




## Zastosowanie wzoru na sumę $n$ początkowych wyrazów ciągu arytmetycznego

- Wprowadzenie
- Przeczytaj
- Film samouczek
- Sprawdź się
- Dla nauczyciela



## Zastosowanie wzoru na sumę $n$ początkowych wyrazów ciągu arytmetycznego

Źródło: Daniele Levis Pelusi, dostępny w internecie: [unsplash.com](https://unsplash.com), domena publiczna.

W tym materiale zajmiemy się przykładami zastosowania wzoru na sumę  $n$  początkowych wyrazów ciągu arytmetycznego, do wyznaczania wielkości związanych z takim ciągiem – na przykład różnicy ciągu, czy jego pierwszego wyrazu. Będziemy rozważać głównie ciągi mające skończoną liczbę wyrazów. W przypadku ciągów nieskończonych, będziemy uwzględniać tylko niektóre ich wyrazy.

Przed zapoznaniem się z treściami zawartymi w tym materiale, warto przypomnieć sobie sposoby rozwiązywania równań i układów równań.

### Twoje cele

- Obliczysz sumę skończonej liczby wyrazów ciągu arytmetycznego.
- Wykorzystasz wzór na sumę  $n$  początkowych wyrazów ciągu arytmetycznego do wyznaczania wielkości związanych z tym ciągiem.

# Przeczytaj

Na początek przypomnienie najważniejszych pojęć i wzorów, związanych z ciągiem arytmetycznym. Będziemy przy tym zakładać, że dany ciąg, np. ciąg  $(a_n)$ , jest określony dla  $n \geq 1$  i  $n \in \mathbb{N}$ .

## Definicja: Ciąg arytmetyczny

Ciągiem arytmetycznym nazywamy ciąg liczbowy co najmniej trzywyrazowy, w którym każdy wyraz, począwszy od drugiego, powstaje przez dodanie do wyrazu poprzedniego liczby  $r$ , zwanej różnicą ciągu.

### Ciąg arytmetyczny $(a_n)$

Wyraz ogólny ciągu	Zależność między trzema kolejnymi wyrazami ciągu	Suma $n$ początkowych wyrazów ciągu
$a_n = a_1 + (n - 1) \cdot r$	$a_n = \frac{a_{n-1} + a_{n+1}}{2}$	$S_n = \frac{a_1 + a_n}{2} \cdot n$

W pierwszym przykładzie pokażemy, że znając sumę kilku wyrazów ciągu arytmetycznego można znaleźć wzór ogólny tego ciągu.

## Przykład 1

W dziesięciowyrazowym ciągu arytmetycznym  $(a_n)$  suma wyrazów parzystych jest równa 15, a suma wyrazów nieparzystych 12,5. Znajdziemy wzór ogólny tego ciągu.

Oznaczmy:

$a$  – pierwszy wyraz ciągu,

$r$  – różnica ciągu.

Pięć wyrazów nieparzystych ciągu tworzy również ciąg arytmetyczny o pierwszym wyrazie  $a$  i różnicy  $2r$ .

Korzystając ze wzoru na sumę  $n$  początkowych wyrazów ciągu arytmetycznego, zapisujemy:

$$\frac{a+a+8r}{2} \cdot 5 = 12,5$$

$$\frac{2a+8r}{2} \cdot 5 = 12,5$$

$$a + 4r = 2,5$$

Podobnie, wyrazy parzyste ciągu tworzą również [ciąg arytmetyczny](#) o pierwszym wyrazie  $a + r$  i różnicy  $2r$ .

Korzystając ze wzoru na sumę  $n$  początkowych wyrazów ciągu arytmetycznego, zapisujemy:

$$\frac{a+a+r+9r}{2} \cdot 5 = 15$$

$$\frac{2a+10r}{2} \cdot 5 = 15$$

$$a + 5r = 3$$

Otrzymaliśmy układ równań, który rozwiązujemy, odejmując stronami równania układu.

$$\begin{array}{l} a + 5r = 3 \\ a + 4r = 2,5 \end{array} \quad r = 0,5$$

Obliczamy pierwszy wyraz ciągu.

$$a + 5r = 3$$

$$a + 5 \cdot 0,5 = 3$$

$$a = 0,5$$

Zapisujemy wzór ogólny ciągu.

$$a_n = 0,5 + (n - 1) \cdot 0,5$$

$$a_n = 0,5n$$

W następnym przykładzie pokażemy, że znając wzór określający sumę początkowych wyrazów ciągu arytmetycznego, można określić niektóre jego własności.

### Przykład 2

Suma  $n$  początkowych wyrazów ciągu  $(a_n)$  określona jest wzorem  $S_n = 3n^2 - 16n$ . Wykażemy, że ciąg ten jest ciągiem arytmetycznym.

Aby ustalić, czy ciąg jest arytmetyczny, należy zbadać różnicę  $a_{n+1} - a_n$ .

Wyznamy najpierw  $a_{n+1}$ .

$$a_{n+1} = S_{n+1} - S_n$$

$$a_{n+1} = 3(n+1)^2 - 16(n+1) - 3n^2 + 16n$$

$$a_{n+1} = 3(n^2 + 2n + 1) - 16(n+1) - 3n^2 + 16n$$

$$a_{n+1} = 3n^2 + 6n + 3 - 16n - 16 - 3n^2 + 16n$$

$$a_{n+1} = 6n - 13$$

Teraz wyznaczamy  $a_n$ .

$$a_n = S_n - S_{n-1}$$

$$a_n = 3n^2 - 16n - 3(n-1)^2 + 16(n-1)$$

$$a_n = 3n^2 - 16n - 3(n^2 - 2n + 1) + 16(n-1)$$

$$a_n = 3n^2 - 16n - 3n^2 + 6n - 3 + 16n - 16$$

$$a_n = 6n - 19$$

Określamy różnicę  $a_{n+1} - a_n$ .

$$a_{n+1} - a_n = 6n - 13 - (6n - 19) = 6n - 13 - 6n + 19$$

$$a_{n+1} - a_n = 6$$

Różnica dwóch kolejnych wyrazów ciągu jest stała, zatem jest to ciąg arytmetyczny.

Na podstawie wzoru ciągu arytmetycznego określimy własności sumy ciągu arytmetycznego.

### Przykład 3

Dla pewnych liczb  $x, y$  wartości wyrażen  $x + y, 4x - y, 3x + 4y + 1, 9x - 4y + 1$  są w tej kolejności czterema początkowymi kolejnymi wyrazami ciągu arytmetycznego.

Obliczymy, ile co najmniej początkowych kolejnych wyrazów tego ciągu należy dodać, aby ich suma była większa od 100.

Korzystamy z własności kolejnych wyrazów ciągu arytmetycznego. Zapisujemy i przekształcamy odpowiedni układ równań.

$$\begin{cases} 2(4x - y) = x + y + 3x + 4y + 1 \\ 2(3x + 4y + 1) = 4x - y + 9x - 4y + 1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 8x - 2y = 4x + 5y + 1 \\ 6x + 8y + 2 = 13x - 5y + 1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 4x - 7y = 1 \\ -7x + 13y = -1 \end{cases}$$

Pierwsze równanie mnożymy przez 7, a drugie przez 4 i równania układu dodajemy stronami.

$$+ \begin{cases} 28x - 49y = 7 \\ -28x + 52y = -4 \end{cases} \quad 3y = 3$$

$$y = 1$$

Wyznaczoną liczbę podstawiamy do pierwszego równania układu i wyznaczamy  $x$ .

$$4x - 7 \cdot 1 = 1$$

$$4x = 8$$

$$x = 2$$

Teraz możemy wyznaczyć pierwszy wyraz ciągu i różnicę.

$$x + y = 2 + 1 = 3 - \text{pierwszy wyraz ciągu}$$

$$4x - y = 8 - 1 = 7 - \text{drugi wyraz ciągu}$$

$$7 - 3 = 4 - \text{różnica ciągu}$$

Aby obliczyć ile początkowych wyrazów ciągu należy dodać, aby otrzymana suma była większa od 100, rozwiązujemy nierówność:

$$\frac{3+3+(n-1) \cdot 4}{2} \cdot n > 100$$

$$[3 + (n - 1) \cdot 2] \cdot n > 100$$

$$2n^2 + n - 100 > 0$$

$$\Delta = 1 + 800 = 801$$

$$n_1 = \frac{-1 - \sqrt{801}}{4}$$

$$n_1 = \frac{-1 + \sqrt{801}}{4} \approx 6,8$$

$$n \in \left(-\infty, \frac{-1 - \sqrt{801}}{4}\right) \cup \left(\frac{-1 + \sqrt{801}}{4}, \infty\right) \text{ i } n \in \mathbb{N}_+$$

Wynika stąd, że  $n = 7, 8, 9, \dots$

Odpowiedź:

Należy dodać co najmniej 7 kolejnych wyrazów ciągu, aby otrzymana suma była większa od 100.

Pokażemy teraz zastosowanie wzoru na sumę początkowych wyrazów ciągu arytmetycznego w zadaniach pozornie niezwiązanych z ciągiem arytmetycznym.

#### Przykład 4

Obliczymy sumę wszystkich liczb dwucyfrowych, których reszta z dzielenia przez 4 jest równa 1.

Najmniejsza z liczb dwucyfrowych, która przy dzieleniu przez 4 daje resztę 1 to 13, a następne to 13, 17, 21, ..., 97

Kolejne liczby różnią się o 4.

Można więc przyjąć, że są wyrazami pewnego ciągu arytmetycznego  $(a_n)$ , w którym pierwszy wyraz to 13, a różnica to 4.

Zapisujemy wzór na  $n$ -ty wyraz tego ciągu.

$$a_n = 13 + (n - 1) \cdot 4 = 4n + 9$$

Korzystając z tego wzoru obliczamy, ile wyrazów liczy ten ciąg.

$$4n + 9 = 97$$

$$4n = 88$$

$$n = 22$$

Obliczamy sumę 22 wyrazów ciągu  $(a_n)$ .

$$S_{22} = \frac{13+97}{2} \cdot 22 = 1210$$

Odpowiedź:

Suma wszystkich liczb dwucyfrowych, których reszta z dzielenia przez 4 jest równa 1 wynosi 1210.

### Przykład 5

Rozwiążemy równanie  $1 + 7 + 13 + 19 + \dots + x = 481$ .

Zauważmy, że składniki lewej strony równania to kolejne wyrazy ciągu arytmetycznego  $(b_n)$ , którego pierwszy wyraz jest równy 1, a różnica  $7 - 1 = 6$ .

Zapisujemy wzór ogólny ciągu:

$$b_n = 1 + (n - 1) \cdot 6 = 6n - 5$$

Suma wszystkich wyrazów ciągu jest równa 481, czyli

$$\frac{1+6n-5}{2} \cdot n = 481$$

Z uzyskanego równania wyznaczamy  $n$ .

$$6n^2 - 4n - 962 = 0 \quad | : 2$$

$$3n^2 - 2n - 481 = 0$$

$$\Delta = 5776$$

$$\sqrt{\Delta} = 76$$

$$n_1 = -\frac{74}{6} < 0 \text{ - liczba nie spełnia warunków zadania}$$

$$n_2 = 13$$

Dodano 13 wyrazów ciągu, zatem  $x = b_{13}$ .

$$x = 6 \cdot 13 - 5$$

$$x = 73$$

Odpowiedź:

Rozwiązaniem równania jest liczba 73.

## Słownik

### ciąg arytmetyczny

ciągami arytmetycznym nazywamy ciąg liczbowy co najmniej trzywyrazowy, w którym każdy wyraz, począwszy od drugiego, powstaje przez dodanie do wyrazu poprzedniego liczby  $r$ , zwanej różnicą ciągu

# Film samouczek

---

## Polecenie 1

Zapoznaj się z filmem samouczkiem. Najpierw samodzielnie przeanalizuj zapisane tam przykłady i dopiero porównaj z rozwiązaniami.

Film dostępny pod adresem <https://zpe.gov.pl/a/DvwXv9ljY>

Film nawiązujący do treści lekcji dotyczącej zastosowania wzoru na sumę  $n$  początkowych wyrazów ciągu arytmetycznego.

---

## Polecenie 2

Suma  $n$  początkowych wyrazów ciągu arytmetycznego  $(a_n)$  wyraża się wzorem  $S_n = 4n^2 - 14n$ . Wyznaczmy wzór ogólny ciągu.

# Sprawdź się

---

Pokaż ćwiczenia:   

Ćwiczenie 1



Ćwiczenie 2



Ćwiczenie 3



Ćwiczenie 4



Ćwiczenie 5



Ćwiczenie 6



Ćwiczenie 7



W ciągu arytmetycznym  $(a_n)$  sześciowyrazowym suma wyrazów nieparzystych jest o 24 mniejsza od sumy wyrazów parzystych. Suma wyrazów parzystych jest równa 96. Znajdź wzór na  $n$ -ty wyraz ciągu.

Ćwiczenie 8



Ciąg arytmetyczny  $(a_n)$  określony jest wzorem  $a_n = 3n - 28$ . Oblicz sumę wszystkich ujemnych wyrazów ciągu.

# Dla nauczyciela

---

**Autor:** Justyna Cybulska

**Przedmiot:** Matematyka

**Temat:** Zastosowanie wzoru na sumę  $n$  początkowych wyrazów ciągu arytmetycznego

**Grupa docelowa:**

III etap edukacyjny, liceum, technikum, zakres rozszerzony

**Podstawa programowa:**

VI. Ciągi. Zakres podstawowy.

Uczeń:

- 1) oblicza wyrazy ciągu określonego wzorem ogólnym;
- 3) w prostych przypadkach bada, czy ciąg jest rosnący, czy malejący;
- 4) sprawdza, czy dany ciąg jest arytmetyczny lub geometryczny;
- 5) stosuje wzór na  $n$ -ty wyraz i na sumę  $n$  początkowych wyrazów ciągu arytmetycznego.

**Kształtowane kompetencje kluczowe:**

- kompetencje w zakresie rozumienia i tworzenia informacji
- kompetencje matematyczne oraz kompetencje w zakresie nauk przyrodniczych, technologii i inżynierii
- kompetencje cyfrowe
- kompetencje osobiste, społeczne i w zakresie umiejętności uczenia się

**Cele operacyjne:**

Uczeń:

- oblicza sumę skończonej liczby wyrazów ciągu arytmetycznego
- wykorzysta wzór na sumę  $n$  początkowych wyrazów ciągu arytmetycznego do wyznaczania wielkości związanych z tym ciągiem
- pełni wyznaczone role w grupie

**Strategie nauczania:**

- konstruktywizm

## **Metody i techniki nauczania:**

- słoneczko
- praca z tekstem

## **Formy pracy:**

- praca w grupach
- praca w parach
- praca całego zespołu klasowego

## **Środki dydaktyczne:**

- komputery z dostępem do Internetu w takiej liczbie, żeby każdy uczeń miał do dyspozycji komputer

## **Przebieg lekcji**

### **Faza wstępna:**

1. Uczniowie metodą słoneczka przypominają wiadomości dotyczące ciągu arytmetycznego – nieopisane promienie uzupełnią na końcu lekcji.
2. Nauczyciel podaje temat i cele zajęć, uczniowie ustalają kryteria sukcesu.

### **Faza realizacyjna:**

1. Uczniowie w grupach zapoznają się z tekstem zapisanym w sekcji „Przeczytaj”. Pracują w ten sposób, że starają się samodzielnie rozwiązać zadania zapisane w Przykładach, a następnie porównać z zapisami.  
Lider grupy odpowiedzialny jest za to, aby każdy z członków grupy zrozumiał rozwiązanie i potrafił samodzielnie rozwiązać podobny przykład.
2. Uczniowie w parach rozwiązują 4 wybrane ćwiczenia interaktywne.

### **Faza podsumowująca:**

1. Wskazany przez nauczyciela uczeń przedstawia krótko najważniejsze elementy zajęć, poznane wiadomości, ukształtowane umiejętności.  
Liderzy grup dzielą się refleksją na temat pracy w grupach – przedstawiają dobre pomysły i trudności. Zwracają też uwagę na sposób pełnienia wyznaczonych ról w grupie.  
Ochotnicy omawiają rozwiązania ćwiczeń – zwracając uwagę na ukształtowane umiejętności, w szczególności te, które można dopisać na promieniach słoneczka.
2. Nauczyciel omawia przebieg zajęć, wskazuje mocne i słabe strony pracy uczniów, ocenia pracę grup i pracę par.

### **Praca domowa:**

Uczniowie mają w domu rozwiązać ćwiczenia interaktywne, których nie rozwiązali w czasie zajęć.

**Materiały pomocnicze:**

[Ciągi – suma wyrazów ciągu arytmetycznego](#)

**Wskazówki metodyczne:**

Film samouczek można wykorzystać również na zajęciach wprowadzających pojęcie sumy ciągu arytmetycznego.