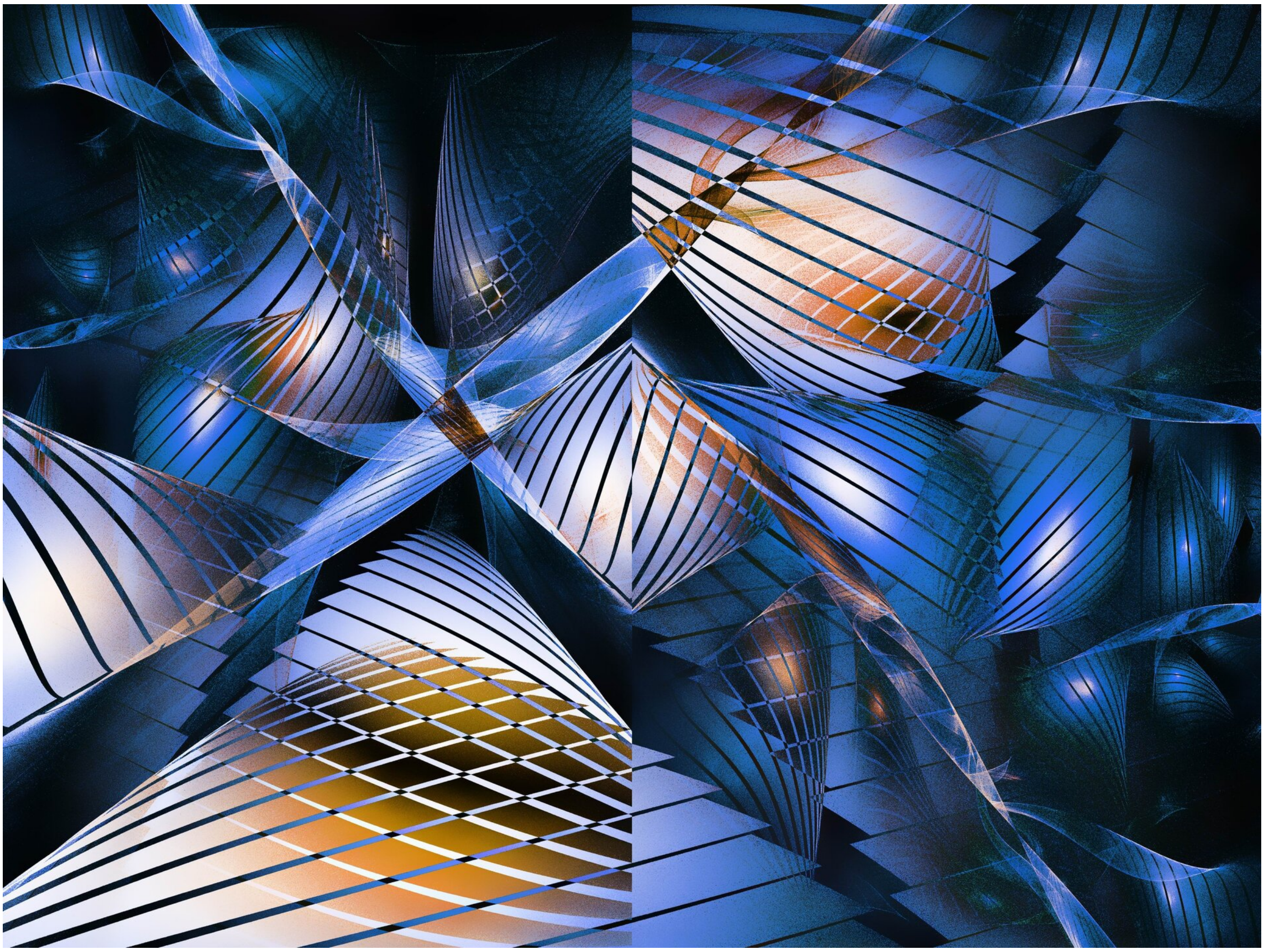

Wyrażenia wymierne i ich dziedzina

Źródło: Klara Acel, dostępny w internecie: pixabay.com, domena publiczna.

Wielomiany jednej zmiennej tworzą w algebrze strukturę zwaną pierścieniem wielomianów. Pojęcie to przekracza zakres programowy szkoły średniej, więc nie będziemy się nim tu zajmować. Ważne, że analogiczny pierścień tworzą liczby całkowite.

Pewne odwołania do analogii między liczbami całkowitymi i wielomianami znajdujemy w szkolnych programach nauczania matematyki. Można wspomnieć np. o rozkładzie liczb całkowitych i rozkładzie wielomianów na iloczyn czynników nierozkładalnych.

Korzystając z liczb całkowitych tworzymy liczby wymierne - czyli ułamki zwykłe, których licznik i mianownik to liczby całkowite, przy czym mianownik nie może być zerem. Takie ułamki możemy rozszerzać i skracać, mamy też określone dla nich podstawowe działania - dodawanie, odejmowanie, mnożenie i dzielenie.

Postępując analogicznie z wielomianami jednej zmiennej uzyskamy ułamki algebraiczne, w których liczniku i mianowniku mamy wielomiany - takie ułamki nazwiemy wyrażeniami wymiernymi. Każde wyrażenie wymierne określa odpowiednią funkcję wymierną.

> **Twoje cele**
>
> - Nauczysz się wyznaczać dziedzinę wyrażenia wymiernego.
> - Sprawdzisz, kiedy wyrażenia wymierne są równe.

Przeczytaj

Definicja: wyrażenie wymierne

Wyrażeniem wymiernym zmiennej rzeczywistej x nazywamy wyrażenie algebraiczne postaci $\frac{P(x)}{Q(x)}$, w którym $P(x)$ i $Q(x)$ są wielomianami zmiennej x, przy czym $Q(x)$ nie jest wielomianem zerowym.

Dziedziną wyrażenia wymiernego $\frac{P(x)}{Q(x)}$ jest zbiór wszystkich liczb rzeczywistych z wyjątkiem pierwiastków wielomianu $Q(x)$.

Przykład 1

Wyznaczmy dziedzinę wyrażeń:

Przykład 2

Wyznaczmy dziedzinę wyrażenia $\frac{1}{x^4-9}$.

- Szukamy rozwiązań równania $x^4 - 9 = 0$.
- Używając wzorów skróconego mnożenia (różnica kwadratów) możemy zapisać
  $\left(x^2-3\right)\left(x^2+3\right)=0$
  $\left(x-\sqrt{3}\right)\left(x+\sqrt{3}\right)\left(x^2+3\right)=0$
  Zatem rozwiązaniami rzeczywistymi są $x=-\sqrt{3}$, $x=\sqrt{3}$.
- Dziedzina wyrażenia to zatem zbiór $\mathbb{R} \setminus \left\{-\sqrt{3}; \sqrt{3}\right\}$.

Definicja: równość wyrażeń wymiernych

Wyrażenia wymierne są równe, gdy mają tą samą dziedzinę i dla każdego argumentu z dziedziny przyjmują odpowiednio te same wartości.

Przykład 3

Porównajmy wyrażenia wymierne $\frac{2x}{3x^2}$, $\frac{2}{3x}$ i $\frac{2x+6}{3x^2+9x}$.

- Na początek określmy dziedzinę wyrażenia $\frac{2x}{3x^2}$:
  ze względu na mianownik $x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$.
  Ułamek możemy skrócić przez x:
  Zatem $\frac{2x}{3x^2} = \frac{2}{3x}; x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$.
- Drugie wyrażenie to ułamek nieskracalny, po określeniu dziedziny możemy zapisać
  $\frac{2}{3x}; x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$.
- Określmy dziedzinę wyrażenia $\frac{2x+6}{3x^2+9x}$ rozwiązując równanie
  $3x^2 + 9x = 0$
  $3x(x+3) = 0$
  $x = 0$ lub $x = -3$ - te liczby nie należą do dziedziny wyrażenia.
  Zauważmy, że ułamek można skrócić przez $x+3$.
  Zatem
  $\frac{2x+6}{3x^2+9x} = \frac{2(x+3)}{3x(x+3)} = \frac{2}{3x}; x \in \mathbb{R} \setminus \{-3; 0\}$.
- Podsumowując: wszystkie trzy wyrażenia da się sprowadzić do postaci $\frac{2}{3x}$, trzecie z nich ma jednak inną dziedzinę, niż dwa poprzednie.
- Możemy powiedzieć, że wyrażenia $\frac{2x}{3x^2}$ i $\frac{2}{3x}$ są równe.
- Możemy też stwierdzić, że wyrażenia $\frac{2x}{3x^2}$, $\frac{2}{3x}$ i $\frac{2x+6}{3x^2+9x}$ są równe dla $x \in \mathbb{R} \setminus \{-3; 0\}$.

Przykład 4

Wykażemy, że wyrażenia $\frac{x-4}{x+4}$, $\frac{x^2-16}{x^2+8x+16}$, $\frac{x^3-4x^2+x-4}{x^3+4x^2+x+4}$ są równe.

- Wyrażenie $\frac{x-4}{x+4}$ jest nieskracalne, jego dziedzina to $\mathbb{R} \setminus \{-4\}$.
- Zapiszmy drugie wyrażenie używając wzorów skróconego mnożenia:
  $\frac{x^2-16}{x^2+8x+16} = \frac{(x-4)(x+4)}{(x+4)^2}$.
  Wyrażenie z mianownika przyjmuje wartość 0 tylko dla $x = -4$, po skróceniu przez $x+4$ mamy
  $\frac{x^2-16}{x^2+8x+16} = \frac{(x-4)(x+4)}{(x+4)^2} = \frac{x-4}{x+4}; x \in \mathbb{R} \setminus \{-4\}$.

- Sprowadźmy licznik i mianownik ostatniego wyrażenia do postaci iloczynowej przez odpowiednie pogrupowanie wyrazów:
$\frac{x^3-4x^2+x-4}{x^3+4x^2+x+4} = \frac{x^2(x-4)+(x-4)}{x^2(x+4)+(x+4)} = \frac{(x-4)(x^2+1)}{(x+4)(x^2+1)}$.
Zauważmy, że jedynym rzeczywistym mejscem zerowym mianownika $(x+4)(x^2+1)$ jest $x=-4$, bo wyrażenie x^2+1 nie przyjmuje wartości 0 dla żadnej liczby rzeczywistej. Ponadto możemy ułamek skrócić przez x^2+1 . Zatem
$\frac{x^3-4x^2+x-4}{x^3+4x^2+x+4} = \frac{x^2(x-4)+(x-4)}{x^2(x+4)+(x+4)} = \frac{(x-4)(x^2+1)}{(x+4)(x^2+1)} = \frac{x-4}{x+4}; x \in \mathbb{R} \setminus \{-4\}$.
- Wszystkie trzy wyrażenia można zatem sprowadzić do postaci $\frac{x-4}{x+4}$, wszystkie mają taką samą dziedzinę $\mathbb{R} \setminus \{-4\}$, są więc równe.

Słownik

pierwiastek wielomianu

dla wielomianu $W(x)$ jednej zmiennej x to liczba x_0 taka, że $W(x_0)=0$

równość wyrażeń wymiernych

wyrażenia wymierne są równe, gdy mają tą samą dziedzinę i dla każdego argumentu z dziedziny przyjmują odpowiednio te same wartości

wielomian zerowy

wielomian określony wzorem $W(x)=0$ (czyli funkcja stała przyjmująca wartość 0 dla każdej liczby rzeczywistej); wielomian ten nie ma określonego stopnia

wyrażenie wymierne

zmiennej rzeczywistej x to wyrażenie algebraiczne postaci $\frac{P(x)}{Q(x)}$, w którym $P(x)$ i $Q(x)$ są wielomianami zmiennej x, przy czym $Q(x)$ nie jest wielomianem zerowym.

dziedzina wyrażenia wymiernego $\frac{P(x)}{Q(x)}$

> to zbiór wszystkich liczb rzeczywistych z wyjątkiem pierwiastków wielomianu
> $Q(x)$

Animacja

Polecenie 1

Zapoznaj się z przedstawionymi w animacji przykładami wyznaczania dziedziny wyrażenia wymiernego.

Film dostępny pod adresem https://zpe.gov.pl/a/D5Oae9wFX

Film przedstawiający przykłady wyznaczania dziedziny wyrażenia wymiernego.

Polecenie 2

Wyznacz dziedzinę wyrażeń wymiernych. Uprość wyrażenia, jeśli to możliwe.

- $\frac{x^2-6x}{2x^2-3x}$
- $\frac{x^2+x+1}{x^3-1}$
- $\frac{2x^2-11x+5}{2x^2+5x-3}$

Sprawdź się

Pokaż ćwiczenia:

Ćwiczenie 1

Ćwiczenie 2

Ćwiczenie 3

Ćwiczenie 4

Ćwiczenie 5

Ćwiczenie 6

Ćwiczenie 7

Ćwiczenie 8

Ćwiczenie 9

Ćwiczenie 10

Ćwiczenie 11

Ćwiczenie 12

Ćwiczenie 13

Ćwiczenie 14

Ćwiczenie 15

Ćwiczenie 16

Ćwiczenie 17

Ćwiczenie 18

Ćwiczenie 19

Ćwiczenie 20

Ćwiczenie 21

Ćwiczenie 22

Ćwiczenie 23

Dla nauczyciela

Autor: Michał Niedźwiedź

Przedmiot: Matematyka

Temat: Wyrażenia wymierne i ich dziedzina

Grupa docelowa:

III etap edukacyjny, liceum ogólnokształcące, technikum, zakres rozszerzony

Podstawa programowa:

II. Wyrażenia algebraiczne. Zakres podstawowy. Uczeń:

7. mnoży i dzieli wyrażenia wymierne;

II. Wyrażenia algebraiczne. Zakres rozszerzony. Uczeń:

1. znajduje pierwiastki całkowite i wymierne wielomianu o współczynnikach całkowitych;
2. korzysta ze wzorów na: $a^3 + b^3$; $(a+b)^n$; $(a-b)^n$.

Kształtowane kompetencje kluczowe:

- kompetencje w zakresie rozumienia i tworzenia informacji;
- kompetencje matematyczne oraz kompetencje w zakresie nauk przyrodniczych, technologii i inżynierii;
- kompetencje cyfrowe;
- kompetencje osobiste, społeczne i w zakresie umiejętności uczenia się.

Cele operacyjne:

Uczeń:

- wyznacza dziedzinę wyrażenia algebraicznego,
- sprawdza, kiedy wyrażenia wymierne są równe.

Strategie nauczania:

- konstruktywizm;
- konektywizm.

Metody i techniki nauczania:

- dyskusja;
- tworzenie przez analogię;
- liga zadaniowa.

Formy pracy:

- praca indywidualna;
- praca w parach;
- praca w grupach;
- praca całego zespołu klasowego.

Środki dydaktyczne:

- komputery z głośnikami, słuchawkami i dostępem do internetu;
- zasoby multimedialne zawarte w e-materiale;
- tablica interaktywna/tablica, pisak/kreda.

Przebieg lekcji

Faza wstępna:

- Prowadzący wyświetla na tablicy interaktywnej zawartość sekcji „Wprowadzenie” i omawia cele do osiągnięcia w trakcie lekcji.
- Uczniowie określają kryteria sukcesu.

Faza realizacyjna:

- Na podstawie informacji zawartych w sekcji „Przeczytaj” uczniowie w czteroosobowych grupach zapoznają się z metodą wyznaczania dziedziny wyrażenia wymiernego. Metodą – tworzenie przez analogię – opracowują algorytm wyznaczania dziedziny wyrażenia wymiernego, a następnie porównują z odpowiednimi treściami pokazanymi w animacji.
- W dalszej części każda grup losuje 8 ćwiczeń interaktywnych z sekcji „Sprawdź się”. Następnie grupy rywalizują rozwiązując zadania. Uczniowie, którzy jako pierwsi bezbłędnie wykonają zadanie, wygrywają rywalizację.
- Nauczyciel wraz z uczniami analizuje ćwiczenia, które sprawiły najwięcej problemów.

Faza podsumowująca:

- Wybrany uczeń podsumowuje zajęcia, zwracając uwagę na nabyte umiejętności, odnosząc się do postawionych na początku lekcji celów i kryteriów sukcesu.

Praca domowa:

- Uczniowie przygotowują infografikę ilustrującą opracowany podczas lekcji algorytm

Materiały pomocnicze:

- Dziedzina
- Wyrażenia wymierne

Wskazówki metodyczne:

Animację można wykorzystać jako materiał służący powtórzeniu przed sprawdzianem.