



Funkcje nierosnące, niemalejące

- Wprowadzenie
- Przeczytaj
- Animacja
- Sprawdź się
- Dla nauczyciela



Funkcje nierosnące, niemalejące

Źródło: Ignat Kushanrev, dostępny w internecie: www.unsplash.com.

Jakie funkcje nazywamy nierosnącymi?

Jakie funkcje nazywamy niemalejącymi?

Czy funkcja malejąca w całej dziedzinie jest funkcją nierosnącą?

Czy funkcja rosnąca w całej dziedzinie jest funkcją niemalejącą?

Do której kategorii możemy zaklasyfikować funkcję stałą?

Odpowiedzi na te pytania uzyskasz po uważnej analizie poniższego materiału.

Twoje cele

- Poznasz pojęcie funkcji nierosnącej oraz funkcji niemalejącej.
- Sprawdzisz, czy funkcja jest nierosnąca.
- Sprawdzisz, czy funkcja jest niemalejąca.
- Uzasadnisz, że funkcja jest niemalejąca.
- Uzasadnisz, że funkcja jest nierosnąca.

Przeczytaj

Definicja: Funkcja nierosnąca

Funkcja liczbową $f : X \rightarrow Y$ jest funkcją nierosnącą w zbiorze A , $A \subset X$, wtedy i tylko wtedy, gdy dla dowolnych argumentów x_1, x_2 , należących do zbioru A , z nierówności $x_1 < x_2$ wynika nierówność:

$$f(x_1) \geq f(x_2)$$

Definicję funkcji nierosnącej możemy również zapisać krócej.

Funkcja liczbową $f : X \rightarrow Y$ jest funkcją nierosnącą w zbiorze A ,

$$A \subset X \Leftrightarrow \forall_{x_1, x_2 \in A} [x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) \geq f(x_2)]$$

Definicja: Funkcja niemalejąca

Funkcja liczbową $f : X \rightarrow Y$ jest funkcją niemalejącą w zbiorze A , $A \subset X$, wtedy i tylko wtedy, gdy dla dowolnych argumentów x_1, x_2 , należących do zbioru A , z nierówności $x_1 < x_2$ wynika nierówność:

$$f(x_1) \leq f(x_2)$$

Definicję funkcji niemalejącej możemy również zapisać krócej.

Funkcja liczbową $f : X \rightarrow Y$ jest funkcją niemalejącą w zbiorze A ,

$$A \subset X \Leftrightarrow \forall_{x_1, x_2 \in A} [x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) \leq f(x_2)]$$

Analizując definicje funkcji nierosnącej i niemalejącej, możemy zauważyć, że:

- każda funkcja rosnąca jest jednocześnie funkcją niemalejącą,
- każda funkcja malejąca jest jednocześnie [funkcją nierosnącą](#),

- każda funkcja stała jest jednocześnie funkcją nierosnącą i niemalejącą.

Funkcje nierosnące i niemalejące są **funkcjami monotonicznymi**.

Poniższe przykłady pomogą nam zrozumieć pojęcie funkcji niemalejącej i nierosnącej.

Przykład 1

Funkcja f opisana jest za pomocą zbioru par uporządkowanych. Wykażemy, że jest to funkcja niemalejąca.

$$\{(-3, -5), (-2, -3), (-1, 0), (1, 0), (2, 3), (4, 5)\}$$

Rozwiązanie:

Argumenty funkcji należą do zbioru $\{-3, -2, -1, 1, 2, 4\}$.

Zauważmy, że: $-3 < -2 < -1 < 1 < 2 < 4$

Odpowiadające tym argumentom wartości funkcji spełniają zależności:

$$f(-3) < f(-2) < f(-1) = f(1) < f(2) < f(4)$$

Analizując zbiór par uporządkowanych zauważamy, że dla każdej pary argumentów zachodzi następująca zależność:

$$x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) \leq f(x_2)$$

Zatem funkcja f jest funkcją niemalejącą.

Przykład 2

Funkcja f opisana jest za pomocą tabelki. Wykażemy, że jest to funkcja nierosnąca.

Argumenty i wartości funkcji									
x	-3	-2	-1	0	1	2	3	4	5
$f(x)$	5	4	3	2	0	0	-1	-2	-3

Rozwiązanie:

Argumenty funkcji należą do zbioru $\{-3; -2; -1; 0; 1; 2; 3; 4; 5\}$.

Zauważmy, że: $-3 < -2 < -1 < 0 < 1 < 2 < 3 < 4 < 5$

Odpowiadające tym argumentom wartości funkcji spełniają zależności:

$$f(-3) > f(-2) > f(-1) > f(0) > f(1) = f(2) > f(3) > f(4) > f(5)$$

Okazuje się, że dla każdej pary argumentów zachodzi następująca zależność:

$$x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) \geq f(x_2)$$

Zatem funkcja f jest funkcją nierosnącą.

Przykład 3

Udowodnimy, że funkcja określona wzorem: $f(x) = \begin{cases} 3x + 2; & x \in (-\infty; 1) \\ 5; & x \in \langle 1; 6 \rangle \end{cases}$ jest funkcją niemalejącą.

Rozwiązanie:

Niech $x_1; x_2 \in (-\infty; 6)$. Zatem: $x_1 - x_2 < 0$ (1).

Jeśli: $x_1 \in (-\infty; 1)$ i $x_2 \in (-\infty; 1)$, to:

$$f(x_1) - f(x_2) = 3x_1 + 2 - (3x_2 + 2) = 3x_1 - 3x_2 = 3(x_1 - x_2)$$

Z (1) wynika, że: $f(x_1) < f(x_2)$ (2).

Jeśli $x_1 \in (-\infty; 1)$ i $x_2 \in \langle 1; 6 \rangle$, to:

$$f(x_1) - f(x_2) = 3x_1 + 2 - 5 = 3x_1 - 3 = 3(x_1 - 1).$$

Dla $x_1 \in (-\infty; 1)$: $x_1 - 1 < 0$, zatem: $f(x_1) < f(x_2)$ (3).

Jeśli $x_1 \in \langle 1; 6 \rangle$ i $x_2 \in \langle 1; 6 \rangle$, to $f(x_1) = f(x_2)$ (4).

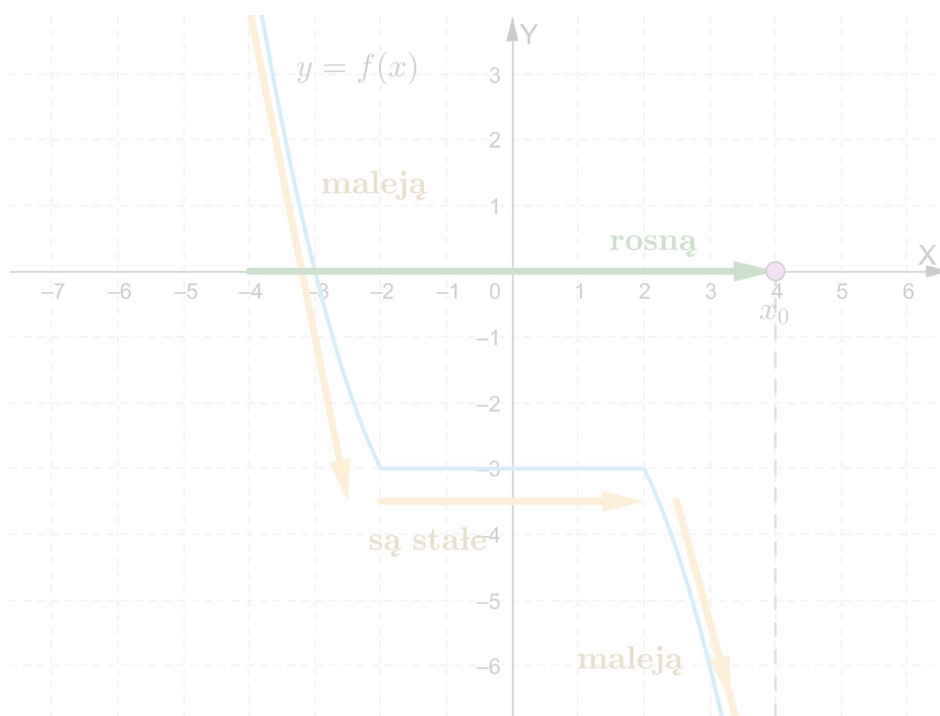
Z (2), (3), (4) wynika, że prawdziwa jest implikacja:

$$\forall x_1, x_2 \in D_f [x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) \leq f(x_2)]$$

Zatem funkcja f jest funkcją niemalejącą.

Przykład 4

Funkcja f opisana jest za pomocą wykresu.



Zasób interaktywny dostępny pod adresem <https://zpe.gov.pl/a/DgJZCP7Xe>

Funkcja f jest funkcją nierosnącą.

Rozwiązanie:

Analizując wykres funkcji f możemy zauważyć, że funkcja jest malejąca w przedziale $(-\infty, -2)$ oraz w przedziale $(2, \infty)$, jest stała w przedziale $\langle -2, 2 \rangle$.

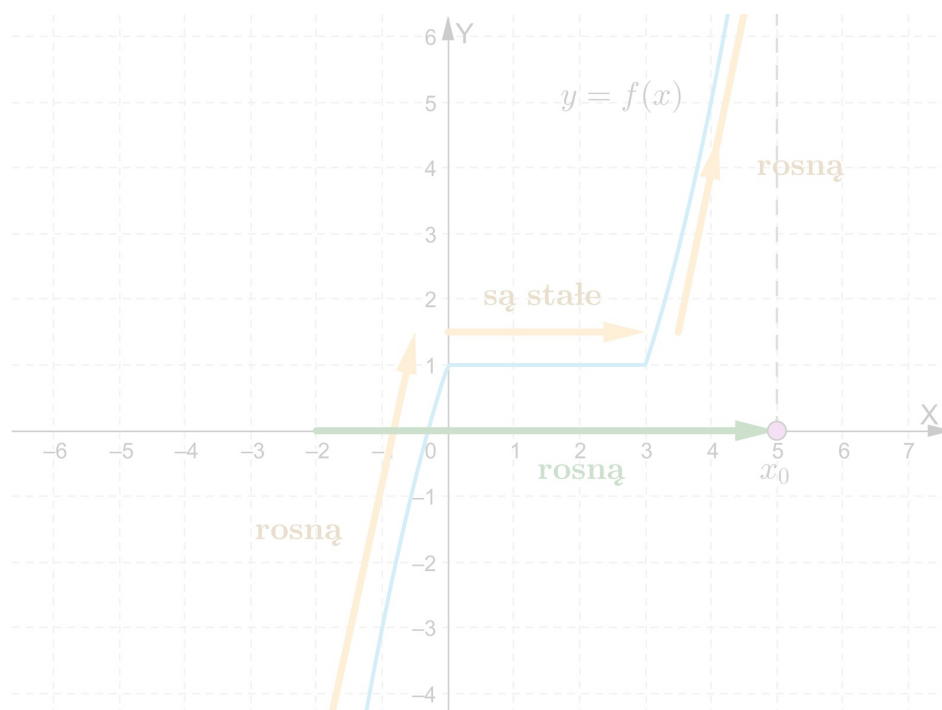
Stąd prawdziwa jest implikacja

$$\forall x_1, x_2 \in D_f [x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) \geq f(x_2)]$$

Zatem funkcja f jest funkcją nierosnącą.

Przykład 5

Funkcja f opisana jest za pomocą wykresu.



Zasób interaktywny dostępny pod adresem <https://zpe.gov.pl/a/DgJZCP7Xe>

Funkcja f jest funkcją niemalejącą.

Rozwiązanie:

Analizując wykres funkcji f możemy zauważyć, że funkcja jest rosnąca w przedziale $(-\infty, 0)$ oraz w przedziale $(3, \infty)$, jest stała w przedziale $\langle 0, 3 \rangle$.

Stąd prawdziwa jest implikacja

$$\forall x_1, x_2 \in D_f [x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) \leq f(x_2)]$$

Zatem funkcja f jest funkcją niemalejącą.

Ważne!

- każda funkcja rosnąca jest jednocześnie funkcją niemalejącą,
- każda funkcja malejąca jest jednocześnie funkcją nierosnącą,
- każda funkcja stała jest jednocześnie funkcją nierosnącą i niemalejącą.

Słownik

funkcja nierosnąca

wraz ze wzrostem argumentów wartości funkcji maleją lub są stałe

funkcja niemalejąca

wraz ze wzrostem argumentów wartości funkcji rosną lub są stałe

Animacja

Polecenie 1

Przeanalizuj uważnie przykłady przedstawione w animacji. Spróbuj rozwiązać je samodzielnie, a następnie porównaj swoje rozwiązania z przedstawionymi w animacji.

Po zapoznaniu się z animacją, wykonaj samodzielnie poniższe polecenia.

Trwa wczytywanie danych ..

Film dostępny pod adresem <https://zpe.gov.pl/a/DVMeEvE6B>

Film nawiązujący do treści lekcji dotyczącej funkcji nierosnących i niemalejących.

Polecenie 2

Funkcja f opisana jest za pomocą tabelki. Naszkicuj wykres funkcji f i określ, czy ta funkcja jest funkcją niemalejącą.

Argumenty i wartości funkcji									
x	-3	-2	-1	0	1	2	3	4	5
$f(x)$	-2	-1	0	1	1	1	2	3	4

Polecenie 3

Sprawdź się

Pokaż ćwiczenia:   

Ćwiczenie 1



Ćwiczenie 2



Ćwiczenie 3



Ćwiczenie 4



Ćwiczenie 5



Ćwiczenie 6



Ćwiczenie 7



Ćwiczenie 8



Dla nauczyciela

Autor: Anna Jeżewska

Przedmiot: Matematyka

Temat: Funkcje nierosnące, niemalejące

Grupa docelowa:

III etap edukacyjny, liceum, technikum, zakres rozszerzony

Podstawa programowa:

V. Funkcje. Zakres podstawowy.

Uczeń:

2) oblicza wartość funkcji zadanej wzorem algebraicznym,

4) odczytuje z wykresu funkcji: dziedzinę, zbiór wartości, miejsca zerowe, przedziały monotoniczności, przedziały, w których funkcja przyjmuje wartości większe (nie mniejsze) lub mniejsze (nie większe) od danej liczby, największe i najmniejsze wartości funkcji (o ile istnieją) w danym przedziale domkniętym oraz argumenty, dla których wartości największe i najmniejsze są przez funkcję przyjmowane.

Kształtowane kompetencje kluczowe:

- kompetencje w zakresie rozumienia i tworzenia informacji
- kompetencje matematyczne oraz kompetencje w zakresie nauk przyrodniczych, technologii i inżynierii
- kompetencje cyfrowe
- kompetencje osobiste, społeczne i w zakresie umiejętności uczenia się

Cele operacyjne:

Uczeń:

- zna pojęcia funkcji nierosnącej oraz funkcji niemalejącej
- sprawdza, czy funkcja jest nierosnąca
- sprawdza, czy funkcja jest niemalejąca
- na podstawie rysunku uzasadnia, że funkcja jest nierosnąca
- na podstawie rysunku uzasadnia, że funkcja jest niemalejąca

Strategie nauczania:

- konstruktywizm

Metody i techniki nauczania:

- diamentowe uszeregowanie
- dyskusja

Formy pracy:

- praca indywidualna
- praca w parach
- praca w grupach
- praca całego zespołu klasowego

Środki dydaktyczne:

- komputery z głośnikami i dostępem do Internetu, słuchawki
- zasoby multimedialne zawarte w e-materiale
- tablica interaktywna/tablica, pisak/kreda

Przebieg lekcji

Faza wstępna:

1. Nauczyciel podaje temat i cele lekcji oraz ustala z uczniami kryteria osiągnięcia sukcesu.
2. Uczniowie, metodą diamentowego uszeregowania, porządkują swoje wiadomości dotyczące sposobów sprawdzania, czy dana funkcja jest rosnąca, malejąca lub stała.
3. Po zakończonej pracy umieszczają swoje przemyślenia w widocznym miejscu w sali lekcyjnej.

Faza realizacyjna:

1. Uczniowie samodzielnie analizują przykłady zamieszczone w sekcji „Przeczytaj”.
2. Po upływie wyznaczonego czasu łączą się w pary i porównują między sobą uzyskane informacje. Następnie, podzieleni na dwie grupy, poszukują odpowiedzi na pytania postawione w sekcji „Wprowadzenie”. Wnioski przedstawiają na forum klasy.
3. Uczniowie oglądają animację przedstawiającą przykłady sposobów sprawdzania, czy dana funkcja jest niemalejąca lub nierosnąca i rozwiązują samodzielnie wskazane polecenia.
4. Uczniowie wykonują ćwiczenia interaktywne 1 – 4 i wspólnie omawiają odpowiedzi.

Faza podsumowująca:

1. Jeden z uczniów podsumowuje zajęcia, zwracając uwagę na nabyte umiejętności.
2. Nauczyciel omawia przebieg zajęć, wskazując na mocne i słabe strony pracy uczniów.

3. Nauczyciel ocenia indywidualną pracę i zaangażowanie poszczególnych uczniów.

Praca domowa:

1. Uczniowie rozwiązują w domu ćwiczenia, których nie rozwiązywali w czasie zajęć.

2. Zadanie dla chętnych:

Uzasadnij, że funkcja f , opisana za pomocą wzoru $f(x) = \sqrt{x - 2}$, gdy $x \geq 2$ jest funkcją niemalejącą.

Materiały pomocnicze:

[Monotoniczność funkcji](#)

Wskazówki metodyczne:

Nauczyciel może wykorzystać animację do powtórzenia wiadomości na temat monotoniczności funkcji.