



Odległość prostych równoległych

- [Wprowadzenie](#)
- [Przeczytaj](#)
- [Aplet](#)
- [Sprawdź się](#)
- [Dla nauczyciela](#)



Odległość prostych równoległych

Źródło: geralt, dostępny w internecie: pixabay.com, domena publiczna.

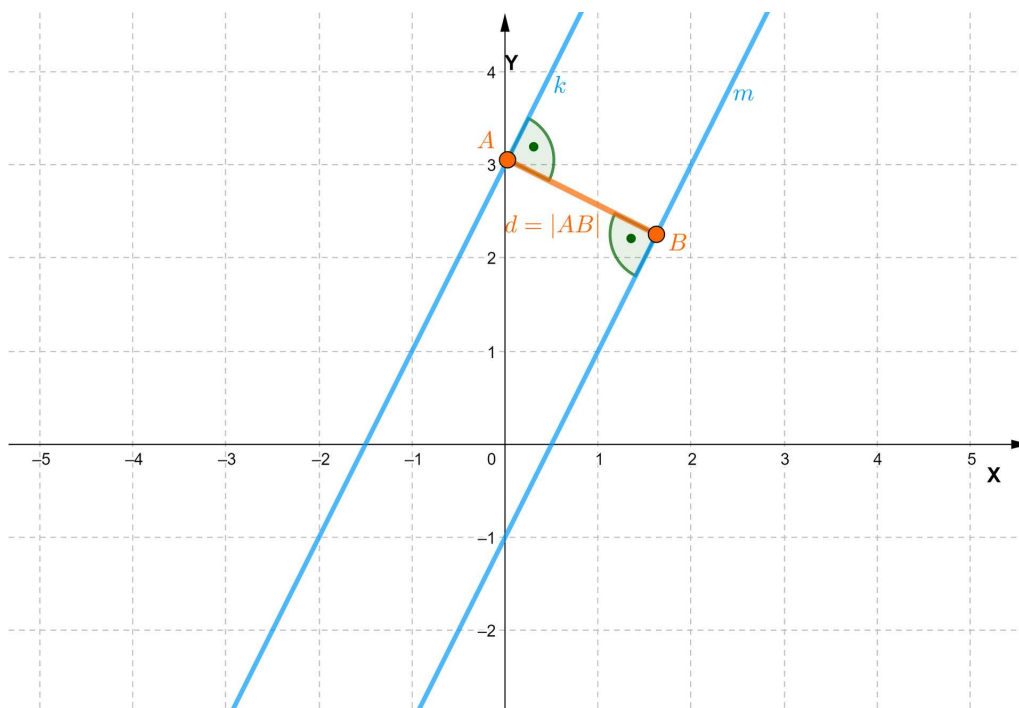
W tej lekcji poznasz wzór na odległość między prostymi równoległymi. Zapoznasz się z przykładami jego zastosowania w rozwiązywaniu problemów związanych z geometrią analityczną wielokątów. W oczywisty sposób mogą one dotyczyć na przykład wielokątów, które zawierają przynajmniej jedną parę boków równoległych. Ponadto poświęcimy nieco uwagi zagadnieniom związanym z parametrami.

Twoje cele

- Obliczysz odległość między prostymi równoległymi.
- Zastosujesz wzór na odległość między prostymi równoległymi do rozwiązywania zadań z geometrii analitycznej.
- Zastosujesz wzór na odległość między prostymi równoległymi do wyznaczania wartości parametru spełniających dane warunki.

Przeczytaj

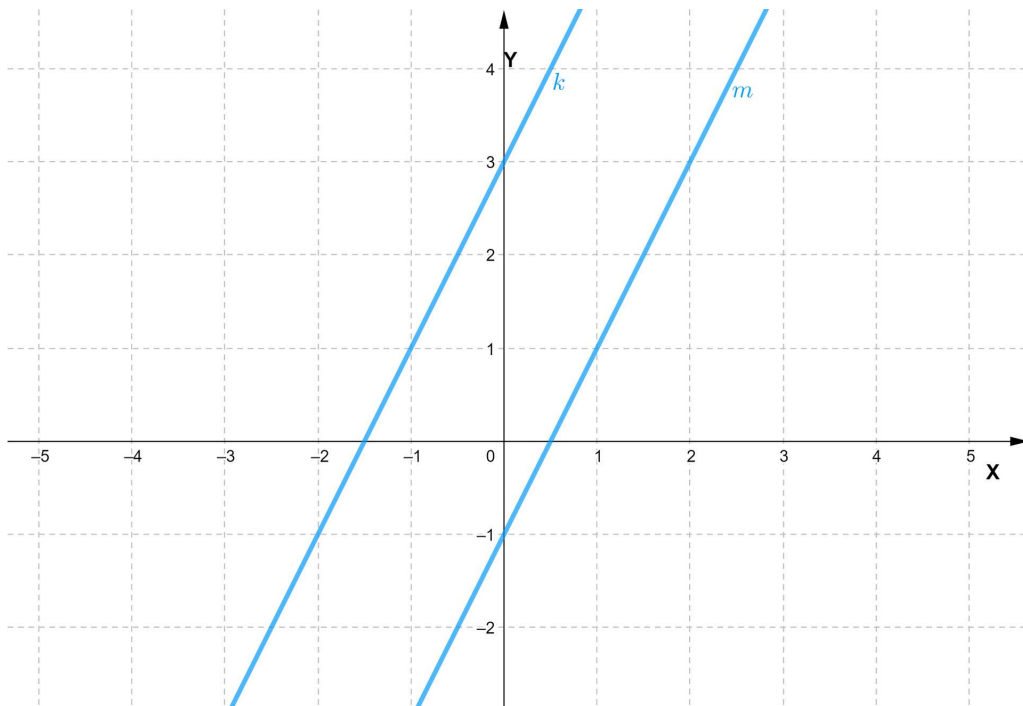
Odległość między prostymi równoległymi k i m to długość najkrótszego spośród odcinków, których jeden koniec należy do prostej k , zaś drugi – do prostej m . Łatwo zauważyć, że odcinek ten jest prostopadły do rozważanych prostych.



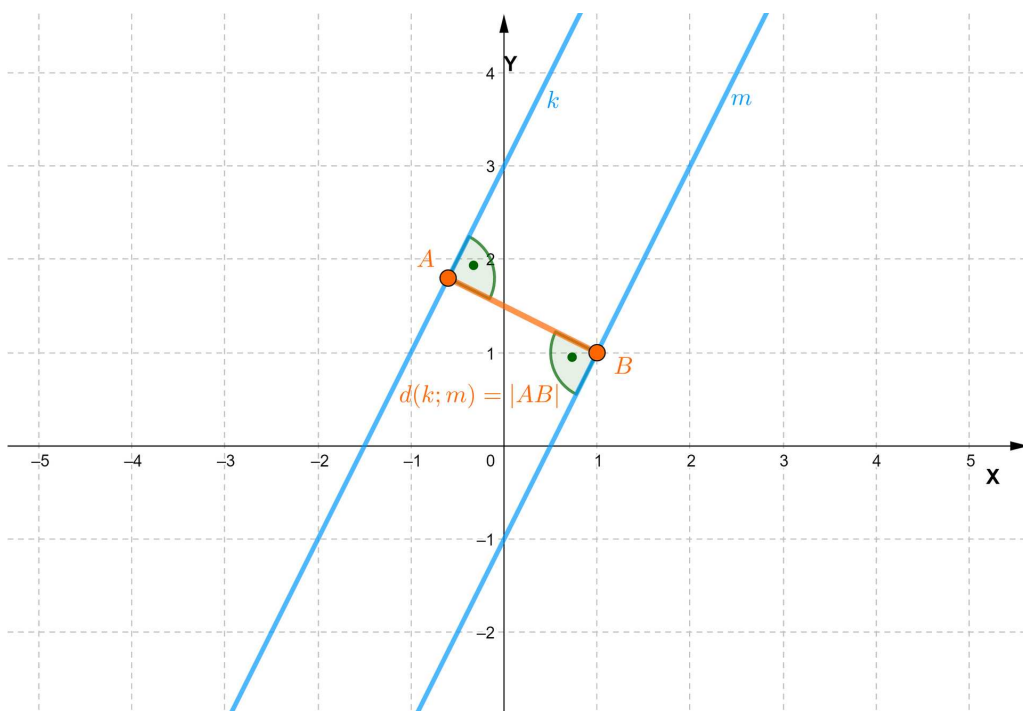
Zacniemy od rozwiązania prostego przykładu.

Przykład 1

Obliczymy odległość między prostymi o równaniach $m : y = 2x - 1$ oraz $k : y = 2x + 3$.



Często popełniany błąd w tego typu zadaniach polega na zinterpretowaniu odległości między prostymi jako różnicy między wyrazami wolnymi obu prostych, z czego wynikałoby, że odległość między danymi prostymi jest równa 4. Wykorzystany do tego rachunku odcinek nie jest najkrótszy z możliwych, równoważnie – nie jest prostopadły do rozważanych prostych.



W celu obliczenia rzeczywistej odległości między prostymi wybierzemy punkt na prostej k , niech będzie to punkt A o współrzędnych $(0, 3)$, i skorzystamy ze wzoru na odległość punktu od prostej (w tym przypadku od prostej $m : 2x - y - 1 = 0$):

$$d(k, m) = d(A, m) = \frac{|2 \cdot 0 - 3 - 1|}{\sqrt{2^2 + (-1)^2}} = \frac{4}{\sqrt{5}} = \frac{4\sqrt{5}}{5}$$

Zatem odległość między prostymi o równaniach $y = 2x - 1$ oraz $y = 2x + 3$ jest równa $\frac{4\sqrt{5}}{5}$.

Wykorzystując pomysł zawarty w powyższym przykładzie wyprowadzimy teraz wzór na odległość między prostymi równoległymi opisanymi równaniami ogólnymi.

Rozważmy proste $k: Ax + By + C = 0$ oraz $m: A_1x + B_1y + C_1 = 0$. Ponieważ proste te mają być równoległe, więc współczynniki przy zmiennych w jednym równaniu są proporcjonalne do współczynników przy odpowiednich zmiennych w drugim równaniu.

Po podzieleniu drugiego równania przez współczynnik proporcjonalności otrzymamy równanie o współczynnikach przy zmiennych równych A i B .

Możemy zatem przyjąć, że proste mają równania $k: Ax + By + C = 0$ oraz $m: Ax + By + D = 0$, które różnią się tylko wyrazami wolnymi.

Wyberzmy punkt $A = (x_0, y_0)$ należący do prostej k . Ponieważ A leży na prostej k , więc jego współrzędne spełniają równanie prostej k . Zachodzi więc równość

$Ax_0 + By_0 + C = 0$, która jest równoważna równości $Ax_0 + By_0 = -C$. Skorzystajmy teraz ze wzoru na odległość punktu od prostej:

$$d(A, m) = \frac{|Ax_0 + By_0 + D|}{\sqrt{A^2 + B^2}}$$

Ponieważ $Ax_0 + By_0 = -C$, więc powyższe wyrażenie przyjmuje postać

$$d(A, m) = \frac{|Ax_0 + By_0 + D|}{\sqrt{A^2 + B^2}} = \frac{|-C + D|}{\sqrt{A^2 + B^2}} = \frac{|C - D|}{\sqrt{A^2 + B^2}}$$

Ważne!

Zatem wzór na odległość prostych równoległych o równaniach $k: Ax + By + C = 0$ oraz $m: Ax + By + D = 0$ to

$$d(k, m) = \frac{|C - D|}{\sqrt{A^2 + B^2}}$$

Przykład 2

Obliczymy odległość między prostymi o równaniach $k: 3x + 5y - 2 = 0$ oraz $m: 6x + 10y + 7 = 0$. Zauważmy najpierw, że współczynniki przy odpowiednich zmiennych w obu równaniach są proporcjonalne.

Po podzieleniu drugiego równania obustronnie przez 2 otrzymujemy równanie $m: 3x + 5y + 3,5 = 0$. Teraz możemy już zastosować wzór na odległość między

prostymi równoległymi:

$$d(k, m) = \frac{|-2-3,5|}{\sqrt{3^2+5^2}} = \frac{5,5}{\sqrt{34}} = \frac{5,5\sqrt{34}}{34} = \frac{11\sqrt{34}}{68}$$

Przykład 3

Wyznamy wartości parametru m tak, aby odległość między prostymi o równaniach $k: x - 2y + 3 = 0$ oraz $l: -2x + 4y + m = 0$ była równa 5.

Zauważmy, że proste k i l są równoległe gdyż $1 \cdot 4 = -2 \cdot (-2)$. Po pomnożeniu obu stron pierwszego równania przez (-2) otrzymujemy równanie $k: -2x + 4y - 6 = 0$. Ze wzoru na [odległość między prostymi równoległymi](#) wynika równanie:

$$5 = d(k, l) = \frac{|-6-m|}{\sqrt{(-2)^2+4^2}}$$

które można przekształcić kolejno do:

$$5\sqrt{20} = |m + 6|$$

$$10\sqrt{5} = |m + 6|$$

Powyższe równanie jest równoważne alternatywie:

$$m + 6 = 10\sqrt{5}$$

lub

$$m + 6 = -10\sqrt{5}$$

Zatem szukane wartości parametru m to $10\sqrt{5} - 6$ oraz $-10\sqrt{5} - 6$.

Przykład 4

Obliczymy pole pięciokąta ograniczonego prostymi o równaniach

$$k: y = x + 5,$$

$$l: y = 7,$$

$$m: y = x - 8,$$

$$n: y = -\frac{1}{2}x + 10,$$

$$p: y = -\frac{1}{2}x - 2.$$

Rozwiązując kolejno układy równań

$$\begin{cases} y = x + 5 \\ y = 7 \end{cases}$$

$$\begin{cases} y = 7 \\ y = -\frac{1}{2}x + 10 \end{cases}$$

$$\begin{cases} y = -\frac{1}{2}x + 10 \\ y = x - 8 \end{cases}$$

$$\begin{cases} y = x - 8 \\ y = -\frac{1}{2}x - 2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} y = -\frac{1}{2}x - 2 \\ y = x + 5 \end{cases}$$

Otrzymujemy odpowiednio współrzędne wierzchołków pięciokąta:

$$A = (2, 7), B = (6, 7), C = (12, 4), D = (4, -4), E = \left(-\frac{14}{3}, \frac{1}{3}\right)$$

Zauważmy, że czworokąt $ACDE$ jest trapezem o podstawach CD i AE . Jego wysokość h możemy obliczyć korzystając ze wzoru na odległość między prostymi równoległymi:

$$h = d(pr. CD, pr. AE) = \frac{|-8-5|}{\sqrt{1^2+1^2}} = \frac{13}{\sqrt{2}} = \frac{13\sqrt{2}}{2}$$

Podstawy zaś mają długości:

$$|CD| = \sqrt{(12-4)^2 + (4-(-4))^2} = \sqrt{64+64} = 8\sqrt{2}$$

$$|AE| = \sqrt{\left(-\frac{14}{3}-2\right)^2 + \left(\frac{1}{3}-7\right)^2} = \sqrt{\frac{400}{9} + \frac{400}{9}} = \frac{20\sqrt{2}}{3}$$

Zatem pole trapezu $ACDE$ jest równe

$$P_{ACDE} = \frac{8\sqrt{2} + \frac{20\sqrt{2}}{3}}{2} \cdot \frac{13\sqrt{2}}{2} = \frac{286}{3}$$

Pozostaje obliczyć pole trójkąta ACB . W tym celu wystarczy obliczyć długość odcinka BC i odległość punktu A od prostej BC :

$$|BC| = \sqrt{(6-12)^2 + (7-4)^2} = \sqrt{36+9} = 3\sqrt{5}$$

$$d(A, pr. BC) = \frac{|2+2\cdot 7-20|}{\sqrt{1+4}} = \frac{4}{\sqrt{5}} = \frac{4\sqrt{5}}{5}$$

$$P_{ACB} = \frac{1}{2} \cdot 3\sqrt{5} \cdot \frac{4\sqrt{5}}{5} = 6$$

Zatem pole rozważanego pięciokąta jest równe

$$P_{ABCDE} = \frac{286}{3} + 6 = \frac{304}{3}$$

Słownik

proste równoległe

w geometrii euklidesowej są to proste, które nie mają punktów wspólnych

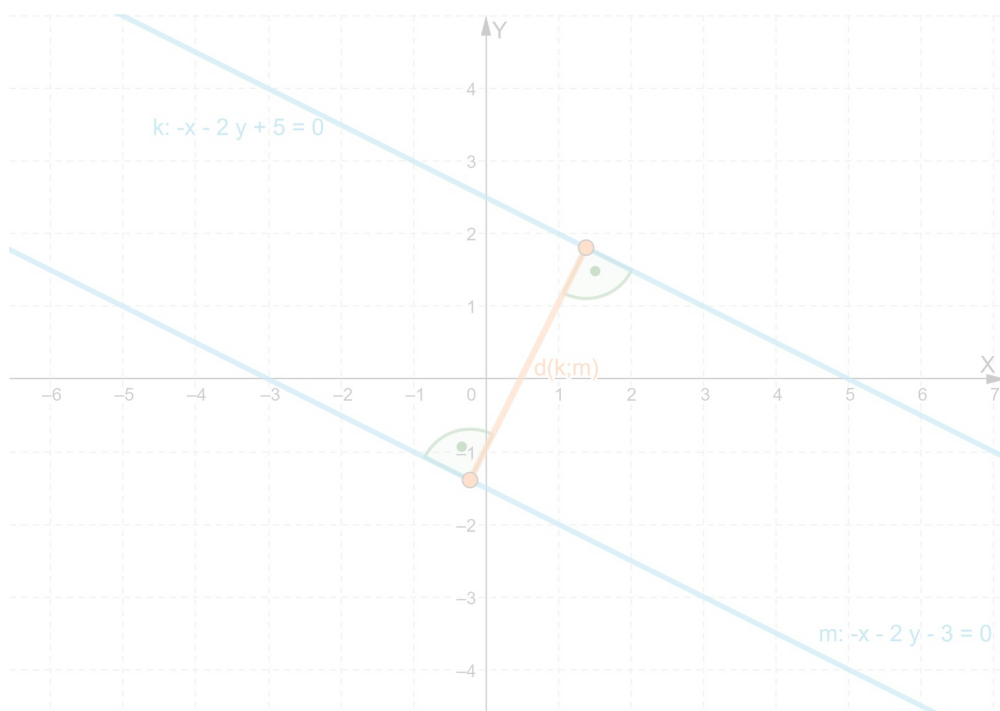
odległość między prostymi równoległymi

długość najkrótszego spośród odcinków AB , którego koniec A znajduje się na jednej z prostych, zaś koniec B na drugiej; odcinek AB jest prostopadły do każdej z rozważanych prostych równoległych

Aplet

Polecenie 1

W poniższym aplecie możesz zmieniać suwakami współczynniki prostych o równaniach $Ax + By + C = 0$ oraz $Ax + By + D = 0$. Przeanalizuj, jak położony względem tych prostych jest odcinek, którego długość jest równa odległości tych prostych. Zwróć uwagę, jak zmienia się odległość między prostymi wraz ze zmianą współczynników w ich równaniach. Na podstawie apletu wykonaj polecenie.



Zasób interaktywny dostępny pod adresem <https://zpe.gov.pl/a/D9GWww9ml>

Polecenie 2

Dla podanych par prostych równoległych wyznacz ich odległość. Przeciągnij prawidłowe wyniki w odpowiednie miejsca.

$x - y + 3 = 0, 2x + y - 1 = 0, 3x - 2y - 4 = 0, 3x + 4y - 5 = 0, x - y - 2 = 0,$
 $2x + y + 3 = 0, 3x - 2y + 2 = 0, 3x + 4y + 4 = 0$

Równanie prostej k	Równanie prostej m	Odległość między prostymi k i m	
$x - y + 3 = 0$	$x - y - 2 = 0$		
$2x + y - 1 = 0$	$2x + y + 3 = 0$		
$3x - 2y - 4 = 0$	$3x - 2y + 2 = 0$		
$3x + 4y - 5 = 0$	$3x + 4y + 4 = 0$		

Sprawdź się

Pokaż ćwiczenia:   

Ćwiczenie 1



Wyznacz odległość między prostymi. Wpisz prawidłową liczbę.
Wpisujemy jako **cyfra** nie słownie.

Równania prostych k i m	Odległość między prostymi k i m
$k : x - y + 5\sqrt{2} = 0$ $m : x - y - \sqrt{2} = 0$	
$k : x + 2y + \sqrt{5} = 0$ $m : x + 2y - \sqrt{5} = 0$	
$k : 3x - y + 4\sqrt{10} = 0$ $m : 3x - y - 3\sqrt{10} = 0$	
$k : 2x - 3y + 2\sqrt{13} = 0$ $m : 2x - 3y - 2\sqrt{13} = 0$	
$k : 3x - 4y + 12 = 0$ $m : 3x - 4y - 3 = 0$	

Ćwiczenie 2



Wyznacz odległość między prostymi k i m . Przeciągnij i upuść.

Równania prostych k i m	Odległość między prostymi k i m
$k : x - y + 5 = 0$ $m : x - y - 1 = 0$	
$k : x + 2y = 0$ $m : x + 2y - 4 = 0$	
$k : 3x - y + 7 = 0$ $m : 3x - y - 3 = 0$	
$k : 2x - 3y + 2 = 0$ $m : 2x - 3y - 2 = 0$	
$k : 3x - 4y + 4 = 0$ $m : 3x - 4y - 3 = 0$	

$\frac{7}{5}$

$\frac{4}{\sqrt{13}}$

$\frac{4}{\sqrt{5}}$

$\frac{6}{\sqrt{2}}$

$\frac{10}{\sqrt{10}}$

Ćwiczenie 3



Liczba znajdująca się w pierwszej kolumnie oznacza odległość między prostymi k i m .
Przeciwnij i upuść równania prostych odległych od siebie nawzajem o daną liczbę.

Odległość między prostymi k i m	Równania prostych k i m
$\frac{6}{\sqrt{13}}$	
$\frac{4}{\sqrt{13}}$	
$\frac{2}{\sqrt{13}}$	
$\frac{10}{\sqrt{13}}$	
$\frac{8}{\sqrt{13}}$	

$$\begin{aligned} k &: 3x + 2y - 12 = 0 \\ m &: 3x + 2y - 4 = 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} k &: 3x + 2y - 4 = 0 \\ m &: 3x + 2y - 2 = 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} k &: 3x - 2y + 12 = 0 \\ m &: 3x - 2y + 6 = 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} k &: 3x - 2y - 2 = 0 \\ m &: 3x - 2y - 6 = 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} k &: 3x + 2y - 2 = 0 \\ m &: 3x + 2y + 8 = 0 \end{aligned}$$

Ćwiczenie 4



Rozwiąż test. Wskaż wszystkie poprawne odpowiedzi.

Odległość między prostymi $k : 2x - 5y + 3 = 0$ i $m : 2x - 5y + 10 = 0$ jest równa

☐ $\frac{7\sqrt{29}}{29}$

☐ $7\sqrt{29}$

☐ $\frac{7}{\sqrt{29}}$

Odległość między prostymi $k : 2x - 3y - 4 = 0$ i $m : 2x - 3y + 9 = 0$ jest równa

☐ $\frac{\sqrt{13}}{13}$

☐ $\sqrt{13}$

☐ $\frac{13}{\sqrt{13}}$

Odległość między prostymi $k : 2x + y + 3 = 0$ i $m : 4x + 2y - 4 = 0$ jest równa

☐ $\frac{\sqrt{5}}{5}$

☐ $\sqrt{5}$

☐ $\frac{5}{\sqrt{5}}$

Odległość między prostymi $k : 3x + 4y + 3 = 0$ i $m : 9x + 12y + 18 = 0$ jest równa

☐ $\frac{5}{3}$

☐ $1\frac{2}{3}$

☐ $\frac{3}{5}$

Ćwiczenie 5



Wyznacz równania prostych, które leżą w odległości 5 od prostej k o równaniu $3x - 4y + 7 = 0$.

Ćwiczenie 6



Rozwiąż test. Wskaż wszystkie poprawne odpowiedzi.

Odległość między prostymi $k : 4x + 3y - 10 = 0$ oraz $l : 4x + 3y + m = 0$ jest równa 10 dla m równego

☐ 40

☐ -60

☐ 20

Odległość między prostymi $k : 4x - 3y - 10 = 0$ oraz $l : 8x - 6y + m = 0$ jest równa 4 dla m równego

☐ -28

☐ 20

☐ -12

Odległość między prostymi $k : 5x + 12y - 10 = 0$ oraz $l : 5x + 12y + m = 0$ jest równa 1 dla m równego

☐ -23

☐ 3

☐ -11

Odległość między prostymi $k : 8x + 15y - 10 = 0$ oraz $l : 24x + 45y + m = 0$ jest równa 2 dla m równego

☐ 72

☐ -132

☐ 132

Ćwiczenie 7



Wyznacz pole sześciokąta ograniczonego przez proste $k : 2x - 3y + 19 = 0$,
 $l : 2x - 3y - 8 = 0$, $m : x + 3y - 22 = 0$, $n : x + 3y + 5 = 0$,
 $p : 5x - 3y + 25 = 0$, $r : 5x - 3y - 20 = 0$.

Ćwiczenie 8



Dane są punkty $A = (1, 5)$ i $B = (3, 1)$. Wyznacz równanie prostej k przechodzącej przez punkt A oraz równanie prostej m przechodzącej przez punkt B , aby proste k i m były równoległe i oddalone od siebie o 3.

Dla nauczyciela

Autor: Sebastian Guz

Przedmiot: Matematyka

Temat: Odległość prostych równoległych

Grupa docelowa:

Szkoła ponadpodstawowa, liceum ogólnokształcące, technikum, zakres rozszerzony

Podstawa programowa:

IX. Geometria analityczna na płaszczyźnie kartezjańskiej.

Zakres podstawowy. Uczeń:

- 1) rozpoznaje wzajemne położenie prostych na płaszczyźnie na podstawie ich równań, w tym znajduje wspólny punkt dwóch prostych, jeśli taki istnieje;
- 2) posługuje się równaniami prostych na płaszczyźnie, w postaci kierunkowej i ogólnej, w tym wyznacza równanie prostej o zadanych własnościach (takich jak na przykład przechodzenie przez dwa dane punkty, znany współczynnik kierunkowy, równoległość lub prostopadłość do innej prostej, styczność do okręgu);
- 4) posługuje się równaniem okręgu $(x - a)^2 + (y - b)^2 = r^2$;

Kształtowane kompetencje kluczowe:

- kompetencje w zakresie rozumienia i tworzenia informacji;
- kompetencje matematyczne oraz kompetencje w zakresie nauk przyrodniczych, technologii i inżynierii
- kompetencje cyfrowe
- kompetencje osobiste, społeczne i w zakresie umiejętności uczenia się

Cele operacyjne:

Uczeń:

- oblicza odległość między prostymi równoległymi,
- stosuje wzór na odległość między prostymi równoległymi do rozwiązywania zadań z geometrii analitycznej,
- stosuje wzór na odległość między prostymi równoległymi do wyznaczania wartości parametru spełniających dane warunki.

Strategie nauczania:

- konstruktywizm;
- konektywizm.

Metody i techniki nauczania:

- odwrócona klasa;
- ćwiczeń przedmiotowych;
- z użyciem komputera;
- rozmowa nauczająca w oparciu o treści zawarte w sekcji „Aplet” i ćwiczenia interaktywne;
- dyskusja.

Formy pracy:

- praca indywidualna;
- praca w parach;
- praca w grupach;
- praca całego zespołu klasowego.

Środki dydaktyczne:

- komputery z głośnikami, słuchawkami i dostępem do internetu;
- zasoby multimedialne zawarte w e-materiale;
- tablica interaktywna/tablica, pisak/kreda.

Przebieg lekcji

Faza wstępna:

1. Nauczyciel wprowadza uczniów w temat lekcji, nawiązując do zagadnień opisanych w sekcji „Wprowadzenie”. Omawia cele lekcji.
2. Nauczyciel wprowadza uczniów w temat lekcji. Następnie prosi, by uczniowie przygotowali – każdy indywidualnie – mapę myśli związaną z tematem. Wybrana osoba lub ochotnik zapisuje propozycje na tablicy

Faza realizacyjna:

1. Uczniowie analizują przykłady w sekcji „Przeczytaj”, nauczyciel tłumaczy wątpliwości.
2. Uczniowie wykonują pierwsze dwa ćwiczenia interaktywne z sekcji „Sprawdź się”.
Wyniki pracy omawiane są na forum i komentowane przez nauczyciela.
3. Nauczyciel dzieli klasę na 4-osobowe grupy. Uczniowie rozwiązują ćwiczenia 3-5 na czas (od łatwiejszego do trudniejszych). Grupa, która poprawnie rozwiąże ćwiczenia jako pierwsza, wygrywa, a nauczyciel może nagrodzić uczniów ocenami za aktywność. Rozwiązania są prezentowane na forum klasy i omawiane krok po kroku.

4. Uczniowie wykonują indywidualnie ćwiczenia 6, 7 i 8, ale następnie porównują swoje odpowiedzi z kolegą lub koleżanką.

Faza podsumowująca:

1. Omówienie ewentualnych problemów z rozwiązaniem ćwiczeń z sekcji „Sprawdź się”.
2. Nauczyciel omawia przebieg zajęć, wskazuje mocne i słabe strony pracy uczniów, udzielając im tym samym informacji zwrotnej.

Praca domowa:

1. Uczniowie zapoznają się z medium w sekcji „Aplet” i rozwiązują polecenia z nim związane.

Materiały pomocnicze:

- [Proste i odcinki równoległe](#)
- [Proste równoległe, proste prostopadłe](#)

Wskazówki metodyczne:

- Nauczyciel może wykorzystać medium w sekcji „Aplet” do pracy przed lekcją. Uczniowie zapoznają się z jego treścią i przygotowują do pracy na zajęciach w ten sposób, żeby móc samodzielnie rozwiązać zadania w temacie „Odległość prostych równoległych”.