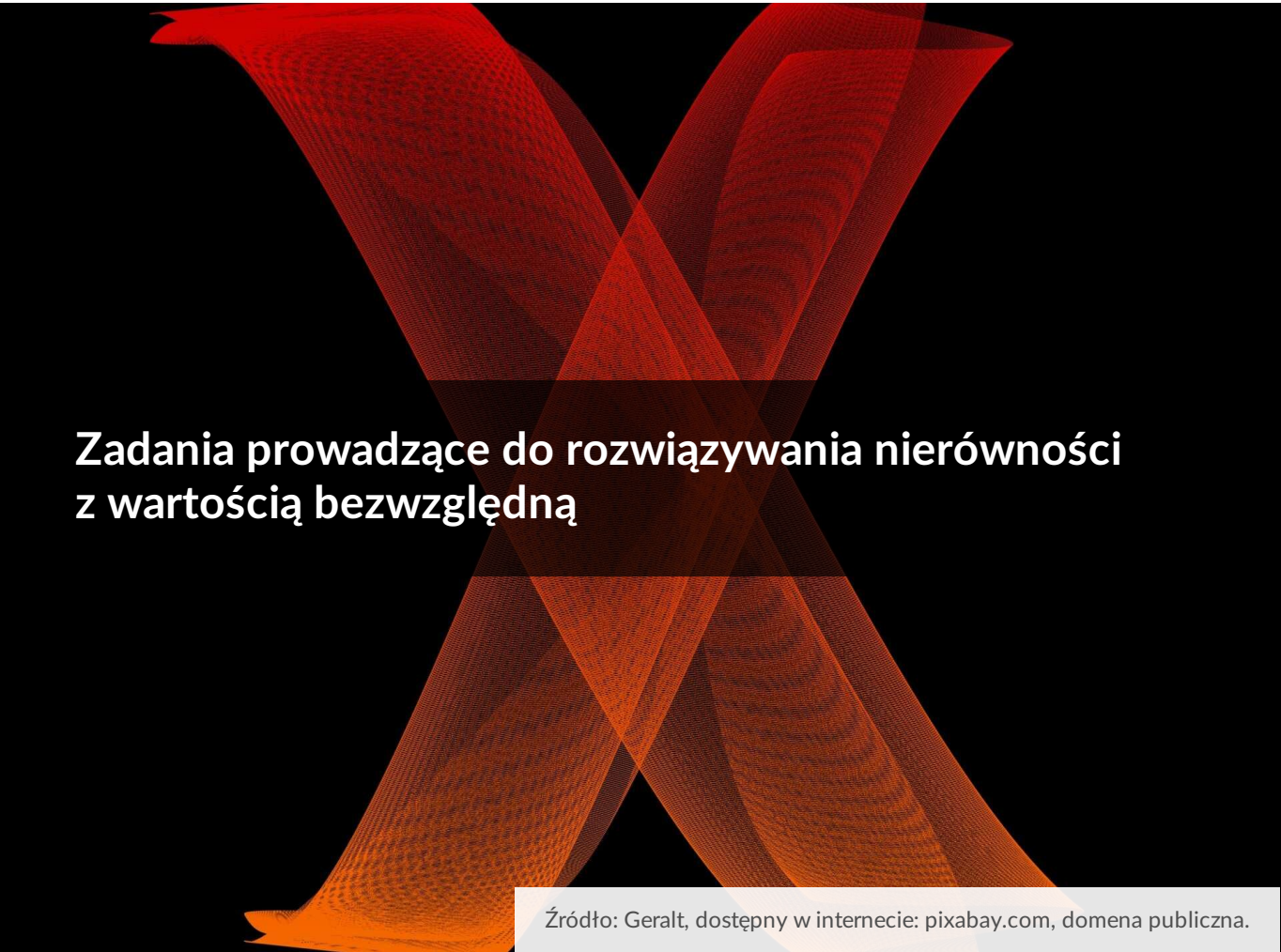




Zadania prowadzące do rozwiązywania nierówności z wartością bezwzględną

- [Wprowadzenie](#)
- [Przeczytaj](#)
- [Film samouczek](#)
- [Sprawdź się](#)
- [Dla nauczyciela](#)



Zadania prowadzące do rozwiązywania nierówności z wartością bezwzględną

Źródło: Geralt, dostępny w internecie: pixabay.com, domena publiczna.

W tym materiale zapoznasz się ze sposobami rozwiązywania trudniejszych nierówności, w tym także typu „moduł w module”, nierówności z parametrem i nierówności kwadratowych, które rozwiążemy z wykorzystaniem wartości bezwzględnej.

Twoje cele

- Rozwiążesz nierówności z wartościami bezwzględnymi, w których niewiadoma znajduje się pod znakiem wartości bezwzględnej lub występuje samodzielnie.
- Korzystając z definicji i własności modułu uprościsz wyrażenia zawierające wartość bezwzględną.
- Rozwiążesz nierówność kwadratową z wykorzystaniem własności wartości bezwzględnej.
- Ustalisz liczbę rozwiązań nierówności z wartością bezwzględną w zależności od parametru p .

Przeczytaj

Przykład 1

Rozwiążemy nierówność $|2x + 4| + x \leq 2$.

Najpierw skorzystamy z definicji wartości bezwzględnej.

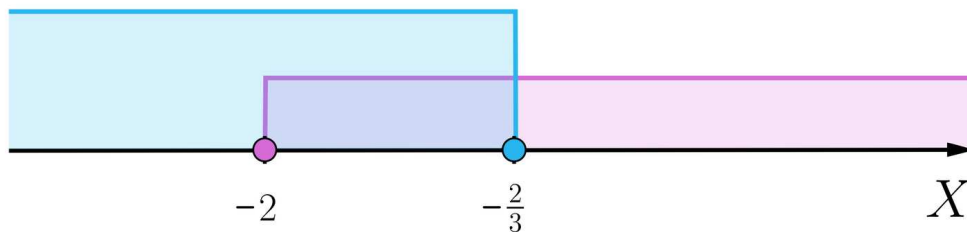
$$|2x + 4| = \begin{cases} 2x + 4 & \text{dla } x \geq -2 \\ -(2x + 4) & \text{dla } x < -2 \end{cases}$$

1. Jeśli $x \geq -2$, nierówność przyjmuje postać $2x + 4 + x \leq 2$.

$$3x \leq -2$$

$$x \leq -\frac{2}{3}$$

Zaznaczymy na osi liczbowej zbiór liczb spełniających warunek: $x \geq -2$ i $x \leq -\frac{2}{3}$.



Czyli $x \in \langle -2, -\frac{2}{3} \rangle$.

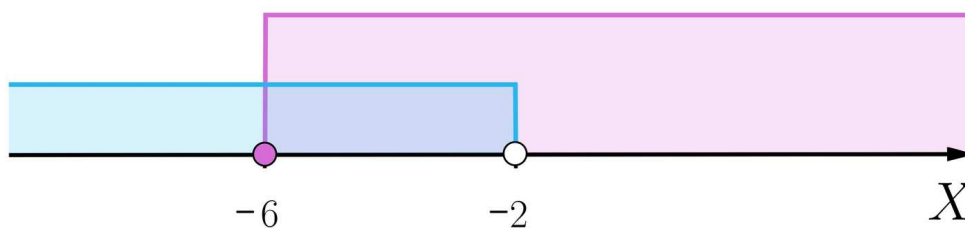
2. Jeśli $x < -2$, nierówność przyjmuje postać $-(2x + 4) + x \leq 2$.

$$-2x - 4 + x \leq 2$$

$$-x \leq 6$$

$$x \geq -6$$

Zaznaczymy na osi liczbowej zbiór liczb spełniających warunek: $x < -2$ i $x \geq -6$.



Czyli $x \in \langle -6, -\frac{2}{3} \rangle$.

Zatem zbiór rozwiązań tworzą wszystkie liczby x takie, że $x \in \langle -6, -\frac{2}{3} \rangle$.

Przykład 2

Rozwiążemy nierówność $||x - 2| - 5| > 2$.

Postąpimy analogicznie, jak w przypadku, gdy opuszczamy **wartość bezwzględną liczby rzeczywistej**. Otrzymujemy:

$$|x - 2| - 5 > 2 \text{ lub } |x - 2| - 5 < -2$$

$$|x - 2| > 7 \text{ lub } |x - 2| < 3$$

Zajmiemy się rozwiązaniem pierwszej nierówności $|x - 2| > 7$.

$$x - 2 > 7 \text{ lub } x - 2 < -7$$

$$x > 9 \text{ lub } x < -5$$

$$x \in (-\infty, -5) \cup (9, \infty)$$

Następnie rozwiązujemy nierówność $|x - 2| < 3$.

$$x - 2 < 3 \text{ i } x - 2 > -3$$

$$x < 5 \text{ i } x > -1$$

$$x \in (-1, 5)$$

Rozwiązaniem nierówności $||x - 2| - 5| > 2$ jest alternatywa rozwiązań obu nierówności.

Zatem $x \in (-\infty, -5) \cup (-1, 5) \cup (9, \infty)$.

Przykład 3

Rozwiążemy nierówność $||x| - 3| < |x| + 1$.

Korzystając z własności wartości bezwzględnej otrzymujemy:

$$|x| - 3 < |x| + 1 \text{ i } |x| - 3 > -|x| - 1$$

Rozwiązując pierwszą nierówność otrzymujemy tożsamość, ponieważ $-3 < 1$ dla dowolnego x .

Rozwiążemy teraz drugą nierówność.

$$|x| - 3 > -|x| - 1$$

$$2 \cdot |x| > 2$$

$$|x| > 1$$

$$x > 1 \text{ lub } x < -1$$

$$x \in (-\infty, -1) \cup (1, \infty)$$

Ponieważ rozwiązaniem jest koniunkcja rozwiązań obu nierówności zatem:

$$x \in (-\infty, -1) \cup (1, \infty).$$

Przykład 4

Zbadamy, dla jakich wartości parametru m nierówność $|x - \sqrt{3}| > 3 - 4m$ jest spełniona przez każdą liczbę rzeczywistą x .

Aby nierówność z wartością bezwzględną była spełniona przez każdą liczbę rzeczywistą musi zachodzić warunek:

$$3 - 4m < 0$$

$$-4m < -3$$

$$m > \frac{3}{4}$$

Zatem nierówność jest spełniona przez każdą liczbę rzeczywistą, gdy $m \in (\frac{3}{4}, \infty)$.

Przykład 5

Rozwiążemy nierówność kwadratową $4x^2 - 12x + 5 < 0$, wykorzystując własności wartości bezwzględnej.

$$4x^2 - 12x + 5 < 0$$

Do obu stron nierówności dodamy liczbę 4.

$$4x^2 - 12x + 9 < 4$$

Lewą stronę nierówności możemy zapisać jako kwadrat różnicy dwóch wyrażeń.

$$(2x - 3)^2 < 4$$

Stąd otrzymujemy:

$$|2x - 3| < 2$$

$$-2 < 2x - 3 < 2$$

$$1 < 2x < 5$$

$$\frac{1}{2} < x < 2\frac{1}{2}$$

Zatem $x \in (\frac{1}{2}, 2\frac{1}{2})$.

Słownik

wartość bezwzględna liczby rzeczywistej

$$|a| = \begin{cases} a & \text{dla } a \geq 0 \\ -a & \text{dla } a < 0 \end{cases}$$

Film samouczek

Polecenie 1

Zapoznaj się z filmem samouczkiem oraz ze sposobami rozwiązywania nierówności z wartością bezwzględną przedstawionymi w filmie.

Film dostępny pod adresem <https://zpe.gov.pl/a/DdxtcEzYv>

Film nawiązujący do treści materiału dotyczącego rozwiązywania nierówności z wartością bezwzględną.

Polecenie 2

Korzystając z metody przedstawionej w filmie samouczku, rozwiąż nierówność

$$4x^2 - 12x + 9 > 4.$$

Sprawdź się

Pokaż ćwiczenia:   

Ćwiczenie 1



Ile liczb całkowitych ujemnych znajduje się w zbiorze rozwiązań nierówności $|x + 4| - 6 - |4x + 3| \leq 4 - x$? Zaznacz poprawną odpowiedź.

☐ Nieskończenie wiele.

☐ 2

☐ 0

☐ 1

Ćwiczenie 2



Rozwiąż nierówność $|x| - 6 > -3x$ i wybierz najmniejszą liczbę całkowitą dodatnią x , która spełnia tę nierówność. Przeciągnij poprawną wartość.

$x =$

0

2

1

4

3

Ćwiczenie 3



Wykaż, że nierówność $\sqrt{196 - 56x + 4x^2} > |2x - 14| + 4$ jest sprzeczna. Ułóż kolejne etapy rozwiązania w odpowiedniej kolejności.

$$|x - 7| - |x - 7| > 2$$



$$\sqrt{4 \cdot (49 - 14x + x^2)} > |2 \cdot (x - 7)| + 4$$



$$|7 - x| > |x - 7| + 2$$



$$\sqrt{4} \cdot \sqrt{(7 - x)^2} > |2| \cdot |(x - 7)| + 4$$



$$\sqrt{196 - 56x + 4x^2} > |2x - 14| + 4$$



$$0 > 2$$



$$2 \cdot |7 - x| > 2 \cdot |x - 7| + 4$$



$$2\sqrt{(7 - x)^2} > 2 \cdot |x - 7| + 4$$



$$|x - 7| > |x - 7| + 2$$



Ćwiczenie 4



Niech A oznacza zbiór rozwiązań nierówności $||x| - 3| > |x| + 1$. Rozwiąż nierówność i wskaż zbiór A .

☐ A jest zbiorem liczb rzeczywistych.

☐ A jest zbiorem pustym.

☐ $A = (-\infty, 1) \cup (1, \infty)$

☐ $A = (-1, 1)$

Ćwiczenie 5



Zaznacz poprawną odpowiedź. Nierówność $||x + 3| - 1| > 5$ sprowadza się do rozwiązania alternatywy nierówności:

☐ $|x + 3| < 6$ lub $|x + 3| > -4$

☐ $|x - 3| > 6$ lub $|x + 3| < -4$

☐ $|x + 3| > 6$ lub $|x - 3| < -4$

☐ $|x + 3| > 6$ lub $|x + 3| < -4$

Ćwiczenie 6



Wpisz w wyznaczone miejsce odpowiednią liczbę.

Nierówności $x^2 + 6x - 7 > 0$ i $|x + 3| > a$ są równoważne dla $a =$.

Ćwiczenie 7



Dla jakiej wartości parametru p rozwiązaniem nierówności $||x| - 5| - |x| > p$ jest zbiór liczb rzeczywistych? Zaznacz poprawną odpowiedź.

$p =$

- 2
- 7
- 2
- 1
- 7

Ćwiczenie 8



Dla jakich wartości parametru p rozwiązaniem nierówności $|x + 3| \leq p^3 - 8$ jest tylko jedna liczba rzeczywista?

Dla nauczyciela

Autor: Jolanta Schilling

Przedmiot: Matematyka

Temat: Zadania prowadzące do rozwiązywania nierówności z wartością bezwzględną

Grupa docelowa:

III etap edukacyjny, liceum, technikum, zakres rozszerzony

Podstawa programowa:

III. Równania i nierówności. Zakres rozszerzony.

Uczeń:

4) rozwiązuje równania i nierówności z wartością bezwzględną, o stopniu trudności nie większym niż: $2 \cdot |x + 3| + 3 \cdot |x - 1| = 13$, $|x + 2| + 2 \cdot |x - 3| < 11$.

Kształtowane kompetencje kluczowe:

- kompetencje w zakresie rozumienia i tworzenia informacji
- kompetencje matematyczne oraz kompetencje w zakresie nauk przyrodniczych, technologii i inżynierii
- kompetencje cyfrowe
- kompetencje osobiste, społeczne i w zakresie umiejętności uczenia się

Cele operacyjne:

Uczeń:

- rozwiązuje nierówności z wartościami bezwzględnymi, w których niewiadoma znajduje się pod znakiem wartości bezwzględnej lub występuje samodzielnie
- korzystając z definicji i własności modułu upraszcza wyrażenia zawierające wartość bezwzględną
- rozwiązuje nierówność kwadratową z wykorzystaniem własności wartości bezwzględnej
- ustala liczbę rozwiązań nierówności z wartością bezwzględną w zależności od danego parametru
- tworzy algorytmy rozwiązywania nierówności różnych typów
- dobiera model matematyczny do określonej sytuacji

Strategie nauczania:

- konstruktywizm

Metody i techniki nauczania:

- odwrócona klasa
- dyskusja

Formy pracy:

- praca indywidualna
- praca w grupach
- praca w parach

Środki dydaktyczne:

- komputery z głośnikami i dostępem do Internetu, słuchawki
- zasoby multimedialne zawarte w e-materiale
- tablica interaktywna/tablica, pisak/kreda

Przebieg lekcji

Faza wstępna:

1. Uczniowie w domu przypominają sobie metodę algebraiczną rozwiązywania nierówności liniowych z dwiema wartościami bezwzględnymi.
2. Nauczyciel podaje temat i cele zajęć oraz wspólnie z uczniami ustala kryteria sukcesu.

Faza realizacyjna:

1. Uczniowie pracują w grupach metodą odwróconej klasy. Najpierw wymieniają się wiadomościami dotyczącymi rozwiązywania nierówności z wartością bezwzględną, które przypomnieli w domu.
2. Uczniowie pracują w parach nad przykładami przedstawionymi w części „Przeczytaj”.
3. Każda para próbuje samodzielnie rozwiązać przykłady.
4. Uczniowie wspólnie oglądają film samouczek i weryfikują swoje rozwiązania.
5. Uczniowie rozwiązują ćwiczenia interaktywne 1 – 6 i omawiają wyniki z nauczycielem.

Faza podsumowująca:

1. Jako podsumowanie przedstawiciele grup krótko omawiają trudności, jakie napotkali podczas rozwiązywania zadań.
2. Nauczyciel omawia przebieg zajęć, wskazuje mocne i słabe strony pracy uczniów, udzielając im tym samym informacji zwrotnej.

Praca domowa:

Uczniowie wykonują w domu zadania 7 – 8 z sekcji „Sprawdź się”.

Materiały pomocnicze:

- [Wartość bezwzględna - definicja](#)
- [Wartość bezwzględna liczby](#)

Wskazówki metodyczne:

Film samouczek można wykorzystać jako powtórzenie i utrwalenie wiedzy dotyczącej rozwiązywania zadań prowadzących do nierówności z wartością bezwzględną.