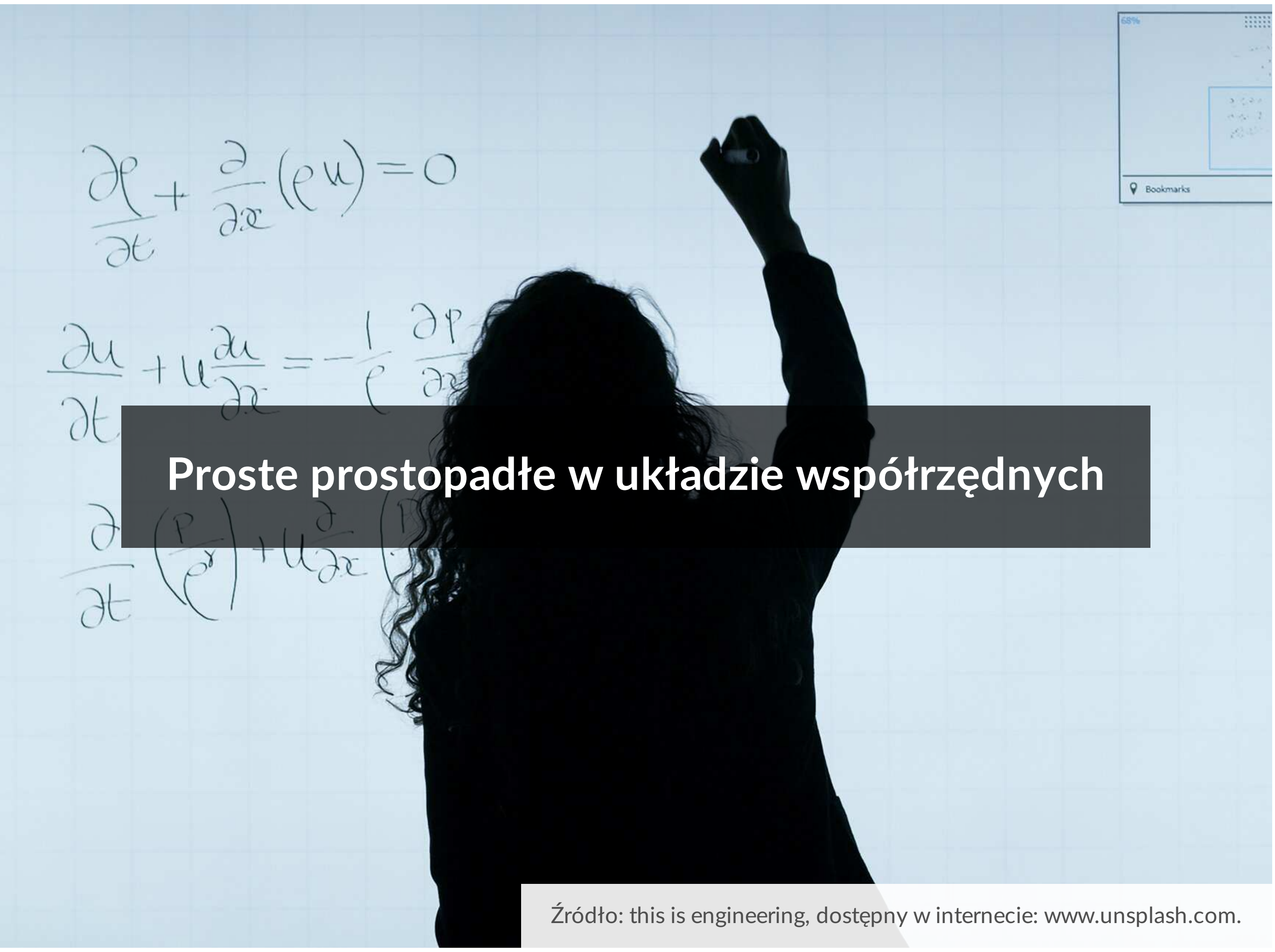
Proste prostopadłe w układzie współrzędnych

- Wprowadzenie
- Przeczytaj
- Galeria zdjęć interaktywnych
- Sprawdź się
- Dla nauczyciela

Proste prostopadłe w układzie współrzędnych



Źródło: this is engineering, dostępny w internecie: www.unsplash.com.

Kiedy proste są prostopadłe? Jak definiujemy prostopadłość?

Prostopadłość to relacja na przykład między dwiema prostymi, dwiema płaszczyznami, między prostą a płaszczyzną, między parą krzywych czy wektorów. Dwie proste są do siebie prostopadłe, jeżeli przecinają się w taki sposób, że dzielą płaszczyznę na cztery przystające (takie same) kąty. Upraszczając można powiedzieć, że proste prostopadłe, to proste, które jak sama nazwa mówi, przecinają się pod kątem prostym.

W tym materiale dowiesz się, jak definiujemy proste prostopadłe w układzie współrzędnych i o czym decyduje współczynnik kierunkowy wykresu funkcji liniowej.

Twoje cele

- Zbadasz prostopadłość prostych w układzie współrzędnych.
- Wyznaczysz równanie prostej przechodzącej przez dany punkt i prostopadłej do danej prostej.
- Wyznaczysz współczynnik kierunkowy prostej prostopadłej do danej prostej.

Przeczytaj

Aby proste były równoległe, ich współczynniki kierunkowe muszą być równe. Teraz określimy warunek konieczny do tego, aby dwie proste były prostopadłe.

Na początek przypomnijmy znany nam już fakt dotyczący prostych równoległych do osi układu współrzędnych.

Twierdzenie: prosta prostopadła

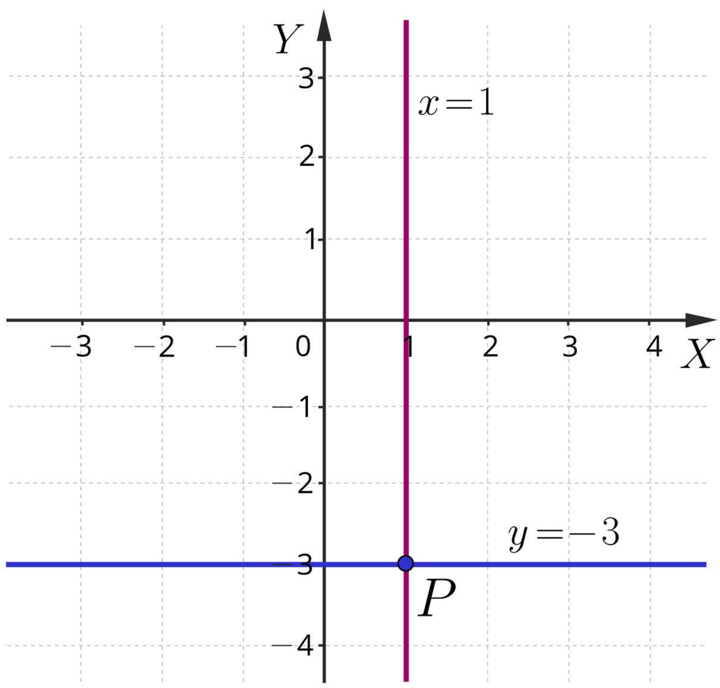
Prosta prostopadła do prostej $x = a$ i przechodząca przez punkt (a, b) ma równanie $y = b$.

Przykład 1

Napiszemy równanie prostej przechodzącej przez punkt $P = (1, -3)$ i prostopadłej do prostej $y = -3$.

Rozwiązanie

Szukana prosta musi być pionowa, to znaczy mieć równanie $x = a$, gdzie a jest pewną liczbą rzeczywistą. Aby punkt $(1, -3)$ należał do szukanej prostej, a musi być równe 1, ponieważ taka jest pierwsza współrzędna punktu P. Równanie prostej ma więc postać: $x = 1$.



Pokażemy teraz, jaki jest związek między współczynnikami kierunkowymi zapisanymi w równaniach dwóch prostych prostopadłych, które nie są położone w układzie współrzędnych w tak szczególny sposób, jak omówiony powyżej.

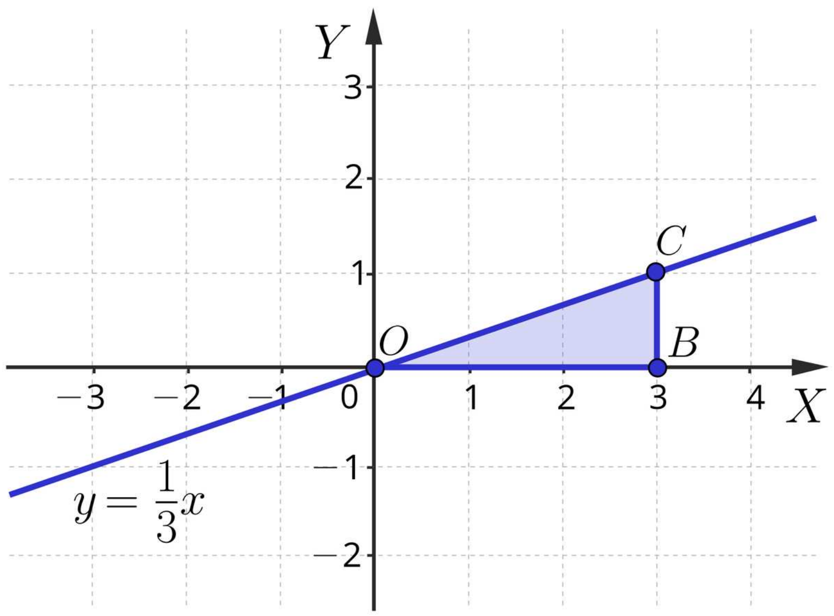
Na początek rozważymy sytuację, gdy punkt przecięcia takich prostych znajduje się w początku układu współrzędnych.

Przykład 2

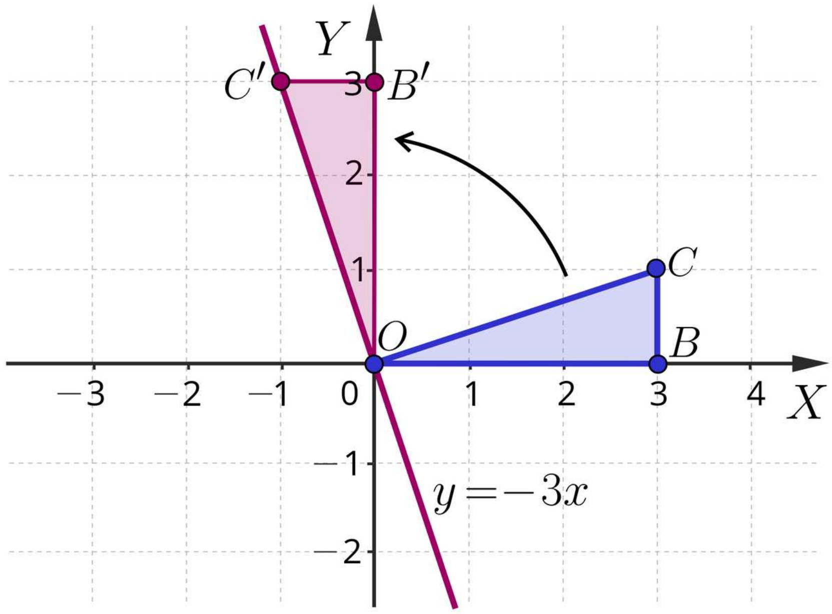
Znajdziemy prostą prostopadłą do prostej o równaniu $y = \frac{1}{3}x$.

Rozwiązanie

Rozpatrzmy trójkąt prostokątny o wierzchołkach:
$O = (0, 0)$, $B = (3, 0)$ oraz $C = (3, 1)$.
Ponieważ $\text{tg}(\angle COB) = \frac{1}{3}$, więc jego przeciwprostokątna OC leży na prostej o równaniu $y = \frac{1}{3}x$.



Obróćmy ten trójkąt o 90° wokół punktu O, w kierunku przeciwnym do ruchu wskazówek zegara. Otrzymamy trójkąt OB'C' jak na rysunku poniżej.



Zauważmy, że ponieważ prosta OC' przechodzi przez punkt $O = (0, 0)$, więc jej równanie można zapisać w postaci $y = ax$.
Ponadto rozważana prosta przechodzi przez punkt $C' = (-1, 3)$, a to oznacza, że $a \cdot (-1) = 3$, skąd $a = -3$.

Ponieważ proste OC i OC' są prostopadłe, więc prosta prostopadła do prostej $y = \frac{1}{3}x$ i przechodząca przez punkt $(0, 0)$ ma równanie $y = -3x$.

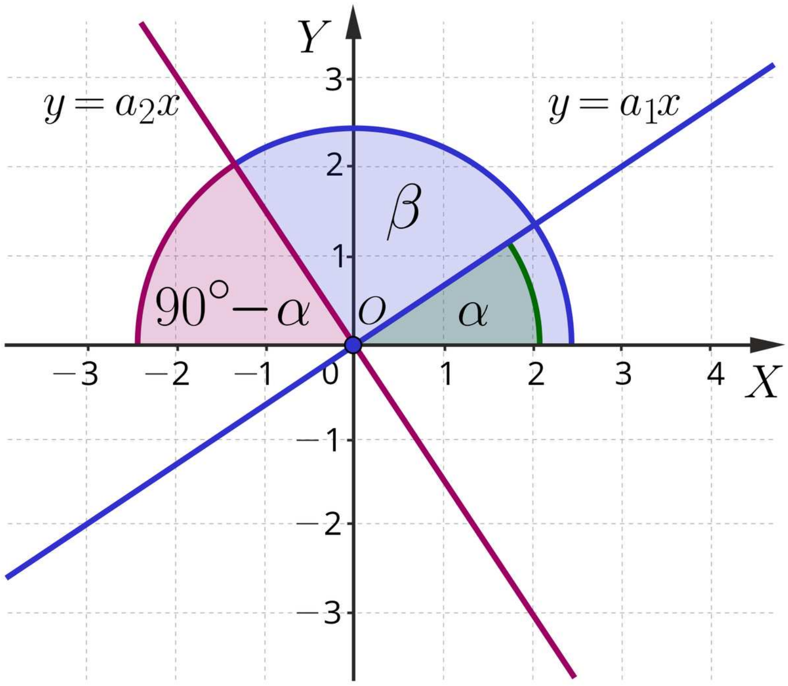
Wynik z powyższego przykładu można uogólnić.

Twierdzenie: prosta prostopadła do prostej przechodzącej przez punkt $(0, 0)$

Prosta prostopadła do prostej o równaniu $y = ax$ ma równanie:
$y = -\frac{1}{a}x$.

Dowód

Załóżmy, że proste $y = a_1 x$ oraz $y = a_2 x$ są prostopadłe. Przy oznaczeniach z rysunku poniżej mamy równości: $a_1 = \operatorname{tg} \alpha$ oraz $a_2 = \operatorname{tg} \beta$.



Zatem, korzystając z zależności trygonometrycznych, otrzymujemy:
$\operatorname{tg}\beta = \operatorname{tg}(180^\circ - (90^\circ - \alpha)) = \operatorname{tg}(180^\circ - 90^\circ + \alpha) = -\operatorname{tg}(90^\circ - \alpha) == -\frac{1}{\operatorname{tg}\alpha} = -\frac{1}{a_1}$
.

Przykład 3

Napiszemy równanie prostej przechodzącej przez punkt $O = (0, 0)$ i prostopadłej do prostej o równaniu $y = \frac{2}{5}x$.

Rozwiązanie

Ponieważ liczbą przeciwną do odwrotności liczby $\frac{2}{5}$ jest liczba $-\frac{5}{2}$, więc z powyższego twierdzenia wynika, że szukana prosta ma równanie $y = -\frac{5}{2}x$.

Podamy teraz warunek, jaki muszą spełniać współczynniki kierunkowe dwóch prostych prostopadłych.

Twierdzenie: proste prostopadłe

Proste $y = ax + b$ oraz $y = cx + d$, gdzie $a \neq 0$ i $c \neq 0$, są prostopadłe wtedy i tylko wtedy, gdy:
$a \cdot c = -1$.

Dowód

Na podstawie udowodnionego powyżej twierdzenia wiemy, że proste o równaniach $y = ax$ oraz $y = cx$ są prostopadłe wtedy i tylko wtedy, gdy $c = -\frac{1}{a}$.

Ponieważ:

- dla dowolnej liczby rzeczywistej b prosta o równaniu $y = ax$ jest równoległa do prostej o równaniu $y = ax + b$,
- dla dowolnej liczby rzeczywistej d prosta o równaniu $y = cx$ jest równoległa do prostej o równaniu $y = cx + d$,

więc proste o równaniach $y = ax + b$ oraz $y = cx + d$ są prostopadłe wtedy i tylko wtedy, gdy $c = -\frac{1}{a}$.
Wynika stąd, że $a \cdot c = -1$.
Koniec dowodu.

Przykład 4

Z powyższego twierdzenia wynika, że:

- proste o równaniach $y = \frac{1}{5}x + 11$ oraz $y = -5x + 2$ są prostopadłe; w tym celu wystarczy sprawdzić, że $\frac{1}{5} \cdot (-5) = \frac{-5}{5} = -1$,
- proste o równaniach $y = 2,5x - 3,8$ oraz $y = -\frac{3}{7}x + \frac{8}{3}$ nie są prostopadłe; w tym celu wystarczy sprawdzić, że $-\frac{3}{7} \cdot 2,5 = -\frac{3}{7} \cdot \frac{5}{2} = -\frac{15}{14} \neq -1$.

Przykład 5

Wyznaczymy wartości współczynnika m, dla których proste o równaniach
$y = \frac{3-m}{8}x + (5m - 11)$ oraz $y = \frac{m+3}{2}x + 1$
są prostopadłe.

Z twierdzenia o prostych prostopadłych wynika, że iloczyn współczynników kierunkowych danych prostych musi być równy -1. Odczytujemy więc współczynniki kierunkowe podanych prostych i zapisujemy równanie
$\frac{3-m}{8} \cdot \frac{m+3}{2} = -1$,
które po przekształceniach równoważnych zapisujemy kolejno:
$-(m-3) \cdot (m+3) = -1 \cdot 2 \cdot 8$
$(m-3) \cdot (m+3) = 16$
$m^2 - 9 = 16$
$m^2 - 25 = 0$
$(m-5) \cdot (m+5) = 0$.

Stąd:

- $m = 5$ (wtedy dane proste mają równania $y = -\frac{1}{4}x + 14$ oraz $y = 4x + 1$),
- $m = -5$ (wtedy dane proste mają równania $y = x - 36$ oraz $y = -x + 1$).

Słownik

prosta prostopadła

prostą a nazywamy prostopadłą do prostej b, jeżeli prosta b jest osią symetrii prostej a i jest od niej różna

współczynnik kierunkowy

współczynnik kierunkowy funkcji liniowej, to tangens kąta nachylenia prostej będącej wykresem tej funkcji do osi X

Galeria zdjęć interaktywnych

Polecenie 1

Zapoznaj się z galerią zdjęć interaktywnych, a następnie rozwiąż ćwiczenia.

Polecenie 2

Znajdź równanie prostej prostopadłej do prostej $y = 2x + 3$ i przechodzącej przez punkt $(0, -4)$.

Polecenie 3

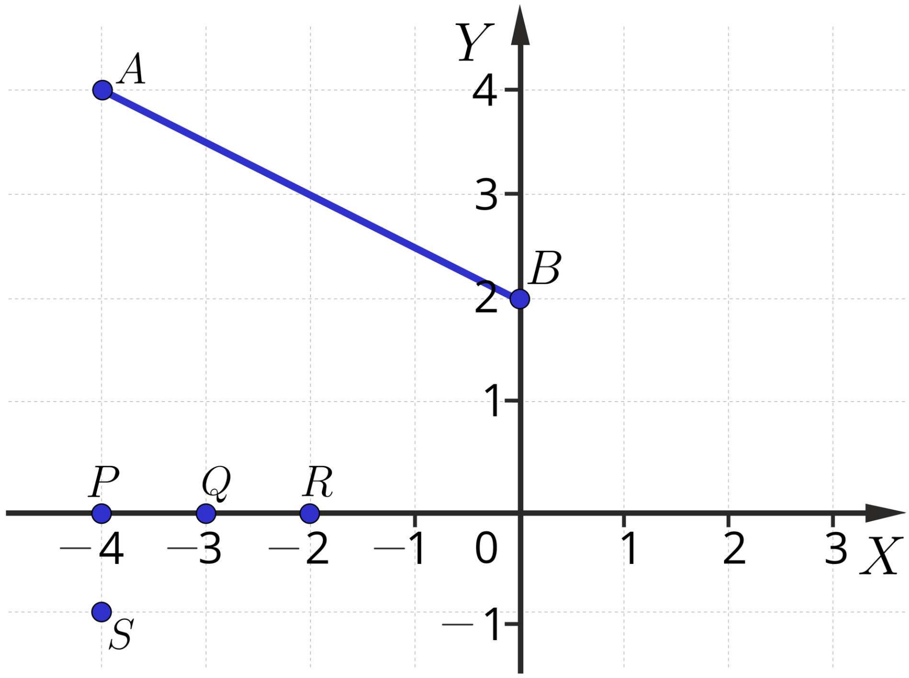
W jakiej odległości od prostej $y = x$ leży punkt $A = (0, 1)$?

Sprawdź się

Pokaż ćwiczenia:

Ćwiczenie 1

Zaznacz prawidłową odpowiedź. Symetralna odcinka AB na rysunku obok przechodzi przez punkt:



- S
- R
- P
- Q

Ćwiczenie 2

Prosta $y = -\frac{1}{2}x + 1$ jest prostopadła do prostej $y = ax + b$. Wynika stąd, że:

- $b = 2$
- $b = -2$
- $a = -2$
- $a = 2$

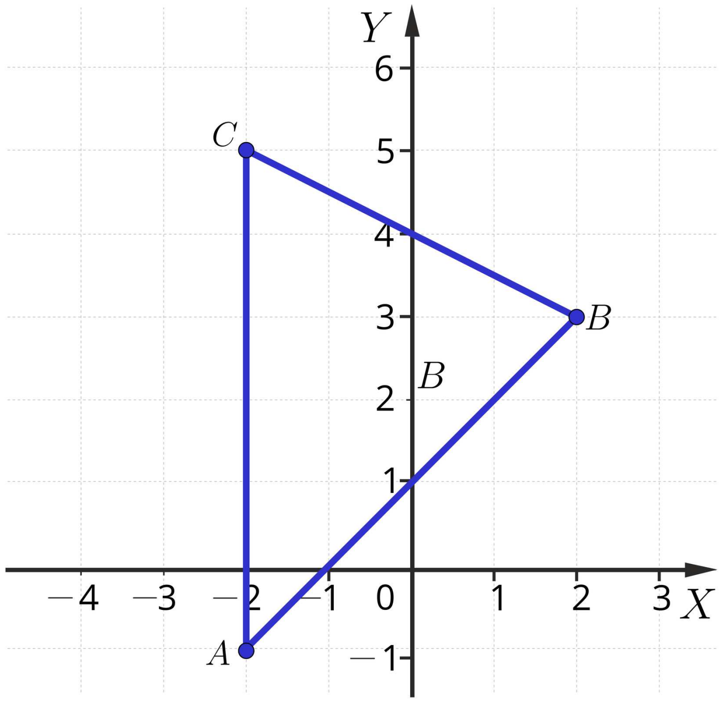
Ćwiczenie 3

Prosta l ma równanie $y = 4x - 1$. Równanie prostej prostopadłej do prostej l i przechodzącej przez punkt $(0, 3)$ ma postać:

- $y = -0,25x + 3$
- $y = -\frac{1}{4}x + 3$
- $y = \frac{1}{4}x + 3$
- $y = 0,25x + 3$
- $y = -3x + \frac{1}{4}$
- $y = -4x + 3$

Ćwiczenie 4

Zaznacz prawidłową odpowiedź. Wysokość poprowadzona z wierzchołka C w trójkącie ABC na rysunku poniżej ma równanie:



- $y = -\frac{1}{3}x + 1$
- $y = x - 3$
- $y = -3x + 1$
- $y = -x + 3$

Ćwiczenie 5

Symetralna odcinka AB, gdzie $A = (-2, 1)$ oraz $B = (0, 3)$, ma równanie:

- $y = -x - 1$
- $y = -x$
- $y = -x + 1$
- $y = -x - 2$

Ćwiczenie 6

Prosta $y = -x + \frac{1}{2}$ jest symetralną odcinka AB, gdzie $A = \left(0, -\frac{1}{2}\right)$. Wtedy:

- $B = \left(2, \frac{1}{2}\right)$
- $B = \left(1, -\frac{1}{2}\right)$
- $B = \left(1, \frac{1}{2}\right)$
- $B = (1, 2)$

Ćwiczenie 7

Prosta k jest prostopadła do prostej $y = \sqrt{3}x - 1$. Wynika stąd, że prosta k jest nachylona do osi X pod kątem:

- 120°
- 150°
- 60°
- 30°

Ćwiczenie 8

Prosta k jest prostopadła do prostej l. Prosta l jest nachylona do osi X pod kątem 33°. Wynika stąd, że współczynnik kierunkowy prostej k:

- jest większy od $(-\operatorname{tg} 33^\circ)$
- jest mniejszy od $(-\operatorname{tg} 33^\circ)$
- jest równy $(-\operatorname{tg} 33^\circ)$
- jest równy $\operatorname{tg} 33^\circ$

Ćwiczenie 9

Proste k i l przecinają się w punkcie $(1, 1)$ pod kątem prostym. Wiadomo też, że prosta k przechodzi przez punkt $(3, 2)$. Wynika stąd, że prosta l przechodzi przez punkt:

- $(-1, 5)$
- $(-2, 3)$
- $(-2, 4)$
- $(-2, 1)$

Ćwiczenie 10

Prosta k przecina prostą $y = \frac{3}{5}x - 1$ w pewnym punkcie na osi Y pod kątem prostym. Wynika stąd, że prosta k przecina oś X w pewnym punkcie z przedziału:

- $(0; 1)$
- $(-2; -1)$
- $(1; 2)$
- $(-1; 0)$

Ćwiczenie 11

Znajdź współczynnik kierunkowy prostej prostopadłej do prostej:

a) $y = 3x - 2$;

b) $y = -x + 1$;

c) $y = \frac{3}{5}x - 1$;

d) $y = \sqrt{3}x$.

Ćwiczenie 12

Wyznacz równanie prostej przechodzącej przez punkt $(0,1)$ i prostopadłej do prostej:
a) $y=x-1$;
b) $y=2x+1$;
c) $y=\frac{2}{3}x-1$;
d) $y=-\frac{7}{4}x-1$.

Ćwiczenie 13

Znajdź równanie symetralnej odcinka AB, jeżeli:
a) $A=(2,0)$ oraz $B=(4,0)$;
b) $A=(1,4)$ oraz $B=(1,6)$.

Ćwiczenie 14

Połącz w pary równania prostych prostopadłych.

$y=\frac{2}{3}x-\frac{1}{4}$	$y=-\frac{12}{11}x-\frac{14}{9}$
$y=\frac{11}{12}x-\frac{13}{14}$	$y=-\frac{3}{2}x+\frac{1}{4}$
$y=\frac{1}{4}x-\frac{2}{3}$	$y=-\frac{3}{2}x-\frac{1}{4}$
$y=\frac{2}{3}x-\frac{1}{4}$	$y=-4x-11$

Ćwiczenie 15

Wyznacz równanie prostej przechodzącej przez punkt $A=(1,0)$ prostej k o równaniu:
a) $y=-\frac{1}{3}x+7$;
b) $y=\frac{5}{3}x+\sqrt{5}$.

Ćwiczenie 16

Znajdź równanie prostej zawierającej wysokość poprowadzoną z wierzchołka C do podstawy AB w trójkącie o wierzchołkach :
a) $A=(1,2)$, $B=(2,4)$ oraz $C=(1,3)$;
b) $A=(-1,2)$, $B=(2,8)$ oraz $C=(-2,5)$.

Ćwiczenie 17

Napisz równanie symetralnej odcinka AB, gdzie:
a) $A = (1, 2)$ oraz $B = (3, 4)$;
b) $A = (1, 0)$ oraz $B = (3, -1)$.

Ćwiczenie 18

Prosta k przechodzi przez punkt $P = (-1, 2)$ i jest prostopadła do prostej l o równaniu $y = -\frac{1}{4}x + 23$. Znajdź współrzędne punktu Q, w którym prosta k przecina prostą l.

Ćwiczenie 19

Oblicz odległość punktu $A = (1, 1)$ od prostej k o równaniu:
a) $x = 4$;
b) $y = x + 1$;
c) $y = -x + 1$;
d) $y = -\frac{1}{2}x + 1$.

Ćwiczenie 20

Znajdź współrzędne punktu przecięcia wysokości w trójkącie o wierzchołkach: $A = (1, 2)$, $B = (2, 4)$ oraz $C = (-1, 3)$.

Ćwiczenie 21

Dane są parami różne punkty $A = (a_1, a_2)$, $B = (b_1, b_2)$ oraz $O = (0, 0)$.
Wykaż, że jeśli odcinek AO jest prostopadły do odcinka BO, to:
$a_1\, b_1 + a_2\, b_2 = 0\,.$

Dla nauczyciela

Autor: Witold Sadowski, Paweł Kwiatkowski

Przedmiot: Matematyka

Temat: Proste prostopadłe w układzie współrzędnych

Grupa docelowa:

Szkoła ponadpodstawowa, liceum ogólnokształcące, technikum, zakres rozszerzony

Podstawa programowa:
Treści nauczania – wymagania szczegółowe:
IX. Geometria analityczna na płaszczyźnie kartezjańskiej. Zakres podstawowy. Uczeń:
1) rozpoznaje wzajemne położenie prostych na płaszczyźnie na podstawie ich równań, w tym znajduje wspólny punkt dwóch prostych, jeśli taki istnieje;

Kształtowane kompetencje kluczowe:

- kompetencje obywatelskie;
- kompetencje cyfrowe;
- kompetencje osobiste, społeczne i w zakresie umiejętności uczenia się;
- kompetencje matematyczne oraz kompetencje w zakresie nauk przyrodniczych, technologii i inżynierii.

Cele operacyjne:

Uczeń:

- bada prostopadłość prostych w układzie współrzędnych,
- wyznacza równanie prostej przechodzącej przez dany punkt i prostopadłej do danej prostej,
- wyznacza współczynnik kierunkowy prostej prostopadłej do danej prostej.

Strategie nauczania:

- konstruktywizm;
- konektywizm.

Metody i techniki nauczania:

- metoda tekstu przewodniego;
- metoda kota i myszy;
- dyskusja.

Formy pracy:

- praca indywidualna;
- praca w parach;
- praca w grupach;
- praca całego zespołu klasowego.

Środki dydaktyczne:

- komputery z głośnikami, słuchawkami i dostępem do internetu;
- zasoby multimedialne zawarte w e-materiale;
- tablica interaktywna/tablica, pisak/kreda.

Przebieg lekcji

Faza wstępna:

1. Nauczyciel przedstawia temat i cel lekcji.
2. Uczniowie formułują kryteria sukcesu.

Faza realizacyjna:

1. Uczniowie metodą tekstu przewodniego w parach analizują treści z sekcji „Przeczytaj". Po zapoznaniu się z każdym z przykładów zgłaszają pytania i napotkane ewentualne problemy, które omawiane są na forum klasy.
2. Następnie nauczyciel wraz z uczniami omawia zadania w galerii zdjęć. Przedstawia problem, uczniowie próbują go rozwiązać, ostatecznie porównują swój tok rozumowania z tym przedstawionym w galerii
3. Uczniowie w parach metodą kot i mysz rozwiązują ćwiczenia interaktywne w sekcji „Sprawdź się". Mysz stara się jak najlepiej rozwiązać zadania, a kot sprawdza ich poprawność. Po dwóch nieudanych próbach kot „łapie mysz", która odpada z gry. Aby gra toczyła się dalej - role uczniów odwracają się i mysz staje się kotem - procedura się powtarza.

Faza podsumowująca:

Omówienie ewentualnych problemów z rozwiązaniem ćwiczeń z sekcji „Sprawdź się".

Praca domowa:

Uczniowie wykonują polecenia 2 i 3 w sekcji „Galeria zdjęć".

Materiały pomocnicze:

- Proste równoległe, proste prostopadłe
- Warunek prostopadłości prostych

Wskazówki metodyczne:

Galeria zdjęć może zostać wykorzystana na przykład na lekcji o wzajemnym położeniu prostych na płaszczyźnie kartezjańskiej.