



Rozwiązywanie równań z funkcją cosinus

- [Wprowadzenie](#)
- [Przeczytaj](#)
- [Prezentacja multimedialna](#)
- [Sprawdź się](#)
- [Dla nauczyciela](#)



Rozwiązywanie równań z funkcją cosinus

Źródło: Fezbot2000, dostępny w internecie: www.unsplash.com.

Na poprzedniej lekcji dowiedziałeś się, jak rozwiązywać proste równania typu $\cos x = a$, gdzie a jest liczbą rzeczywistą. Na tej lekcji dowiesz się, jak sprowadzić bardziej skomplikowane równania do postaci $\cos x = a$. W tym celu wykorzystamy poznane przez Ciebie tożsamości $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$ oraz $\operatorname{tg} x = \frac{\sin x}{\cos x}$.

Twoje cele

- Nauczysz się sprowadzać równania do postaci $\cos x = a$.
- Dowiesz się, jak wykorzystać podstawowe tożsamości trygonometryczne do rozwiązywania równań.

Przeczytaj

Nauczyliśmy się rozwiązywać równania postaci $\sin x = a$ oraz $\cos x = a$, gdzie a jest pewną liczbą rzeczywistą. W tej lekcji każde równanie, o ile to tylko możliwe, będzie starali się sprowadzić do równania postaci $\sin x = a$ lub $\cos x = a$.

Pamiętajmy o kilku charakterystycznych elementach rozwiązywania równań:

1. Sprawdzamy dziedzinę równania. Najczęściej wypisujemy założenia związane z dzieleniem i pierwiastkowaniem: mianownik ułamka musi być różny od 0 i wyrażenie pod pierwiastkiem stopnia parzystego musi być nieujemne.
2. Sprowadzamy równanie do wartości jednej funkcji trygonometrycznej.
3. Często stosujemy podstawienie $t = \sin x$ lub $t = \cos x$.

Przykład 1

Rozwiążemy równanie $\frac{\operatorname{tg} x}{\cos x - 1} = 0$ w zbiorze liczb rzeczywistych.

Rozwiązanie:

Wykorzystamy tożsamość $\operatorname{tg} x = \frac{\sin x}{\cos x}$, zakładając jednocześnie, że $\cos x \neq 0$.

Wówczas równanie z zadania przyjmuje postać: $\frac{\sin x}{\cos x(\cos x - 1)} = 0$.

Zapiszmy założenia: $\cos x \neq 0$ i $\cos x \neq 1$, czyli $x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi$ i $x \neq 2k\pi$, gdzie $k \in \mathbb{Z}$.

Rozwiązaniami równania są liczby spełniające założenia oraz warunek: $\sin x = 0$.

Otrzymujemy zatem $x = \pi k$ i $x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi$ i $x \neq 2k\pi$, gdzie $k \in \mathbb{Z}$.

Ostatecznie odpowiedź jest następująca: $x = \pi + 2\pi k$, gdzie $k \in \mathbb{Z}$.

Przykład 2

Rozwiążemy równanie: $\frac{1 + \cos 2x}{\cos x} = 0$ w zbiorze liczb rzeczywistych.

Rozwiązanie:

Równanie $\frac{1 + \cos 2x}{\cos x} = 0$ jest równoważne koniunkcji warunków: $\cos 2x = -1$ i $\cos x \neq 0$.

Otrzymujemy zatem:

$2x = \pi + 2k\pi$ i $x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi$, gdzie $k \in \mathbb{Z}$.

Ostatecznie otrzymujemy:

$x = \frac{\pi}{2} + k\pi$ i $x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi$, gdzie $k \in \mathbb{Z}$. Zatem nie istnieją liczby x spełniające równanie.

Przykład 3

Rozwiążemy równanie $1 - \sin x \cdot \cos x + \sin x - \cos x = 0$ w zbiorze liczb rzeczywistych.

Rozwiązanie:

Będziemy postępować tak, aby uzyskać **postać iloczynu** dwóch wyrażeń:

$$1 + \sin x - (\sin x \cdot \cos x + \cos x) = 0$$

$$1 + \sin x - \cos x(\sin x + 1) = 0$$

$$(\sin x + 1)(1 - \cos x) = 0$$

Stąd dostajemy warunki: $\sin x = -1$ lub $\cos x = 1$.

Otrzymujemy zatem odpowiedź:

$$x = -\frac{\pi}{2} + 2k\pi \text{ lub } x = 2k\pi, \text{ gdzie } k \in \mathbb{Z}.$$

W następnym przykładzie wykorzystamy metodę podstawiania.

Przykład 4

$$\text{Rozwiążemy równanie } 2 \cos^2(3x) - 5 \cos(3x) + 2 = 0$$

Rozwiązanie:

Zauważmy, że równanie przypomina równanie kwadratowe. Wobec tego wprowadźmy nową zmienną: $t = \cos(3x)$.

Równanie przyjmuje postać: $2t^2 - 5t + 2 = 0$.

Obliczamy $\Delta = 25 - 4 \cdot 2 \cdot 2 = 9$.

Pierwiastki równania są równe: $t_1 = 2, t_2 = \frac{1}{2}$.

Wracamy do zmiennej x :

$$\cos 3x = 2 \text{ lub } \cos 3x = \frac{1}{2}.$$

Równanie $\cos 3x = 2$ jest sprzeczne, a równanie $\cos 3x = \frac{1}{2}$ ma rozwiązania:

$$3x = \frac{\pi}{3} + 2k\pi \text{ lub } 3x = -\frac{\pi}{3} + 2k\pi, \text{ gdzie } k \in \mathbb{Z}.$$

Odpowiedź:

$$x = \frac{\pi}{9} + \frac{2k\pi}{3} \text{ lub } x = -\frac{\pi}{9} + \frac{2k\pi}{3}, \text{ gdzie } k \in \mathbb{Z}.$$

Przykład 5

W zależności od wartości parametru m rozwiąż równanie:

$$\cos(m + x) - \cos(m - x) = 0$$

Zatem rozwiązaniem są: $m + x = m - x + 2k\pi$ lub $m + x = -m + x + 2k\pi$, gdzie $k \in \mathbb{Z}$.

Otrzymujemy zatem równania: $x = k\pi$ lub $m = k\pi$, gdzie $k \in \mathbb{Z}$.

Teraz kluczowa jest interpretacja wyniku.

1. Jeżeli $m \neq k\pi$, to $x = k\pi$, gdzie $k \in \mathbb{Z}$.
2. Jeżeli $m = k\pi$, x jest dowolną liczbą rzeczywistą.

Przykład 6

Rozwiążmy układ równań:
$$\begin{cases} \cos x + \cos y = 0 \\ x - y = \frac{4\pi}{3} \end{cases}$$

Rozwiązanie:

Wyliczmy x z równania drugiego $x = y + \frac{4\pi}{3}$ i podstawmy do równania pierwszego:

$\cos(y + \frac{4\pi}{3}) + \cos y = 0$. Zapiszmy równanie w postaci:

$$\cos(y + \frac{4\pi}{3}) = -\cos y,$$

Co możemy zapisać jako:

$$\cos(y + \frac{4\pi}{3}) = \cos(\pi - y).$$

Wówczas:

$$y + \frac{4\pi}{3} = \pi - y + 2k\pi \text{ lub } y + \frac{4\pi}{3} = -\pi + y + 2k\pi, \text{ gdzie } k \in \mathbb{Z}.$$

Drugie równanie jest sprzeczne, natomiast pierwsze równanie daje rozwiązanie

$y = -\frac{\pi}{6} + k\pi$, gdzie $k \in \mathbb{Z}$. Zatem rozwiązaniem układu jest para liczb

$$\begin{cases} x = \frac{\pi}{6} + (k+1)\pi \\ y = -\frac{\pi}{6} + k\pi \end{cases}, \text{ gdzie } k \in \mathbb{Z}.$$

Przykład 7

Rozwiążemy równanie $\cos^2 x - \cos x = x^2 + 2x + 3$ w liczbach rzeczywistych.

Zwróćmy uwagę na to, że mamy do porównania dwie funkcje: trygonometryczną

i kwadratową. Nie istnieje ogólny sposób rozwiązywania takich równań. Ale

w szczególnych przypadkach możemy rozwiązać to równanie korzystając z porównania zbiorów wartości funkcji $y = \cos^2 x - \cos x$ i $y = x^2 + 2x + 3$.

Zauważmy, że funkcję kwadratową $y = x^2 + 2x + 3$ można przedstawić w postaci

$y = (x+1)^2 + 2$, a zatem jej zbiorem wartości jest zbiór $\langle 2, +\infty \rangle$. Wartość najmniejszą 2 funkcja przyjmuje dla $x = -1$.

Wprowadźmy oznaczenie: $t = \cos x$, gdzie $t \in \langle -1, 1 \rangle$. Wówczas funkcja

$y = \cos^2 x - \cos x$ przyjmuje postać funkcji kwadratowej $y = t^2 - t$, której dziedziną jest przedział: $\langle -1, 1 \rangle$. Wówczas zbiór wartości tej funkcji to $\langle -\frac{1}{4}, 2 \rangle$. Wartość największą 2

funkcja przyjmuje dla $t = -1$, czyli dla $\cos x = -1$.

Zatem równanie $\cos^2 x - \cos x = x^2 + 2x + 3$ ma rozwiązanie dla x spełniającego warunki: $x = -1$ i $\cos x = -1$.

Odpowiedź: Taki x nie istnieje.

Słownik

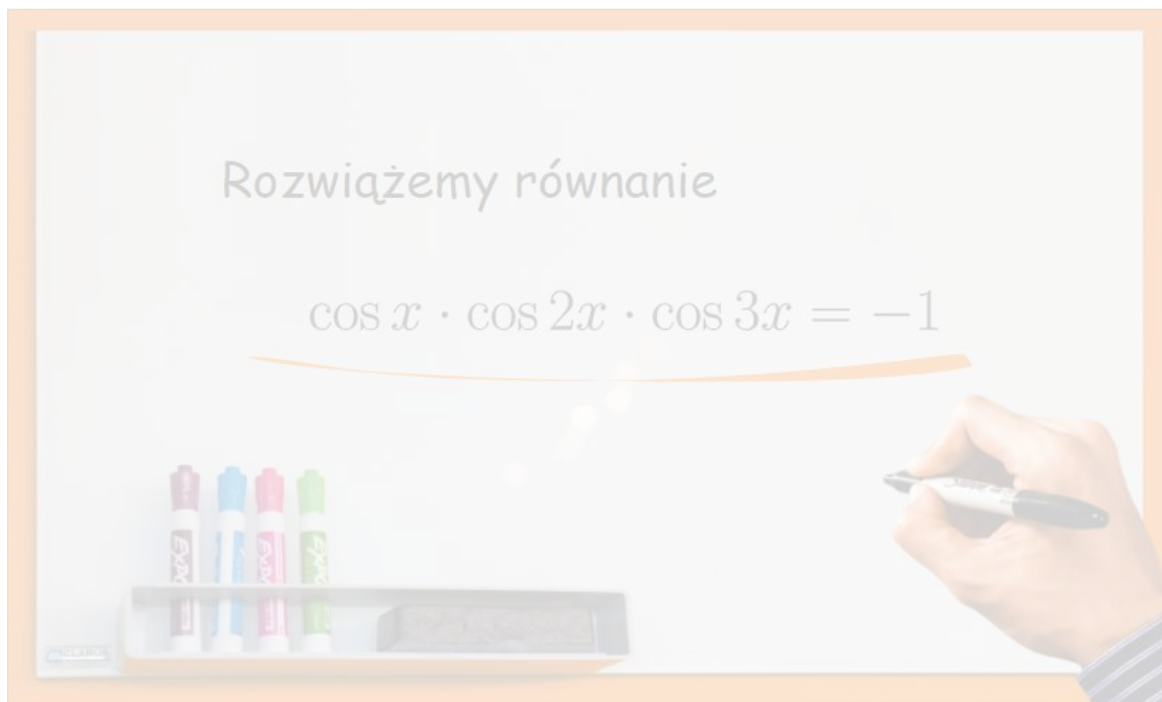
postać iloczynowa równania

to taka postać równania, gdy po jednej stronie równania występuje 0, a po drugiej iloczyn kilku czynników; dzięki takiej postaci równanie jest równoważne alternatywie kilku równań.

Prezentacja multimedialna

Polecenie 1

Zapoznaj się z prezentacją, a następnie wykonaj polecenia.



Zasób interaktywny dostępny pod adresem <https://zpe.gov.pl/a/Dkf8Tj5hy>

Polecenie 2

Wszystkie rozwiązania równania $\cos 2x \cdot \cos 3x = 1$ są postaci:

☐ $x = k\pi$, gdzie $k \in \mathbb{Z}$

☐ $x = -\frac{\pi}{2} + k\pi$, gdzie $k \in \mathbb{Z}$

☐ $x = -\frac{\pi}{2} + 2k\pi$, gdzie $k \in \mathbb{Z}$

☐ $x = -\frac{\pi}{3} + \frac{2k\pi}{3}$, gdzie $k \in \mathbb{Z}$

☐ $x = 2k\pi$, gdzie $k \in \mathbb{Z}$

☐ $x = \frac{\pi}{3} + \frac{2k\pi}{3}$, gdzie $k \in \mathbb{Z}$

Polecenie 3

Rozwiąż równanie: $\cos 2x \cdot \cos 4x \cdot \cos 6x = -1$.

Sprawdź się

Pokaż ćwiczenia:   

Ćwiczenie 1



Wskaż wszystkie rozwiązania równania: $4 \cos^3(3x) = 3 \cos(3x)$.

☐ $x = \frac{\pi}{2} + 2k\pi$ lub $x = \frac{\pi}{6} + 2k\pi$ lub $x = -\frac{\pi}{6} + 2k\pi$, gdzie $k \in \mathbb{Z}$

☐ $x = \frac{\pi}{6} + \frac{k\pi}{3}$ lub $x = \frac{\pi}{18} + \frac{k\pi}{3}$ lub $x = -\frac{\pi}{18} + \frac{k\pi}{3}$, gdzie $k \in \mathbb{Z}$

☐ $x = \frac{\pi}{2} + \frac{k\pi}{3}$ lub $x = \frac{\pi}{6} + \frac{2k\pi}{3}$ lub $x = -\frac{\pi}{6} + \frac{2k\pi}{3}$, gdzie $k \in \mathbb{Z}$

☐ $x = \frac{\pi}{6} + \frac{2k\pi}{3}$ lub $x = \frac{\pi}{18} + \frac{2k\pi}{3}$ lub $x = -\frac{\pi}{18} + \frac{2k\pi}{3}$, gdzie $k \in \mathbb{Z}$

Ćwiczenie 2



Wskaż wszystkie rozwiązania równania: $\frac{4 \cos^2 x - 1}{2 \cos^2 x + 3 \cos x + 1} = 0$.

☐ $x = \frac{7\pi}{3} + 2k\pi$ lub $x = -\frac{7\pi}{3} + 2k\pi$, gdzie $k \in \mathbb{Z}$

☐ $x = \frac{\pi}{3} + k\pi$ lub $x = -\frac{\pi}{3} + k\pi$, gdzie $k \in \mathbb{Z}$

☐ $x = \frac{7\pi}{3} + k\pi$ lub $x = -\frac{7\pi}{3} + k\pi$, gdzie $k \in \mathbb{Z}$

☐ $x = \frac{\pi}{3} + 2k\pi$ lub $x = -\frac{\pi}{3} + 2k\pi$, gdzie $k \in \mathbb{Z}$

Ćwiczenie 3



Połącz w pary: równanie i jego rozwiązanie.

$$2 \cos^2 x - 3 \cos x - 2 = 0$$

$$x \in \emptyset$$

$$2 \cos^2 x + 7 \cos x + 6 = 0$$

$$x = \frac{\pi}{4} + 2k\pi \text{ lub } x = -\frac{\pi}{4} + 2k\pi, \\ \text{gdzie } k \in \mathbb{Z}$$

$$2 \cos^2 x + (4 - \sqrt{2}) \cos x - 2\sqrt{2} = 0$$

$$x = \frac{2\pi}{3} + 2k\pi \text{ lub } x = -\frac{2\pi}{3} + 2k\pi, \\ \text{gdzie } k \in \mathbb{Z}$$

$$2 \cos^2 x - (2 + \sqrt{3}) \cos x + \sqrt{3} = 0$$

$$x = 2k\pi \text{ lub } x = \frac{\pi}{6} + 2k\pi \text{ lub} \\ x = -\frac{\pi}{6} + 2k\pi, \text{ gdzie } k \in \mathbb{Z}$$

Ćwiczenie 4



Wszystkimi rozwiązaniami równania są liczby $x = \frac{3\pi}{8} + \frac{k\pi}{2}$ lub $x = \frac{\pi}{2} + k\pi$, gdzie $k \in \mathbb{Z}$.

$$\cos 2x = \cos 3x$$

$$\sin 2x = \cos 3x$$

$$\sin 2x = \sin 3x$$

$$\cos 5x = -\cos 3x$$

Ćwiczenie 5



Każdemu równaniu przypisujemy najmniejsze rozwiązanie w przedziale $\langle 0, 2\pi \rangle$. Ustaw równania od najmniejszej do największej liczby.

$$\sin x + \cos x = 0$$



$$\sin x + \cos x = 1$$



$$\sin x + \cos x = -1$$



$$\sin x + \cos x = \sqrt{2}$$



Ćwiczenie 6



Wskaż wszystkie równania, które nie mają rozwiązań w zbiorze liczb rzeczywistych.

☐ $(\cos x - 3)(4 \cos x - \sqrt{17})(\sin^6 x + \cos^6 x) = 0$

☐ $\cos^5 x - \frac{3}{2} = 0$

☐ $8 \sin x \cos x + 9 = 12 \cos x + 6 \sin x$

☐ $\cos^2 x - 7 \cos x + 14 = 0$

Ćwiczenie 7



Ile rozwiązań ma $12 \cos 3x \cos 4x + 1 = 3 \cos 3x + 4 \cos 4x$ w przedziale $\langle 0, 2\pi \rangle$.

Ćwiczenie 8



Rozwiąż równanie $\cos \pi x = x^2 - 4x + 5$ w zbiorze liczb rzeczywistych.

Dla nauczyciela

Autor: Jacek Dymel

Przedmiot: Matematyka

Temat: Rozwiązywanie równań z funkcją cosinus

Grupa docelowa:

Szkoła ponadpodstawowa, liceum ogólnokształcące, technikum, zakres rozszerzony

Podstawa programowa:

VII. Trygonometria. Zakres podstawowy. Uczeń:

4) korzysta z wzorów $\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1$, $\operatorname{tg} \alpha = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha}$;

Zakres rozszerzony. Uczeń:

6) rozwiązuje równania i nierówności trygonometryczne o stopniu trudności nie większym niż w przykładach: $4 \cos 2x \cos 5x = 2 \cos 7x + 1$, $2 \sin^2 x \leq 1$.

Kształtowane kompetencje kluczowe:

- kompetencje w zakresie rozumienia i tworzenia informacji;
- kompetencje matematyczne oraz kompetencje w zakresie nauk przyrodniczych, technologii i inżynierii;
- kompetencje cyfrowe;
- kompetencje osobiste, społeczne i w zakresie umiejętności uczenia się.

Cele operacyjne:

Uczeń:

- wykorzystuje podstawowe tożsamości trygonometryczne do rozwiązywania równań trygonometrycznych,
- analizuje równanie trygonometryczne w celu sprowadzenia go do postaci $\cos x = a$.

Strategie nauczania:

- konstruktywizm;
- konektywizm.

Metody i techniki nauczania:

- odwrócona klasa;

- rozmowa nauczająca w oparciu o treści zawarte w sekcji „Prezentacja multimedialna” i ćwiczenia interaktywne;
- dyskusja.

Formy pracy:

- praca indywidualna;
- praca w parach;
- praca w grupach;
- praca całego zespołu klasowego.

Środki dydaktyczne:

- komputery z głośnikami, słuchawkami i dostępem do internetu;
- zasoby multimedialne zawarte w e-materiale;
- tablica interaktywna/tablica, pisak/kreda.

Przebieg lekcji

Przed lekcją:

1. Uczniowie zapoznają się z medium w sekcji „Prezentacja multimedialna”.

Faza wstępna:

1. Nauczyciel wprowadza uczniów w temat lekcji, nawiązując do zagadnień opisanych w sekcji „Wprowadzenie”.
2. Nauczyciel omawia cele lekcji i wraz z uczniami ustala i kryteria sukcesu.

Faza realizacyjna:

1. Nauczyciel przechodzi do sekcji „Sprawdź się”. Zapowiada uczniom, że w kolejnym kroku będą rozwiązywać ćwiczenia numer 1 i 2, i będą to robić wspólnie. Wybrana osoba czyta po kolei polecenia. Po każdym przeczytanym poleceniu ochotnik udziela odpowiedzi. Reszta uczniów ustosunkowuje się do niej, proponując swoje pomysły. Nauczyciel w razie potrzeby koryguje odpowiedzi, dopowiada istotne informacje, udziela uczniom informacji zwrotnej.
2. Uczniowie wykonują indywidualnie ćwiczenie nr 3, a następnie porównują swoje odpowiedzi z kolegą lub koleżanką.
3. Nauczyciel dzieli klasę na 4-osobowe grupy. Uczniowie rozwiązują zadania 4-6 na czas (od zadania łatwiejszego do trudniejszych). Grupa, która poprawnie rozwiąże zadania jako pierwsza, wygrywa, a nauczyciel może nagrodzić uczniów ocenami za aktywność. Rozwiązania są prezentowane na forum klasy i omawiane krok po kroku.
4. Uczniowie wykonują indywidualnie ćwiczenie 7 i 8, a następnie porównują swoje odpowiedzi z kolegą lub koleżanką. Praca indywidualna – implementacja poznanej

techniki do rozwiązywania problemów informatycznych – wykonywanie ćwiczeń z sekcji „Sprawdź się”.

Faza podsumowująca:

1. Omówienie ewentualnych problemów z rozwiązaniem ćwiczeń z sekcji „Sprawdź się”.
2. Nauczyciel omawia przebieg zajęć, wskazuje mocne i słabe strony pracy uczniów, udzielając im tym samym informacji zwrotnej.
3. Wybrany uczeń podsumowuje zajęcia, zwracając uwagę na nabyte umiejętności.

Praca domowa:

1. Zadanie dla kolegi/koleżanki. Uczniowie dobierają się w pary i opracowują zadania analogiczne do ćwiczeń 7 i 8 z sekcji „Sprawdź się”. Następnie przesyłają je do siebie mailem, rozwiązują i na następnej lekcji porównują wyniki.

Wykresy i własności funkcji trygonometrycznych

Wskazówki metodyczne:

- Medium w sekcji „Prezentacja multimedialna” można potraktować jako zadania domowe dotyczące analizy problemu w temacie „Rozwiązywanie równań z funkcją cosinus”.