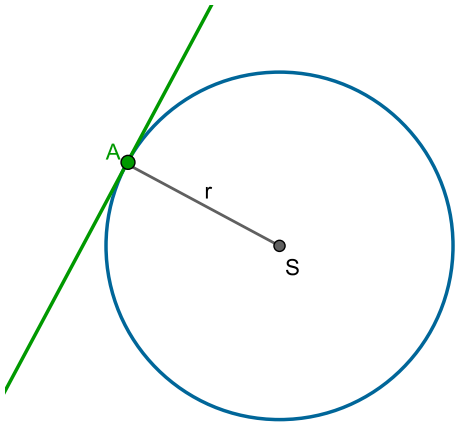
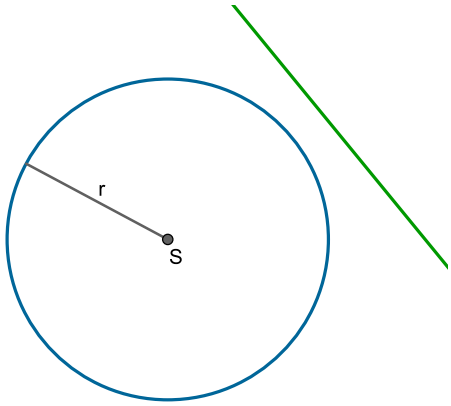
Wzajemne położenie prostej i okręgu

Rozważmy prostą oraz okrąg o środku w punkcie S i promieniu r. Prosta oraz okrąg, leżące w tej samej płaszczyźnie, mogą mieć jeden punkt wspólny, mogą mieć dwa punkty wspólne lub nie mają punktów wspólnych.

Zasób interaktywny dostępny pod adresem https://zpe.gov.pl/a/DdQwMDfgB

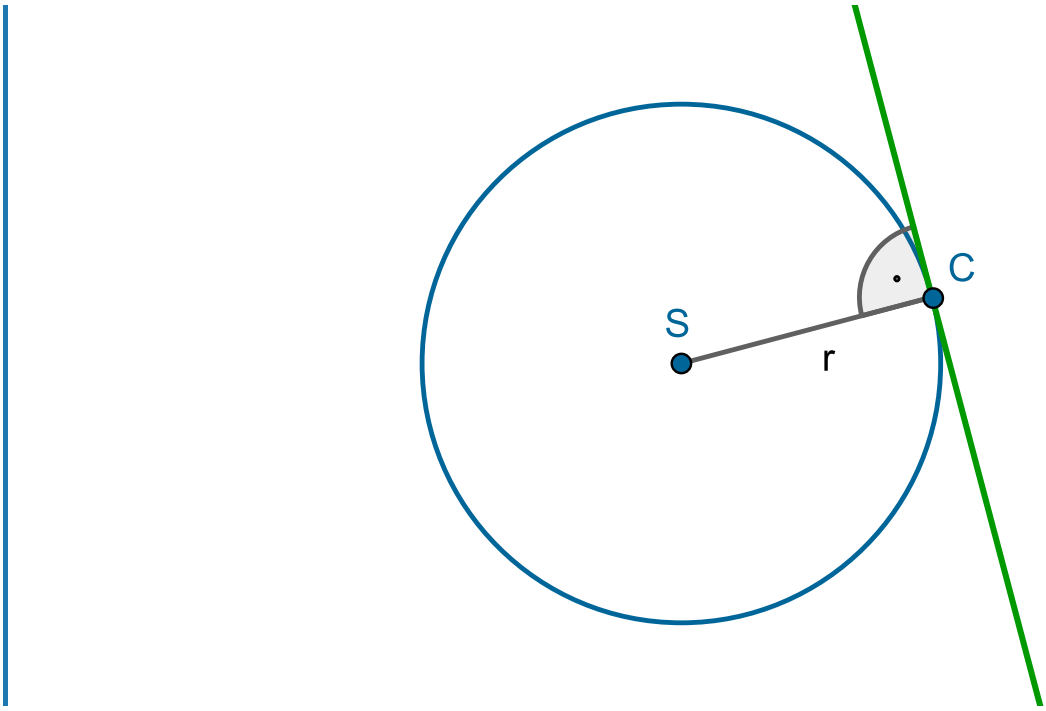
Dane

Wzajemne położenie prostej i okręgu		
Nazwa prostej	Liczba punktów wspólnych prostej i okręgu	Interpretacja graficzna
Sieczna okręgu	dwa	 A, B – punkty wspólne prostej i okręgu

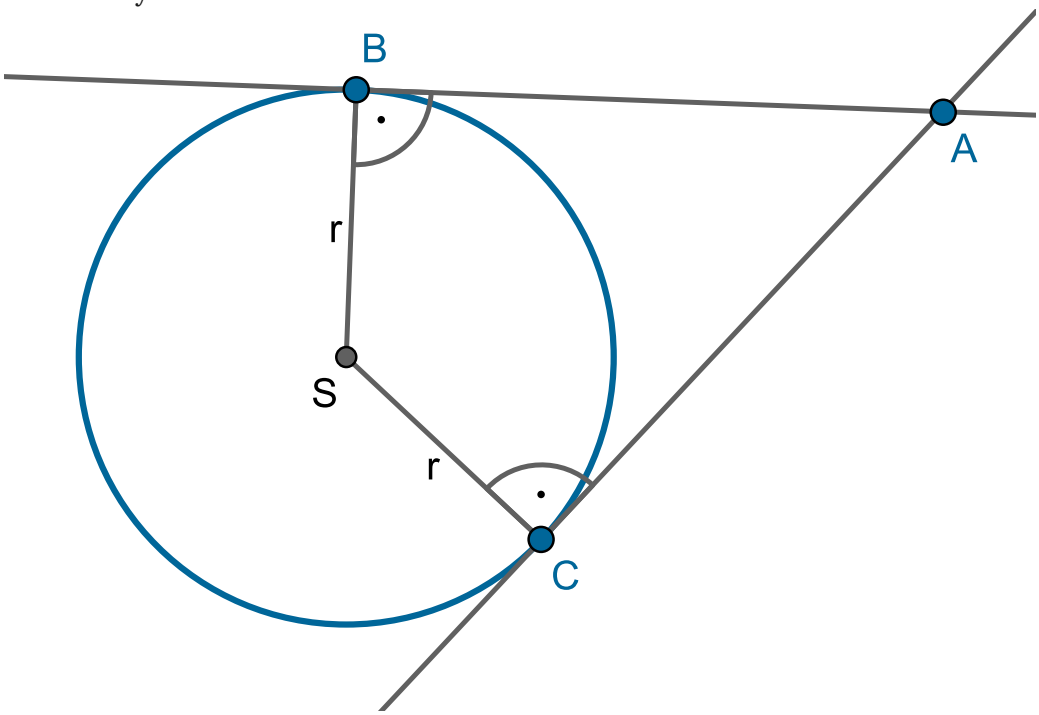
Styczna do okręgu	jeden	 A – punkt wspólny prostej i okręgu
Rozłączna z okręgiem	zero	 Prosta i okrąg nie mają punktów wspólnych.

Twierdzenie: Styczna do okręgu

Styczna do okręgu jest prostopadła do promienia tego okręgu poprowadzonego z punktu styczności.



Rozważmy okrąg o środku w punkcie S i promieniu r oraz punkt A leżący na zewnątrz tego okręgu. Poprowadźmy dwie styczne do tego okręgu przechodzące przez punkt A. Punkty styczności oznaczmy B i C.



Zasób interaktywny dostępny pod adresem https://zpe.gov.pl/a/DdQwMDfgB

Poprowadźmy odcinek AS . Trójkąty ABS i ACS są prostokątne i mają wspólną przeciwprostokątną SA. Przyprostokątne SB i SC mają taką samą długość r. Obliczając z twierdzenia Pitagorasa trzeci z boków w obu trójkątach, otrzymujemy

$$|\mathrm{AB}| = \sqrt{|\mathrm{AS}|^2 - r^2},$$

oraz

$$|\mathrm{AC}| = \sqrt{|\mathrm{AS}|^2 - r^2},$$

zatem

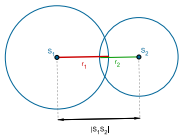
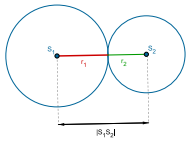
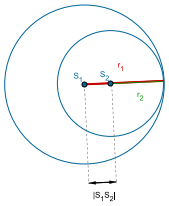
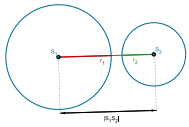
$$|\mathrm{AB}| = |\mathrm{AC}|.$$

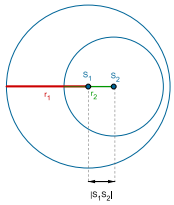
> **Twierdzenie: o odcinkach stycznych**
>
> Jeżeli styczne do okręgu w punktach A i B przecinają się w punkcie C, to odcinki AB i AC są równej długości.

Rozważmy dwa okręgi: jeden o środku w punkcie S_1 i promieniu r_1, drugi o środku w punkcie S_2 i promieniu r_2, przy czym $S_1 \neq S_2$. Dwa okręgi mogą mieć dwa punkty wspólne, jeden punkt wspólny lub nie mają punktów wspólnych.

Zasób interaktywny dostępny pod adresem https://zpe.gov.pl/a/DdQwMDfgB

Dane

Wzajemne położenie dwóch okręgów o różnych promieniach			
Nazwa okręgów	Liczba punktów wspólnych	Zależność między środkami S_1, S_2 okręgów a ich promieniami r_1, r_2	Interpretacja graficzna
Okręgi przecinające się	dwa	$\lvert r_1 - r_2\rvert < \lvert S_1S_2\rvert < r_1 + r_2$	
Okręgi styczne zewnętrznie	jeden	$\lvert S_1S_2\rvert = r_1 + r_2$	
Okręgi styczne wewnętrznie	jeden	$0 < \lvert S_1S_2\rvert = \lvert r_1 - r_2\rvert$	
Okręgi rozłączne zewnętrznie	zero	$\lvert S_1S_2\rvert > r_1 + r_2$	

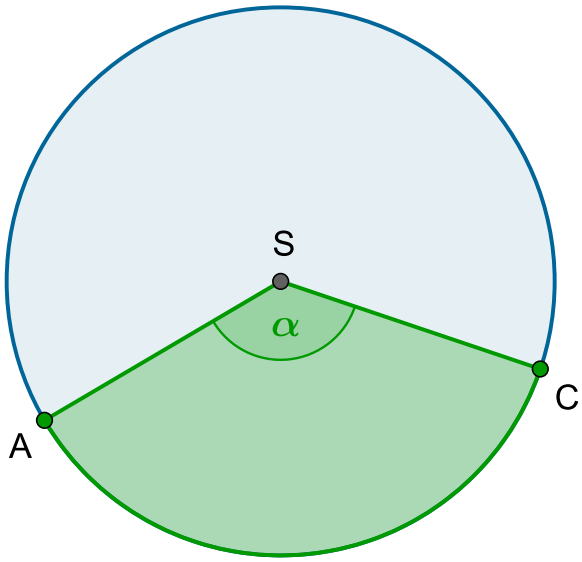
Okręgi rozłączne wewnętrznie	zero	$\lvert S_1S_2\rvert < \lvert r_1 - r_2\rvert$	

Wycinek i odcinek koła

Przypomnijmy wzory na pole i obwód koła.
Pole koła $P = \pi r^2$ oraz obwód koła $L = 2\pi r$, gdzie $\pi \approx 3{,}14159$ jest stałą matematyczną definiowaną jako stosunek obwodu koła do jego średnicy.

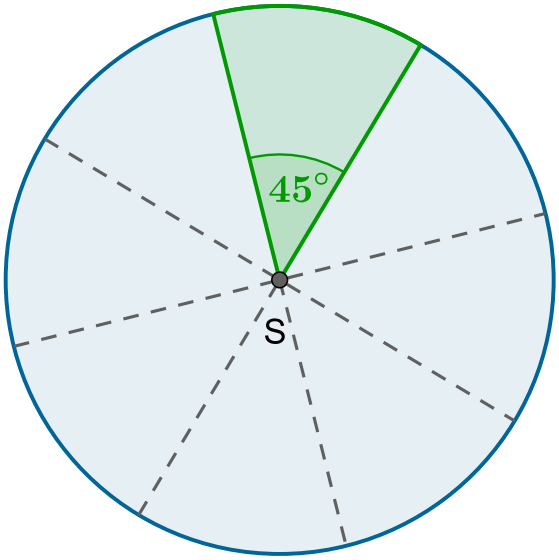
Definicja: Wycinek koła

Wycinkiem koła nazywamy każdą z dwóch jego części wyznaczonych przez dwa promienie tego koła wraz z tymi promieniami. Kąt pomiędzy tymi promieniami nazywamy kątem wycinka.



Przykład 1

Obliczmy pole wycinka koła o promieniu 3, którego kąt jest równy $\alpha = 45^\circ$.
Zastanówmy się, jaką częścią całego koła jest ten wycinek.



Zauważmy, że $\frac{45^\circ}{360^\circ} = \frac{1}{8}$. Zatem pole wycinka stanowi ósmą część pola koła.

$$P_{\text{wycinka}} = \frac{1}{8} P_{\text{koła}}$$

$$P_{\text{wycinka}} = \frac{1}{8} \pi r^2$$

$$P_{\text{wycinka}} = \frac{1}{8} \bullet \pi \bullet 3^2 = \frac{9}{8}\pi$$

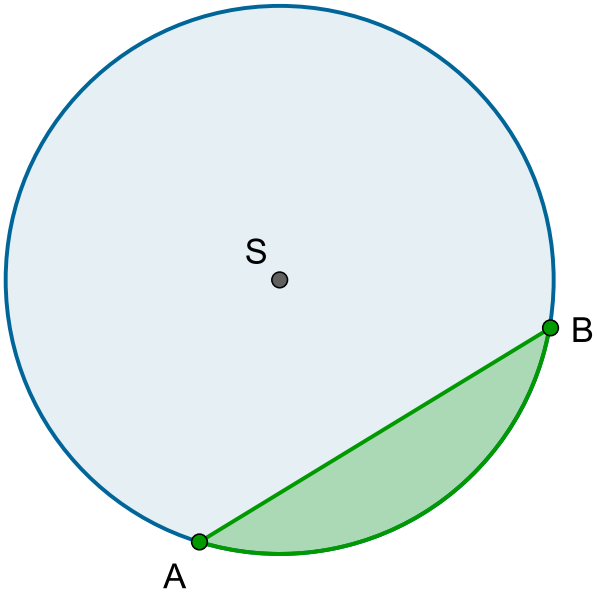
Definicja: Pole wycinka

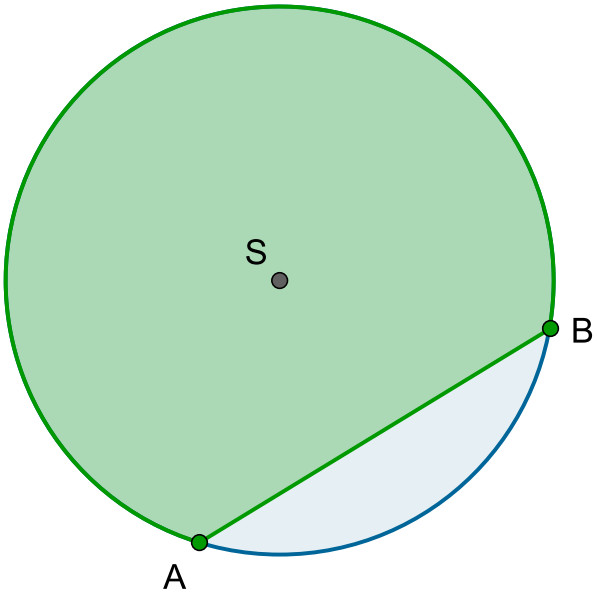
Pole wycinka koła o promieniu r i kącie α jest równe

$$P_{\text{wycinka}} = \frac{\alpha}{360^\circ} \bullet \pi r^2$$

Definicja: Odcinek koła

Odcinkiem koła nazywamy każdą z dwóch części, na jakie dzieli to koło jego cięciwa wraz z tą cięciwą i łukiem okręgu.


S
B
A

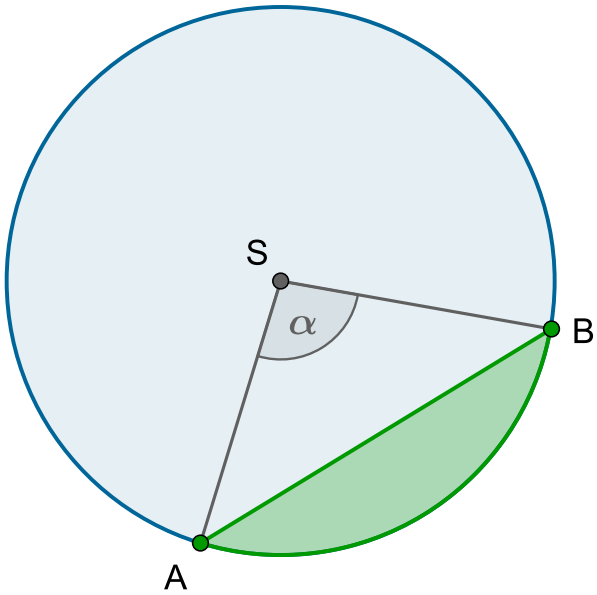

S
B
A

Zasób interaktywny dostępny pod adresem https://zpe.gov.pl/a/D15S1KI9q

Obliczymy pole odcinka koła.

- przypadek I

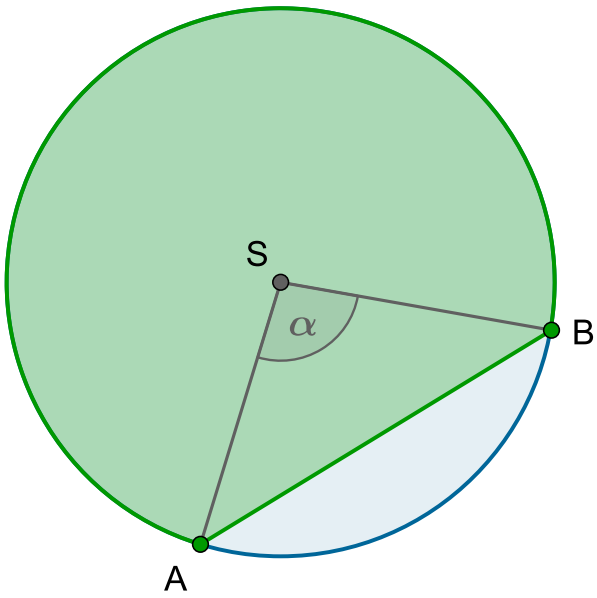
Środek koła leży na zewnątrz odcinka koła. Wtedy pole tego odcinka jest mniejsze od połowy pola koła.
Połączmy końce cięciwy ze środkiem okręgu. Otrzymane promienie wraz z cięciwą są bokami trójkąta równoramiennego ASB, a kąt α między ramionami SA i SB jest kątem wycinka koła ASB. Pole odcinka koła obliczymy, odejmując od pola wycinka pole trójkąta ASB.



$$P_{\text{odcinka}} = P_{\text{wycinka}} - P_{\text{trójkąta}}$$

- przypadek II

Środek koła leży wewnątrz odcinka koła. Pole odcinka jest wtedy większe od połowy pola koła. Tak jak poprzednio, połączmy końce cięciwy ze środkiem okręgu. Otrzymane promienie wraz z cięciwą są bokami trójkąta równoramiennego ASB. Między ramionami SA i SB znajduje się kąt α. Pole odcinka koła obliczymy, dodając pole trójkąta ASB do pola wycinka.



$$P_{\text{odcinka}} = P_{\text{wycinka}} + P_{\text{trójkąta}}.$$

- przypadek III

Środek koła leży na cięciwie AB.
Cięciwa AB jest wtedy średnicą koła o promieniu r. Każdy z dwóch wyznaczonych przez nią odcinków koła jest półkolem o polu $\frac{\pi r^2}{2}$.

Okrąg wpisany w trójkąt prostokątny

Przykład 1

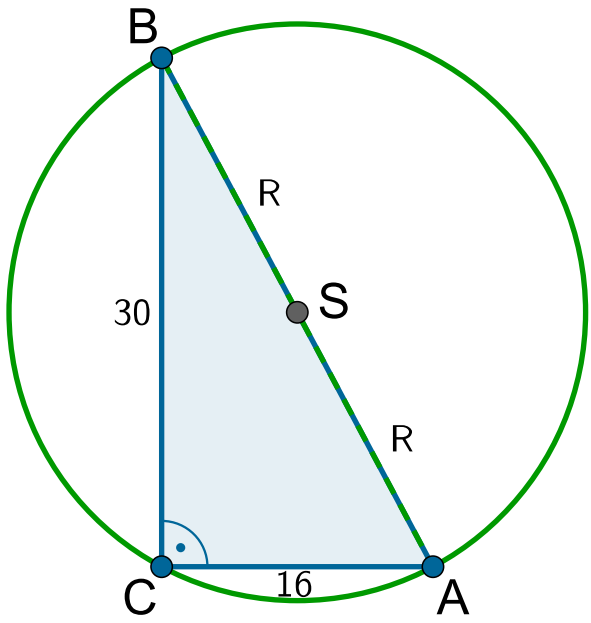
W trójkącie prostokątnym ABC dane są długości przyprostokątnych

$$|\mathrm{AC}| = 16,\ |\mathrm{BC}| = 30.$$

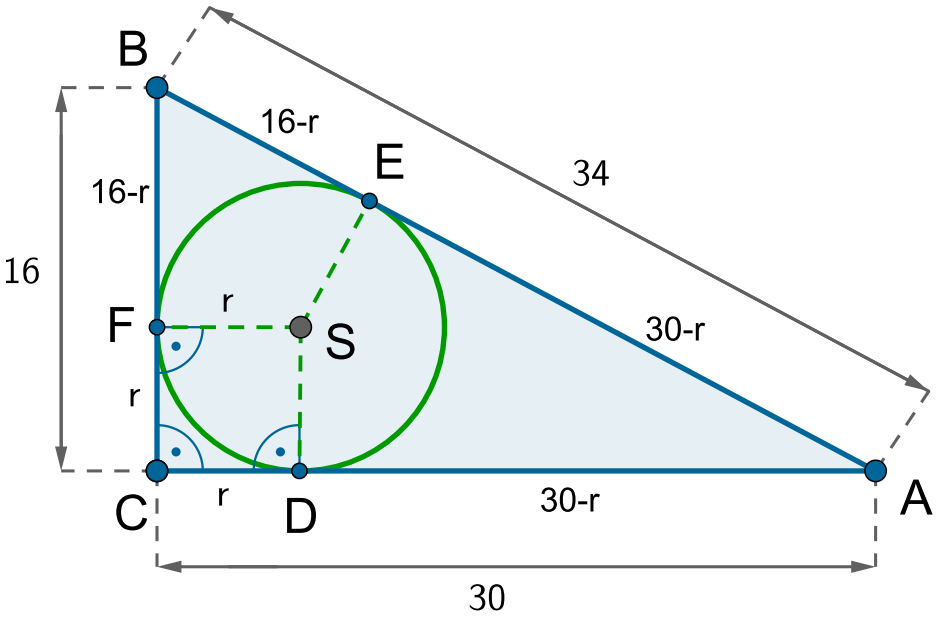
Obliczymy długość promienia okręgu opisanego na tym trójkącie oraz długość promienia okręgu wpisanego w ten trójkąt.
Ponieważ trójkąt jest prostokątny, to środek okręgu na nim opisanego jest środkiem przeciwprostokątnej.
Z twierdzenia Pitagorasa

$$|\mathrm{AB}|^2 = 16^2 + 30^2.$$

Po uwzględnieniu, że $|\mathrm{AB}| > 0$, otrzymujemy $|\mathrm{AB}| = 34$. Zatem promień R okręgu opisanego na tym trójkącie jest równy 17.



Niech S i r oznaczają odpowiednio środek i promień okręgu wpisanego w trójkąt ABC. Okrąg ten jest styczny do przyprostokątnych AC i BC w punktach odpowiednio D i F, a do przeciwprostokątnej w punkcie E, jak na rysunku.



Z twierdzenia o odcinkach stycznych wynika, że

$$|\mathrm{CD}| = |\mathrm{CF}|,\ |\mathrm{BE}| = |\mathrm{BF}|,\ |\mathrm{AD}| = |\mathrm{AE}|.$$

Czworokąt SDCF jest kwadratem o boku r. Zatem

$$|\mathrm{CD}| = |\mathrm{CF}| = r$$

$$|\mathrm{BE}| = |\mathrm{BF}| = 16 - r.$$

Ponieważ

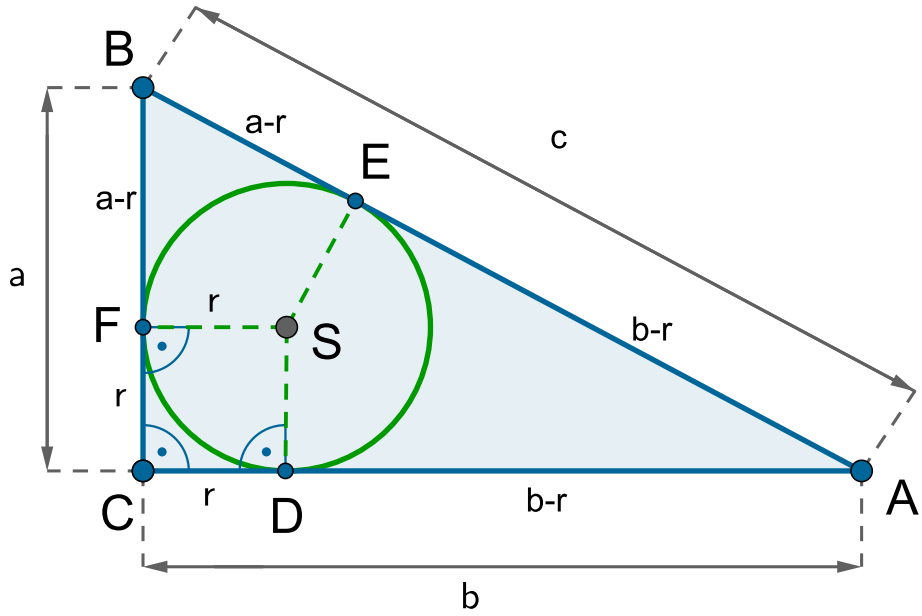
$$|\mathrm{AB}| = |\mathrm{AE}| + |\mathrm{BE}|$$

$$|\mathrm{AD}| = |\mathrm{AE}| = 30 - r,$$

to

$$16 - r + 30 - r = 34.$$

Stąd $r = 6$.
Przeprowadzając analogiczne rozumowanie dla trójkąta prostokątnego o przyprostokątnych długości a i b i przeciwprostokątnej długości c, otrzymujemy związek między długościami boków trójkąta prostokątnego i promieniem okręgu wpisanego w ten trójkąt.



$$c = a - r + b - r$$

Twierdzenie: Promień okręgu wpisanego w trójkąt prostokątny

Promień r okręgu wpisanego w trójkąt prostokątny o przyprostokątnych długości a i b oraz przeciwprostokątnej długości c jest równy

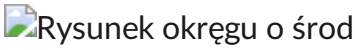
$$r = \frac{a+b-c}{2}.$$

Zadania

Ćwiczenie 1

Ćwiczenie 2

Punkty A, B, C leżą na okręgu o środku S. Miara kąta ASC jest równa 120°, a kąt ASB jest prosty (jak na rysunku).

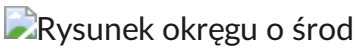

Rysunek okręgu o środku S i kątach A S C i A S B.

Wtedy

- [ ] $|\sphericalangle \mathrm{CAB}| = 60^\circ$
- [ ] $|\sphericalangle \mathrm{SCB}| = 15^\circ$
- [ ] $|\sphericalangle \mathrm{ACB}| = 45^\circ$

Ćwiczenie 3

Odcinek AC jest średnicą okręgu o środku S, punkty B i D leżą na tym okręgu. Kąty w tym okręgu zaznaczono na rysunku.


Rysunek okręgu o środku S i czterech wpisanych w okrąg kątów B A C równy alfa, A B C równy beta, A C B równy gamma i kącie B D C równym 55 stopni.

Zaznacz poprawne stwierdzenie.

- [ ] $\gamma = 35^\circ$
- [ ] $\alpha = 55^\circ$
- [ ] $\beta = 110^\circ$

Ćwiczenie 4

Połącz w pary określenie wzajemnego położenia dwóch okręgów z odpowiednimi własnościami tych okręgów.

a. okręgi są styczne wewnętrznie

b. okręgi są styczne zewnętrznie

c. okręgi są rozłączne wewnętrznie (jeden okrąg leży w drugim)

d. okręgi przecinają się

e. okręgi są rozłączne zewnętrznie (jeden leży na zewnątrz drugiego)

I. promienie okręgów są równe $r_1 = 2$, $r_2 = 4\sqrt{2} - 2$, a odległość między środkami $|S_1S_2| = 4\sqrt{2}$

II. promienie okręgów są równe $r_1 = \sqrt{3} + 4$, $r_2 = 5\sqrt{3}$, a odległość między środkami $|S_1S_2| = 4\sqrt{3}$

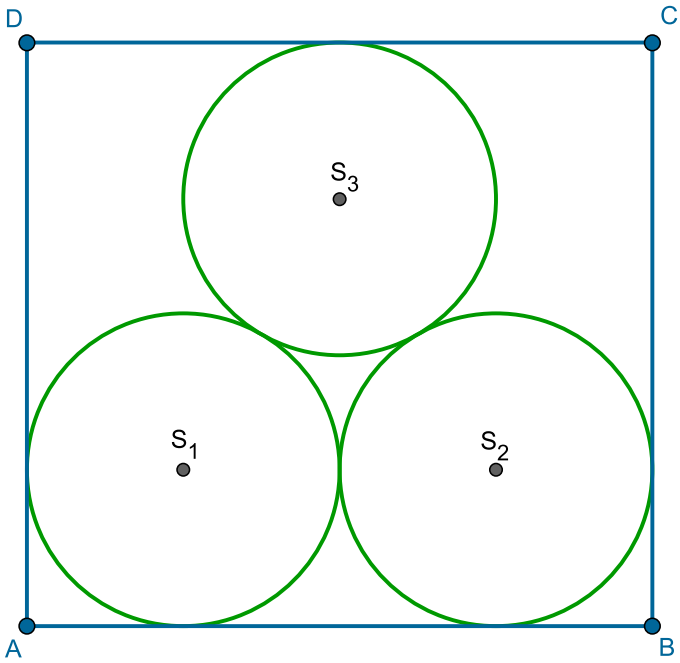
III. promienie okręgów są równe $r_1 = 2$, $r_2 = 7$,a odległość między środkami $|S_1S_2| = 10$

IV. promienie okręgów są równe, $r_1 = 2$, $r_2 = 5$, a odległość między środkami $|S_1S_2| = 1$

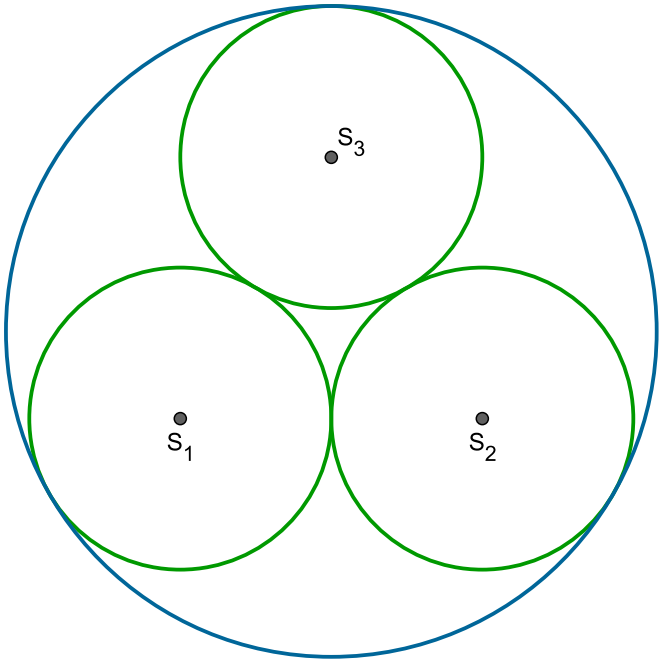
V. promienie okręgów są równe $r_1 = 3 - \sqrt{2}$, $r_2 = 2 + \sqrt{2}$, a odległość między środkami $|S_1S_2| = 1$

Ćwiczenie 5

a. Trzy okręgi, każdy o promieniu 1, są styczne zewnętrznie każdy do każdego. Okręgi wpisano w prostokąt, jak na rysunku. Oblicz długość boków tego prostokąta.

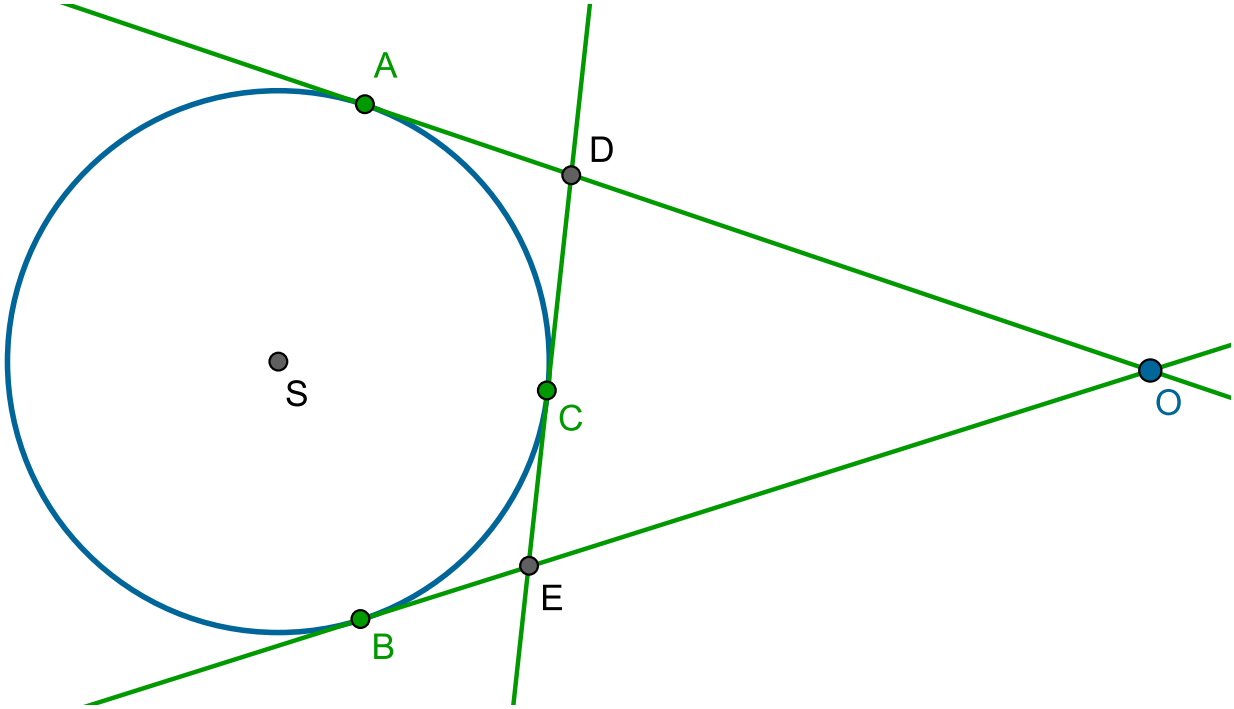


b. Trzy okręgi, każdy o promieniu 1, są parami styczne zewnętrznie. Każdy z tych okręgów jest wewnętrznie styczny do czwartego okręgu, jak na rysunku. Uzasadnij, że promień czwartego okręgu jest równy $1 + \frac{2\sqrt{3}}{3}$.



Ćwiczenie 6

Poprowadzono styczne do okręgu o środku S, w punktach A i B, które przecięły się w punkcie O. Odcinek AO ma długość 12. Przez punkt C, leżący na krótszym z łuków AB, poprowadzono styczną do okręgu, która przecina odcinki OA i OB w punktach D i E (jak na rysunku). Oblicz obwód trójkąta DEO.

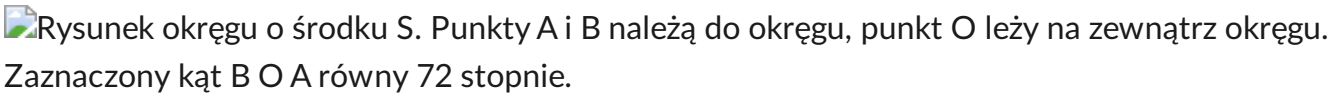


Ćwiczenie 7

W okręgu o promieniu 13 poprowadzono cięciwę długości 24. Oblicz odległość środka okręgu od tej cięciwy.

Ćwiczenie 8

Na rysunku jest przedstawiony kąt o wierzchołku O oraz okrąg o środku S i promieniu 4, styczny w punktach A i B do ramion tego kąta.


Rysunek okręgu o środku S. Punkty A i B należą do okręgu, punkt O leży na zewnątrz okręgu. Zaznaczony kąt B O A równy 72 stopnie.

Wtedy

- ◯ punkty A i B dzielą okrąg na dwa łuki długości $2{,}4\pi$ oraz $5{,}6\pi$
- ◯ kąt wypukły ASB ma miarę 144°
- ◯ pole zaznaczonego wycinka ASB jest równe $3{,}2\pi$

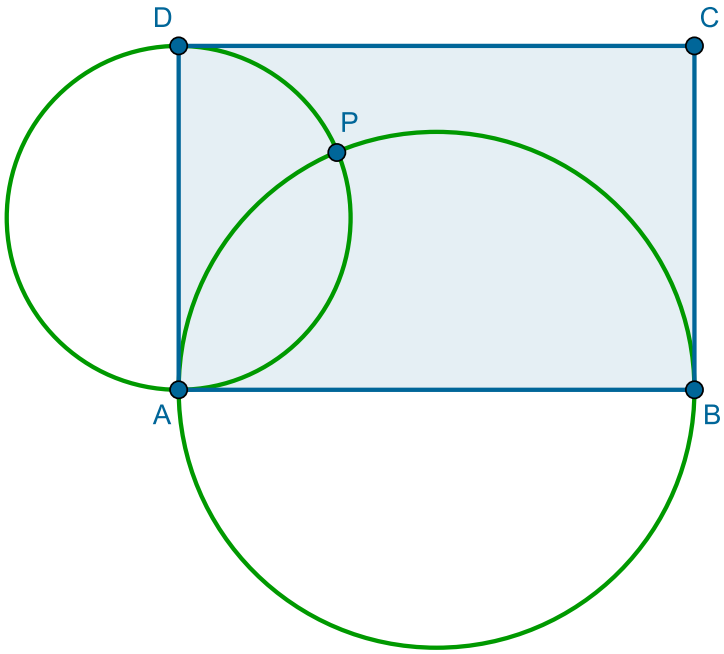
Ćwiczenie 9

Okrąg wpisany w trójkąt prostokątny ABC jest styczny do przeciwprostokątnej AB w punkcie D takim, że $|\mathrm{AD}| = 4$ i $|\mathrm{BD}| = 21$. Suma długości przyprostokątnych tego trójkąta jest równa 31. Wtedy

- ☐ długości przyprostokątnych trójkąta ABC różnią się o 17
- ☐ promień okręgu wpisanego w trójkąt ABC jest równy 3
- ☐ pole trójkąta ABC jest równe 84

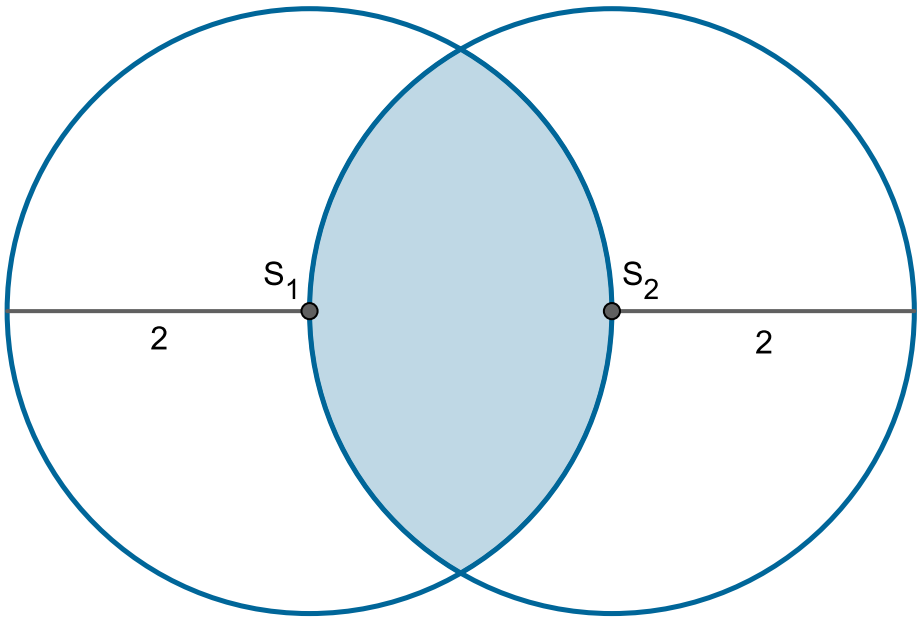
Ćwiczenie 10

Dany jest prostokąt ABCD. Okręgi o średnicach AB i AD przecinają się w punktach A i P. Wykaż, że punkty B, P i D leżą na jednej prostej.

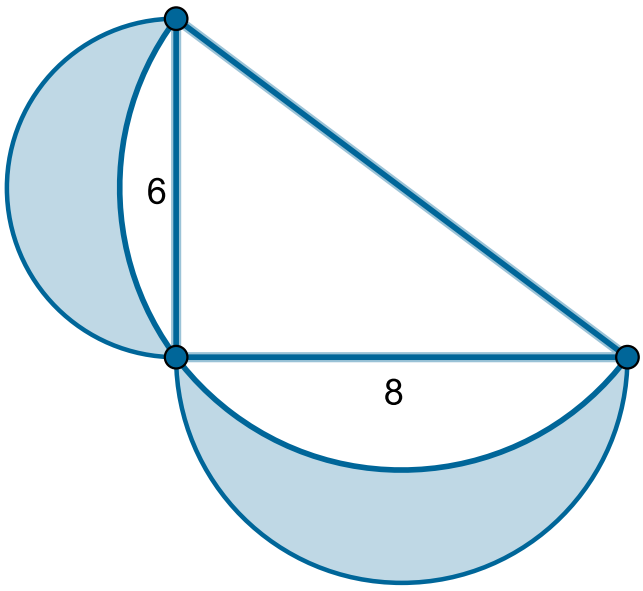


Ćwiczenie 11

a. Odległość środków dwóch kół jest równa 2 i promień każdego z nich jest równy 2. Oblicz pole części wspólnej tych kół.

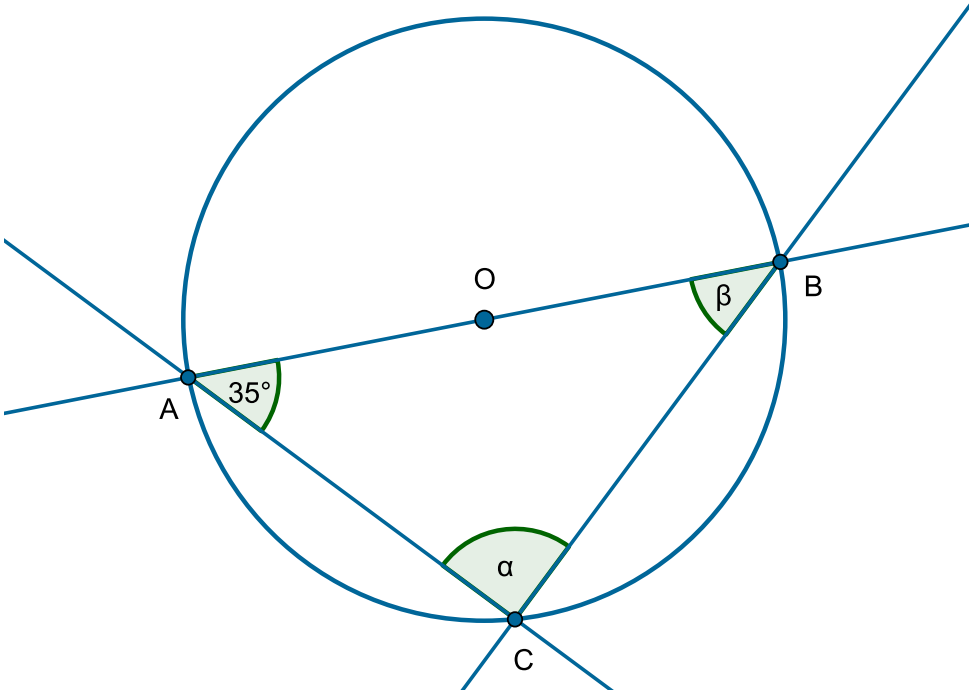


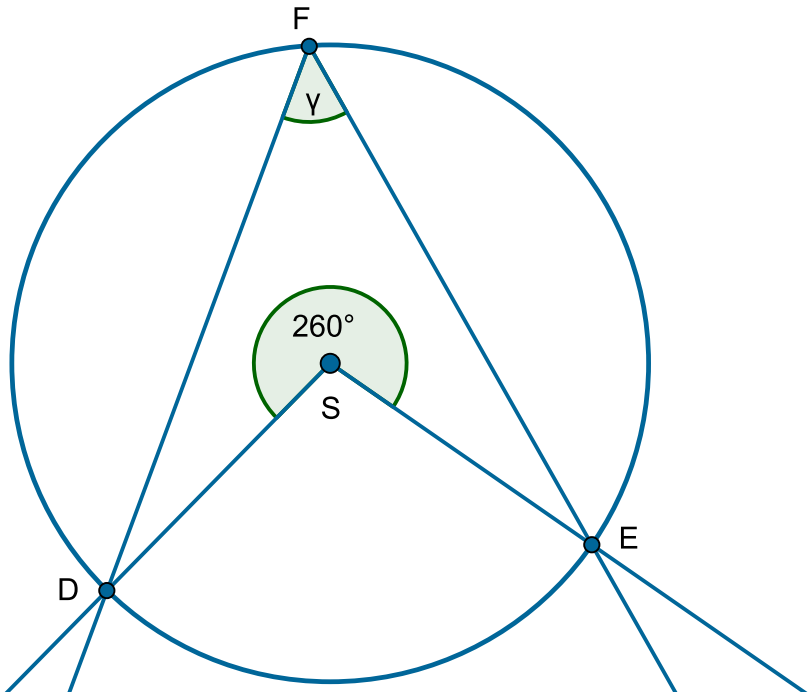
b. W trójkącie prostokątnym przyprostokątne mają długości 6 i 8. Trzy półokręgi, których średnicami są boki tego trójkąta, wyznaczają figurę zaznaczoną na rysunku (są to tzw. księżyce Hipokratesa). Oblicz pole tej figury.



Ćwiczenie 12

Odcinek AB jest średnicą okręgu o środku O. Punkt C leży na tym okręgu. Punkty D, E i F leżą na okręgu o środku S.





Wówczas

- $\alpha = 90^\circ$, $\beta = 55^\circ$, $\gamma = 50^\circ$

- ◯ $\alpha = 90^\circ, \beta = 55^\circ, \gamma = 130^\circ$
- ◯ $\alpha = 90^\circ, \beta = 45^\circ, \gamma = 30^\circ$
- ◯ $\alpha = 85^\circ, \beta = 40^\circ, \gamma = 50^\circ$

Ćwiczenie 13

Punkty A, B, C leżące na okręgu o środku S są wierzchołkami trójkąta równobocznego. Miara kąta SAB jest równa

- ◯ 15°
- ◯ 120°
- ◯ 60°
- ◯ 30°

Ćwiczenie 14

Pole wycinka koła o promieniu 3 i kącie 40° jest równe

- ◯ 9π
- ◯ π
- ◯ 81π
- ◯ 3π

Ćwiczenie 15

Odległość środków S_1 i S_2 dwóch przecinających się okręgów jest równa $\sqrt{17}$. Promienie tych okręgów mogą być równe

- ◯ $r_1 = 2$ i $r_2 = 7$
- ◯ $r_1 = \sqrt{17}$ i $r_2 = 2\sqrt{17}$
- ◯ $r_1 = 1$ i $r_2 = 3$
- ◯ $r_1 = 3$ i $r_2 = 6$

Ćwiczenie 16

Kąt środkowy i kąt wpisany oparte są na tym samym łuku okręgu. Wynika z tego, że miara kąta środkowego jest większa od miary kąta wpisanego o

- ◯ 100%
- ◯ 150%
- ◯ 200%
- ◯ 50%

Ćwiczenie 17

Kąt środkowy, oparty na łuku stanowiącym $\frac{5}{18}$ długości okręgu, ma miarę

- ◯ 100°
- ◯ 110°
- ◯ 80°
- ◯ 50°

Ćwiczenie 18

Dwa okręgi o promieniach 3 i 5 są zewnętrznie styczne. Każdy z nich jest styczny wewnętrznie do okręgu o promieniu 10. Środki tych wszystkich trzech okręgów tworzą trójkąt, którego obwód jest równy

- ◯ 26
- ◯ 30
- ◯ 20
- ◯ 18

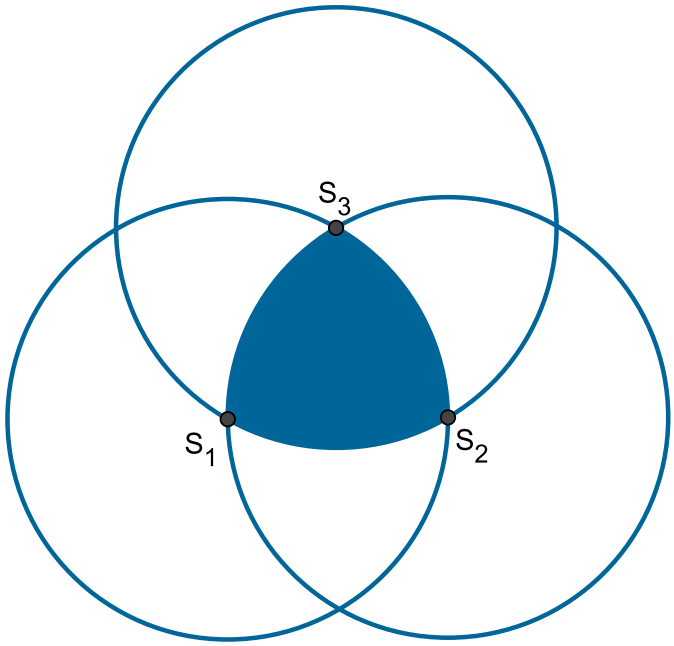
Ćwiczenie 19

Środek okręgu o promieniu 10 jest oddalony od cięciwy AB tego okręgu o 6. Długość tej cięciwy jest równa

- ◯ 16
- ◯ 8
- ◯ 20
- ◯ 12

Ćwiczenie 20

Dane są trzy okręgi o środkach S_1, S_2, S_3 i promieniu 4. Każdy z tych okręgów przechodzi przez środki dwóch pozostałych.



Pole zacienionej figury (zwanej trójkątem Rellaux) jest równe

- $8\pi + 8\sqrt{3}$
- $\frac{8\pi}{3} + 8\sqrt{3}$
- $8\pi - 8\sqrt{3}$
- $\frac{8\pi}{3} - 8\sqrt{3}$

Ćwiczenie 21

Odległość między środkami stycznych wewnętrznie okręgów o promieniach r i R jest równa 7. Odległość między środkami stycznych zewnętrznie okręgów o promieniach r i R jest równa 23. Promienie r i R mają długości

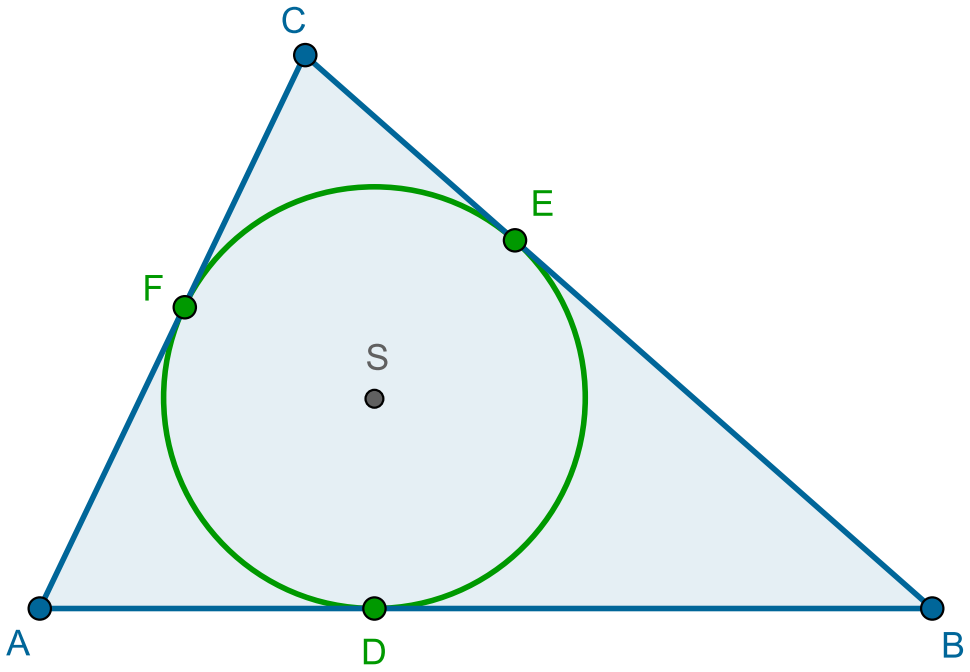
- ◯ 10 i 13
- ◯ 11 i 12
- ◯ 8 i 15
- ◯ 6 i 17

Ćwiczenie 22

Dany jest okrąg o środku S i promieniu 17 oraz dwie równoległe cięciwy tego okręgu, każda o długości 30. Oblicz odległość między tymi cięciwami.

Ćwiczenie 23

Okrąg wpisany w trójkąt ABC jest styczny do jego boków w punktach D, E i F tak, jak pokazano na rysunku. Długości odcinków BE, CF i AD są równe $|\mathrm{BE}| = 10$, $|\mathrm{CF}| = 5$ oraz $|\mathrm{AD}| = 6$. Oblicz obwód trójkąta ABC.

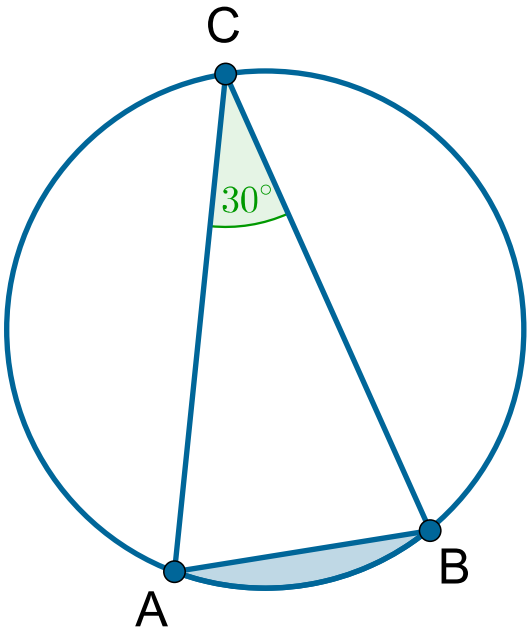


Ćwiczenie 24

Punkty A i B leżą na okręgu o środku S. Kąt środkowy ASB ma miarę 110°. Oblicz miarę kąta, pod jakim przecinają się styczne do tego okręgu poprowadzone przez punkty A i B.

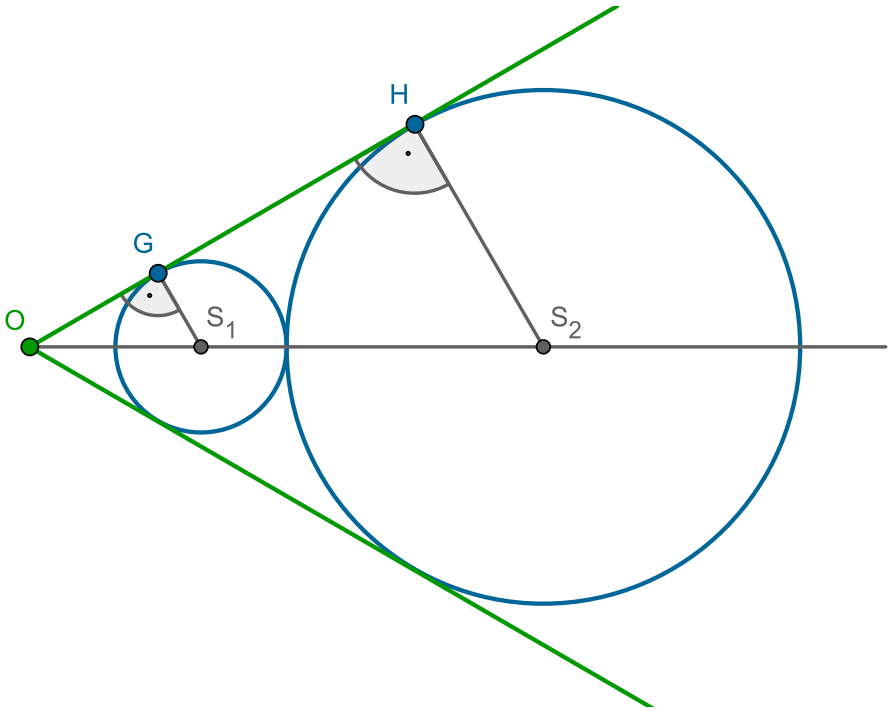
Ćwiczenie 25

Na okręgu koła o promieniu 5 leżą punkty $A,\ \mathrm{B},\ \mathrm{C}$ (patrz rysunek). Oblicz pole zacieniowanego odcinka koła.



Ćwiczenie 26

Dwa okręgi o promieniach 2 i 6 są styczne zewnętrznie, a także są styczne do ramion kąta (patrz rysunek). Oblicz odległości środków tych okręgów od wierzchołka kąta.



Ćwiczenie 27

Dwa okręgi o promieniach 5 i 13 są współśrodkowe. Oblicz długość cięciwy większego okręgu, która jest styczna do mniejszego okręgu.

Ćwiczenie 28

Do okręgu o promieniu 8 poprowadzono styczne odpowiednio w punktach A i B. Styczne te przecinają się w punkcie O. Długości odcinków AO i BO tych stycznych są równe 15. Oblicz długość odcinka AB.

Ćwiczenie 29

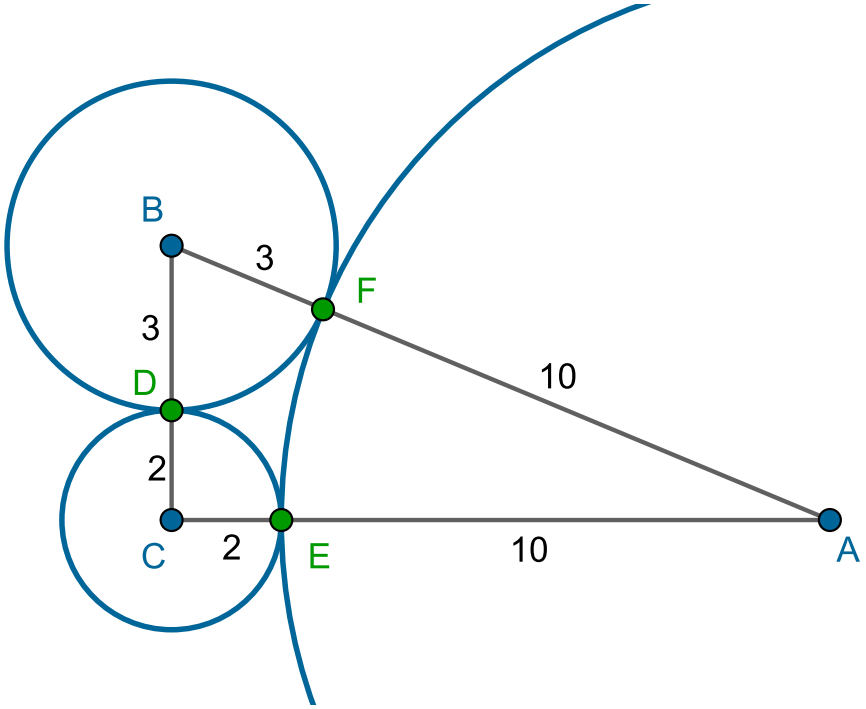
W okręgu o środku S dane są kąty środkowe ASB oraz BSC takie, że $|\sphericalangle \mathrm{ASB}| = 32^\circ$ oraz $|\sphericalangle \mathrm{BSC}| = 70^\circ$. Oblicz miary kątów trójkąta ABC.

Ćwiczenie 30

Dane są dwa okręgi: pierwszy o środku S_1 i promieniu 2, a drugi o środku S_2 i promieniu 6. Odległość między środkami tych okręgów jest równa 10. Wspólna styczna do tych okręgów przecina prostą S_1S_2 w punkcie O. Oblicz długości odcinków S_1O i S_2O . Rozważ dwa przypadki.

Ćwiczenie 31

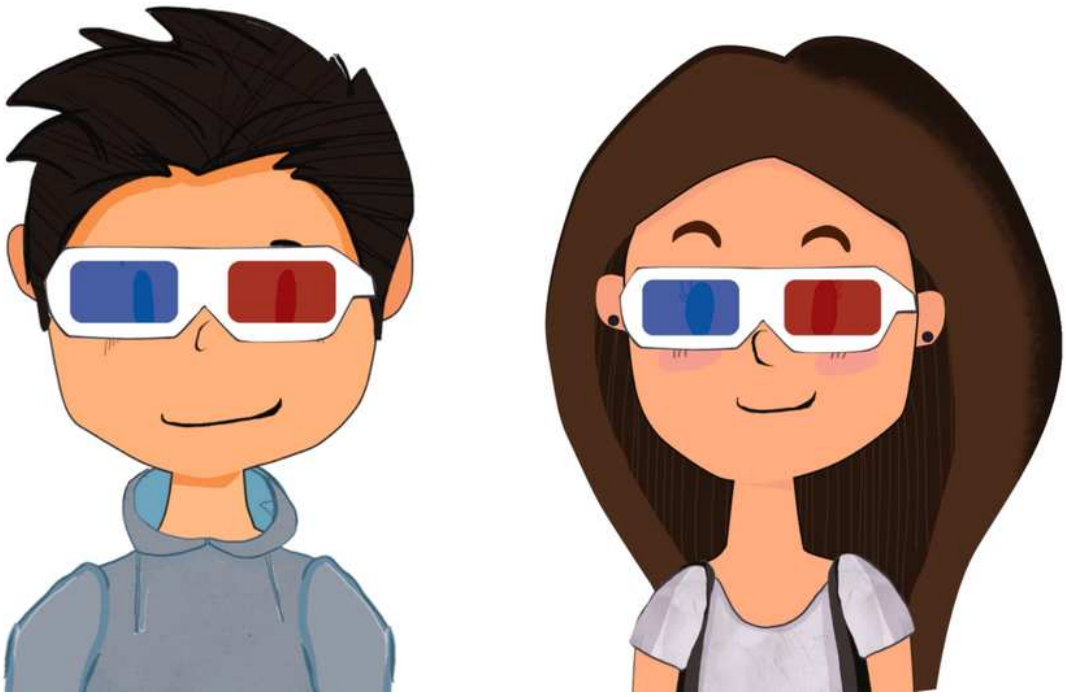
Trzy okręgi o środkach A, B, C i promieniach odpowiednio równych 2, 3, 10 są parami styczne zewnętrznie. Punktami styczności są punkty D, E, F. Wykaż, że okrąg wpisany w trójkąt ABC jest styczny do jego boków w punktach D, E, F.



Siatki i modele brył

Film dostępny na portalu epodreczniki.pl

Animacja 3D pokazuje leżące na stole kostki do gry. Kreślone są krawędzie jednej kostki – powstaje sześcian. Dwa jednakowe sześciany rozkładają się na dwie różne siatki sześcianu.

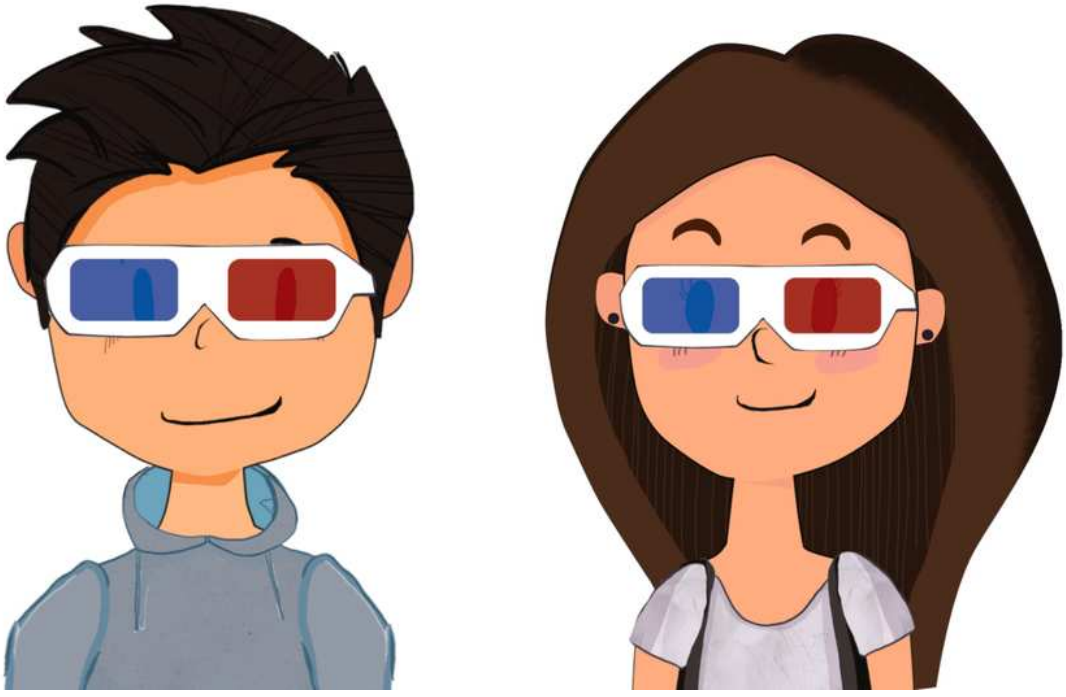


Film dostępny na portalu epodreczniki.pl

Animacja 3D pokazuje dwie różne siatki sześcianu, które składają się w jednakowe sześciany. Sześcian zamienia się w kostkę do gry, która leży z innymi kostkami na stole.

Film dostępny na portalu epodreczniki.pl

Animacja 3D pokazuje kolumny. Kreślone są krawędzie jednej kolumny – powstaje prostopadłościan. Dwa jednakowe prostopadłościany rozkładają się na dwie różne siatki prostopadłościanu.

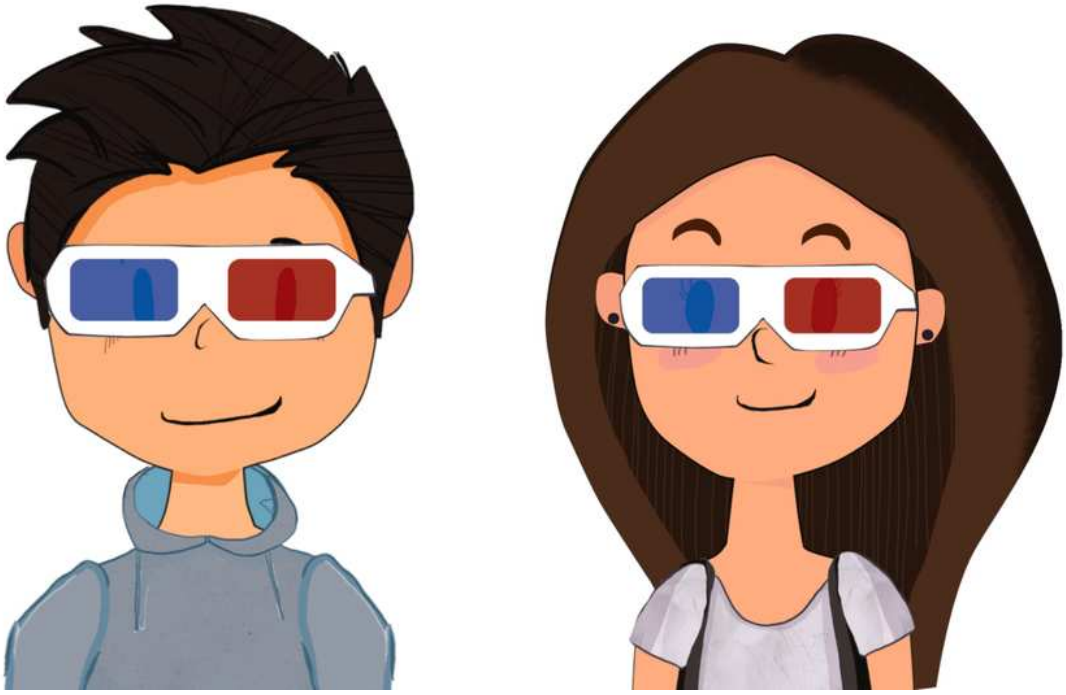


Film dostępny na portalu epodreczniki.pl

Animacja 3D pokazuje dwie różne siatki prostopadłościanu, które składają się w jednakowe prostopadłościany. Prostopadłościan zmienia się w kolumnę, która stoi obok innych kolumn.

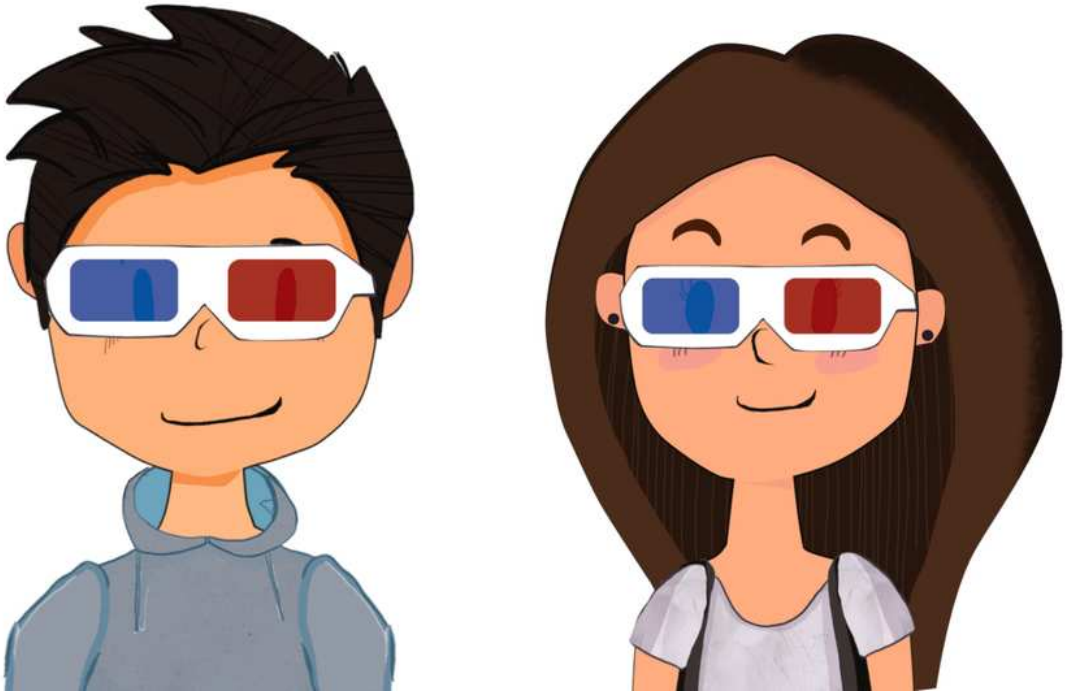
Film dostępny na portalu epodreczniki.pl

Animacja 3D pokazuje nakrętki na śruby. Kreślone są krawędzie jednej nakrętki – powstaje graniastosłup o podstawie sześciokąta foremnego. Dwa jednakowe graniastosłupy rozkładają się na dwie różne siatki graniastosłupa.



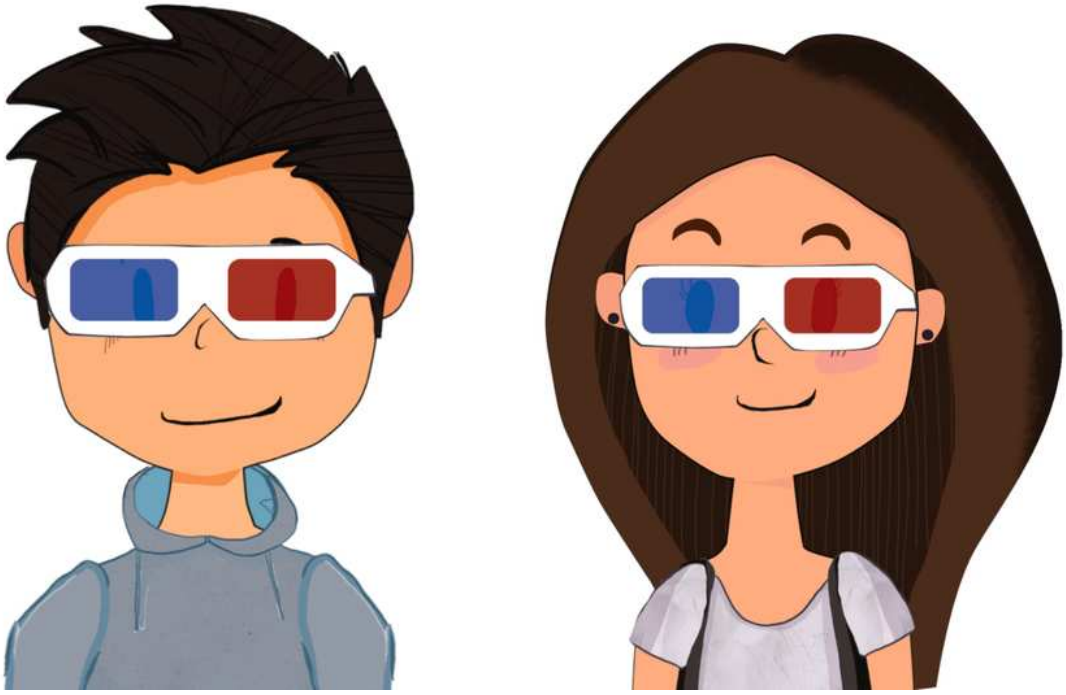
Film dostępny na portalu epodreczniki.pl

Animacja 3D pokazuje dwie różne siatki graniastosłupa, które składają się w jednakowe graniastosłupy. Graniastosłup zamienia się w nakrętkę leżącą między nakrętkami.



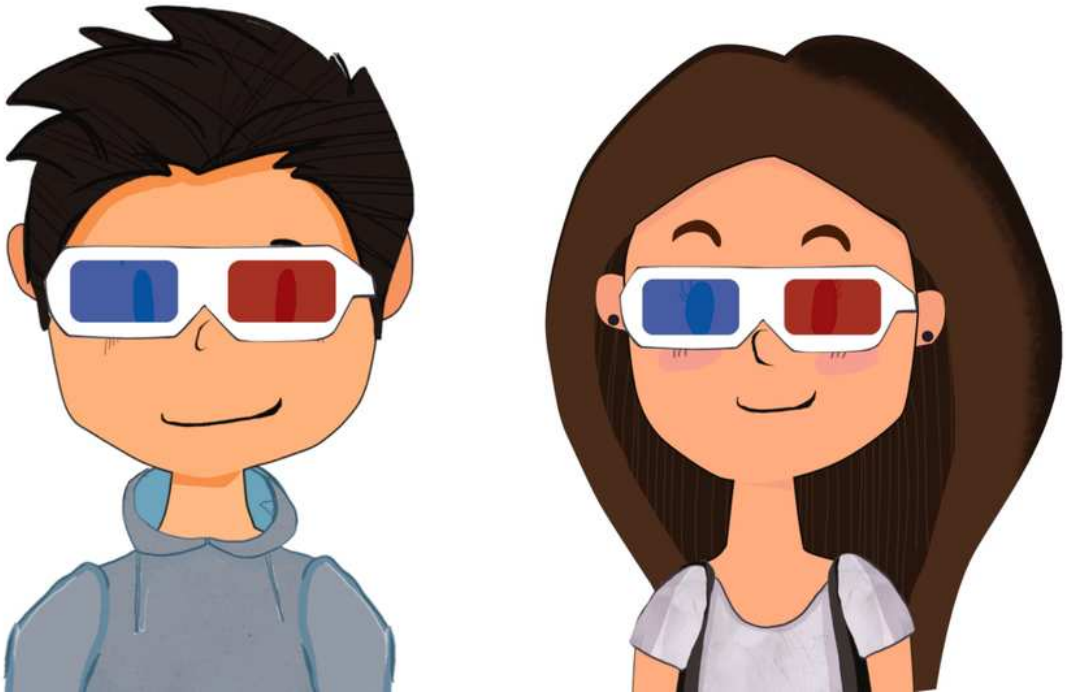
Film dostępny na portalu epodreczniki.pl

Animacja 3D pokazuje drewniane klocki w kształcie brył. Kreślone są krawędzie jednego klocka – powstaje ostrosłup. Następnie dwa jednakowe ostrosłupy rozkładają się na dwie różne siatki ostrosłupa.



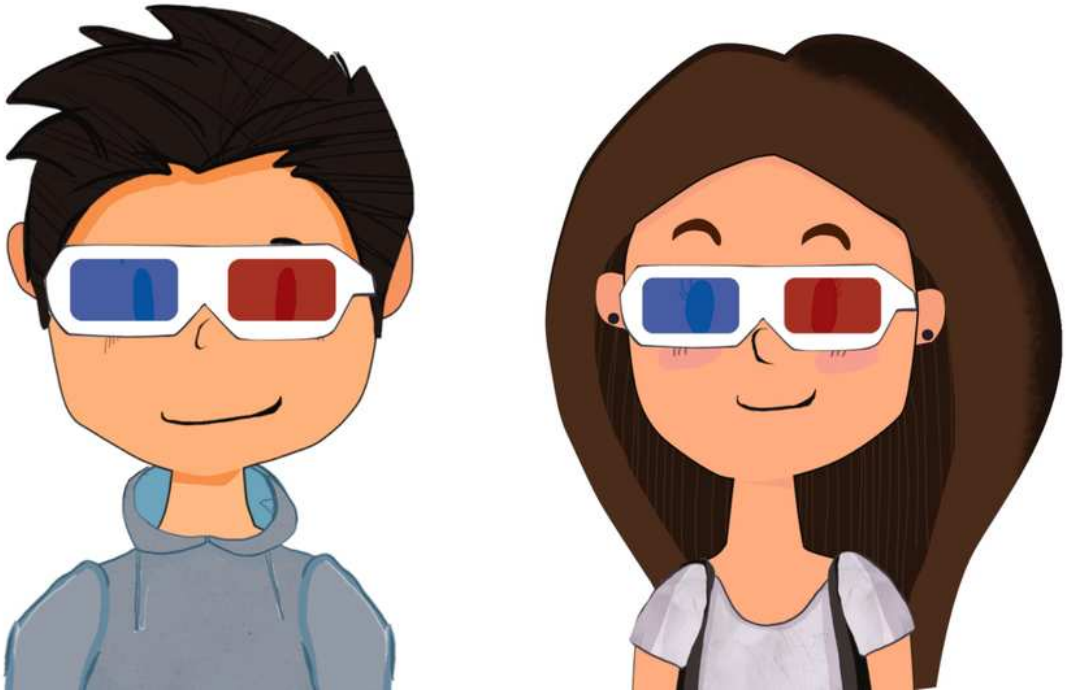
Film dostępny na portalu epodreczniki.pl

Animacja 3D pokazuje dwie siatki ostrosłupa prawidłowego czworokątnego, które składają się w jednakowe ostrosłupy. Ostrosłup zamienia się w drewniany klocek leżący między innymi klockami.



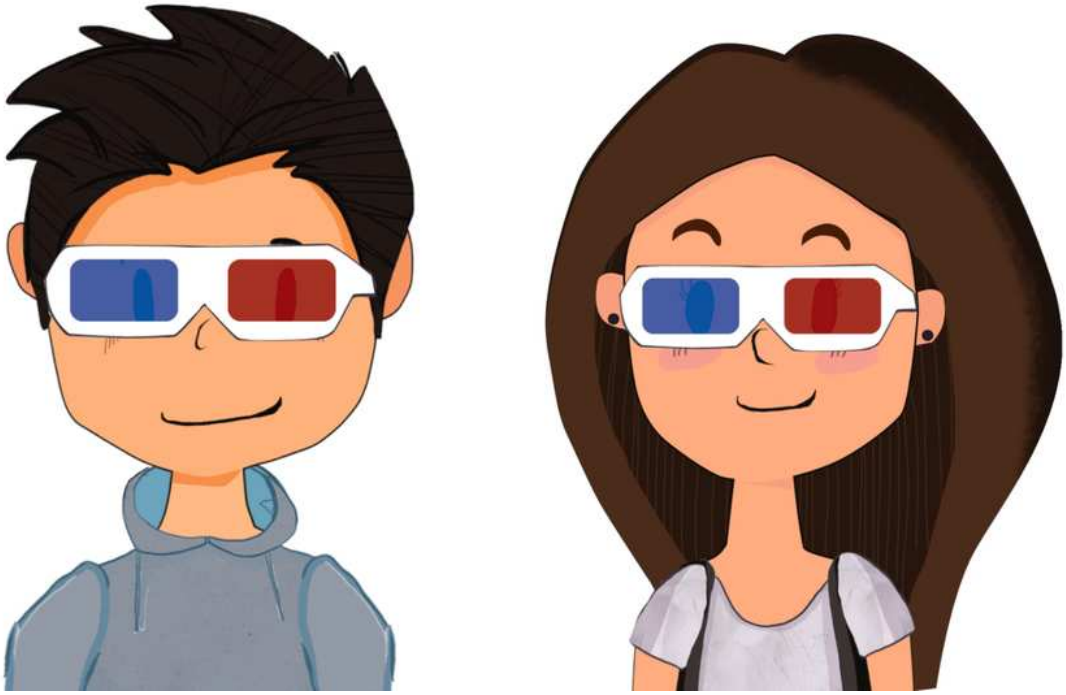
Film dostępny na portalu epodreczniki.pl

Animacja 3D pokazuje stojące na stole kubki w kształcie walca. Kreślone są krawędzie jednego kubka – powstaje walec, który następnie rozkłada się na siatkę walca.



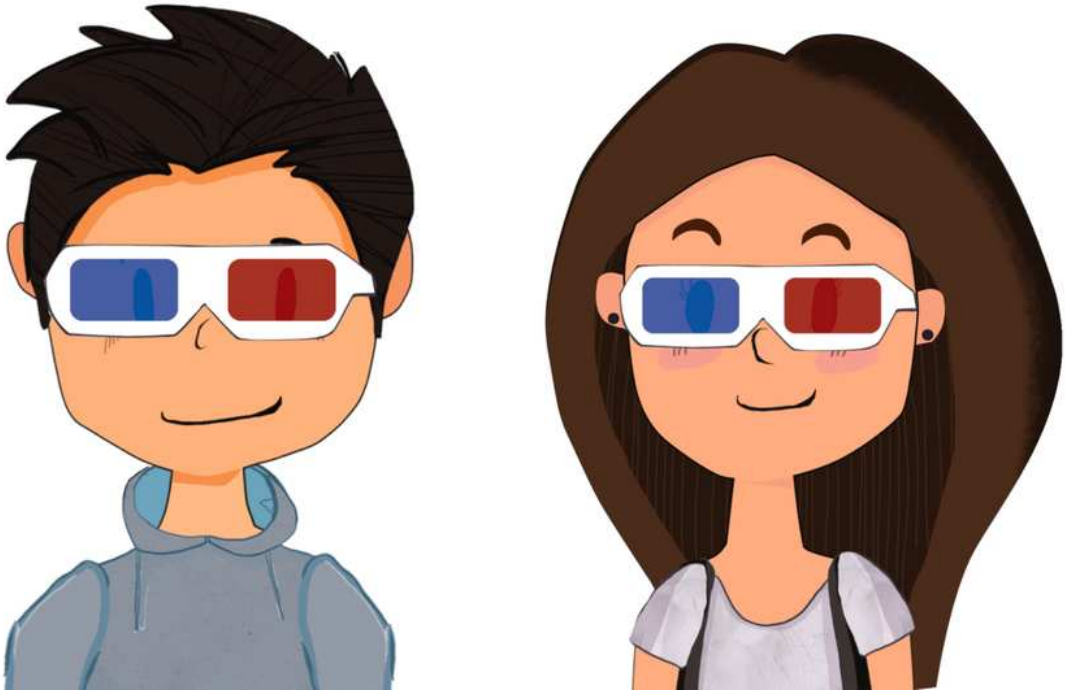
Film dostępny na portalu epodreczniki.pl

Animacja 3D pokazuje siatkę walca, która składa się w walec. Następnie walec zamienia się w kubek. Na stole stoją kubki w kształcie walca.



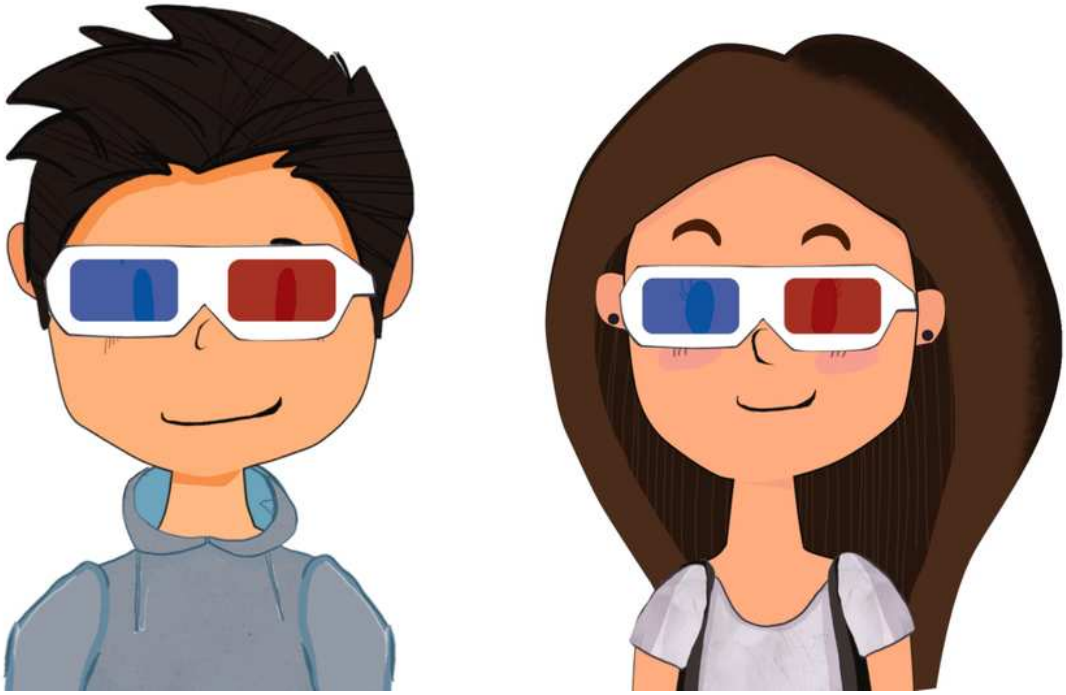
Film dostępny na portalu epodreczniki.pl

Animacja 3D pokazuje stojące na drodze pachołki drogowe w kształcie stożka. Kreślone są krawędzie jednego pachołka – powstaje stożek, który następnie rozkłada się na siatkę stożka.



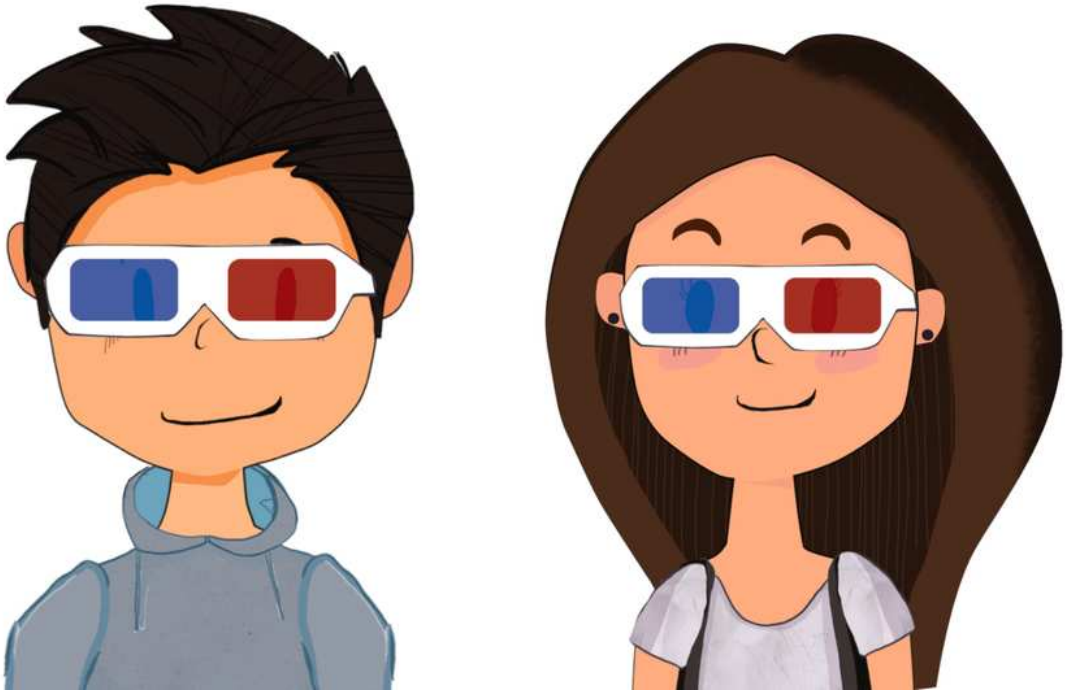
Film dostępny na portalu epodreczniki.pl

Animacja 3D pokazuje siatkę stożka, która następnie składa się w stożek. Stożek zamienia się w pachołek drogowy. Na drodze stoją cztery pachołki.



Film dostępny na portalu epodreczniki.pl

Animacja 3D pokazuje baterię elektryczną. Kreślone są krawędzie – powstaje walec. Następnie przekroje skośne i poprzeczne dzielą walce na dwie bryły.



Film dostępny na portalu epodreczniki.pl

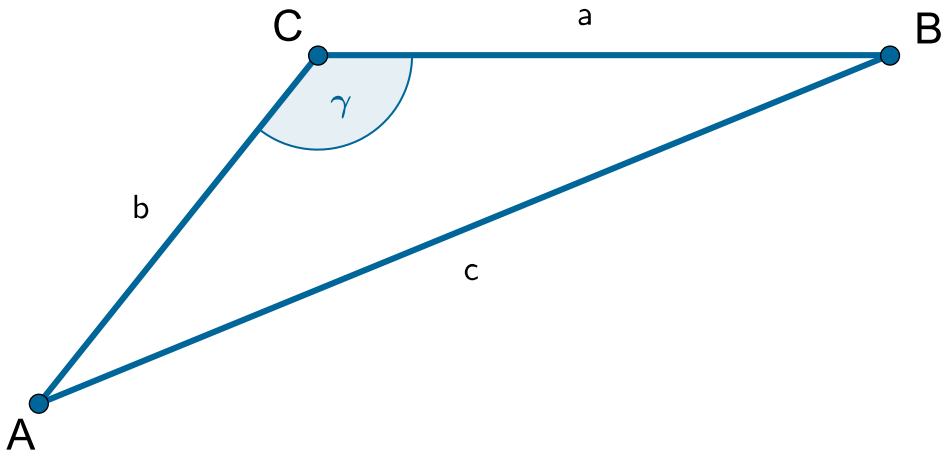
Animacja 3D pokazuje prostopadłościan i ostrosłup trójkątny, które obracają się.

Słowniczek

Twierdzenie: 4

Pole trójkąta jest równe połowie iloczynu długości dwóch jego boków i sinusa kąta zawartego między tymi bokami.
Przy oznaczeniach takich jak na rysunku

$$P_{\mathrm{ABC}} = \frac{1}{2}\mathrm{ab}\sin\gamma.$$



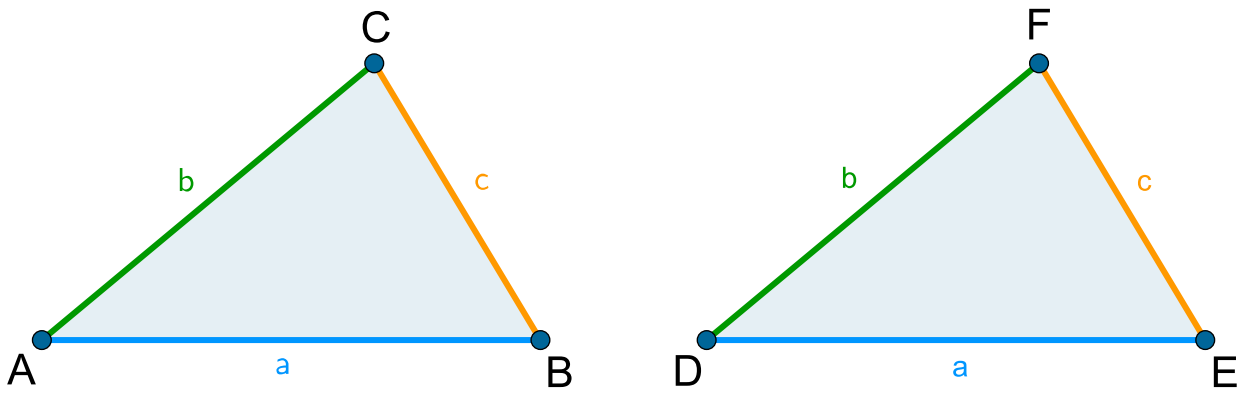
Twierdzenie: Cechy przystawania trójkątów

Przystawanie trójkątów ABC i DEF wynika z każdej z następujących cech przystawania trójkątów:

- cecha przystawania bok-bok-bok (bbb)

Trójkąty ABC i DEF są przystające wtedy i tylko wtedy, gdy długości boków jednego trójkąta są odpowiednio równe długościom boków drugiego trójkąta.

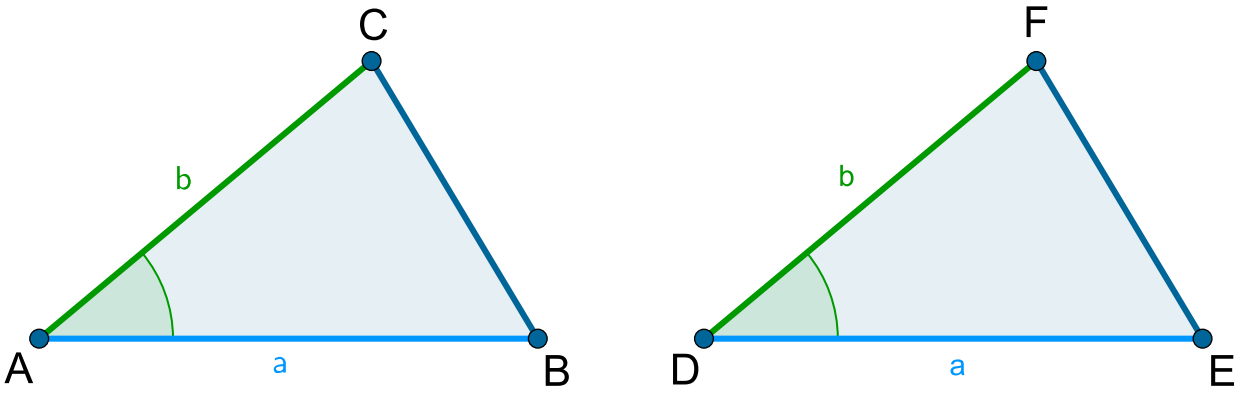
$$|\mathrm{AB}| = |\mathrm{DE}|,\ |\mathrm{AC}| = |\mathrm{DF}|,\ |\mathrm{BC}| = |\mathrm{EF}|.$$



- cecha przystawania bok-kąt-bok (bkb)

Trójkąty ABC i DEF są przystające wtedy i tylko wtedy, gdy długości dwóch boków i kąt między tymi bokami w jednym trójkącie są odpowiednio równe dwóm bokom i kątowi między tymi bokami w drugim trójkącie

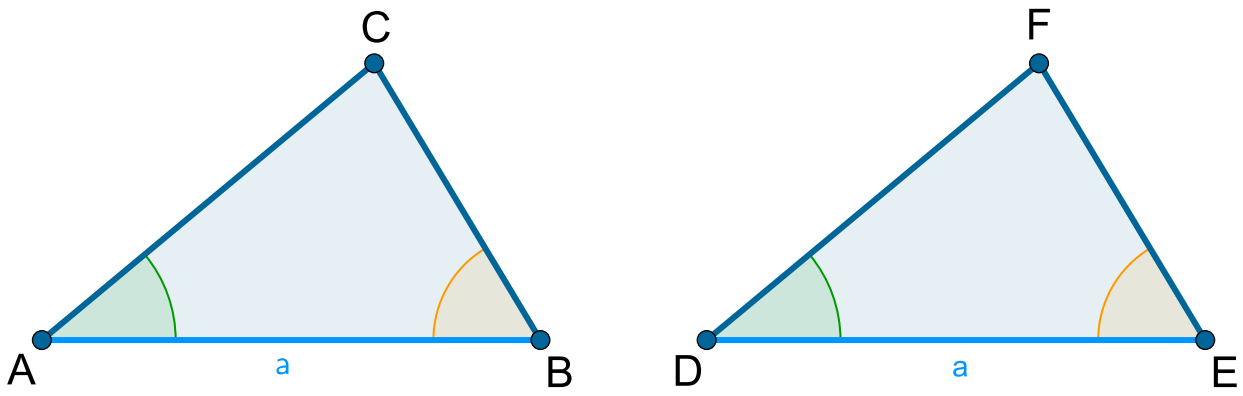
$$|AB| = |DE|,\ |AC| = |DF|,\ |\measuredangle BAC| = |\measuredangle EDF|.$$



- cecha przystawania kąt-bok-kąt (kbk)

Trójkąty ABC i DEF są przystające wtedy i tylko wtedy, gdy długości boku i miary kątów przyległych do tego boku w jednym trójkącie są odpowiednio równe długości boku i miarom kątów przyległych do tego boku w drugim trójkącie

$$|AB| = |DE|,\ \ |\sphericalangle BAC| = |\sphericalangle EDF|,\ \ |\sphericalangle ABC| = |\sphericalangle DEF|.$$



Twierdzenie: Działania na pierwiastkach

Jeśli a i b są liczbami nieujemnymi, n i m są liczbami naturalnymi większymi od 1, k jest dodatnią liczbą naturalną, to

- $\sqrt[n]{a \bullet b} = \sqrt[n]{a} \bullet \sqrt[n]{b}$
- $\sqrt[n]{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}}$, $\mathrm{b} \neq 0$
- $\left(\sqrt[n]{a}\right)^n = a$
- $\left(\sqrt[n]{a}\right)^k = \sqrt[n]{a^k}$
- $\sqrt[n]{\sqrt[m]{a}} = \sqrt[n \bullet m]{a}$

Jeśli w powyższym twierdzeniu liczby n i m (stopnie pierwiastków) są nieparzyste, to twierdzenie pozostanie prawdziwe również dla ujemnych liczb podpierwiastkowych (a lub b) .

Definicja: Działania na potęgach

Dla dowolnej liczby dodatniej a i dowolnych liczb wymiernych x i y prawdziwe są równości

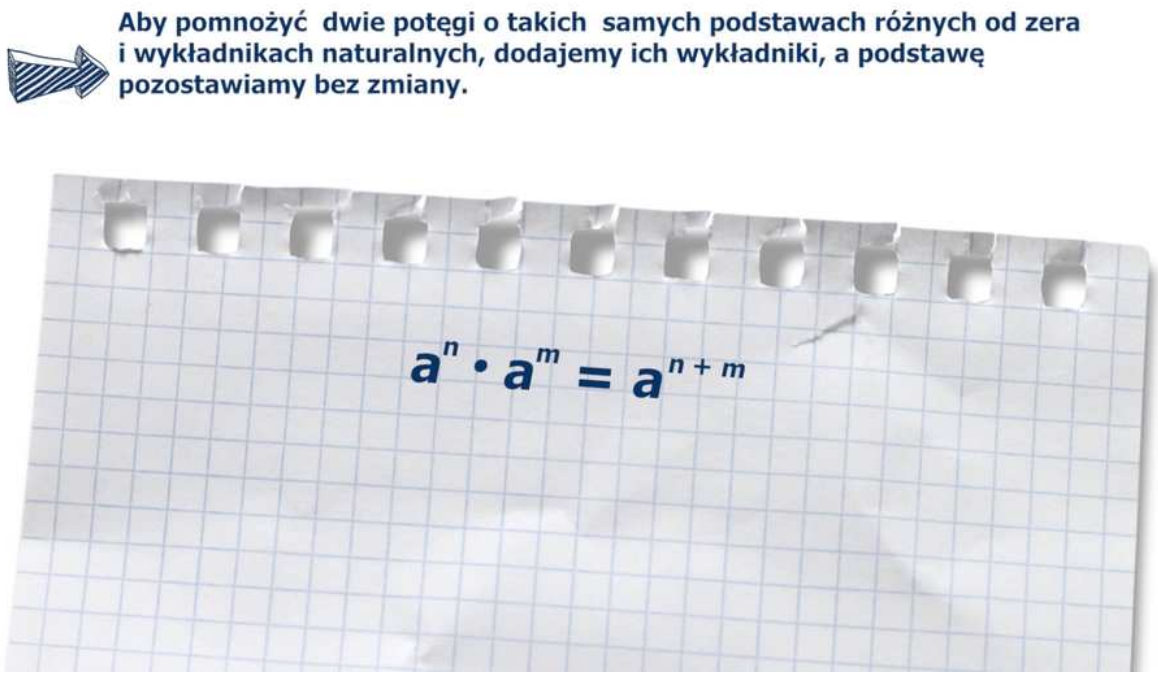
- $a^x \bullet a^y = a^{x+y}$ (wzór na iloczyn potęg o tych samych podstawach)
- $\frac{a^x}{a^y} = a^{x-y}$ (wzór na iloraz potęg o tych samych podstawach)
- $(a^x)^y = a^{x \bullet y}$ (wzór na potęgę potęgi)

Twierdzenie: Działania na potęgach 01

- Iloczyn potęg o tych samych podstawach

Dla dowolnej liczby rzeczywistej $a \neq 0$ i dowolnych liczb całkowitych n i m prawdziwa jest równość

$$a^n \bullet a^m = a^{n+m}.$$



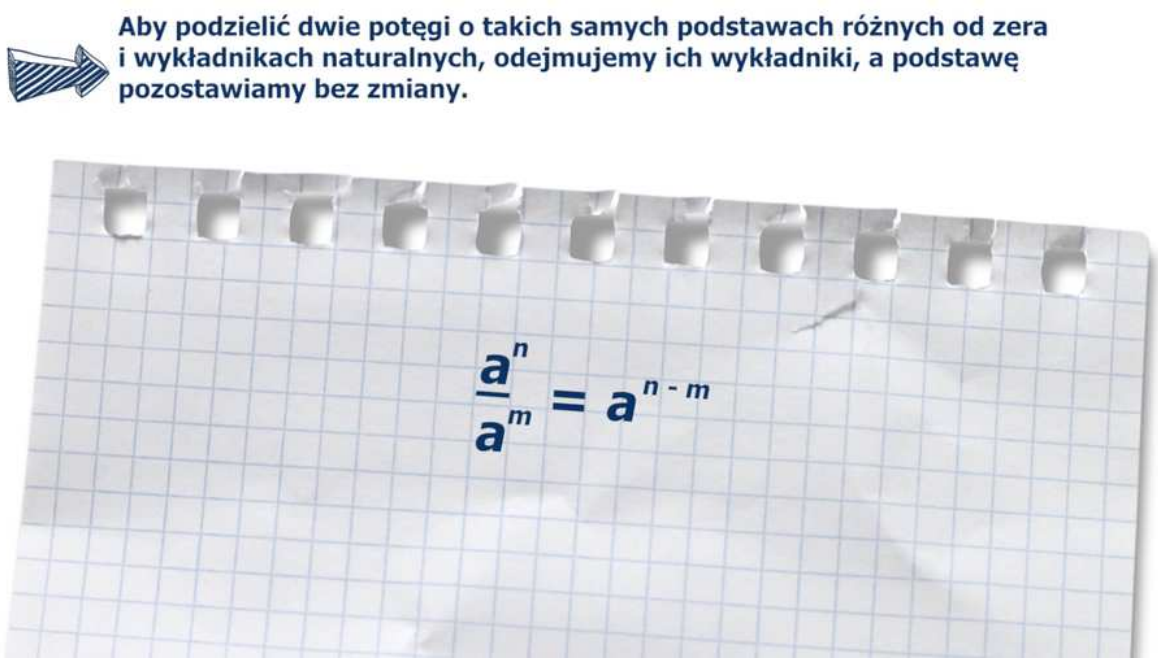
Film dostępny na portalu epodreczniki.pl

Animacja

- Iloraz potęg o tych samych podstawach

Dla dowolnej liczby rzeczywistej $a \neq 0$ i dowolnych liczb całkowitych n i m prawdziwa jest równość

$$\frac{a^n}{a^m} = a^{n-m}.$$



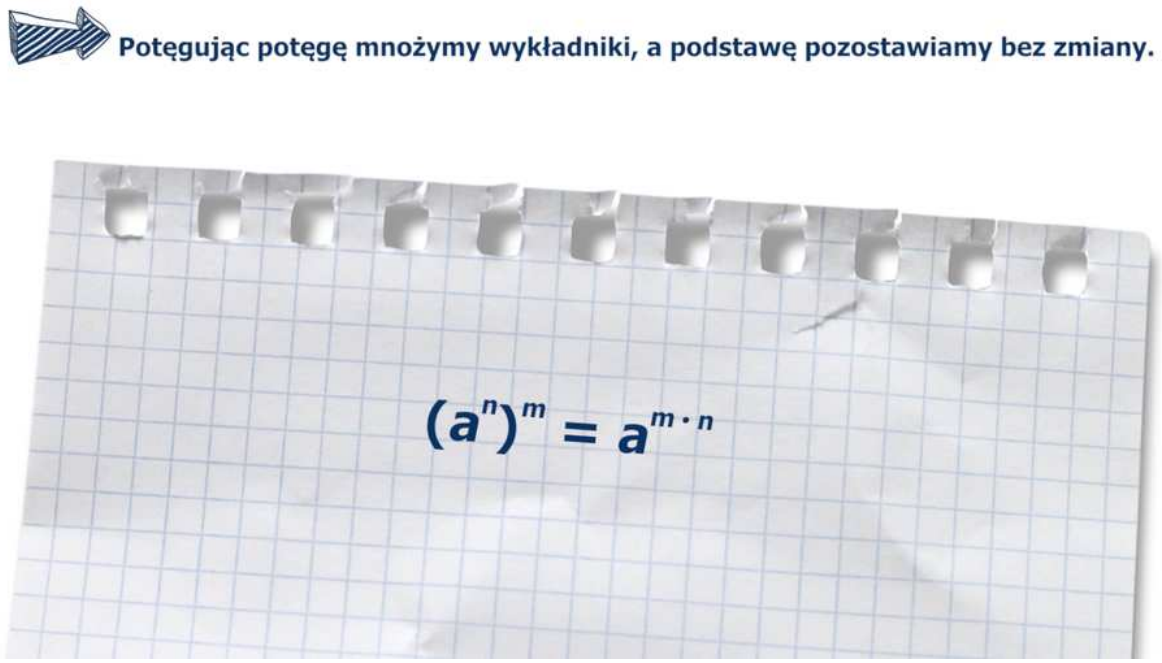
Film dostępny na portalu epodreczniki.pl

Animacja

- Potęga potęgi

Dla dowolnej liczby rzeczywistej $a \neq 0$ i dowolnych liczb całkowitych n i m prawdziwa jest równość

$$(a^n)^m = a^{n \bullet m}.$$



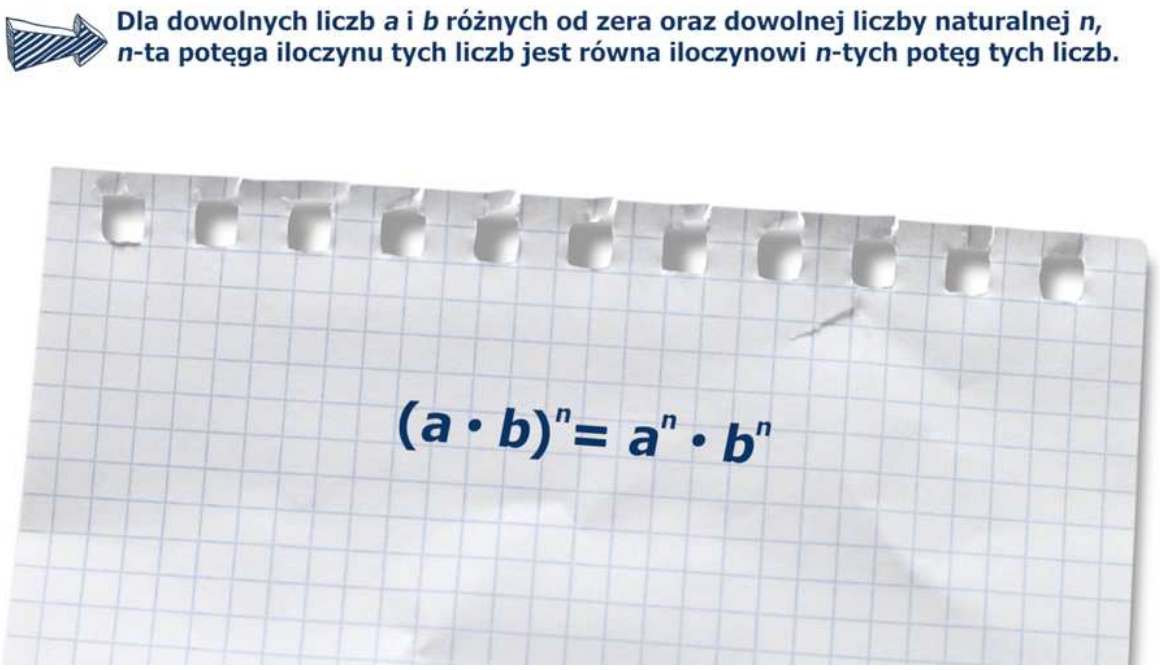
Film dostępny na portalu epodreczniki.pl

Animacja

- Iloczyn potęg o tych samych wykładnikach

Dla dowolnych liczb rzeczywistych $a \neq 0$ i $b \neq 0$ i dowolnej liczby całkowitej n prawdziwa jest równość

$$a^n \bullet b^n = (a \bullet b)^n.$$



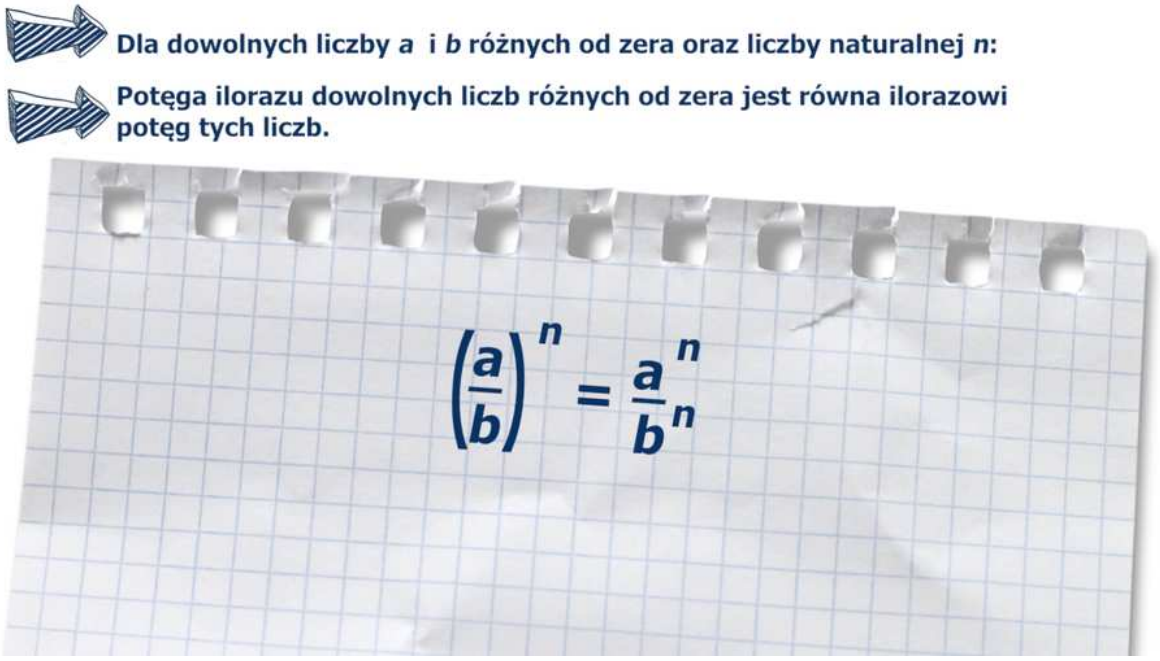
Film dostępny na portalu epodreczniki.pl

Animacja

- Iloraz potęg o tych samych wykładnikach

Dla dowolnych liczb rzeczywistych $a \neq 0$ i $b \neq 0$ i dowolnej liczby całkowitej n prawdziwa jest równość

$$\frac{a^n}{b^n} = \left(\frac{a}{b}\right)^n.$$



Film dostępny na portalu epodreczniki.pl

Animacja

Definicja: Dziedzina

Zbiór tych wszystkich liczb rzeczywistych, dla których wzór funkcji ma sens liczbowy nazywamy dziedziną funkcji.

Definicja: Funkcja

Funkcją f ze zbioru X w zbiór Y nazywamy przyporządkowanie, które każdemu elementowi zbioru X przyporządkowuje dokładnie jeden element zbioru Y.
Symbolicznie piszemy $f : X \to Y$. Czytamy „funkcja f odwzorowuje zbiór X w zbiór Y".

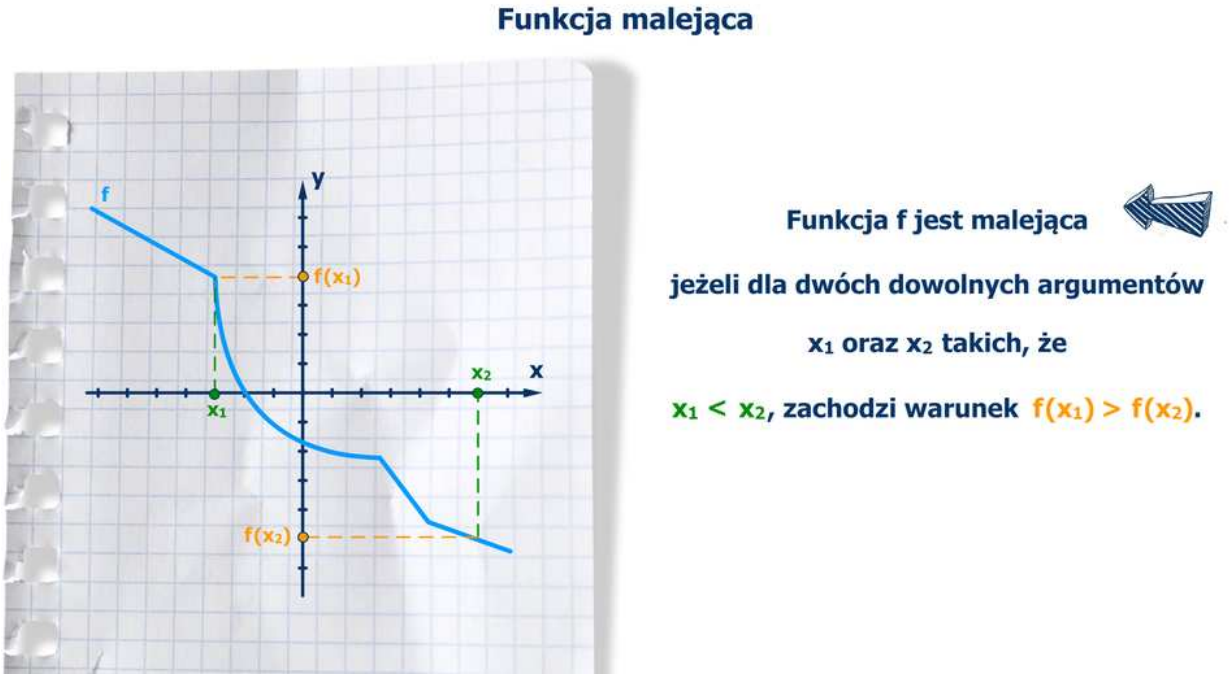
- Zbiór X nazywamy dziedziną funkcji, a jego elementy – argumentami funkcji f.
- Zbiór Y nazywamy przeciwdziedziną funkcji. Każdy element y zbioru Y, który został przyporządkowany co najmniej jednemu argumentowi x nazywamy wartością funkcji f dla argumentu x, co zapisujemy symbolicznie $y = f(x)$. Zbiór Z tych elementów y nazywamy zbiorem wartości funkcji.

Definicja: Funkcja malejąca

Funkcja f jest określona w przedziale $\langle a; b\rangle$.
Jeżeli dla dowolnych $x_1, x_2 \in \langle a, b\rangle$ takich, że $x_1 < x_2$ spełniony jest warunek:

$$f(x_1) > f(x_2),$$

to mówimy, że funkcja f jest malejąca w przedziale $\langle a, b\rangle$.



Film dostępny na portalu epodreczniki.pl

Animacja pokazuje wykres funkcji malejącej.

Definicja: Funkcja monotoniczna przedziałami

Jeśli funkcja, której dziedzinę można podzielić na rozłączne przedziały tak, aby w każdym z nich funkcja ta była monotoniczna, to powiemy, że jest ona monotoniczna przedziałami.

Definicja: Funkcja niemalejąca

Jeżeli dla dowolnych $x_1, x_2 \in \langle a; b\rangle$ takich, że $x_1 < x_2$ spełniony jest warunek:

$$f(x_1) \leq f(x_2),$$

to mówimy, że funkcja f jest niemalejąca w przedziale $\langle a, b\rangle$.

Definicja: Funkcja nierosnąca

Jeżeli dla dowolnych $x_1, x_2 \in \langle a; b\rangle$ takich, że $x_1 < x_2$ spełniony jest warunek:

$$f(x_1) \geq f(x_2),$$

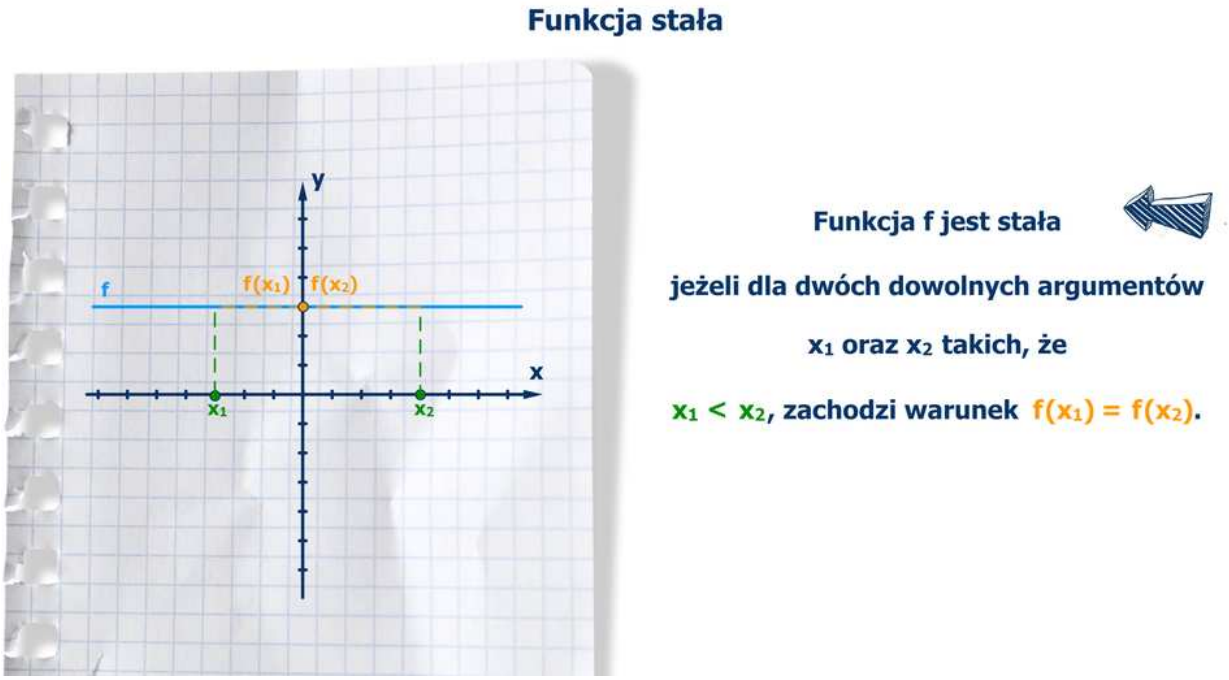
To mówimy, że funkcja f jest nierosnąca w przedziale $\langle a, b\rangle$.

Definicja: Funkcja stała

Jeżeli dla dowolnych $x_1, x_2 \in \langle a; b\rangle$ takich, że $x_1 < x_2$ spełniony jest warunek:

$$f(x_1) = f(x_2),$$

to funkcję f nazywamy stałą w przedziale $\langle a, b\rangle$.

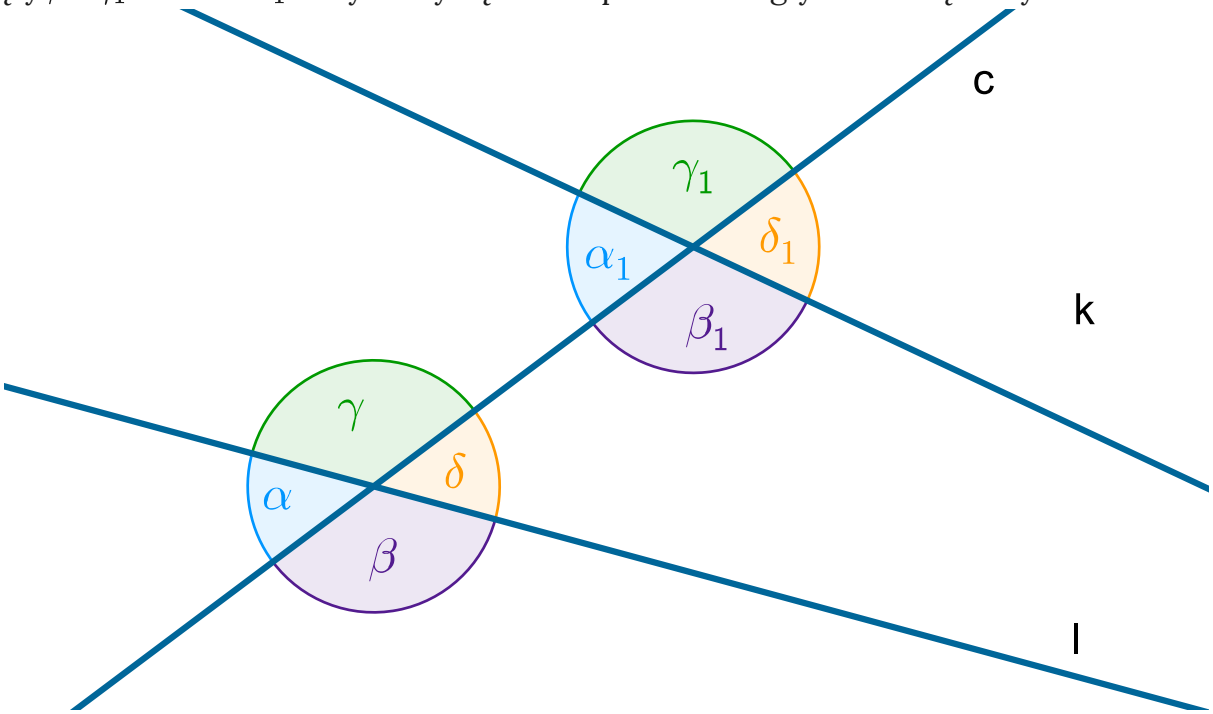


Film dostępny na portalu epodreczniki.pl

Animacja pokazuje wykres funkcji stałej.

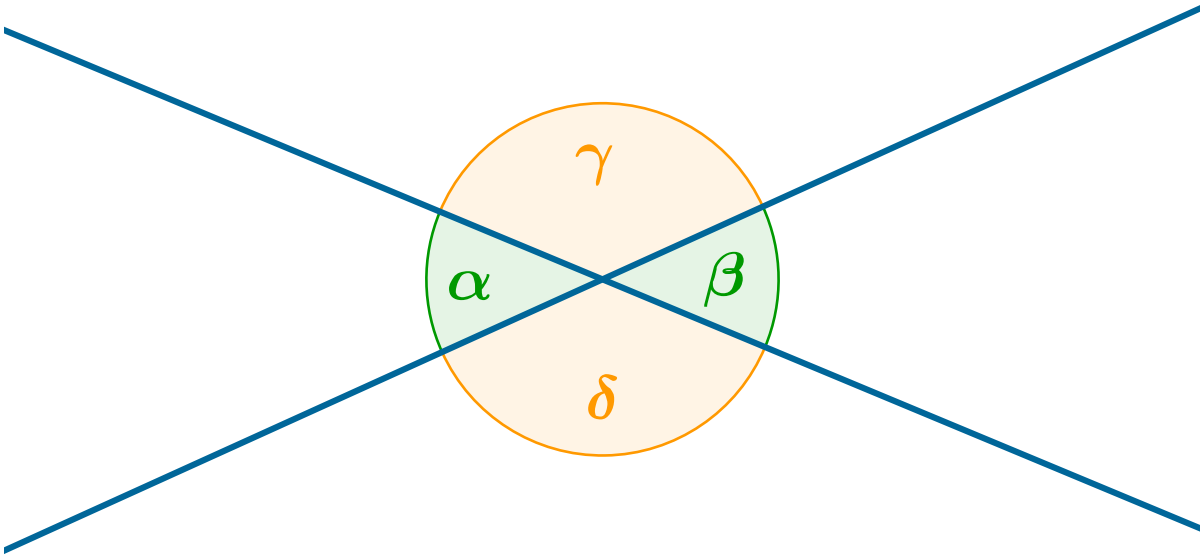
Definicja: Kąty naprzemianległe i odpowiadające

- Kąty: α i α_1, β i β_1, γ i γ_1 oraz δ i δ_1 nazywamy kątami odpowiadającymi.
- Kąty α_1 i δ oraz β_1 i γ nazywamy kątami naprzemianległymi wewnętrznymi.
- Kąty β i γ_1 oraz α i δ_1 nazywamy kątami naprzemianległymi zewnętrznymi.



Definicja: Kąty przyległe i wierzchołkowe

- Kąty przyległe to dwa kąty, które mają jedno ramię wspólne, a pozostałe ramiona dopełniają się do prostej.
- Kąty wierzchołkowe to dwa kąty, które mają wspólny wierzchołek i przedłużeniem ramion jednego kąta są odpowiednie ramiona drugiego kąta.



Na przykład α i γ na rysunku są kątami przyległymi. Pary kątów wierzchołkowych to α i β oraz γ i δ.

Definicja: Miejsce zerowe funkcji

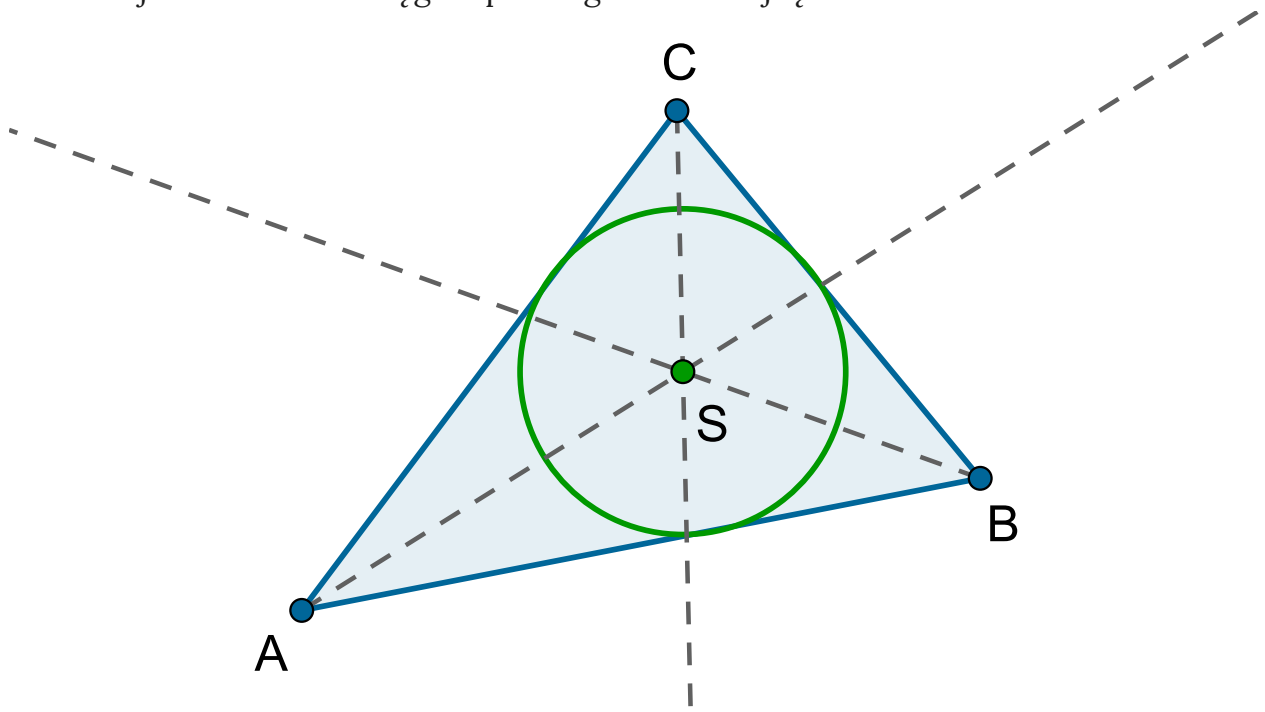
Każdy argument, dla którego funkcja przyjmuje wartość 0 nazywamy miejscem zerowym tej funkcji.

Twierdzenie: odwrotne do twierdzenia Pitagorasa

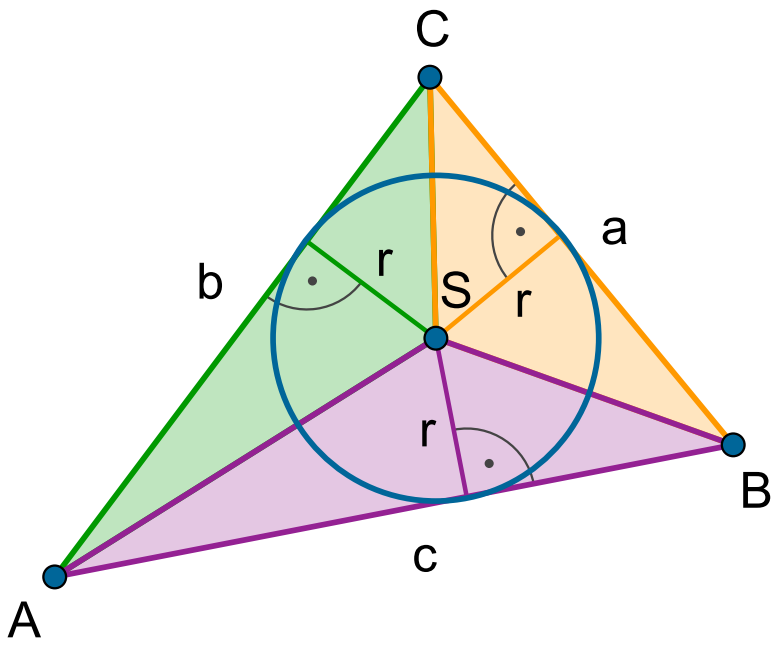
Jeżeli suma kwadratów długości dwóch boków trójkąta jest równa kwadratowi długości trzeciego boku, to trójkąt jest prostokątny.

Twierdzenie: o dwusiecznych kątów trójkąta

Dwusieczne każdego z kątów w trójkącie przecinają się w jednym punkcie.
Punkt ten jest środkiem okręgu wpisanego w ten trójkąt.



Odcinki łączące środek S okręgu wpisanego w trójkąt ABC z wierzchołkami tego trójkąta podzieliły trójkąt na trzy trójkąty ABS, BCS i ACS.
Wysokość każdego z tych trójkątów jest równa promieniowi okręgu wpisanego w trójkąt ABC (jak na rysunku).



Pole trójkąta ABC jest równe sumie pól trójkątów BCS, ACS i ABS

$$P_{\mathrm{ABC}} = P_{\mathrm{BCS}} + P_{\mathrm{ACS}} + P_{\mathrm{ABS}} = \frac{1}{2}\mathrm{ar} + \frac{1}{2}\mathrm{br} + \frac{1}{2}\mathrm{cr} = \frac{a+b+c}{2} \bullet r.$$

Wyprowadziliśmy w ten sposób wzór na pole trójkąta, w którym występują długości jego boków oraz promień okręgu wpisanego w ten trójkąt.

Twierdzenie: o kątach wierzchołkowych

Kąty wierzchołkowe są równe.

Twierdzenie: o linii środkowej w trapezie

Odcinek łączący środki ramion trapezu jest równoległy do podstaw tego trapezu, a jego długość jest równa średniej arytmetycznej długości podstaw trapezu.

Linia środkowa w trapezie

etap 3 z 5

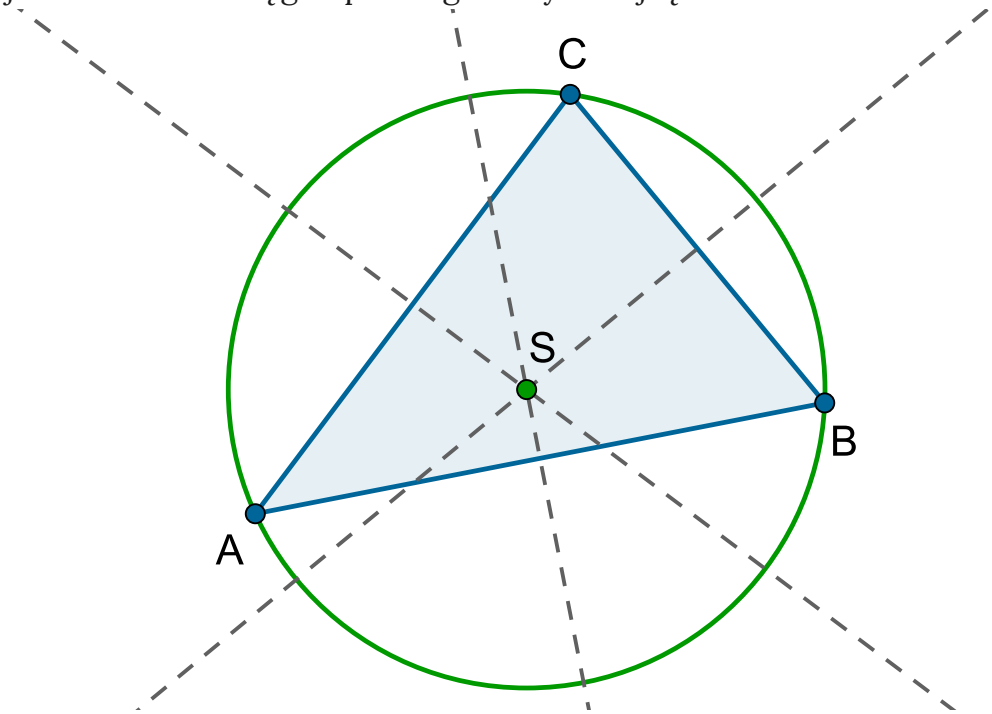
Co można powiedzieć
o długościach odcinków DC i EG?

$\frac{|EG|}{|DC|} = \frac{1}{}$

Zasób interaktywny dostępny pod adresem https://zpe.gov.pl/a/Dot1EGQXY

Twierdzenie: o symetralnych boków trójkąta

Symetralne trzech boków trójkąta przecinają się w jednym punkcie.
Punkt ten jest środkiem okręgu opisanego na tym trójkącie.



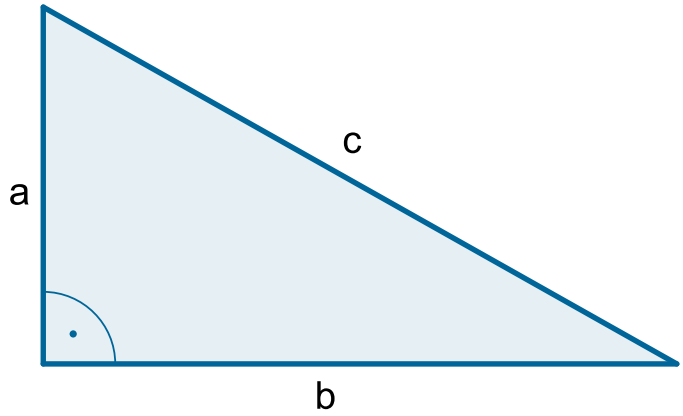
Dowód

Zasób interaktywny dostępny pod adresem https://zpe.gov.pl/a/Dot1EGQXY

Twierdzenie: Pitagorasa

W trójkącie prostokątnym suma kwadratów długości przyprostokątnych jest równa kwadratowi długości przeciwprostokątnej

$$a^2 + b^2 = c^2.$$



Dowód

Zasób interaktywny dostępny pod adresem https://zpe.gov.pl/a/Dot1EGQXY

Twierdzenie: Pole trójkąta

Pole trójkąta o bokach długości a, b, c oraz promieniu r okręgu wpisanego w ten trójkąt wyraża się wzorem

$$P = \frac{a+b+c}{2}\ \mathrm{r}.$$

Gdy oznaczymy $\frac{a+b+c}{2} = p$, wzór przyjmuje postać $P = \mathrm{pr}$.

Definicja: Pole wycinka

Pole wycinka koła o promieniu r i kącie α jest równe

$$P_{\text{wycinka}} = \frac{\alpha}{360^\circ} \bullet \pi r^2$$

Definicja: Potęga o wykładniku $\frac{1}{n}$

Dla dowolnej liczby nieujemnej a i liczby naturalnej n większej od 1 przyjmujemy

$$a^{\frac{1}{n}} = \sqrt[n]{a}.$$

Definicja: Proporcjonalność prosta

Funkcja f, opisująca zależność między dodatnimi wielkościami wprost proporcjonalnymi x i y nazywana jest proporcjonalnością prostą, a iloraz $\frac{y}{x}$ nazywamy współczynnikiem tej proporcjonalności. Oznaczając ten współczynnik przez a, zapisujemy funkcję f wzorem

$$f(x) = \mathrm{ax},$$

gdzie $x > 0$.
Uwaga: Wprost z definicji wynika, że $a > 0$.

Definicja: Wielkości wprost proporcjonalne

Dwie zmienne wielkości dodatnie nazywamy wprost proporcjonalnymi, jeżeli iloraz tych wielkości jest stały.

Twierdzenie: Własności podobieństwa

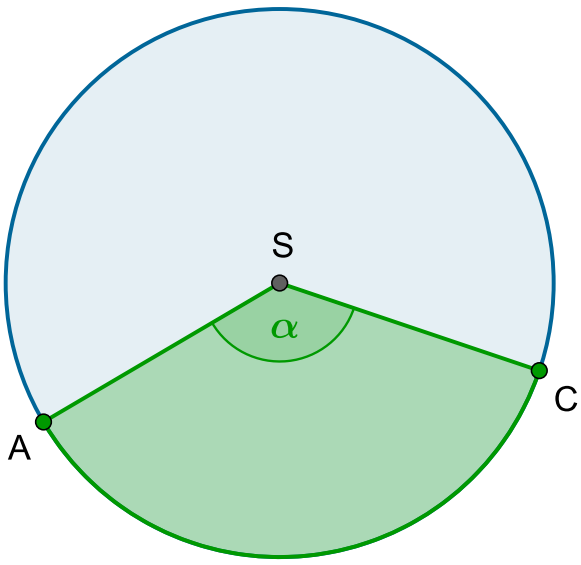
Jeżeli trójkąt $\mathrm{A'B'C'}$ jest podobny do trójkąta ABC w skali podobieństwa k, to stosunek obwodów tych trójkątów jest równy skali podobieństwa, a stosunek ich pól jest równy kwadratowi skali podobieństwa

$$\frac{L_{\mathrm{A'B'C'}}}{L_{\mathrm{ABC}}} = k$$

$$\frac{P_{\mathrm{A'B'C'}}}{P_{\mathrm{ABC}}} = k^2.$$

Definicja: Wycinek koła

Wycinkiem koła nazywamy każdą z dwóch jego części wyznaczonych przez dwa promienie tego koła wraz z tymi promieniami. Kąt pomiędzy tymi promieniami nazywamy kątem wycinka.



Twierdzenie: Wykres funkcji $f(x) = \mathrm{ax}$

Wykresem funkcji $f(x) = \mathrm{ax}$, gdzie a to ustalona liczba rzeczywista, jest prosta o równaniu $y = \mathrm{ax}$.

Reguła: zaokrąglania liczb

Jeżeli liczbę dodatnią zaokrąglamy do ustalonego rzędu wielkości, np. do tysięcy, setek, dziesiątek, jedności, części dziesiątych, części setnych itd., to wszystkie cyfry stojące po prawej stronie ostatniej (licząc od strony lewej) cyfry znaczącej zastępujemy zerami.
Z cyframi znaczącymi postępujemy następująco:

- gdy pierwsza cyfra z prawej strony ostatniej cyfry znaczącej jest mniejsza od 5, to wszystkie cyfry znaczące pozostawiamy bez zmian,
- gdy pierwsza cyfra z prawej strony ostatniej cyfry znaczącej jest co najmniej równa 5, a ostatnia cyfra znacząca jest mniejsza od 9, to tę cyfrę zwiększamy o 1, a wszystkie poprzednie cyfry znaczące pozostawiamy bez zmian. Jeśli natomiast ostatnią cyfrą znaczącą jest 9, to zamiast niej piszemy cyfrę 0 i tę samą procedurę stosujemy do poprzednich cyfr znaczących.