Wzór na sumę i różnicę tangensów

Wzór na sumę i różnicę tangensów

Źródło: dostępny w internecie: pixabay.com, domena publiczna.

Do tej pory poznałeś wzory na funkcje trygonometryczne sumy oraz różnicy kątów. Na tej lekcji dowiesz się, w jaki sposób ze znanych wzorów wyprowadzić wzory na sumę oraz różnicę funkcji tangens. Na podstawie tych nowych wzorów będziesz obliczać wartości wyrażeń oraz zmieniać sumy algebraiczne związane z funkcjami trygonometrycznymi na iloczyny.

Twoje cele

- Dowiesz się, jak wyglądają wzory na $\operatorname{tg}\alpha + \operatorname{tg}\beta$ oraz $\operatorname{tg}\alpha - \operatorname{tg}\beta$.
- Nauczysz się stosować wzory na $\operatorname{tg}\alpha + \operatorname{tg}\beta$ oraz $\operatorname{tg}\alpha - \operatorname{tg}\beta$ do obliczania wartości wyrażeń.

Przeczytaj

Do wyprowadzenia wzorów na sumę i różnicę tangensów wykorzystamy poznane wzory na sinus sumy oraz sinus różnicy. Przypomnijmy je zatem.

> **Twierdzenie: wzór na sinus sumy argumentów, wzór na sinus różnicy argumentów**
>
> Dla dowolnych $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ zachodzą następujące wzory:
>
> $$\sin(\alpha + \beta) = \sin\alpha\cos\beta + \sin\beta\cos\alpha$$
>
> $$\sin(\alpha - \beta) = \sin\alpha\cos\beta - \sin\beta\cos\alpha$$

Teraz udowodnimy twierdzenie o sumie tangensów i różnicy tangensów.

> **Twierdzenie: wzór na sumę tangensów, wzór na różnicę tangensów**
>
> Dla dowolnych $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ spełniających warunki: $\cos\alpha \neq 0$ i $\cos\beta \neq 0$, zachodzą następujące wzory:
>
> $$\operatorname{tg}\,\alpha + \operatorname{tg}\,\beta = \frac{\sin(\alpha+\beta)}{\cos\alpha\cos\beta}$$
>
> $$\operatorname{tg}\,\alpha - \operatorname{tg}\,\beta = \frac{\sin(\alpha-\beta)}{\cos\alpha\cos\beta}$$

Dowód

1. Skorzystamy z tożsamości: $\operatorname{tg}\,\alpha = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}$, gdzie $\cos\alpha \neq 0$:

$\operatorname{tg}\,\alpha + \operatorname{tg}\,\beta = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} + \frac{\sin\beta}{\cos\beta}$.

Po sprowadzeniu do wspólnego mianownika, korzystamy ze wzoru na sinus sumy kątów:

$\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} + \frac{\sin\beta}{\cos\beta} = \frac{\sin\alpha\cos\beta + \sin\beta\cos\alpha}{\cos\alpha\cos\beta} = \frac{\sin(\alpha+\beta)}{\cos\alpha\cos\beta}$

co kończy dowód.

2. Skorzystamy z tożsamości: $\operatorname{tg}\,\alpha = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}$, gdzie $\cos\alpha \neq 0$:

$\operatorname{tg}\,\alpha - \operatorname{tg}\,\beta = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} - \frac{\sin\beta}{\cos\beta}$.

Po sprowadzeniu do wspólnego mianownika, korzystamy ze wzoru na sinus sumy kątów:

$\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} - \frac{\sin\beta}{\cos\beta} = \frac{\sin\alpha\cos\beta - \sin\beta\cos\alpha}{\cos\alpha\cos\beta} = \frac{\sin(\alpha-\beta)}{\cos\alpha\cos\beta}$

co kończy dowód.

Przykład 1

Obliczymy wartość wyrażenia: $\frac{(1+\operatorname{tg} 10^\circ)\cdot\cos 10^\circ}{\sqrt{2}\sin 55^\circ}$.

Rozwiązanie

W wyrażeniu podstawmy $\operatorname{tg} 45^\circ$ w miejsce liczby 1.

$$\frac{(1+\operatorname{tg} 10^\circ)\cdot\cos 10^\circ}{\sqrt{2}\sin 55^\circ} = \frac{(\operatorname{tg} 45^\circ+\operatorname{tg} 10^\circ)\cdot\cos 10^\circ}{\sqrt{2}\sin 55^\circ}$$

Następnie skorzystajmy ze wzoru na sumę tangensów.

$$= \frac{\frac{\sin(45^\circ+10^\circ)}{\cos 45^\circ \cos 10^\circ}\cdot\cos 10^\circ}{\sqrt{2}\sin 55^\circ} =$$

Po redukcji równych wyrażeń otrzymujemy wynik.

$$= \frac{\frac{\sin 55^\circ}{\cos 45^\circ}}{\sqrt{2}\sin 55^\circ} = \frac{\sin 55^\circ}{\sin 55^\circ} = 1$$

Przykład 2

Uzasadnimy, że wyrażenie $\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{3}+\frac{\alpha}{4}\right)+\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{3}-\frac{\alpha}{4}\right)$ nie przyjmuje wartości 0 dla żadnego argumentu α.

Rozwiązanie

W wyrażeniu:

$$\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{3}+\frac{\alpha}{4}\right)+\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{3}-\frac{\alpha}{4}\right) =$$

zastosujemy wzór na sumę tangensów.

$$= \frac{\sin\frac{2\pi}{3}}{\cos\left(\frac{\pi}{3}+\frac{\alpha}{4}\right)\cdot\cos\left(\frac{\pi}{3}-\frac{\alpha}{4}\right)} = \frac{\sqrt{3}}{2\cos\left(\frac{\pi}{3}+\frac{\alpha}{4}\right)\cdot\cos\left(\frac{\pi}{3}-\frac{\alpha}{4}\right)}.$$

Z postaci wyrażenia wynika, że licznik jest zawsze różny od zera, a zatem cały ułamek jest różny od 0.

Przykład 3

Obliczymy wartość wyrażenia $\cos x\cos y$, jeżeli wiadomo, że $\operatorname{tg} x+\operatorname{tg} y=5$ i $x+y=150^\circ$.

Rozwiązanie

Zapiszmy wzór na sumę tangensów.

$$\operatorname{tg} x+\operatorname{tg} y=\frac{\sin(x+y)}{\cos x\cos y}.$$

Korzystając z warunku $x+y=150^\circ$ otrzymujemy wyrażenie:

$$\operatorname{tg} x+\operatorname{tg} y=\frac{\sin 150^\circ}{\cos x\cos y}=\frac{\frac{1}{2}}{\cos x\cos y}.$$

Z faktu, że $\operatorname{tg} x+\operatorname{tg} y=5$ otrzymujemy równanie:

$$\frac{\frac{1}{2}}{\cos x\cos y}=5$$

$$\cos x\cos y=\frac{1}{10}.$$

Przykład 4

Udowodnimy, że $\operatorname{tg} 20^\circ+\operatorname{tg} 40^\circ<\sqrt{2}$.

Rozwiązanie

Korzystając z faktu, że funkcja tangens jest rosnąca w przedziale $\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$, możemy próbować szacować w następujący sposób:

$$\operatorname{tg} 20^\circ+\operatorname{tg} 40^\circ<\operatorname{tg} 30^\circ+\operatorname{tg} 45^\circ<\frac{\sqrt{3}}{3}+1.$$

Niestety, $\sqrt{2}<\frac{\sqrt{3}}{3}+1$, a zatem ten sposób nie daje poprawnego dowodu zadania.

Musimy podejść inaczej do tego problemu.

Skorzystajmy ze wzoru na sumę tangensów:

$$\operatorname{tg} 20^\circ+\operatorname{tg} 40^\circ=\frac{\sin(20^\circ+40^\circ)}{\cos 20^\circ\cos 40^\circ}=\frac{\sin 60^\circ}{\cos 20^\circ\cos 40^\circ}=\frac{\frac{\sqrt{3}}{2}}{\cos 20^\circ\cos 40^\circ}.$$

Korzystając z faktu, że funkcja cosinus w przedziale $\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$ jest malejąca, zauważmy, że:

$$\cos 20^\circ>\cos 30^\circ=\frac{\sqrt{3}}{2}$$

oraz

$$\cos 40^\circ>\cos 45^\circ=\frac{\sqrt{2}}{2}.$$

Zatem możemy oszacować z góry wyrażenie $\frac{\frac{\sqrt{3}}{2}}{\cos 20^\circ\cos 40^\circ}$:

$$\frac{\frac{\sqrt{3}}{2}}{\cos 20^\circ\cos 40^\circ}<\frac{\frac{\sqrt{3}}{2}}{\frac{\sqrt{3}}{2}\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}}=\sqrt{2},$$

co kończy dowód.

Słownik

wzór na sumę tangensów, wzór na różnicę tangensów

Dla dowolnych $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ spełniających warunki: $\cos\alpha \neq 0$ i $\cos\beta \neq 0$, zachodzą następujące wzory:

1. $\operatorname{tg}\alpha + \operatorname{tg}\beta = \frac{\sin(\alpha+\beta)}{\cos\alpha\cos\beta}$,
2. $\operatorname{tg}\alpha - \operatorname{tg}\beta = \frac{\sin(\alpha-\beta)}{\cos\alpha\cos\beta}$.

Film samouczek

Polecenie 1

Zapoznaj się z filmem samouczkiem, a następnie wykonaj polecenia znajdujące się pod nim.

Film dostępny pod adresem https://zpe.gov.pl/a/D14rsrOR8

Film nawiązujący do treści materiału dotyczącego wzorów na sumę i różnicę tangensów. Opowiada Piotr Kryszkiewicz.

Polecenie 2

Uzasadnij, że jeżeli $\operatorname{tg} x - \operatorname{tg} 3x = 0$, to $\sin 2x = 0$.

Polecenie 3

oblicz $\operatorname{tg} 22,5^\circ + \operatorname{tg} 67,5^\circ$.

Sprawdź się

Pokaż ćwiczenia:

Ćwiczenie 1

Ćwiczenie 2

Ćwiczenie 3

Ćwiczenie 4

Ćwiczenie 5

Ćwiczenie 6

Ćwiczenie 7

Udowodnij, że $\operatorname{tg} 40^\circ + \operatorname{tg} 50^\circ < 2\sqrt{2}$.

Ćwiczenie 8

Oblicz wartość wyrażenia: $\operatorname{tg} 9^\circ - \operatorname{tg} 27^\circ - \operatorname{tg} 63^\circ + \operatorname{tg} 81^\circ$.

Dla nauczyciela

Autor: Jacek Dymel

Przedmiot: Matematyka

Temat: Wzór na sumę i różnicę tangensów

Grupa docelowa:

III etap edukacyjny, liceum ogólnokształcące, technikum, zakres rozszerzony

Podstawa programowa:

VII. Trygonometria.

Zakres podstawowy. Uczeń:

4) korzysta z wzorów $\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$, $\operatorname{tg}\alpha = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}$;

Zakres rozszerzony. Uczeń:

6) rozwiązuje równania i nierówności trygonometryczne o stopniu trudności nie większym niż w przykładach: $4\cos 2x\cos 5x = 2\cos 7x + 1$, $2\sin^2 x \leq 1$.

Kształtowane kompetencje kluczowe:

- kompetencje w zakresie rozumienia i tworzenia informacji;
- kompetencje matematyczne oraz kompetencje w zakresie nauk przyrodniczych, technologii i inżynierii;
- kompetencje cyfrowe;
- kompetencje osobiste, społeczne i w zakresie umiejętności uczenia się.

Cele operacyjne:

Uczeń:

- korzysta ze wzorów na sumę i róznicę tangensów,
- dowodzi prawdziwości wyrażeń zawierających sumę lub różnicę tangensów.

Strategie nauczania:

- konstruktywizm;
- konektywizm.

Metody i techniki nauczania:

- odwrócona klasa;
- dyskusja.

Formy pracy:

- praca indywidualna;
- praca w parach;
- praca w grupach;
- praca całego zespołu klasowego.

Środki dydaktyczne:

- komputery z głośnikami, słuchawkami i dostępem do internetu;
- zasoby multimedialne zawarte w e-materiale;
- tablica interaktywna/tablica, pisak/kreda.

Przebieg lekcji

Przed lekcją:

1. Nauczyciel prosi uczniów o zapoznanie się z medium w sekcji „Film samouczek”.

Faza wstępna:

1. Przedstawienie uczniom tematu: „Wzór na sumę i różnicę tangensów” oraz celów lekcji, a następnie określenie kryteriów sukcesu.
2. Nauczyciel prosi o przygotowanie w parach pytań związanych z tematem. Czego się uczniowie chcą dowiedzieć? Co ich interesuje w związku z tematem lekcji?

Faza realizacyjna:

1. Nauczyciel dzieli uczniów na 4-osobowe grupy. Uczniowie w grupach zapoznają się z informacjami w sekcji „Przeczytaj”. Analizują przedstawione przykłady i notują pytania. Następnie przedstawiają pytania na forum klasy. Odpowiadają na nie uczniowie z innych grup. Nauczyciel wyjaśnia ewentualne wątpliwości.
2. Nauczyciel przechodzi do sekcji „Sprawdź się”. Zapowiada uczniom, że w kolejnym kroku będą rozwiązywać ćwiczenia numer 1 i 2, i będą to robić wspólnie. Wybrana osoba czyta po kolei polecenia. Po każdym przeczytanym poleceniu ochotnik udziela odpowiedzi. Reszta uczniów ustosunkowuje się do niej, proponując swoje pomysły. Nauczyciel w razie potrzeby koryguje odpowiedzi, dopowiada istotne informacje, udziela uczniom informacji zwrotnej.
3. W następnym kroku uczniowie wykonują w grupach ćwiczenia numer 3, 4 i 5. Następnie wybrana grupa prezentuje swoje rozwiązania. Nauczyciel w razie potrzeby uzupełnia informacje.
4. Uczniowie indywidualnie wykonują kolejne ćwiczenia nr 6 i 7 z sekcji „Sprawdź się”.

Faza podsumowująca:

1. Omówienie ewentualnych problemów z rozwiązaniem ćwiczeń z sekcji „Sprawdź się”.
2. Nauczyciel przypomina temat zajęć: „Wzór na sumę i różnicę tangensów” i podsumowuje przebieg zajęć. Wskazuje mocne i słabe strony pracy uczniów.

Praca domowa:

1. Uczniowie wykonują ćwiczenia interaktywne, które nie zostały dokończone na zajęciach.

Materiały pomocnicze:

- Sinus, cosinus i tangens kąta ostrego

Wskazówki metodyczne:

- Medium w sekcji „Film samouczek” można wykorzystać na lekcji jako podsumowanie i utrwalenie wiedzy w temacie „Wzór na sumę i różnicę tangensów”.