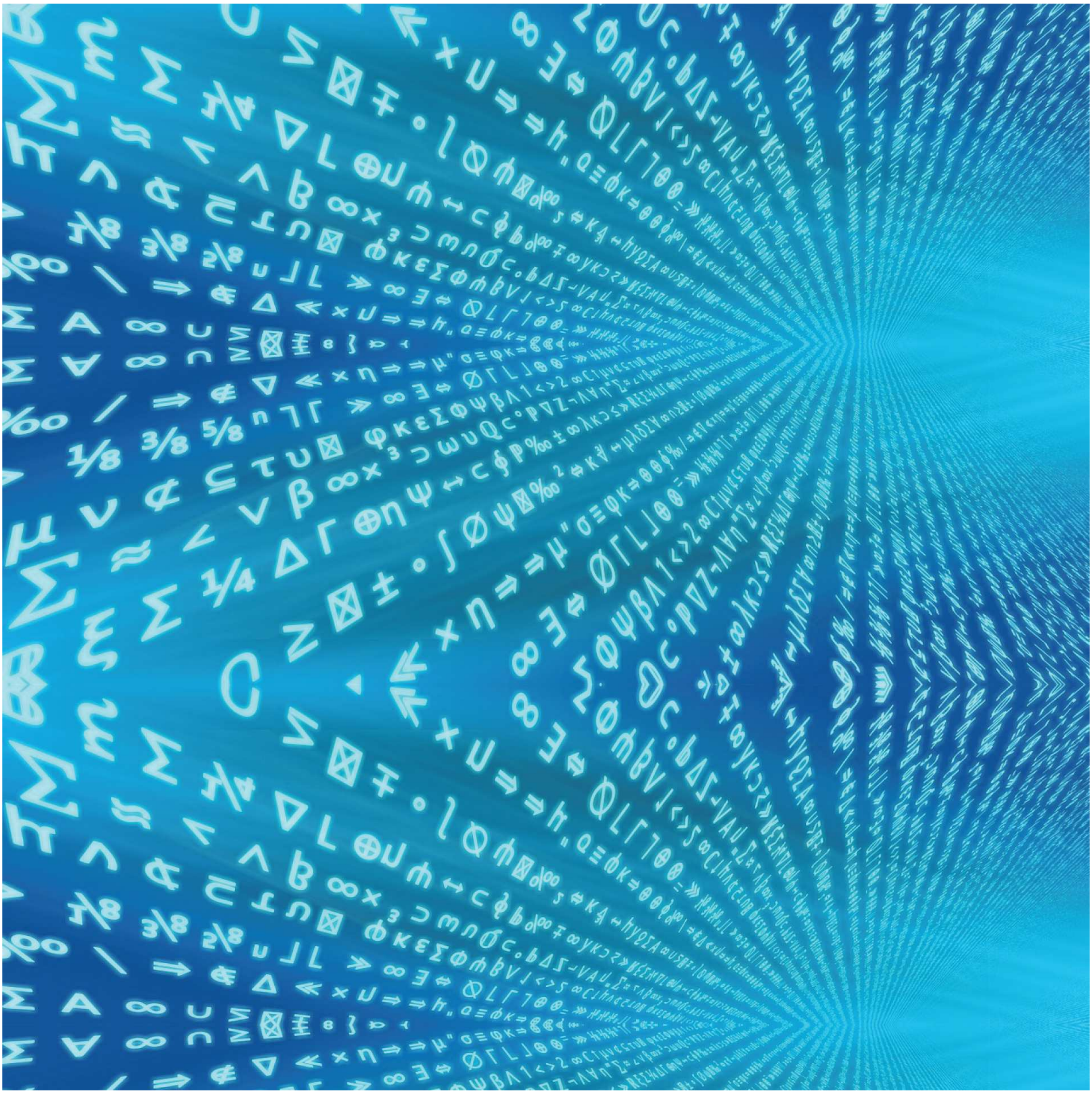
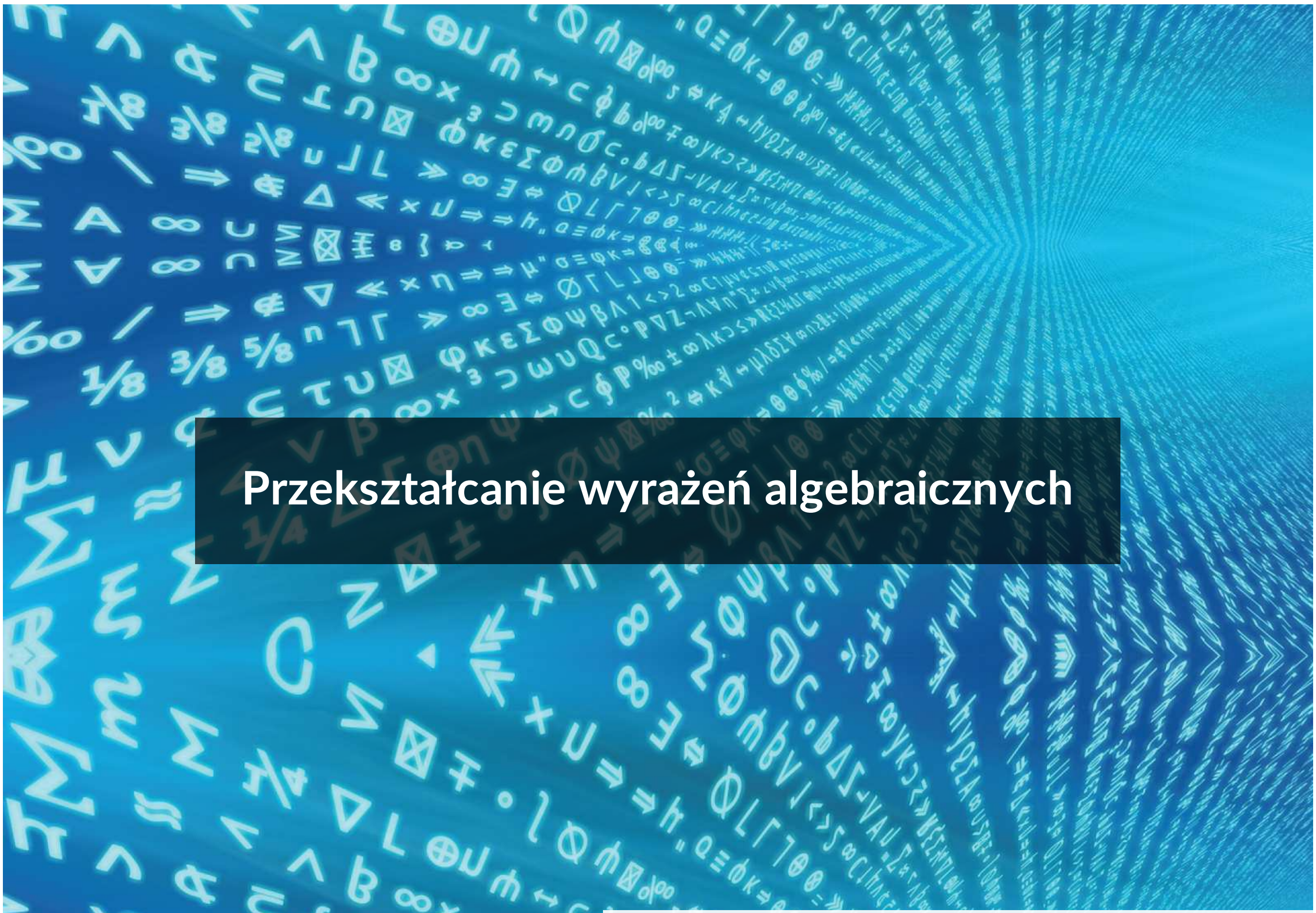


Przekształcanie wyrażeń algebraicznych

Przekształcanie wyrażeń algebraicznych



Źródło: dostępny w internecie: pixabay.com, domena publiczna.

Słowo algebra (z arabskiego al-dżabr – przywrócenie) pochodzi z książki *Al-Maqala fi Hisab-al Jabr wa-al-Muqabilah* (O odtwarzaniu i przeciwstawianiu), napisanej w IX wieku przez słynnego perskiego matematyka Muhammada ibn Mūsā al-Khwārizmīego. W XII wieku dzieło to zostało przywiezione do Europy i przetłumaczone na łacinę , ze zmienioną nazwą „Algebra”.

Algebra to obecnie jeden z działów matematyki.

Jedną z najważniejszych umiejętności algebraicznych, jest przekształcanie wyrażeń algebraicznych.

Dzieło, z którego pochodzi określenie „algebra”
Źródło: domena publiczna.

Twoje cele

- Sprowadzisz do najprostszej postaci wyrażenia algebraiczne, obliczysz ich wartości.

- Przeprowadzisz proste rozumowania związane z równościami algebraicznymi, formułując wnioski i uzasadniając ich poprawność.

Przeczytaj

Kolejność wykonywania działań, prawa działań

Na pewno pamiętasz, że przekształcając wyrażenia arytmetyczne, uwzględniamy ustaloną kolejność wykonywania działań.

Ważne!

Kolejność wykonywania działań

Gdy w wyrażeniu arytmetycznym nie ma nawiasów, wykonujemy kolejno:

- potęgowanie wraz z pierwiastkowaniem
- mnożenie wraz z dzieleniem
- dodawanie wraz z odejmowaniem

Jeśli w wyrażeniu występują nawiasy, to obliczenia rozpoczyna się od działań w nawiasach najbardziej wewnętrznych. Zatem działania w nawiasach wykonuje się przed pozostającymi poza nawiasami.

Przykład 1

Obliczymy wartość wyrażenia $\left(100-\sqrt{81}+23\right)-\left(-326+26\right):6+528:2^2\cdot 3$.

Postąpimy zgodnie z kolejnością wykonywania działań.

$\left(100-\sqrt{81}+23\right)-\left(-326+26\right):6+528:2^2\cdot 3=$

Najpierw wykonujemy działania w obu nawiasach.

$114-\left(-300\right):6+528:2^2\cdot 3=$

Potęgujemy.

$114-(-300):6+528:4\cdot 3=$

Dzielimy.

$114-(-50)+132\cdot 3=$

Mnożymy i dodajemy.

$114-(-50)+396=560$

Otrzymujemy wynik: wartość wyrażenia jest równa 560.

Przed wykonywaniem przekształceń wyrażeń algebraicznych, przypomnij sobie jeszcze prawa działań, z których będziesz korzystać.

Ważne!

Prawa działań	
$a+b=b+a$	Przemienność dodawania
$a \cdot b = b \cdot a$	Przemienność mnożenia
$(a+b)+c=a+(b+c)$	Łączność dodawania
$(a \cdot b) \cdot c = a \cdot (b \cdot c)$	Łączność mnożenia
$a \cdot (b+c) = a \cdot b + a \cdot c$	Rozdzielność mnożenia względem dodawania

Przykład 2

Obliczymy wartość wyrażenia $\left[\sqrt{6}\left(\sqrt{3}-\sqrt{6}\right)-\sqrt{3}\left(\sqrt{3}-\sqrt{6}\right)\right]:3-\sqrt{2}\cdot 4\cdot 0,5$.

Obliczenia wykonamy zgodnie z kolejnością wykonywania działań.

$$\left[\sqrt{6}\left(\sqrt{3}-\sqrt{6}\right)-\sqrt{3}\left(\sqrt{3}-\sqrt{6}\right)\right]:3-\sqrt{2}\cdot 4\cdot 0,5=$$

Wykonujemy mnożenie, korzystając z rozdzielności mnożenia względem dodawania (odejmowanie to dodawanie liczby przeciwnej).

$$\left(\sqrt{18}-6-3+\sqrt{18}\right):3-\sqrt{2}\cdot 4\cdot 0,5=$$

Wykonujemy działania w nawiasie.

$$\left(6\sqrt{2}-9\right):3-\sqrt{2}\cdot 4\cdot 0,5=$$

Korzystamy ponownie z rozdzielności mnożenia względem dodawania oraz łączności i przemienności mnożenia. Odejmujemy.

$$6\sqrt{2}:3-9:3-\sqrt{2}\cdot(4\cdot 0{,}5)=2\sqrt{2}-3-2\sqrt{2}=-3$$

Otrzymujemy wynik. Wartość wyrażenia jest równa (-3).

Działania łączne na wyrażeniach algebraicznych

Wykonując działania łączne na wyrażeniach algebraicznych, korzysta się z poznanych praw działań oraz reguł dotyczących dodawania i odejmowania sum algebraicznych:

$(a+b)+(c-d)=a+b+c-d$

$(a+b)-(c-d)=a+b-c+d$

Przykład 3

Zapiszemy wyrażenie $(x+2)(x+1)-(x-1)(x+2)-2x(x+1)$ w najprostszej postaci.

$$\underbrace{(x+2)(x+1)}-\underbrace{(x-1)(x+2)}-\underbrace{2x(x+1)}= \qquad \text{wykonujemy mnożenie}$$

$$=\underbrace{\left(x^2+x+2x+2\right)}-\underbrace{\left(x^2+2x-x-2\right)}-\underbrace{\left(2x^2+2x\right)}= \qquad \text{redukujemy w nawiasach wyrazy podobne}$$

$$=\left(x^2+3x+2\right)-\left(x^2+x-2\right)-\left(2x^2+2x\right)= \qquad \text{opuszczamy nawiasy}$$

$$=x^2+3x+2-x^2-x+2-2x^2-2x= \qquad \text{redukujemy wyrazy podobne}$$

$$=-2x^2+4$$

Przykład 4

Obliczymy wartość liczbową wyrażenia $\left\{3a^2-\left[2\left(a-b\right)\left(a-1\right)+(a+b)^2-b^2\right]\right\}:2$, gdy $a=\sqrt{5}$, $b=\sqrt{5}-1$.

Sprowadzimy najpierw podane wyrażenie do najprostszej postaci. Wykonujemy najpierw działania w nawiasie kwadratowym. W iloczynie $2(a-b)(a-1)$ najpierw wykonamy mnożenie sum algebraicznych i dopiero pomnożymy przez 2. Wyrażenie $(a+b)^2$ zapiszemy najpierw w postaci iloczynu.

$$\left\{3a^2-\left[2\left(a-b\right)\left(a-1\right)+(a+b)^2-b^2\right]\right\}:2=$$

W nawiasie kwadratowym wykonujemy mnożenie.

$$\left\{3a^2-\left[2\left(a^2-a-ab+b\right)+\left(a+b\right)\left(a+b\right)-b^2\right]\right\}:2=$$

Redukujemy wyrazy podobne w nawiasie kwadratowym.

$$\left\{3a^2-\left[2a^2-2a-2ab+2b+a^2+2ab+b^2-b^2\right]\right\}:2=$$

Wykonujemy działania w nawiasie kwadratowym.

$$\left[3a^2-\left(3a^2-2a+2b\right)\right]:2=$$

Dzielimy przez 2.

$(2a - 2b) : 2 = a - b$

Obliczamy teraz wartość liczbową otrzymanego wyrażenia – w miejsce liter podstawiając dane liczby.

$\sqrt{5} - \left(\sqrt{5} - 1\right) = 1$

Wartość liczbowa wyrażenia jest równa 1.

Przykład 5

Wykażemy, że dla każdej liczby rzeczywistej a wyrażenie

$[(a+1)(a-2)(1-a) + a(a-1)(a-1)] - 2a$ przyjmuje tę samą wartość liczbową.

Wykonamy najpierw działania w nawiasie kwadratowym.

$[(a+1)(a-2)(1-a) + a(a-1)(a-1)] - 2a =$

Mnożymy pierwsze dwa czynniki w każdym z iloczynów – wykorzystując rozdzielność mnożenia względem dodawania.

$\left[\left(a^2 - 2a + a - 2\right)(1-a) + \left(a^2 - a\right)(a-1)\right] - 2a =$

Zredukowaliśmy wyrazy podobne.

$\left[\left(a^2 - a - 2\right)(1-a) + \left(a^3 - a^2 - a^2 + a\right)\right] - 2a =$

Zamieniliśmy iloczyny na sumy algebraiczne – korzystając ponownie z rozdzielności mnożenia względem dodawania.

$\left[\left(a^2 - a^3 - a + a^2 - 2 + 2a\right) + \left(a^3 - 2a^2 + a\right)\right] - 2a =$

Opuszczamy nawiasy.

$\left(2a^2 - a^3 + a - 2 + a^3 - 2a^2 + a\right) - 2a =$

Redukujemy wyrazy podobne.

$2a - 2 - 2a = -2$

Po sprowadzaniu wyrażenia do najprostszej postaci otrzymujemy (-2), zatem wyrażenie nie zawierające zmiennej a. Czyli niezależnie od tego, jaką liczbę podstawimy do wyrażenia w miejsce zmiennej a, wartość liczbowa wyrażenia jest równa (-2).

Słownik

wartość liczbowa wyrażenia algebraicznego

liczba otrzymana w wyniku podstawiania do wyrażenia algebraicznego w miejsce liter danych liczb

Infografika

Polecenie 1

Przeanalizuj przykład przekształcania wyrażeń algebraicznych zaprezentowany na infografice. Określ, z jakich praw działań korzystano.

Polecenie 2

Zapisz w najprostszej postaci wyrażenie $\frac{(2+3a)(a+1)-3(a-1)(a+4)}{2}$, postępując podobnie jak w przykładzie zamieszczonym na infografice.

Sprawdź się

Pokaż ćwiczenia:

Ćwiczenie 1

Ćwiczenie 2

Ćwiczenie 3

Ćwiczenie 4

Ćwiczenie 5

Ćwiczenie 6

Ćwiczenie 7

Ćwiczenie 8

Zapisz wyrażenie $\frac{2x(1-3y)-3x(1-2y)}{(3x-y)(y+3x)+y^2}$ w najprostszej postaci i oblicz jego wartość, jeśli $x=-\frac{1}{9}$.

Dla nauczyciela

Autor: Justyna Cybulska

Przedmiot: Matematyka

Temat: Przekształcanie wyrażeń algebraicznych

Grupa docelowa:

III etap edukacyjny, liceum, technikum, zakres rozszerzony

Podstawa programowa:

II. Wyrażenia algebraiczne Uczeń:

2) dodaje, odejmuje i mnoży wielomiany jednej i wielu zmiennych.

Kompetencje kluczowe:

- kompetencje w zakresie rozumienia i tworzenia informacji
- kompetencje matematyczne oraz kompetencje w zakresie nauk przyrodniczych, technologii i inżynierii
- kompetencje cyfrowe
- kompetencje osobiste, społeczne i w zakresie umiejętności uczenia się

Cele operacyjne:

Uczeń:

- sprowadza wyrażenia algebraiczne do najprostszej postaci
- oblicza wartości liczbowe wyrażeń algebraicznych
- analizuje wyrażenie algebraiczne i ustala najefektywniejsza strategię uproszczenia tego wyrażenia
- udowadnia proste zależności algebraiczne

Strategie nauczania:

- konstruktywizm

Metody i techniki nauczania:

- wędrujące plakaty
- okienka informacyjne

Formy pracy:

- praca indywidualna
- praca w grupach
- praca w parach
- praca całego zespołu klasowego

Środki dydaktyczne:

- komputery z dostępem do internetu w takiej liczbie, żeby każda grupa uczniów miała do dyspozycji komputer
- kartony, mazaki

Przebieg zajęć

Faza wstępna:

Uczniowie pracują w 4 grupach metodą wędrujących plakatów. Celem jest przypomnienie praw działań na liczbach rzeczywistych. Rozpoczyna grupa wybrana losowo – zapisuje na kartonie jedno z praw działań i podaje karton następnej grupie, która dopisuje nazwę prawa. Kolejna grupa podaje przykład liczbowy zastosowania tego prawa. Plakat wędruje do następnej grupy, która dopisuje prawo działań i procedura się powtarza. W podobny sposób grupy przypominają, w jaki sposób dodajemy, odejmujemy, mnożymy wyrażenia algebraiczne.

Nauczyciel podaje temat i cele zajęć, uczniowie ustalają kryteria sukcesu.

Faza realizacyjna:

Uczniowie pracują teraz w małych grupach metodą okienka informacyjnego. Najpierw zapoznają się z infografiką pokazującą sposób przekształcania wyrażeń algebraicznych. Następnie w podobny sposób przekształcają wyrażenia:

- $(2+a)(a-3)-(1-a)(a+4)-2a(a-1)$
- $\left[\left(ab-b^2\right):b-\left(ab+a^2\right):a\right]:2$
- $(a-1)(a-1)(a+1)-(a+1)(a+1)(a-1)$
- $2\mathrm{ab}^2(ab-b)+a^2b\left(-2b^2+1\right)-2$

Poprawność wyników sprawdzają w okienkach informacyjnych, w których mogą znaleźć też podpowiedzi ułatwiające rozwiązania.

Faza podsumowująca:

Uczniowie pracują w parach, rozwiązują na przemian przykłady z zadań interaktywnych.

Nauczyciel prosi wybranych uczniów o przedstawienie najważniejszych elementów, jakie były omawiane w trakcie lekcji. W ramach sprawdzenia ukształtowanych umiejętności, nauczyciel prosi 2-4 uczniów o zapisanie na tablicy wymyślonego przez siebie przykładu na przekształcanie wyrażeń algebraicznych. Wskazani przez nauczyciela uczniowie, rozwiązują je na tablicy. Nauczyciel omawia przebieg zajęć, wskazuje mocne i słabe strony pracy uczniów, udzielając im tym samym informacji zwrotnej.

Praca domowa:

Nauczyciel poleca uczniom wykonać te ćwiczenia interaktywne, które nie zostały wykonane podczas lekcji.
Prosi też uczniów o przygotowanie przykładów geometrycznego przedstawiania zagadnień arytmetycznych.

Materiały pomocnicze:

Działania na wyrażeniach algebraicznych

Wskazówki metodyczne opisujące różne zastosowania multimedium:

Uczniowie najpierw próbują sprowadzić do najprostszej postaci zapisane przez nauczyciela wyrażenia algebraiczne, a następnie sprawdzają poprawność ich wykonania, korzystając z infografiki.