



## Zależność między wyrazami ciągu arytmetycznego

- Wprowadzenie
- Przeczytaj
- Film samouczek
- Sprawdź się
- Dla nauczyciela



## Zależność między wyrazami ciągu arytmetycznego

Źródło: dostępny w internecie: pxhere.com, domena publiczna.

Najbardziej znanym ciągiem arytmetycznym jest oczywiście ciąg liczb naturalnych. Mając dwie liczby naturalne  $a$  i  $b$  łatwo jest określić liczby naturalne, które leżą między tymi liczbami.

Ale w przypadku innych ciągów arytmetycznych nie jest to już takie oczywiste.

W tym materiale poznamy wzór pokazujący zależność między trzema kolejnymi wyrazami ciągu arytmetycznego, który ułatwi znalezienie takich liczb.

Dowiemy się też, skąd nazwa ciągu – arytmetyczny.

### Twoje cele

- Odkryjesz związek między trzema kolejnymi wyrazami ciągu arytmetycznego.
- Znajdziesz brakujące wyrazy ciągu arytmetycznego, korzystając ze związku między wyrazami ciągu.
- Rozwiązując problemy dotyczące ciągu arytmetycznego, skorzystasz z poznanych twierdzeń i wniosków.

# Przeczytaj

---

**Ciągiem arytmetycznym** nazywamy ciąg liczbowy co najmniej trzywyrazowy, w którym każdy wyraz, począwszy od drugiego, powstaje przez dodanie do wyrazu poprzedniego liczby  $r$ , zwanej różnicą ciągu.

Jeżeli ciąg  $(a_n)$  jest ciągiem arytmetycznym o różnicy  $r$ , to dla każdej liczby naturalnej  $n \in \mathbb{N}_+$

$$a_n = a_1 + (n - 1) \cdot r$$

Weźmy pod uwagę wyrazy  $a_{n-1}$  i  $a_{n+1}$  tego ciągu.

Wtedy:

$$a_{n-1} = a_1 + (n - 2) \cdot r$$

$$a_{n+1} = a_1 + n \cdot r$$

Dodajemy stronami zapisane równości.

$$a_{n-1} + a_{n+1} = a_1 + (n - 2) \cdot r + a_1 + nr = 2[a_1 + (n - 1) \cdot r]$$

$$a_{n-1} + a_{n+1} = 2[a_1 + (n - 1) \cdot r] \quad | : 2$$

$$\frac{a_{n-1} + a_{n+1}}{2} = a_1 + (n - 1) \cdot r$$

$$\frac{a_{n-1} + a_{n+1}}{2} = a_n$$

Z powyższych rozważań wynika, że jeżeli ciąg  $(a_n)$  dla  $n > 1$  jest ciągiem arytmetycznym, to jego trzy kolejne wyrazy spełniają powyższą równość.

Pokażemy teraz, że jeżeli wyrazy ciągu  $(a_n)$  spełniają powyższą równość, to ciąg jest ciągiem arytmetycznym.

$$\frac{a_{n-1} + a_{n+1}}{2} = a_n \quad | \cdot 2$$

$$a_{n-1} + a_{n+1} = 2 \cdot a_n$$

$$a_{n-1} + a_{n+1} = a_n + a_n$$

$$a_{n-1} - a_n = a_n - a_{n+1}$$

Ostatnia równość oznacza, że dla  $n > 1$  różnice między kolejnymi wyrazami ciągu są stałe, zatem ciąg  $(a_n)$  jest ciągiem arytmetycznym.

Rozważania doprowadziły nas do sformułowania zależności między trzema kolejnymi wyrazami ciągu arytmetycznego.

**Twierdzenie: Zależność między trzema kolejnymi wyrazami ciągu arytmetycznego**

**Ciąg  $(a_n)$  jest ciągiem arytmetycznym wtedy i tylko wtedy, gdy każdy wyraz tego ciągu oprócz wyrazu pierwszego (i ostatniego, w przypadku ciągu skończonego) jest średnią arytmetyczną dwóch wyrazów sąsiednich – poprzedniego i następnego:**

$$a_n = \frac{a_{n-1} + a_{n+1}}{2}$$

gdzie  $n > 1$  i  $n \in \mathbb{N}$ .

**Przykład 1**

Sprawdźmy, czy ciąg  $\left(\frac{1}{-1+\sqrt{2}}, 1, \frac{-2}{\sqrt{2}}\right)$  jest arytmetyczny,

Środkowy wyraz ciągu to 1, zatem musimy sprawdzić, czy prawdziwa jest równość

$$1 = \frac{\frac{1}{-1+\sqrt{2}} - \frac{2}{\sqrt{2}}}{2}$$

Przekształcamy otrzymane wyrażenie.

$$2 = \frac{1}{-1+\sqrt{2}} - \frac{2}{\sqrt{2}}$$

$$2 = \frac{1}{-1+\sqrt{2}} \cdot \frac{1+\sqrt{2}}{1+\sqrt{2}} - \frac{2}{\sqrt{2}} \cdot \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}}$$

$$2 = 1 + \sqrt{2} - \sqrt{2}$$

$$2 \neq 1$$

Odpowiedź:

Dany ciąg nie jest ciągiem arytmetycznym.

**Przykład 2**

Liczby 4,  $x$ , 10 są kolejnymi wyrazami ciągu arytmetycznego. Wyznaczmy  $x$ .

Liczba  $x$  jest środkowym wyrazem ciągu, zatem:

$$x = \frac{4+10}{2}$$

$$x = 7$$

Odpowiedź:

Szukana liczba jest równa 7.

### Przykład 3

Liczby  $(-5)$ ,  $x$ ,  $y$ ,  $4$  są kolejnymi wyrazami ciągu arytmetycznego. Znajdziemy liczby  $x$ ,  $y$ .

Zapisujemy równania, wynikające ze związku między kolejnymi wyrazami ciągu arytmetycznego.

$$\begin{cases} x = \frac{-5+y}{2} \\ y = \frac{x+4}{2} \end{cases}$$

Mnożymy przez 2 obie strony każdego z równań.

$$\begin{cases} 2x = -5 + y \\ 2y = x + 4 \end{cases}$$

Wyznaczamy  $y$  z pierwszego równania i wstawiamy do drugiego równania układu.

$$\begin{cases} y = 2x + 5 \\ 2(2x + 5) = x + 4 \end{cases}$$

Wyznaczamy  $x$ .

$$\begin{cases} y = 2x + 5 \\ 4x + 10 = x + 4 \end{cases}$$

$$\begin{cases} y = 2x + 5 \\ x = -2 \end{cases}$$

Obliczamy  $y$ .

$$\begin{cases} y = 2 \cdot (-2) + 5 \\ x = -2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} y = 1 \\ x = -2 \end{cases}$$

Odpowiedź:

Szukane liczby to  $x = -2$ ,  $y = 1$ .

### Przykład 4

Wyznaczmy te wartości  $t$ , dla których liczby  $6t^2 - 4$ ,  $t$ ,  $-t^2 - 6t$  tworzą w podanej kolejności ciąg arytmetyczny.

Środkowy wyraz tego ciągu jest średnią arytmetyczną wyrazów skrajnych. Otrzymujemy równanie:

$$t = \frac{6t^2 - 4 - t^2 - 6t}{2}$$

Przekształcamy równanie, sprowadzając je do postaci ogólnej.

$$5t^2 - 6t - 4 = 2t$$

$$5t^2 - 8t - 4 = 0$$

Otrzymaliśmy równanie kwadratowe, które rozwiązujemy.

$$\Delta = 64 + 80 = 144$$

$$t_1 = \frac{8-12}{10} = -\frac{2}{5}$$

$$t_2 = \frac{8+12}{10} = 2$$

Odpowiedź:

Dla  $t = -\frac{2}{5}$  otrzymujemy ciąg arytmetyczny  $(-\frac{76}{25}, -\frac{10}{25}, \frac{56}{25})$ , dla  $t = 2$  otrzymujemy ciąg arytmetyczny  $(20, 2, -16)$ .

Wniosek dotyczący **zależności między trzema kolejnymi wyrazami ciągu arytmetycznego**, można uogólnić. Zapiszemy to uogólnienie również w postaci wniosku.

**Wniosek:**

**Jeżeli ciąg  $(a_n)$  jest ciągiem arytmetycznym to dla każdej liczby naturalnej  $n > k$  prawdziwa jest równość**

$$a_n = \frac{a_{n-k} + a_{n+k}}{2}$$

**Wyraz  $a_n$  jest średnią arytmetyczną wyrazów jednakowo od niego odległych.**

**Przykład 5**

Liczby 2,  $x$ ,  $y$ ,  $z$ , 8 w tej kolejności tworzą ciąg arytmetyczny  $(a_n)$ . Znajdziemy wzór ogólny ciągu i sumę wszystkich wyrazów ciągu.

Zauważmy, że wyraz  $y$  znajduje się w tej samej odległości od 2 i 8. Skorzystamy zatem z wniosku zapisanego przed przykładem.

$$y = \frac{2+8}{2}$$

$$y = 5$$

Wyznaczamy wyrazy  $x$  oraz  $z$ .

$$x = \frac{2+5}{2} = 3,5$$

$$z = \frac{5+8}{2} = 6,5$$

Obliczymy różnicę ciągu.

$$r = 3,5 - 2 = 1,5$$

Zapisujemy wzór ogólny ciągu.

$$a_n = 2 + (n - 1) \cdot (1,5)$$

$$a_n = 1,5n + 0,5$$

Obliczamy sumę wszystkich wyrazów ciągu.

$$S = 2 + 3,5 + 5 + 6,5 + 8 = 25$$

Odpowiedź:

Wzór ogólny ciągu to  $a_n = 1,5n + 0,5$ , a suma wszystkich wyrazów ciągu jest równa 25.

W ostatnim przykładzie pokażemy zastosowanie poznanej zależności między kolejnymi wyrazami ciągu arytmetycznego.

### Przykład 6

Wyznacz taką liczbę dodatnią  $x$ , dla której liczby  $\log_4 \sqrt{x}$ ,  $1 + \log_4 x$ ,  $\log_4 x^3 + \frac{1}{2}$  są odpowiednio pierwszym, drugim i trzecim wyrazem ciągu arytmetycznego.

Korzystamy z zależności między trzema kolejnymi wyrazami ciągu arytmetycznego.

$$1 + \log_4 x = \frac{\log_4 \sqrt{x} + \log_4 x^3 + \frac{1}{2}}{2} \quad | \cdot 2$$

$$2 + 2 \log_4 x = \log_4 \sqrt{x} + \log_4 x^3 + \frac{1}{2}$$

Przekształcamy otrzymaną równość, korzystając z własności logarytmów.

$$2 + 2 \log_4 x = \frac{1}{2} \log_4 x + 3 \log_4 x + \frac{1}{2}$$

$$\frac{3}{2} = \frac{3}{2} \log_4 x$$

$$\log_4 x = 1$$

$$x = 4 > 0$$

Odpowiedź:

Dla  $x = 4$  podane liczby tworzą ciąg arytmetyczny.

## Słownik

### zależność między trzema kolejnymi wyrazami ciągu arytmetycznego

ciąg  $(a_n)$  jest ciągiem arytmetycznym wtedy i tylko wtedy, gdy każdy wyraz tego ciągu oprócz wyrazu pierwszego (i ostatniego, w przypadku ciągu skończonego) jest średnią arytmetyczną dwóch wyrazów sąsiednich – poprzedniego i następnego:

$$a_n = \frac{a_{n-1} + a_{n+1}}{2}$$

gdzie  $n > 1$  i  $n \in \mathbb{N}$

# Film samouczek

---

## Polecenie 1

Zapoznaj się z filmem samouczkiem. Spróbuj najpierw samodzielnie wykonać zapisane tam zadania, a następnie porównaj z proponowanymi rozwiązaniami.

Film dostępny pod adresem <https://zpe.gov.pl/a/DrXMNSEZE>

Film nawiązujący do treści lekcji dotyczącej wzoru ogólnego ciągu arytmetycznego.

---

## Polecenie 2

Znajdź takie liczby  $a$ ,  $b$ , dla których ciąg  $(15, a, 5, b)$  jest arytmetyczny.

# Sprawdź się

---

Pokaż ćwiczenia:   

Ćwiczenie 1



Ćwiczenie 2



Ćwiczenie 3



Ćwiczenie 4



Ćwiczenie 5



Ćwiczenie 6



Ćwiczenie 7



Liczby  $a, b, c$  w podanej kolejności tworzą ciąg arytmetyczny.

Jeżeli drugą z tych liczb podzielimy przez dwa, a trzecią przez trzy, to również otrzymamy ciąg arytmetyczny.

Jeżeli natomiast pierwszą z tych liczb podzielimy przez trzy, a do trzeciej dodamy dwa, to też otrzymamy ciąg arytmetyczny. Znajdź liczby  $a, b, c$ .

Ćwiczenie 8



Wykaż, że jeśli w ciągu arytmetycznym  $(a_n)$  średnia arytmetyczna wyrazów  $a_4$  i  $a_6$  jest równa wyrazowi  $a_2$ , to ciąg ten jest ciągiem stałym.

# Dla nauczyciela

---

**Autor:** Justyna Cybulska

**Przedmiot:** Matematyka

**Temat:** Zależność między wyrazami ciągu arytmetycznego

**Grupa docelowa:**

III etap edukacyjny, liceum, technikum, zakres rozszerzony

**Podstawa programowa:**

VI. Ciągi. Zakres podstawowy.

Uczeń:

- 1) oblicza wyrazy ciągu określonego wzorem ogólnym;
- 4) sprawdza, czy dany ciąg jest arytmetyczny lub geometryczny;
- 5) stosuje wzór na  $n$ -ty wyraz i na sumę  $n$  początkowych wyrazów ciągu arytmetycznego.

**Kształtowane kompetencje kluczowe:**

- kompetencje w zakresie rozumienia i tworzenia informacji
- kompetencje matematyczne oraz kompetencje w zakresie nauk przyrodniczych, technologii i inżynierii
- kompetencje cyfrowe
- kompetencje osobiste, społeczne i w zakresie umiejętności uczenia się

**Cele operacyjne:**

Uczeń:

- odkrywa związek między trzema kolejnymi wyrazami ciągu arytmetycznego
- znajduje brakujące wyrazy ciągu arytmetycznego, korzystając ze związku między wyrazami ciągu
- rozwiązując problemy dotyczące ciągu arytmetycznego, korzysta z poznanych twierdzeń i wniosków

**Strategie nauczania:**

- konstruktywizm

## **Metody i techniki nauczania:**

- mapa myśli
- praca z ekspertem metodą stolików zadaniowych

## **Formy pracy:**

- praca w grupach
- praca całego zespołu klasowego

## **Środki dydaktyczne:**

- komputery z dostępem do Internetu w takiej liczbie, żeby każdy uczeń miał do dyspozycji komputer

## **Przebieg lekcji**

### **Faza wstępna:**

1. Krótkie powtórzenie wiadomości na temat ciągu arytmetycznego – nauczyciel wyznacza 3 uczniów, którzy na przemian odpowiadają na pytania zadawane przez koleżanki i kolegów (zadający pytania mogą korzystać z zeszytów i książek). Odpowiadający uczniowie zostają nagrodzeni „plusami” lub ukarani „minusami”.
2. Nauczyciel podaje temat i cele zajęć, uczniowie ustalają kryteria sukcesu.

### **Faza realizacyjna:**

1. Uczniowie wspólnie oglądają film samouczek, nauczyciel wyjaśnia niezrozumiałe kwestie.
2. Uczniowie pracują w 5 grupach metodą stolików zadaniowych. Przy każdym stoliku siedzi ekspert, który w domu przygotował jedno z zagadnień omawianych w sekcji „Przeczytaj” (według problemów podanych w kolejnych Przykładach). Opracował też swoje zadania podobnego typu. Jego zadaniem jest zapoznanie każdej grupy z danym problemem i pokazanie sposobu rozwiązywania zadań danego typu. Może wspomagać się przygotowaną wcześniej przez siebie prezentacją lub przygotowanymi ćwiczeniami interaktywnymi.
3. Po zapoznaniu się z zagadnieniami przy wszystkich stolikach, uczniowie wspólnie sporządzają mapę myśli obrazującą typy zadań związanych z zależnościami między trzema wyrazami ciągu arytmetycznego.

### **Faza podsumowująca:**

1. Wskazany przez nauczyciela uczeń przedstawia krótko najważniejsze elementy zajęć, poznane wiadomości, ukształtowane umiejętności. Eksperci – uczniowie „odpowiedzialni” za poszczególne stoliki komentują pracę grup, zwracając szczególną uwagę na sposób pracy grup, wzajemne relacje między uczniami, itp.

2. Nauczyciel omawia przebieg zajęć, wskazuje mocne i słabe strony pracy uczniów, ocenia pracę grup i ekspertów.

**Praca domowa:**

Zadaniem uczniów jest rozwiązanie ćwiczeń interaktywnych.

**Materiały pomocnicze:**

[Ciąg arytmetyczny](#)

**Wskazówki metodyczne:**

Film samouczek może być wykorzystany na zajęciach utrwalających umiejętności wykorzystania i przekształcania wyrażeń algebraicznych.