



Przekształcanie wykresów funkcji kwadratowej

- [Wprowadzenie](#)
- [Przeczytaj](#)
- [Test samosprawdzający](#)
- [Sprawdź się](#)
- [Dla nauczyciela](#)



Przekształcanie wykresów funkcji kwadratowej

Źródło: Andreas Kretschmer, dostępny w internecie: www.unsplash.com.

Wykres funkcji kwadratowej jest parabolą. Do naszkicowania paraboli wystarczy znaleźć współrzędne jej wierzchołka, współrzędne punktów przecięcia wykresu z osią odciętych (o ile istnieją), współrzędne punktu przecięcia z osią Y oraz ustalić, jak skierowane są ramiona paraboli.

Twoje cele

- Przekształcisz wykres funkcji kwadratowej.
- Wyznaczysz wzór funkcji kwadratowej, której wykresem jest dana parabola.
- Naszkicujesz wykres paraboli o zadanym wzorze.

Przeczytaj

Już wiesz

Funkcję określoną na zbiorze $\mathbb{R}$ wzorem $f(x) = ax^2 + bx + c$, gdzie $a, b, c \in \mathbb{R}$ oraz $a \neq 0$ nazywamy funkcją kwadratową.

Wykres funkcji kwadratowej to parabola.

Jeżeli $f(x) = ax^2 + bx + c$, to:

- dla $a > 0$ ramiona paraboli, będącej wykresem funkcji f skierowane są do góry,
- dla $a < 0$ ramiona paraboli, będącej wykresem funkcji f skierowane są do dołu.

Wykres funkcji kwadratowej f możemy przekształcać.

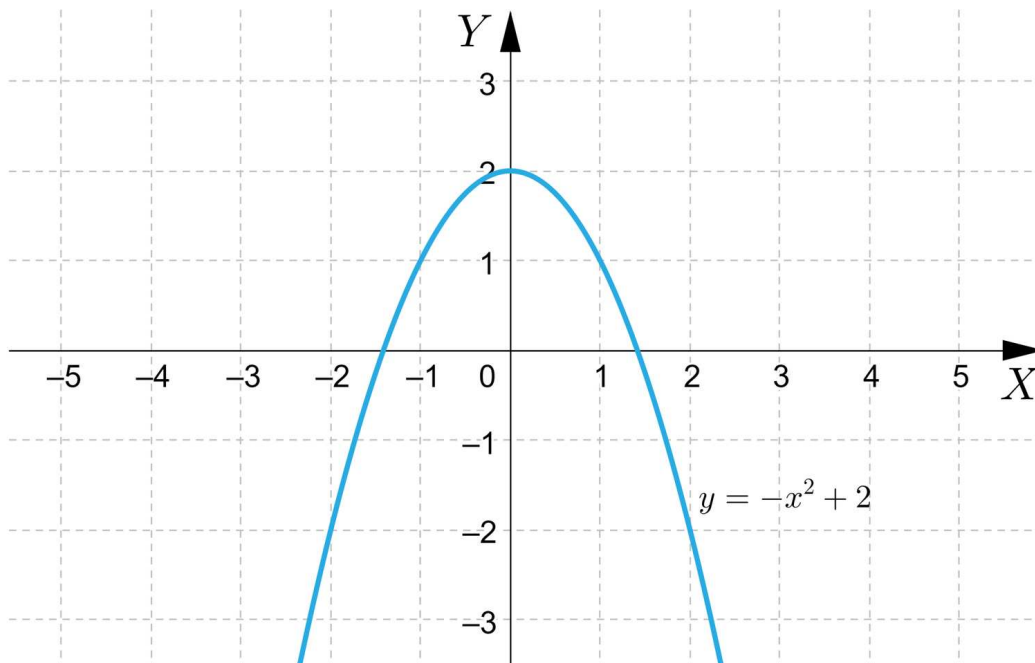
- $g(x) = f(x - p)$ - wykres funkcji g otrzymano w wyniku przesunięcia wykresu funkcji f wzdłuż osi X układu współrzędnych o p jednostek w prawo dla $p > 0$ lub p jednostek w lewo dla $p < 0$ (jest to równoważne z przesunięciem paraboli, będącej wykresem funkcji f o wektor o współrzędnych $[p, 0]$),
- $h(x) = f(x) + q$ - wykres funkcji h otrzymano w wyniku przesunięcia wykresu funkcji f wzdłuż osi Y układu współrzędnych o q jednostek w górę dla $q > 0$ lub q jednostek w dół dla $q < 0$ (jest to równoważne z przesunięciem paraboli, będącej wykresem funkcji f o wektor o współrzędnych $[0, q]$),
- $k(x) = -f(x)$ - wykres funkcji k otrzymano w wyniku odbicia symetrycznego wykresu funkcji f względem osi X układu współrzędnych,
- $m(x) = f(-x)$ - wykres funkcji m otrzymano w wyniku odbicia symetrycznego wykresu funkcji f względem osi Y układu współrzędnych.

Przykład 1

Naszkicujemy wykres funkcji f określonej wzorem $f(x) = -x^2 + 2$.

Rozwiązanie:

Zauważmy, że zgodnie z opisanymi przekształceniami, wystarczy naszkicować parabolę, będącą wykresem funkcji $y = x^2$, a następnie odbić ten wykres symetrycznie względem osi X układu współrzędnych i przesunąć o 2 jednostki w górę wzdłuż osi Y układu współrzędnych.

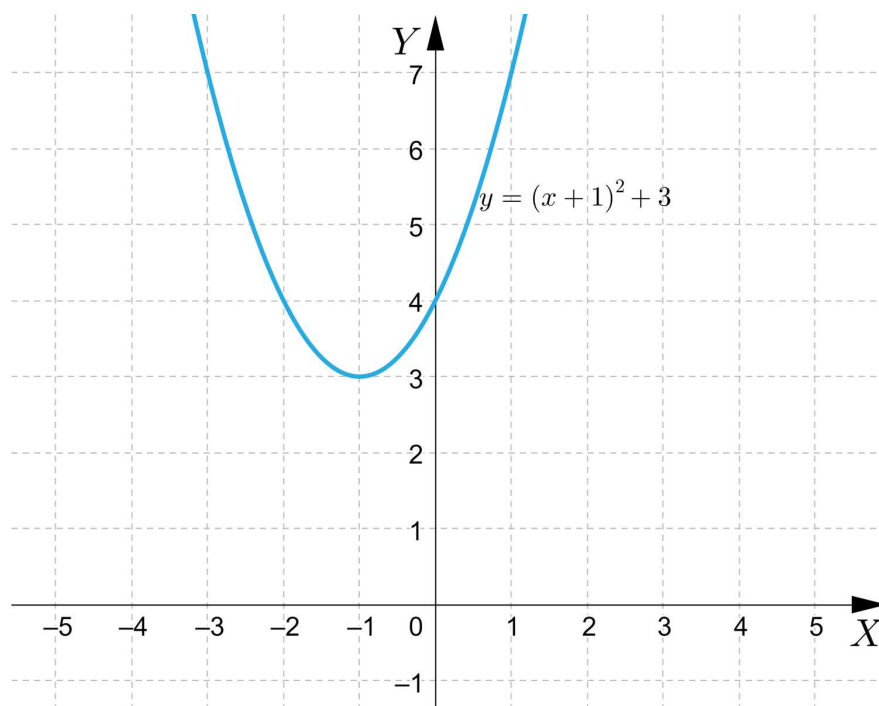


Ważne!

Przesunięcie paraboli, będącej wykresem funkcji f o p jednostek w prawo lub w lewo oraz o q jednostek w górę lub w dół możemy zapisać jako przesunięcie wykresu funkcji f o wektor $[p, q]$.

Przykład 2

W celu naszkicowania paraboli, będącej wykresem funkcji f określonej wzorem $f(x) = (x + 1)^2 + 3$ wystarczy przesunąć wykres funkcji $y = x^2$ o wektor $[-1, 3]$. Wyznamy oś symetrii tej paraboli oraz zbiór wartości podanej funkcji.



Rozwiązanie:

Zauważmy, że osią symetrii naszkicowanej paraboli jest prosta o równaniu $x = -1$, zaś zbiorem wartości funkcji przedział $\langle 3, \infty \rangle$. Ma to ścisły związek z przesunięciem wykresu funkcji o wektor.

Ważne!

- po przesunięciu paraboli, będącej wykresem funkcji $f(x) = x^2$ o p jednostek wzdłuż osi X układu współrzędnych, otrzymujemy parabolę, której osią symetrii jest prosta $x = p$.
- po przesunięciu paraboli, będącej wykresem funkcji $f(x) = x^2$ o q jednostek wzdłuż osi Y układu współrzędnych, otrzymujemy parabolę, będącą wykresem **funkcji kwadratowej**, której zbiór wartości różni się od zbioru wartości funkcji f .

Wykres funkcji kwadratowej f można też przekształcać w inny sposób.

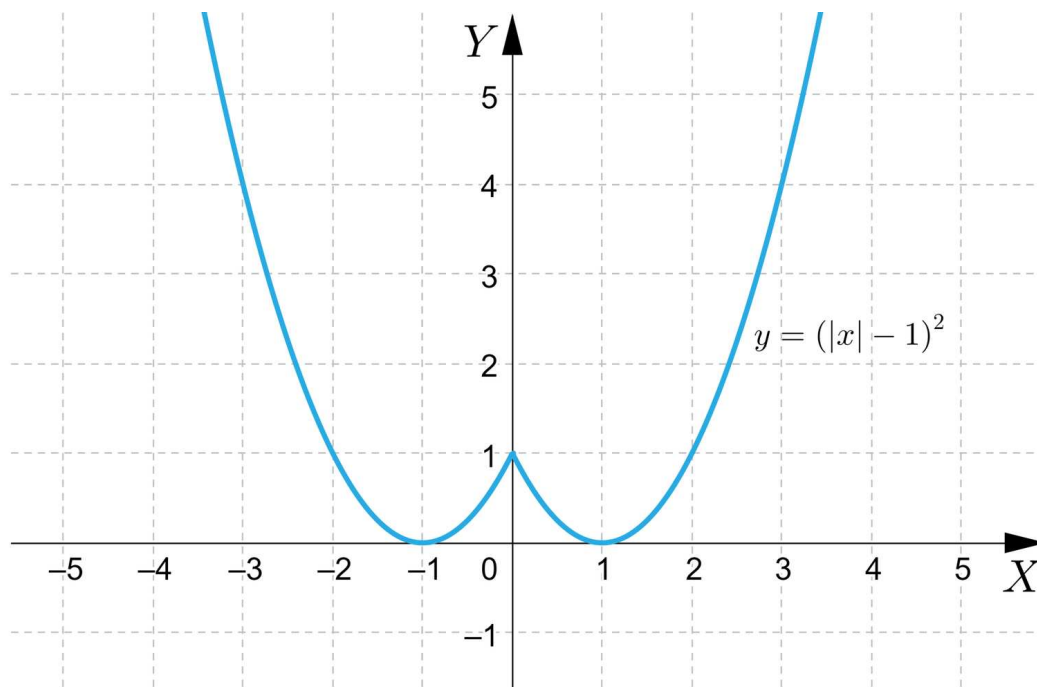
- $g(x) = |f(x)|$ - wykres funkcji g jest przystający do wykresu funkcji f , gdy wartości funkcji f są nieujemne, natomiast jest do niego symetryczny względem osi X układu współrzędnych, gdy wartości funkcji f są ujemne,
- $h(x) = f(|x|)$ - wykres funkcji h otrzymano w wyniku przekształcenia, które polega na dołączeniu do odpowiadającej argumentom dodatnim części wykresu funkcji f , jego odbicia symetrycznego względem osi Y układu współrzędnych.

Przykład 3

Naszkicujemy wykres funkcji f określonej wzorem $f(x) = (|x| - 1)^2$.

Rozwiązanie:

Do naszkicowania paraboli, będącej wykresem funkcji f wystarczy narysować wykres funkcji $y = (x - 1)^2$, a następnie część wykresu dla argumentów nieujemnych odbić symetrycznie względem osi Y .



Parabole, będące wykresami funkcji kwadratowych możemy także „rozszerzać” lub „zwężać” wzdłuż osi X lub osi Y układu współrzędnych.

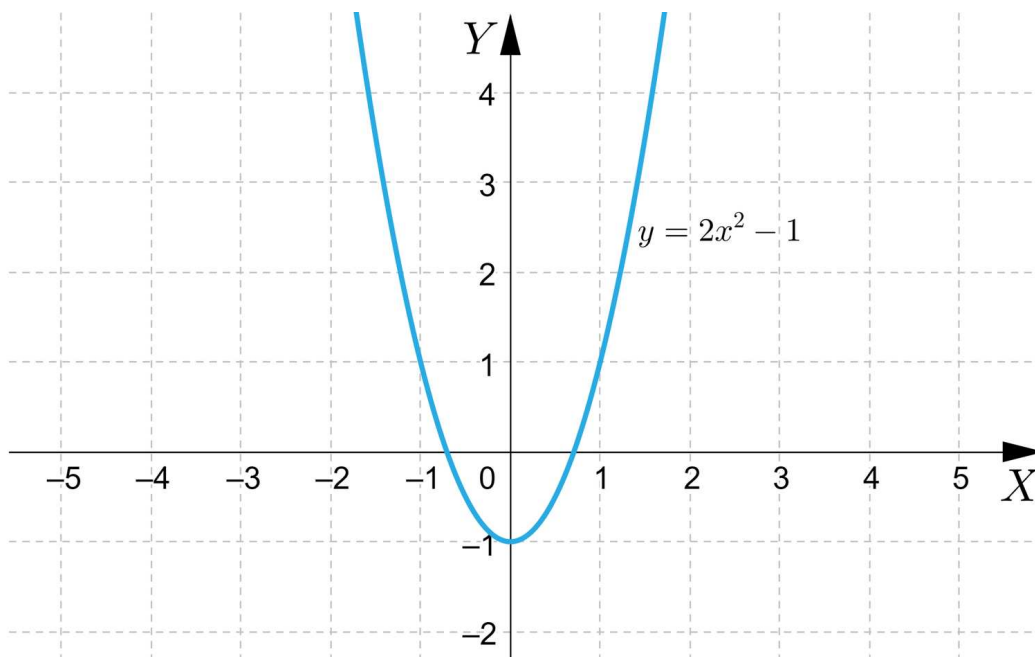
- Parabole, będącą wykresem funkcji określonej wzorem $af(x)$ dla $a > 0$ otrzymujemy przez „rozciągnięcie” (dla $a > 1$) lub „zwężenie” (dla $a < 1$) wykresu funkcji $f(x)$ wzdłuż osi Y układu współrzędnych,
- Parabole, będącą wykresem funkcji określonej wzorem $f(ax)$ dla $a > 0$ otrzymujemy przez „rozciągnięcie” (dla $a < 1$) lub „zwężenie” (dla $a > 1$) wykresu funkcji $f(x)$ wzdłuż osi X układu współrzędnych.

Przykład 4

Naszkicujemy wykres funkcji określonej wzorem $f(x) = 2x^2 - 1$.

Rozwiązanie:

Zauważmy, że zgodnie z opisanymi przekształceniami, wystarczy naszkicować wykres funkcji określonej wzorem $y = x^2$, następnie „rozszerzyć” go odpowiednio wzdłuż osi Y układu współrzędnych i przesunąć o 1 jednostkę w dół.

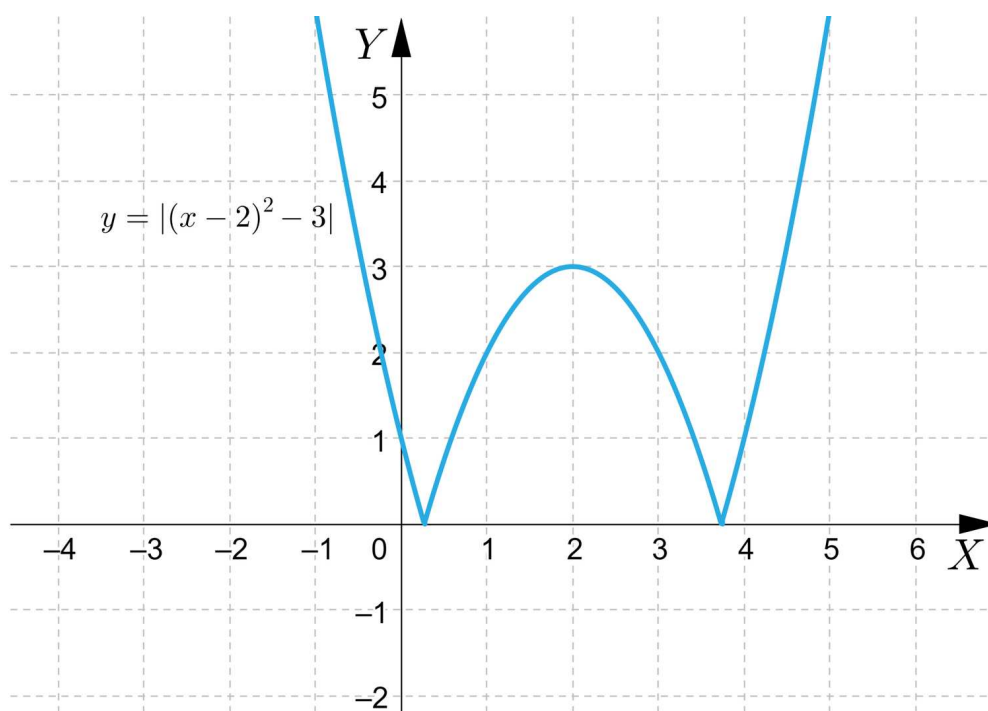


Przykład 5

Naszukujemy wykres funkcji f określonej wzorem $f(x) = |(x - 2)^2 - 3|$, a następnie określimy liczbę rozwiązań równania $f(x) = m$, w zależności od parametru $m \in \mathbb{R}$.

Rozwiązanie:

Wykres funkcji wygląda następująco:



Jeżeli rozwiązujemy równanie $f(x) = m$, to rozpatrujemy liczbę punktów wspólnych prostej o równaniu $y = m$ z parabolą, będącą wykresem funkcji f . Zatem równanie $f(x) = m$, gdzie $m \in \mathbb{R}$ ma:

- 0 rozwiązań, dla $m \in (-\infty, 0)$,
- 2 rozwiązania dla $m \in \{0\} \cup (3, \infty)$,
- 4 rozwiązania dla $m \in (0, 3)$,
- 3 rozwiązania dla $m = 3$.

Przykład 6

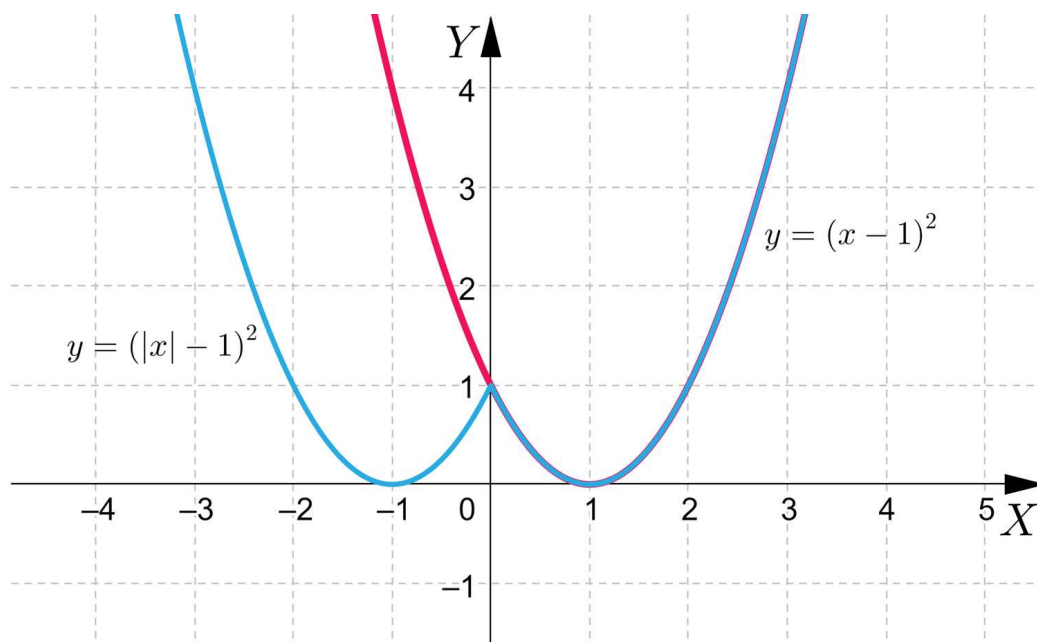
Naszkicujemy wykres funkcji f określonej wzorem $f(x) = (|x| - 1)^2$.

Rozwiązanie:

W celu naszkicowania wykresu funkcji f określonej wzorem $f(x) = (|x| - 1)^2$ wystarczy wykonać kolejne kroki:

- szkicujemy wykres funkcji określonej wzorem $y = (x - 1)^2$,
- dla $x \geq 0$ wykresy funkcji f i $y = (x - 1)^2$ pokrywają się,
- wykres funkcji $f(x) = (|x| - 1)^2$ jest symetryczny względem osi Y .

Zatem wykres funkcji f przedstawia się następująco:



Przykład 7

Funkcja f przyporządkowuje każdej liczbie rzeczywistej jej kwadrat pomniejszony o 3. Wyznamy wzór funkcji $g(x) = |f(x + 1) - 3|$, a następnie naszkicujemy jej wykres.

Rozwiązanie:

Zauważmy, że funkcja f jest określona wzorem $f(x) = x^2 - 3$.

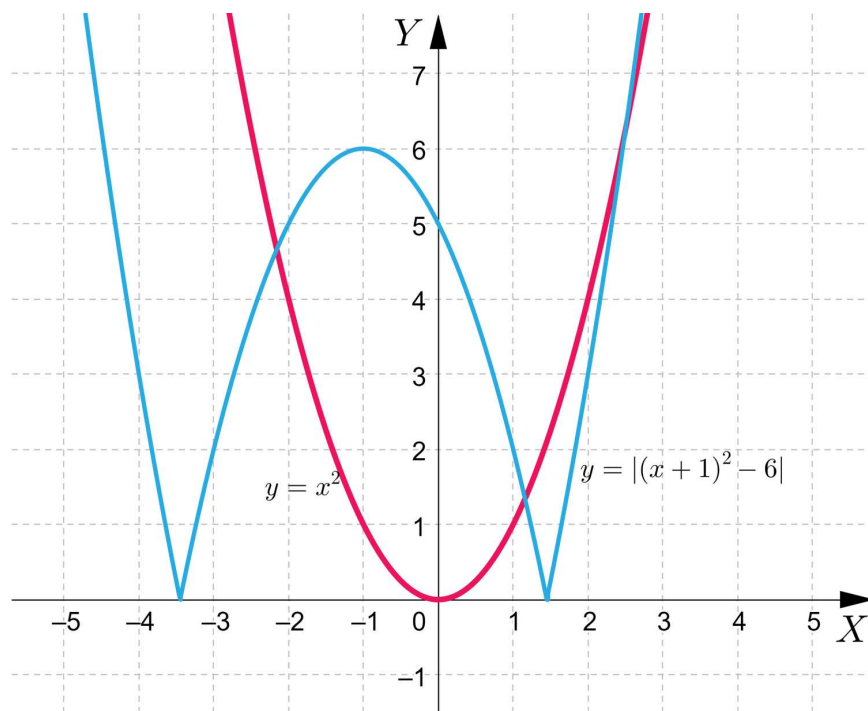
Wobec tego funkcja g jest określona wzorem:

$$g(x) = |(x + 1)^2 - 6|$$

W celu naszkicowania wykresu funkcji g należy wykonać następujące kroki:

- naszkicować wykres funkcji $y = x^2$,
- przesunąć otrzymany wykres o wektor o współrzędnych $[-1, -6]$,
- część otrzymanej paraboli, znajdującą się pod osią X , odbijamy symetrycznie względem tej osi.

Zatem wykres funkcji g przedstawia się następująco:



Słownik

funkcja kwadratowa

funkcja określona na zbiorze $\mathbb{R}$ wzorem $f(x) = ax^2 + bx + c$, gdzie $a, b, c \in \mathbb{R}$ oraz $a \neq 0$

wykres funkcji

zbiór wszystkich punktów $(x, f(x))$, gdzie x należy do dziedziny funkcji f

Test samosprawdzający

Polecenie 1

Wykonaj test, a następnie poniższe polecenie.



Test

Przekształcanie wykresów funkcji kwadratowej

Umiejętności. Uczeń:

- rozpoznaje różne przekształcenia wykresów funkcji kwadratowej,
- podaje wzór funkcji kwadratowej po przekształceniu jej wykresu,
- określa własności funkcji kwadratowej po przekształceniu jej wykresu.

Liczba pytań:

8

Limit czasu:

10 min

Twój ostatni
wynik:

-

Uruchom

Polecenie 2

Wykres funkcji f określonej wzorem $f(x) = x^2$ przesunięto o wektor $[3, -2]$ i otrzymano wykres funkcji g .

a) Wyznacz wzór funkcji g ,

b) określ zbiór wartości funkcji g ,

c) naszkicuj wykres funkcji g i określ liczbę rozwiązań równania $|g(x)| = 2$.

Sprawdź się

Pokaż ćwiczenia:   

Ćwiczenie 1



Połącz w pary wzór funkcji z odpowiednim wektorem przesunięcia paraboli, będącej wykresem funkcji określonej wzorem $y = x^2$:

$$f(x) = x^2 + 3$$

$$[1, 3]$$

$$f(x) = x^2 - 1$$

$$[-1, -3]$$

$$f(x) = (x - 1)^2 + 3$$

$$[0, 3]$$

$$f(x) = (x + 1)^2 - 3$$

$$[0, -1]$$

Ćwiczenie 2



Zbiorem wartości funkcji określonej wzorem $f(x) = -(x - 2)^2 + 3$ jest przedział:

☐ $(-\infty, 2)$

☐ $(-\infty, 3)$

☐ $\langle 3, \infty)$

Ćwiczenie 3

Ćwiczenie 4



Uporządkuj w odpowiedniej kolejności etapy szkicowania wykresu funkcji

$$f(x) = -|(x - 2)^2 - 3|:$$

przekształcenie wykresu o wektor $[2, -3]$



przekształcenie wykresu $|f(x)|$



odbicie symetryczne wykresu względem osi X



$$y = x^2$$



Ćwiczenie 5



Jeżeli przekształcimy parabolę, będącą wykresem funkcji $y = x^2$ o wektor $[1, -3]$, a następnie wykonamy przekształcenie $f(|x|)$, to otrzymamy wykres funkcji określonej wzorem:

☐ $f(x) = |(x - 1)^2| - 3$

☐ $f(x) = (|x| - 1)^2 - 3$

☐ $f(x) = |(x - 1)^2 - 3|$

Ćwiczenie 6



Wstaw liczby w odpowiednie miejsca:

Jeżeli prosta $x = 2$ jest osią symetrii paraboli, będącej wykresem pewnej funkcji kwadratowej, a wartość największa tej funkcji wynosi 4, to taką funkcję możemy opisać wzorem $f(x) = -(x - \boxed{})^2 + \boxed{}$.

4

-4

2

Ćwiczenie 7



Połącz wzór funkcji z własnością jej wykresu:

$$f(x) = -x^2 + 1$$

wierzchołkiem paraboli, będącej
wykresem funkcji f jest punkt
o współrzędnych $(1, 3)$

$$f(x) = -(x - 3)^2$$

funkcja f przyjmuje tylko wartości
niedodatnie

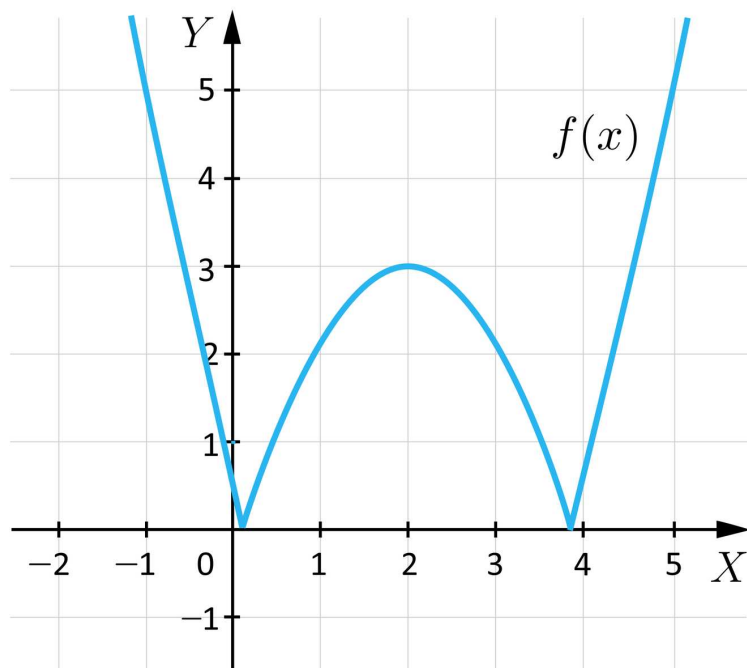
$$f(x) = |(x - 1)^2 + 3|$$

funkcja f przyjmuje tylko wartości
nieujemne

$$f(x) = |(x - 3)^2 - 1|$$

zbiorem wartości funkcji f jest
przedział $(-\infty, 1)$

Ćwiczenie 8



Na rysunku przedstawiono wykres funkcji f określonej wzorem $f(x) = |(x - 2)^2 - 3|$.
Uzupełnij zdania:

Równanie $f(x) = m$ ma 3 rozwiązania dla $m =$.

Zbiorem wartości funkcji f jest przedział $(\text{, } \infty)$.

Ośią symetrii paraboli, będącej wykresem funkcji f jest prosta o równaniu $x =$

.

Dla nauczyciela

Autor: Tomasz Wójtowicz

Przedmiot: Matematyka

Temat: Przekształcanie wykresów funkcji kwadratowej

Grupa docelowa:

Szkoła ponadpodstawowa, liceum ogólnokształcące, technikum, zakres rozszerzony

Podstawa programowa:

Treści nauczania – wymagania szczegółowe:

V. Funkcje. Zakres podstawowy. Uczeń:

12) na podstawie wykresu funkcji $y = f(x)$ szkicuje wykresy funkcji $y = f(x - a)$, $y = f(x) + b$, $y = -f(x)$, $y = f(-x)$;

Zakres rozszerzony 1) na podstawie wykresu funkcji $y = f(x)$ rysuje wykres funkcji $y = |f(x)|$

Kształtowane kompetencje kluczowe:

- kompetencje w zakresie rozumienia i tworzenia informacji;
- kompetencje matematyczne oraz kompetencje w zakresie nauk przyrodniczych, technologii i inżynierii
- kompetencje cyfrowe
- kompetencje osobiste, społeczne i w zakresie umiejętności uczenia się.

Cele operacyjne:

Uczeń:

- na podstawie wzoru funkcji kwadratowej szkicuje jej wykres,
- określa własności funkcji kwadratowej na podstawie jej wykresu,
- rozpoznaje wykres funkcji kwadratowej o danym wzorze.

Strategie nauczania:

- konstruktywizm;
- konektywizm.

Metody i techniki nauczania:

- dyskusja;
- burza mózgów.

Formy pracy:

- praca indywidualna;
- praca w grupach;
- praca całego zespołu klasowego.

Środki dydaktyczne:

- komputery z głośnikami, słuchawkami i dostępem do internetu;
- zasoby multimedialne zawarte w e-materiale;
- tablica interaktywna/tablica, pisak/kreda.

Przebieg lekcji

Faza wstępna:

1. Nauczyciel przedstawia uczniom temat zajęć: „Przekształcanie wykresów funkcji kwadratowej” i prosi, by na jego podstawie uczniowie sformułowali cel lekcji oraz kryteria sukcesu.
2. Uczniowie metodą burzy mózgów przypominają poznane pojęcia związane z tematem lekcji.

Faza realizacyjna:

1. Nauczyciel dzieli uczniów na 4-osobowe grupy. Uczniowie w grupach zapoznają się z informacjami w sekcji „Przeczytaj”. Analizują przedstawione przykłady i notują pytania. Następnie przedstawiają pytania na forum klasy. Odpowiadają na nie uczniowie z innych grup. Nauczyciel wyjaśnia ewentualne wątpliwości.
2. Uczniowie zapoznają się indywidualnie z treścią sekcji „Test samosprawdzający”. Zapisują ewentualne pytania dotyczące napotkanych trudności, po czym następuje dyskusja, w trakcie której nauczyciel wyjaśnia niezrozumiałe elementy z materiału.
3. Uczniowie w kolejnym kroku rozwiązują ćwiczenia nr 1 i 2 z sekcji „Sprawdź się”. Każdy z uczniów robi to samodzielnie. Po ustalonym czasie wybrani uczniowie przedstawiają rozwiązania. Nauczyciel w razie potrzeby koryguje odpowiedzi, dopowiada istotne informacje, udziela uczniom informacji zwrotnej.
4. W dalszej części uczniowie wykonują w grupach ćwiczenia 3-5. Po zakończeniu każdego ćwiczenia wybrana grupa prezentuje swoje rozwiązanie na forum klasy.
5. Uczniowie wykonują indywidualnie ćwiczenia numer 6, 7 i 8 po wykonaniu każdego z nich następuje omówienie rozwiązania przez nauczyciela.

Faza podsumowująca:

1. Omówienie ewentualnych problemów z rozwiązaniem ćwiczeń z sekcji „Sprawdź się”.

Praca domowa:

1. Uczniowie opracowują FAQ (minimum 3 pytania i odpowiedzi prezentujące przykład i rozwiązanie) do tematu lekcji („Przekształcanie wykresów funkcji kwadratowej”).

Materiały pomocnicze:

- [Wykres funkcji kwadratowej zapisanej wzorem w postaci kanonicznej i ogólnej.](#)

Wskazówki metodyczne:

- „Test samosprawdzający” można wykorzystać jako materiał służący powtórzeniu wiadomości w zakresie przekształcania wykresów funkcji kwadratowej.
- „Test samosprawdzający” można zastosować na kolejnej lekcji jako sprawdzenie wiadomości i umiejętności dotyczących przekształcania wykresów funkcji kwadratowej.