Działania na wektorach w układzie współrzędnych

Działania na wektorach w układzie współrzędnych

Źródło: dostępny w internecie: www.pixabay.com.

W tej lekcji powtórzysz wiadomości dotyczące działań na wektorach oraz poznasz nowe pojęcia takie jak: kombinacja liniowa i iloczyn skalarny. Oba mają swoje zastosowanie w matematyce oraz fizyce. Iloczyn skalarny wektorów siły i przemieszczenia danego ciała jest równy pracy wykonanej nad tym ciałem. Pojęcie kombinacji liniowej obejmuje zaś dużo więcej obiektów matematycznych niż tylko wektory.

Twoje cele

- Przypomnisz sobie pojęcia dodawania i odejmowania wektorów oraz mnożenia wektora przez liczbę.
- Zastosujesz działania na wektorach do wyznaczania kombinacji liniowej wektorów.
- Obliczysz iloczyn skalarny wektorów.
- Wyznaczysz cosinus kąta między wektorami przy użyciu iloczynu skalarnego.

Przeczytaj

Twierdzenie: o równości wektorów

Wektory w układzie współrzędnych $\overrightarrow{u} = [a; b]$, $\overrightarrow{v} = [c; d]$ są równe wtedy i tylko wtedy, gdy mają równe odpowiednie współrzędne $a = c$ oraz $b = d$.

Dla wektorów $\overrightarrow{u} = [a; b]$ i $\overrightarrow{v} = [c; d]$ definiujemy działania w następujący sposób:

1. suma wektorów $\overrightarrow{u} + \overrightarrow{v} = [a + c; b + d]$,
2. różnica wektorów $\overrightarrow{u} - \overrightarrow{v} = [a - c; b - d]$,
3. iloczyn wektora $\overrightarrow{u}$ przez liczbę k: $k\overrightarrow{u} = [ka; kb]$.

Wprowadzimy teraz nowe pojęcie, wykorzystujące działania na wektorach.

Kombinacją liniową wektorów $\overrightarrow{u_1}, \overrightarrow{u_2}, \overrightarrow{u_3}, \ldots, \overrightarrow{u_n}$ o współczynnikach $a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n$ nazywamy $a_1\overrightarrow{u_1} + a_2\overrightarrow{u_2} + a_3\overrightarrow{u_3} + \ldots + a_n\overrightarrow{u_n}$.

Przykład 1

Kombinacją liniową wektorów $\overrightarrow{u_1} = [-2; 3]$ i $\overrightarrow{u_2} = [1; -2]$ o współczynnikach $a_1 = -3$ i $a_2 = 2$ jest $a_1\overrightarrow{u_1} + a_2\overrightarrow{u_2} = -3[-2; 3] + 2[1; -2] = [6; -9] + [2; -4] = [8; -13]$.

Przykład 2

Przedstawimy wektor o współrzędnych $[5; -4]$ jako kombinację liniową wektorów o współrzędnych $[1; 0]$ i $[0; 1]$. Zauważmy, że $[5; -4] = [5; 0] + [0; -4] = 5 \cdot [1; 0] - 4 \cdot [0; 1]$. A zatem wektor o współrzędnych $[5; -4]$ jest kombinacją liniową wektorów o współrzędnych $[1; 0]$ i $[0; 1]$ ze współczynnikami 5 i (-4). Wspomnijmy przy okazji, że wektory o współrzędnych $[1; 0]$ i $[0; 1]$ nazywamy wersorami osi układu współrzędnych.

Przykład 3

Przedstawimy wektor o współrzędnych $[-4; 5]$ jako kombinację liniową wektorów $[2; 1]$ i $[-1; 3]$. Szukamy takich liczb a i b, aby spełniony był warunek

$a[2; 1] + b[-1; 3] = [-4; 5]$, który jest kolejno równoważny

$[2a; a] + [-b; 3b] = [-4; 5]$

$[2a - b; a + 3b] = [-4; 5]$

Korzystając z twierdzenia o równości wektorów, otrzymujemy układ równań

$$\begin{cases} 2a - b = -4 \\ a + 3b = 5 \end{cases},$$

którego rozwiązaniem jest para liczb $a - 1$ i $b = 2$. Zatem wektor o współrzędnych $[-4; 5]$ jest kombinacją liniową wektorów $[2; 1]$ i $[-1; 3]$ ze współczynnikami (-1) i 2.

Przypomnijmy również, jak wyznaczać współrzędne punktu, który dzieli dany odcinek w podanym stosunku.

Przykład 4

Wyznaczymy współrzędne punktu dzielącego odcinek o końcach $A = (-9; 3)$ i $B = (6; -6)$ w stosunku $2 : 3$, licząc od punktu A.

Niech szukany punkt nazywa się S i ma współrzędne $(x; y)$. Wówczas $\overrightarrow{AS} = \frac{2}{5}\overrightarrow{AB}$.

Wyznaczmy współrzędne wektorów.

$\overrightarrow{AS} = [x + 9; y - 3]$

$\frac{2}{5}\overrightarrow{AB} = \frac{2}{5}[15; -9] = [6; -3,6]$.

Z twierdzenia o równości wektorów porównujemy współrzędne $[x + 9; y - 3] = [6; -3,6]$, co prowadzi do równań $x + 9 = 6$ i $y - 3 = -3,6$, z których wynika, że $x = -3$ i $y = -0,6$. Zatem punkt S ma współrzędne $(-3; -0,6)$.

Kolejnym działaniem, które można wykonać na wektorach jest iloczyn skalarny.

Definicja: Iloczyn skalarny

Iloczynem skalarnym wektorów $\overrightarrow{u}$ i $\overrightarrow{v}$ nazywamy liczbę $\overrightarrow{u} \circ \overrightarrow{v} = \left|\overrightarrow{u}\right| \cdot \left|\overrightarrow{v}\right| \cdot \cos\sphericalangle\left(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}\right)$, gdzie $\sphericalangle\left(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}\right)$ oznacza kąt między wektorami $\overrightarrow{u}$ i $\overrightarrow{v}$.

Wyjaśnijmy od razu, że kątem między wektorami nazywamy kąt między prostymi będącymi kierunkami tych wektorów. Nie definiujemy kąta między wektorem zerowym a innym wektorem, ale przyjmujemy, że iloczyn skalarny dowolnego wektora przez wektor zerowy jest równy 0.

Zauważmy również, że gdy wektory $\overrightarrow{u}$ i $\overrightarrow{v}$ nie są wektorami zerowymi, to również ich długości nie są równe zeru, zatem ich iloczyn skalarny jest zerem dokładnie wtedy, gdy cosinus kąta między wektorami jest równy zeru, co ma miejsce dokładnie wtedy, gdy wektory są prostopadłe. Zatem możemy sformułować następujący wniosek.

Wniosek

Dwa niezerowe wektory są prostopadłe wtedy i tylko wtedy, gdy ich iloczyn skalarny jest równy zeru $\overrightarrow{u} \circ \overrightarrow{v} = 0$.

Można udowodnić następujące twierdzenie.

Twierdzenie: o iloczynie skalarnym wektorów o danych współrzędnych

Niech $\overrightarrow{u} = [a; b]$ i $\overrightarrow{v} = [c; d]$. Wówczas $\overrightarrow{u} \circ \overrightarrow{v} = ac + bd$.

Przykład 5

Wyznaczymy cosinus kąta między wektorami $\overrightarrow{u} = [1; -3]$ i $\overrightarrow{v} = [2; -1]$. Najpierw obliczymy iloczyn skalarny tych wektorów z definicji:
$\overrightarrow{u} \circ \overrightarrow{v} = \sqrt{10} \cdot \sqrt{5} \cdot \cos \sphericalangle\left(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}\right)$.

Możemy też obliczyć iloczyn skalarny, korzystając z przytoczonego wcześniej twierdzenia.

$$\overrightarrow{u} \circ \overrightarrow{v} = [1; -3] \circ [2; -1] = 1 \cdot 2 + (-3)(-1) = 2 + 3 = 5$$

Z przyrównania obu wartości otrzymujemy równanie:

$$\sqrt{10} \cdot \sqrt{5} \cdot \cos \sphericalangle\left(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}\right) = 5,$$

co sprowadza się do

$$\cos \sphericalangle\left(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}\right) = \frac{5}{5\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

Na podstawie wyznaczonej wartości cosinusa możemy stwierdzić, że kąt ostry między danymi wektorami ma miarę 45°.

Słownik

wersor osiowy

wektor o długości równej 1 oraz o kierunku i zwrocie zgodnym z kierunkiem i zwrotem osi tworzącej układ współrzędnych; w przypadku prostokątnego układu współrzędnych na płaszczyźnie wersory osiowe mają współrzędne $[1; 0]$ oraz $[0; 1]$

iloczyn skalarny wektorów $\overrightarrow{u}$ i $\overrightarrow{v}$

liczba (skalar) określona wzorem $\overrightarrow{u} \circ \overrightarrow{v} = \left|\overrightarrow{u}\right| \cdot \left|\overrightarrow{v}\right| \cos \sphericalangle\left(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}\right)$, gdzie $\sphericalangle\left(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}\right)$ oznacza miarę kąta między wektorami $\overrightarrow{u}$ i $\overrightarrow{v}$. Dla wektorów o współrzędnych $\overrightarrow{u} = [a; b]$ i $\overrightarrow{v} = [c; a]$ iloczyn skalarny można obliczyć korzystając ze wzoru $\overrightarrow{u} \circ \overrightarrow{v} = ac + bd$

kombinacja liniowa wektorów $\overrightarrow{u}_1, \overrightarrow{u}_2, \overrightarrow{u}_3, \ldots, \overrightarrow{u}_n$ **o współczynnikach** $a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n$

wektor zdefiniowany w następujący sposób $a_1\overrightarrow{u}_1 + a_2\overrightarrow{u}_2 + a_3\overrightarrow{u}_3 + \cdots + a_n\overrightarrow{u}_n$

Galeria zdjęć interaktywnych

Polecenie 1

Przeanalizuj informacje zawarte w galerii zdjęć interaktywnych, a następnie rozwiąż zadania.

Polecenie 2

Polecenie 3

Polecenie 4

Sprawdź się

Pokaż ćwiczenia:

Ćwiczenie 1

Ćwiczenie 2

Ćwiczenie 3

Ćwiczenie 4

Ćwiczenie 5

Ćwiczenie 6

Ćwiczenie 7

Ćwiczenie 8

Ćwiczenie 9

Ćwiczenie 10

Ćwiczenie 11

Dla nauczyciela

Autor: Sebastian Guz

Przedmiot: Matematyka

Temat: Działania na wektorach w układzie współrzędnych

Grupa docelowa:

Szkoła ponadpodstawowa, liceum ogólnokształcące, technikum, zakres rozszerzony

Podstawa programowa:
Treści nauczania – wymagania szczegółowe:
IX. Geometria analityczna na płaszczyźnie kartezjańskiej. Zakres podstawowy. Uczeń:
Zakres rozszerzony 3) zna pojęcie wektora i oblicza jego współrzędne oraz długość, dodaje wektory i mnoży wektor przez liczbę, oba te działania wykonuje zarówno analitycznie, jak i geometrycznie.

Kształtowane kompetencje kluczowe:

- kompetencje w zakresie rozumienia i tworzenia informacji;
- kompetencje matematyczne oraz kompetencje w zakresie nauk przyrodniczych, technologii i inżynierii
- kompetencje cyfrowe
- kompetencje osobiste, społeczne i w zakresie umiejętności uczenia się.

Cele operacyjne:

- Przypomnisz sobie pojęcia dodawania i odejmowania wektorów oraz mnożenia wektora przez liczbę.
- Zastosujesz działania na wektorach do wyznaczania kombinacji liniowej wektorów.
- Obliczysz iloczyn skalarny wektorów.
- Wyznaczysz cosinus kąta między wektorami przy użyciu iloczynu skalarnego.

Strategie nauczania:

- konstruktywizm;
- konektywizm.

Metody i techniki nauczania:

- odwrócona klasa;

- rozmowa nauczająca w oparciu o treści zawarte w sekcji „Galeria zdjęć interaktywnych” i ćwiczenia interaktywne;
- dyskusja.

Formy pracy:

- praca indywidualna;
- praca w parach;
- praca w grupach;
- praca całego zespołu klasowego.

Środki dydaktyczne:

- komputery z głośnikami, słuchawkami i dostępem do internetu;
- zasoby multimedialne zawarte w e-materiale;
- tablica interaktywna/tablica, pisak/kreda.

Przebieg lekcji

Przed lekcją:

1. Uczniowie zapoznają się z treściami zapisanymi w sekcji „Przeczytaj”.

Faza wstępna:

1. Rozpoznawanie wiedzy uczniów. Uczniowie tworzą pytania dotyczące tematu zajęć, na które odpowiedzą w trakcie lekcji.

Faza realizacyjna:

1. Nauczyciel przechodzi do sekcji „Sprawdź się”. Zapowiada uczniom, że w kolejnym kroku będą rozwiązywać ćwiczenia numer 1 i 2, i będą to robić wspólnie. Wybrana osoba czyta po kolei polecenia. Po każdym przeczytanym poleceniu ochotnik udziela odpowiedzi. Reszta uczniów ustosunkowuje się do niej, proponując swoje pomysły. Nauczyciel w razie potrzeby koryguje odpowiedzi, dopowiada istotne informacje, udziela uczniom informacji zwrotnej.
2. Kolejne ćwiczenia nr 3-5 uczniowie wykonują w parach. Następnie konsultują swoje rozwiązania z inna parą uczniów i ustalają jedną wersję odpowiedzi, zapisują problemy, które napotkali podczas rozwiązywania ćwiczeń.
3. Uczniowie wykonują indywidualnie ćwiczenia 6, 7 i 8, ale następnie porównują swoje odpowiedzi z kolegą lub koleżanką.

Faza podsumowująca:

1. Omówienie ewentualnych problemów z rozwiązaniem ćwiczeń z sekcji „Sprawdź się”.

Praca domowa:

1. Uczniowie opracowują FAQ (minimum 3 pytania i odpowiedzi prezentujące przykład i rozwiązanie) do tematu lekcji („Działania na wektorach w układzie współrzędnych”).

Materiały pomocnicze:

- Suma/różnica wektorów w układzie współrzędnych

Wskazówki metodyczne:

- Medium w sekcji „Galeria zdjęć interaktywnych” można potraktować jako zadania domowe dotyczące analizy problemu w temacie „Działania na wektorach w układzie współrzędnych”.