



## Procent składany

- Wprowadzenie
- Przeczytaj
- Animacja
- Sprawdź się
- Dla nauczyciela



## Procent składany

Źródło: dostępny w internecie: pxhere.com, domena publiczna.

W tym materiale kilka informacji na temat sposobu oprocentowania, zwanego procentem składanym.

W średniowieczu ten sposób oprocentowania pożyczek, uważany był za najgorszy rodzaj lichwy i potępiany w wielu krajach. Bankierzy mimo to oszukiwali algorytmu, który pozwoli na określenie po ilu latach kapitał złożony na dany procent składany podwoi się. W 1494 r. włoski matematyk Luca Pacioli w pracy *Summa de Arithmetica* podaje wzór, tzw. regułę 72, dzięki której można w przybliżeniu określić poszukiwany okres.

W 1613 r. angielski matematyk Richard Witt opublikował pracę *Arithmetical Questions*, którą uważa się za przełomową w historii badań związanych z procentem składanym, gdyż cała była poświęcona tym zagadnieniom.



Źródło: dostępny w internecie: commons.wikimedia.org, licencja: CC BY 2.0.

W tym materiale kilka informacji na temat sposobu oprocentowania, zwanego procentem składanym.

Zawierała między innymi ponad 100 przykładów obliczeń związanych z zastosowaniem procentu składanego.

### **Twoje cele**

- Wykonasz obliczenia pieniężne.
- Zastosujesz obliczenia z zastosowaniem procentu składanego.
- Dobierzesz model matematyczny do rozwiązania problemu z kontekstem realistycznym.

# Przeczytaj

---

**Procent składany** to sposób oprocentowania wkładu pieniężnego polegający na tym, że odsetki za dany okres oprocentowania są doliczane do wkładu (podlegają kapitalizacji) i w ten sposób „składają się” na zysk wypracowywany w okresie następnym.

Zatem **kapitalizacja odsetek** to powiększanie kapitału poprzez dopisanie odsetek, które zostały wygenerowane przez ten kapitał, czyli przekształcenie odsetek w kapitał. Czas, po którym następuje dopisanie odsetek do kapitału, nazywamy **okresem kapitalizacji**.

Łatwo zauważyć, że kapitał złożony na **procent składany** zwiększa się o wiele szybciej niż na procent prosty. Oczywiście im częstsza kapitalizacja, tym kapitał wzrasta szybciej. W modelu kapitalizacji ciągłej, odstęp między kapitalizacjami maleje do zera.

Wykorzystanie zasady oprocentowania składanego nie wymaga obliczania wartości kapitału i odsetek w poszczególnych okresach kapitalizacji. Podobnie jak w przypadku procentu prostego, możemy skorzystać z prostego wzoru. Przy czym w obliczeniach nie będziemy uwzględniać podatku od odsetek.

## Ważne!

### Wzór na procent składany

Oznaczmy:

$K_0$  – kapitał początkowy,

$K$  – kapitał końcowy,

$n$  – liczba lat depozytu,

$m$  – liczba kapitalizacji w roku,

$\frac{p}{100}$  – roczna stopa procentowa.

Jeśli kapitalizacja odbywa się raz w roku, to:

$$K = K_0 \cdot \left(1 + \frac{p}{100}\right)^n$$

Jeśli kapitalizacja odbywa się  $m$  razy w roku, to:

$$K = K_0 \cdot \left(1 + \frac{p}{m \cdot 100}\right)^{n \cdot m}$$

Zastosowanie wzoru na procent składany prześledzimy na przykładach.

W przypadku uzyskania ułamka dziesiętnego nieskończonego, będziemy podawać kwotę z dokładnością do części setnych.

### Przykład 1

Klient wpłacił do banku 8000 zł na dwuletnią lokatę z oprocentowaniem rocznym w wysokości 5%. Odsetki dopisywane są do kapitału po upływie każdego roku.

Obliczymy, jaka będzie wartość oszczędności na koniec okresu oszczędzania.

**Rozwiązanie:**

Dane:

$$K_0 = 8000 \text{ zł}$$

$$n = 2$$

$$\frac{p}{100} = \frac{5}{100}$$

Szukane:

$$K = ?$$

Korzystamy ze wzoru na [procent składany](#).

$$K = 8000 \cdot \left(1 + \frac{5}{100}\right)^2$$

$$K = 8000 \cdot (1,05)^2$$

$$K = 8000 \cdot 1,1025 = 8820$$

Odpowiedź:

Kwota oszczędności na koniec okresu oszczędzania będzie równa 8820 zł.

**Przykład 2**

Kwotę w wysokości 15000 zł wpłacono na czteroletnią lokatę z rocznym oprocentowaniem 2% i coroczną kapitalizacją odsetek.

Obliczymy kwotę odsetek, jaką bank dopisze na koniec okresu oszczędzania.

**Rozwiązanie:**

Dane:

$$K_0 = 15000 \text{ zł}$$

$$n = 4$$

$$\frac{p}{100} = \frac{2}{100}$$

Szukane:

$$K = ?$$

Kwota odsetek = ?

Korzystamy ze wzoru na procent składany.

$$K = 15000 \cdot \left(1 + \frac{2}{100}\right)^4$$

$$K = 15000 \cdot (1,02)^4$$

$$K = 16236,481 \dots \approx 16236,48$$

Obliczamy kwotę odsetek, jako różnicę między kwotą końcową, a wpłaconą.

$$16236,48 - 15000 = 1236,48$$

Odpowiedź:

Uzyskana kwota odsetek jest równa 1236,48 zł.

Pokażemy teraz, jak obliczyć kapitał końcowy, gdy odsetki kapitalizowane są co pół roku, korzystając z tego samego wzoru, co w poprzednich przykładach.

### Przykład 3

Kwotę 12000 zł wpłacono na 2 lata na procent składany, z rocznym oprocentowaniem lokat 4%. Odsetki kapitalizowane są co pół roku.

Obliczymy wartość kapitału po zakończeniu lokaty.

**Rozwiązanie:**

$$K_0 = 12000 \text{ zł}$$

Kapitalizacja odsetek odbywa się co pół roku, więc w ciągu 2 lat dobędzie się czterokrotnie.

$$n = 4$$

Oprocentowanie w skali roku wynosi 4%, zatem półroczne będzie równe 2%.

$$\frac{p}{100} = \frac{2}{100}$$

Stąd:

$$K = 12000 \cdot \left(1 + \frac{2}{100}\right)^4$$

$$K = 12000 \cdot (1,02)^4$$

$$K = 12000 \cdot 1,0824321 \dots \approx 12989,19$$

Odpowiedź:

Kwota oszczędności na koniec okresu oszczędzania będzie równa o 12989,19 zł.

#### Przykład 4

Obliczymy, jaki dochód przyniesie po dwóch latach lokata 20000 zł, która jest oprocentowana w stosunku rocznym w wysokości 8%, a odsetki są kapitalizowane co kwartał.

**Rozwiązanie:**

$$K_0 = 20000 \text{ zł}$$

$$n = 2$$

$$m = 4$$

$$\frac{p}{100} = \frac{8}{100}$$

Powyższe dane podstawiamy do wzoru:

$$K = K_0 \cdot \left(1 + \frac{p}{m \cdot 100}\right)^{n \cdot m}$$

$$K = 20000 \cdot \left(1 + \frac{8}{4 \cdot 100}\right)^{4 \cdot 2}$$

Obliczamy:

$$K = 20000 \cdot \left(1 + \frac{8}{400}\right)^8$$

$$K = 20000 \cdot (1,02)^8$$

$$K \approx 23433,18 \text{ zł}$$

Obliczamy, jaki dochód przyniesie lokata.

$$K - K_0 = 23433,18 - 20000 = 3433,18$$

Odpowiedź:

Lokata przyniesie dochód w wysokości 3433,18 zł.

Od odsetek dopisywanych do kapitału złożonego na lokatę, pobierany jest podatek. W praktyce na **procent składany** stosowany jest więc nieco inny wzór niż ten, który do tej pory wykorzystywaliśmy.

Jeśli potrącony jest  $r$ -procentowy podatek od odsetek to procent składany obliczamy ze wzoru:

$$K = K_0 \cdot \left[ 1 + \frac{p}{m \cdot 100} \cdot \left( 1 - \frac{r}{100} \right) \right]^{n \cdot m}$$

### Przykład 5

Beata założyła w banku roczną lokatę (na procent składany) w wysokości 4800 zł.

Oprocentowanie roczne tej lokaty jest stałe i wynosi 6%.

Kapitalizacja odsetek odbywa się co kwartał.

Bank pobiera od każdych naliczonych odsetek 18% podatku od dochodów kapitałowych, oblicz, jaką kwotę będzie dysponować Beata po roku.

### Rozwiązanie:

$$K_0 = 4800 \text{ zł}$$

$$n = 1$$

$$m = 4$$

$$\frac{p}{100} = \frac{6}{100}$$

$$\frac{r}{100} = \frac{18}{100}$$

Korzystamy ze wzoru, w którym uwzględniony jest podatek od odsetek.

$$K = 4800 \cdot \left[ 1 + \frac{6}{4 \cdot 100} \cdot \left( 1 - \frac{18}{100} \right) \right]^{1 \cdot 4}$$

$$K = 4800 \cdot [1 + 0,015 \cdot (0,82)]^{1 \cdot 4}$$

$$K = 4800 \cdot (1,0123)^4$$

$$K \approx 5040,55 \text{ zł}$$

Odpowiedź:

Po roku Beata będzie dysponować kwotą równą 5040,55 zł.

## Słownik

### procent składany

to sposób oprocentowania wkładu pieniężnego polegający na tym, że odsetki za dany okres oprocentowania są doliczane do wkładu (podlegają kapitalizacji) i w ten sposób

| „składają się” na zysk wypracowywany w okresie następnym

# Animacja

---

## Polecenie 1

Zapoznaj się z animacją. Spróbuj samodzielnie rozwiązać prezentowane tam zadania i dopiero następnie porównaj rozwiązania.

Trwa wczytywanie danych...

Film dostępny pod adresem <https://zpe.gov.pl/a/D3bnOvt9i>

Film nawiązujący do treści lekcji dotyczącej pojęcia procenta składanego.

---

## Polecenie 2

Ewelina wpłaciła do banku na dwuletnią lokatę 10000 zł z rocznym oprocentowaniem w wysokości 3% i coroczną kapitalizacją odsetek. Oblicz, jaką kwotę odsetek uzyska na koniec okresu oszczędzania.

# Sprawdź się

---

Pokaż ćwiczenia:   

Ćwiczenie 1



Ćwiczenie 2



Ćwiczenie 3



Ćwiczenie 4



Ćwiczenie 5



Ćwiczenie 6



Ćwiczenie 7



Kapitał w wysokości 1000 zł złożono na lokatę przy rocznej stopie procentowej  $p\%$ . Odsetki naliczane są co dwa miesiące. Zapisz, jaka będzie wysokość złożonego kapitału po upływie roku.

Ćwiczenie 8



Udzielono pożyczki w wysokość 6000 zł na 2 lata. Umowa przewiduje oprocentowanie w wysokości 10% w skali roku. Kapitalizacja odsetek następuje co 6 miesięcy. Oblicz, jaką kwotę trzeba będzie oddać.

# Dla nauczyciela

---

**Autor:** Justyna Cybulska

**Przedmiot:** Matematyka

**Temat: Procent składany**

**Grupa docelowa:**

III etap edukacyjny, liceum, technikum, zakres rozszerzony, klasa I lub II

**Podstawa programowa:**

I. Liczby rzeczywiste. Zakres podstawowy.

Uczeń:

1) wykonuje działania (dodawanie, odejmowanie, mnożenie, dzielenie, potęgowanie, pierwiastkowanie, logarytmowanie) w zbiorze liczb rzeczywistych.

**Kształtowane kompetencje kluczowe:**

- kompetencje w zakresie rozumienia i tworzenia informacji
- kompetencje matematyczne oraz kompetencje w zakresie nauk przyrodniczych, technologii i inżynierii
- kompetencje cyfrowe
- kompetencje osobiste, społeczne i w zakresie umiejętności uczenia się

**Cele operacyjne:**

Uczeń:

- wykonuje obliczenia pieniężne z wykorzystaniem procentu składanego
- dobiera model matematyczny do rozwiązania problemu z kontekstem realistycznym
- rozwija umiejętności związane z pełnieniem wyznaczonych ról w grupie

**Strategie nauczania:**

- konstruktywizm

**Metody i techniki nauczania:**

- karta kołowa
- planowanie z przyszłości

## **Formy pracy:**

- praca w parach
- praca w grupach
- praca całego zespołu klasowego

## **Środki dydaktyczne:**

- komputery z dostępem do Internetu w takiej liczbie, żeby każdy uczeń miał do dyspozycji komputer
- kartony, mazaki

## **Przebieg lekcji**

### **Faza wstępna:**

1. Metodą karty kołowej uczniowie przypominają wiadomości i umiejętności związane z wykonywaniem obliczeń pieniężnych z zastosowaniem procentów.
2. Nauczyciel przedstawia problem i dzieli uczniów na grupy. Każdej grupie rozdaje karty kołowe z pytaniami:
  - Jakiego rodzaju obliczenia pieniężne najczęściej wykonujemy?
  - W jaki sposób obliczamy procent danej liczby?
  - W jaki sposób obliczyć jakim procentem jednej liczby jest druga liczba?
  - W jaki sposób wyznaczyć liczbę na podstawie danego jej procentu?
  - Jakie znasz rodzaje oprocentowania lokat?
  - W jaki sposób można wyznaczyć odsetki od kapitału złożonego na procent?Przedstawiciele poszczególnych grup prezentują swoje karty.  
W wyniku dyskusji podsumowującej, uczniowie powinni zauważyć, że nie potrafią wyznaczać odsetek od złożonego kapitału w przypadku procentu składanego.
3. Nauczyciel podaje temat i cele zajęć, uczniowie ustalają kryteria sukcesu.

### **Faza realizacyjna:**

1. Uczniowie pracują w grupach metodą planowania z przyszłości.  
Punktem startu jest stwierdzenie przez uczniów, że potrafią wykonywać obliczenia pieniężne z wykorzystaniem procentu składanego. Patrząc z przyszłości określają działania, jakie wykonali by to osiągnąć. Cofając się wstecz – określają czynności, które muszą obecnie wykonać, aby ukształtować dane umiejętności.  
W ułożonym planie działań powinni uwzględnić wiadomości, które mogą pozyskać z sekcji „Przeczytaj” i sekcji „Animacja”.
2. Grupy postępują zgodnie z ułożonym planem. Po upływie czasu wyznaczonego przez nauczyciela, rozwiązują ćwiczenia sprawdzające – grupy kolejno rozwiązują zadania, wykonując obliczenia na tablicy, tłumacząc ich rozwiązania pozostałym.

### **Faza podsumowująca:**

1. Liderzy grup podsumowują pracę swoich grup, wskazując na uzyskane umiejętności i przedstawiają swoje obserwacje dotyczące pełnienia przez uczniów wskazanych ról w grupie.
2. Nauczyciel wskazuje mocne i słabe strony pracy uczniów, ocenia pracę grup.

**Praca domowa:**

Zadaniem uczniów jest przeanalizowanie w domu ofert różnych banków i wybranie tych, które oferują oprocentowanie na procent składany. A następnie ułożenie i rozwiązanie zadania, opartego o pozyskane dane.

**Materiały pomocnicze:**

[Procent składany](#)

**Wskazówki metodyczne:**

Animację można wykorzystać przy okazji tematów związanych z ciągiem geometrycznym.