



Rozwiązywanie równań kwadratowych metodą rozkładania na czynniki

- [Wprowadzenie](#)
- [Przeczytaj](#)
- [Infografika](#)
- [Sprawdź się](#)
- [Dla nauczyciela](#)



Rozwiązywanie równań kwadratowych metodą rozkładania na czynniki

Źródło: dostępny w internecie: pxfuel.com, domena publiczna.

Rozwiązywanie równań kwadratowych metodą rozkładania na czynniki polega na zapisaniu odpowiedniego wyrażenia w postaci iloczynu czynników możliwie najniższego stopnia.

Rozkład sumy algebraicznej na czynniki liniowe może odbywać się przy wykorzystaniu różnych metod:

- wyłączania wspólnego czynnika przed nawias,
- wykorzystania wzorów skróconego mnożenia,
- grupowania wyrażen.

Wybór metody wynika z postaci sumy algebraicznej znajdującej się w równaniu.

Twoje cele

- Rozwiążesz równanie kwadratowe metodami rozkładania na czynniki.
- Obliczysz współczynniki trójmianu kwadratowego o danym rozwiązaniu, wykorzystując metodę rozkładu na czynniki możliwie najniższego stopnia.

Przeczytaj

Aby zapisać równanie kwadratowe (takie, jak w Przykładzie 1) w postaci iloczynowej metodą wyłączania wspólnego czynnika przed nawias, niewiadoma x musi się pojawić w każdym jednomianie.

Przykład 1

Rozwiążemy równanie $\sqrt{3}x^2 - 4\sqrt{3}x = 0$.

Wyłączymy $\sqrt{3}x$ przed nawias.

$$\sqrt{3}x(x - 4) = 0$$

Skorzystamy z twierdzenia.

Dla dowolnych $a, b \in \mathbb{R}$, $a \cdot b = 0$ wtedy i tylko wtedy, gdy $a = 0$ lub $b = 0$.

$$\sqrt{3}x = 0 \text{ lub } x - 4 = 0$$

$$x = 0 \text{ lub } x = 4$$

Rozwiązaniami równania są liczby $x = 0$, $x = 4$.

Kolejny przykład rozwiążemy, wykorzystując wzory skróconego mnożenia.

Przykład 2

Rozwiążemy równanie $27x^3 + 1 = 0$.

Zastosujemy wzór skróconego mnożenia na sumę sześcianów dwóch wyrażeń.

$$a^3 + b^3 = (a + b)(a^2 - ab + b^2)$$

$$27x^3 + 1 = 0$$

$$(3x)^3 + 1^3 = 0$$

$$(3x + 1)[(3x)^2 - 3x + 1] = 0$$

$$(3x + 1) = 0$$

$$3x = -1$$

$$x = -\frac{1}{3}$$

Rozwiązaniem równania jest liczba $x = -\frac{1}{3}$.

Zauważmy, że drugie z uzyskanych równań nie ma rozwiązania.

$$(9x^2 - 3x + 1) = 0$$

$$\Delta = 9 - 4 \cdot 9 \cdot 1 = 9 - 36 = -27$$

Brak rozwiązań.

Kolejny przykład rozwiążemy, stosując najpierw metodę grupowania wyrazów, następnie wyłączania wspólnego czynnika przed nawias.

Przykład 3

Rozwiążemy równanie $2x^2 - 10x + 8 = 0$.

Wyłączymy liczbę 2 przed nawias.

$$2(x^2 - 5x + 4) = 0$$

Zapiśmy równanie w postaci równoważnej tak, abyśmy mogli pogrupować wyrazy w pary.

$$2(x^2 - x - 4x + 4) = 0$$

$$2[x(x - 1) - 4(x - 1)] = 0$$

Wyrażenie $(x - 1)$ możemy wyłączyć przed nawias.

$$2(x - 1)(x - 4) = 0$$

Otrzymaliśmy postać iloczynową równania.

$$2(x - 1) = 0 \text{ lub } (x - 4) = 0$$

$$x = 1 \text{ lub } x = 4$$

Rozwiązaniami równania są liczby $x = 1$, $x = 4$.

Przykład 4

Rozwiążemy równanie $3x^2 - 4\sqrt{3}x + 4 = 0$.

Lewą stronę równania możemy zapisać w postaci kwadratu różnicy dwóch wyrażeń.

$$(\sqrt{3}x - 2)^2 = 0$$

$$\sqrt{3}x - 2 = 0$$

$$\sqrt{3}x = 2$$

$$x = \frac{2}{\sqrt{3}}$$

$$x = \frac{2\sqrt{3}}{3}$$

Rozwiązaniem równania jest liczba $x = \frac{2\sqrt{3}}{3}$.

Przykład 5

Rozwiążemy równanie $2x^3 + 6x^2 - 2x - 6 = 0$.

Łączymy jednomiany w pary i wyłączamy przed nawias największy wspólny czynnik.

$$2x^2(x + 3) - 2(x + 3) = 0$$

Sumę algebraiczną $(x + 3)$ wyłączymy przed nawias.

$$(x + 3)(2x^2 - 2) = 0$$

Otrzymaliśmy postać iloczynową równania. Zatem zapiszemy alternatywę równań.

$$(x + 3) = 0 \text{ lub } (2x^2 - 2) = 0$$

$$x = -3 \text{ lub } 2x^2 = 2$$

$$x = -3 \text{ lub } x = -1 \text{ lub } x = 1$$

Rozwiązaniami równania są liczby $x = -3$, $x = -1$, $x = 1$.

Przykład 6

Rozwiąż równanie $2x + \sqrt{x - 2} - 4 = 0$.

Najpierw należy zapisać założenia dotyczące wyrażenia podpierwiastkowego: $x - 2 \geq 0$, czyli $x \geq 2$.

Abyśmy mogli zastosować podstawienie, równanie możemy zapisać w postaci:

$$2(x - 2) + 4 + \sqrt{x - 2} - 4 = 0$$

$$2(x - 2) + \sqrt{x - 2} = 0.$$

Podstawimy $\sqrt{x - 2} = z$, przy założeniu, że $z \geq 0$.

$$2z^2 + z = 0$$

Dokonując [rozkładu równania kwadratowego na czynniki](#), otrzymujemy:

$$z(z + 1) = 0$$

$$z = 0 \text{ lub } (z + 1) = 0$$

$$z = 0 \text{ lub } z = -1$$

Pierwiastek $z = -1$ nie spełnia warunków zadania, gdyż założyliśmy $z \geq 0$.

Czyli wracając do podstawienia, otrzymujemy $\sqrt{x - 2} = 0$.

$$x - 2 = 0$$

$$x = 2$$

Liczba $2 \in \langle 2, \infty \rangle$ jest zatem rozwiązaniem równania $2x + \sqrt{x - 2} - 4 = 0$.

Przykład 7

Rozwiążemy równanie $|x^2 - 16| = 4 - x$.

Najpierw skorzystamy z definicji wartości bezwzględnej.

$$|x^2 - 16| = \begin{cases} x^2 - 16 & \text{dla } x \in (-\infty, -4) \cup \langle 4, \infty \rangle \\ -(x^2 - 16) & \text{dla } x \in (-4, 4) \end{cases}$$

$$1. x \in (-\infty, -4) \cup \langle 4, \infty)$$

$$x^2 - 16 = 4 - x$$

$$x^2 - 16 - (4 - x) = 0$$

$$(x - 4)(x + 4) + (x - 4) = 0$$

$$(x - 4)[(x + 4) + 1] = 0$$

$$(x - 4)(x + 5) = 0$$

$$(x - 4) = 0 \text{ lub } (x + 5) = 0$$

$$x = 4 \text{ lub } x = -5$$

$$2. x \in (-4, 4)$$

$$-(x^2 - 16) = 4 - x$$

$$-(x^2 - 16) - (4 - x) = 0$$

$$(x^2 - 16) + (4 - x) = 0$$

$$(x - 4)(x + 4) - (x - 4) = 0$$

$$(x - 4)[(x + 4) - 1] = 0$$

$$(x - 4)(x + 3) = 0$$

$$(x - 4) = 0 \text{ lub } (x + 3) = 0$$

$$x = 4 \notin (-4, 4) \text{ lub } x = -3$$

Rozwiązaniami równania są liczby $x = -5$, $x = -3$, $x = 4$.

Słownik

rozkład na czynniki

zapisanie wielomianu w postaci iloczynu czynników możliwie najniższego stopnia

Infografika

Polecenie 1

Zapoznaj się z infografiką przedstawiającą sposób rozwiązywania równań kwadratowych przez rozkład na czynniki.

Polecenie 2

Rozwiąż równanie $x^2 - 6x + 8 = 0$ metodą rozkładu na czynniki.

Sprawdź się

Pokaż ćwiczenia:   

Ćwiczenie 1



Połącz równoważne równania kwadratowe.

$$-7x^2 + 2x = 0$$

$$2\sqrt{5}x(-x + 2) = 0$$

$$\frac{1}{2}x^2 + 12x = 0$$

$$x(x - 9) = 0$$

$$x^2 - \frac{2}{3}x = -x^2 - \frac{1}{3}x$$

$$x(2x - \frac{1}{3}) = 0$$

$$x^2 - 7x - 3 = 2x - 3$$

$$-\frac{1}{2}x(x + 24) = 0$$

$$-2\sqrt{5}x^2 + 4\sqrt{5}x = 0$$

$$-7x(x - \frac{2}{7}) = 0$$

$$2x(x - 2) = 2x$$

$$2x(x - 3) = 0$$

Ćwiczenie 2



Zaznacz wszystkie równania kwadratowe równoważne równaniu

$$(x + 1)(x - 4) = -3x(x - 4).$$

☐ $(x - 4)(x + 1 - 3x) = 0$

☐ $(x - 4)(4x + 1) = 0$

☐ $(x + 1)(x - 4) - 3x(4 - x) = 0$

☐ $(x - 4)(-2x + 1) = 0$

☐ $(x - 4)(x + 1 + 3x) = 0$

☐ $(x + 1)(x - 4) + 3x(4 - x) = 0$

☐ $(x + 1)(x - 4) = 3x(4 - x)$

☐ $(x + 1)(x - 4) + 3x(x - 4) = 0$

Ćwiczenie 3



Stosując metodę rozkładu na czynniki rozwiąż równanie $(2x + 3)x = 3(4x + 6)$ i wybierz rozwiązania równania.

☐ $x = -\frac{3}{2}, x = -6$

☐ $x = -\frac{3}{2}, x = 6$

☐ $x = \frac{3}{2}, x = -6$

☐ $x = \frac{3}{2}, x = 6$

Ćwiczenie 4



Rozwiąż równanie metodą rozkładu na czynniki i połącz z liczbami, które są rozwiązaniem tego równania.

$$x^2 - 3x - 4 = 0$$

$$x = -4, x = -1$$

$$2(x^2 - 1) = 0$$

$$x = -1, x = 4$$

$$2x^2 + x - 1 = 0$$

$$x = -1, x = \sqrt{2}$$

$$\frac{1}{2}(x^2 + 5x) + 2 = 0$$

$$x = -1, x = \frac{1}{2}$$

$$x^2 + x - \sqrt{2}x - \sqrt{2} = 0$$

$$x = -1, x = 1$$

Ćwiczenie 5



Stosując metodę rozkładu na czynniki równania $-x^2 - 3x + 28 = 0$ wybierz równanie równoważne.

☐ $(x + 4)(x + 7) = 0$

☐ $-(x + 4)(x - 7) = 0$

☐ $(x + 4)(x - 7) = 0$

☐ $-(x - 4)(x + 7) = 0$

Ćwiczenie 6



Podaj taką wartość parametru z , dla której rozwiązaniem równania $x^2 - 2(z - 4)x + 25 = 0$ jest liczba $x = -5$.

$z =$

Ćwiczenie 7



Dane są zbiory A i B . Wyznacz $A \cup B, A \cap B, B \setminus A$.

$$A = \{x \in R : |x^2 - 81| = x - 9\} \text{ oraz } B = \{x \in R : x(x^2 - 6x + 9)(x - 9) = 0\}.$$

$$A \cup B$$

$$\{0, 3\}$$

$$A \cap B$$

$$\{0, 3, 9\}$$

$$B \setminus A$$

$$\{9\}$$

Ćwiczenie 8



Korzystając ze wzorów skróconego mnożenia wykaż, że dla dowolnej liczby z prawdziwa jest nierówność $3z^2 + 4z + 1 \geq -2(z + 1)$.

Dla nauczyciela

Autor: Jolanta Schilling

Przedmiot: Matematyka

Temat: Rozwiązywanie równań kwadratowych metodą rozkładania na czynniki

Grupa docelowa:

III etap edukacyjny, liceum ogólnokształcące, technikum, zakres rozszerzony

Podstawa programowa:

Cele nauczania – wymagania ogólne:

II. Wyrażenia algebraiczne.

Zakres podstawowy. Uczeń:

2. dodaje, odejmuje i mnoży wielomiany jednej i wielu zmiennych;

III. Równania i nierówności.

Zakres podstawowy. Uczeń:

4) rozwiązuje równania i nierówności kwadratowe.

Kształtowane kompetencje kluczowe:

- kompetencje w zakresie rozumienia i tworzenia informacji;
- kompetencje matematyczne oraz kompetencje w zakresie nauk przyrodniczych, technologii i inżynierii;
- kompetencje cyfrowe;
- kompetencje osobiste, społeczne i w zakresie umiejętności uczenia się.

Cele operacyjne:

Uczeń:

- rozwiązuje równanie kwadratowe metodą rozkładu na czynniki;
- oblicza współczynniki trójmianu kwadratowego o danym rozwiązaniu,
- analizuje podane warunki i buduje na ich podstawie rozwiązanie równania kwadratowego

Strategie nauczania:

- konstruktywizm.

Metody i techniki nauczania:

- stoliki zadaniowe,
- burza mózgów,
- dyskusja.

Formy pracy:

- praca indywidualna,
- praca w grupach,
- praca całego zespołu klasowego.

Środki dydaktyczne:

- komputery z głośnikami i dostępem do internetu,
- zasoby multimedialne zawarte w e-materiale,
- tablica interaktywna/tablica, pisak/kreda.

Przebieg lekcji

Faza wstępna:

1. Uczniowie metodą burzy mózgów przypominają podstawowe postaci równań kwadratowych.
2. Nauczyciel podaje temat i cele zajęć oraz wspólnie z uczniami ustala kryteria sukcesu.

Faza realizacyjna:

1. Nauczyciel prosi uczniów o samodzielne rozwiązanie trzech przykładów z sekcji Przeczytaj.
2. Uczniowie podzieleni na grupy 4 osobowe omawiają rezultaty swojej pracy i porównują rozwiązania.
3. Następnie wspólnie omawiają kolejne przykłady.
4. Uczniowie wraz z nauczycielem analizują infografikę.
5. Uczniowie w parach rozwiązują zadania metodą stolików zadaniowych. Na każdym stoliku zadaniowym znajdują się 2 zadania interaktywne. Warunkiem przejścia do następnego stolika jest poprawne rozwiązanie danych zadań. Para, która najszybciej rozwiąże wszystkie zadania, otrzymuje ocenę.

Faza podsumowująca:

1. Jako podsumowanie, nauczyciel zadaje uczniom pytania dotyczące rozwiązywania równań kwadratowych z wykorzystaniem wyłączania wspólnego czynnika przed nawias.
2. Nauczyciel omawia przebieg zajęć, wskazuje mocne i słabe strony pracy uczniów, udzielając im tym samym informacji zwrotnej.

Praca domowa:

- Zadaniem uczniów jest rozwiązanie zadania zawartego w poleceniu 2.

Materiały pomocnicze:

[Równanie kwadratowe](#)

Wskazówki metodyczne:

Infografika może być wykorzystana przez chętnych uczniów do samodzielnego przygotowania prezentacji pokazującej sposoby rozwiązywania równań kwadratowych z wykorzystaniem rozkładu na czynniki.