



## Przekształcanie wykresów funkcji trygonometrycznych

- [Wprowadzenie](#)
- [Przeczytaj](#)
- [Animacja](#)
- [Sprawdź się](#)
- [Dla nauczyciela](#)



## Przekształcanie wykresów funkcji trygonometrycznych

Źródło: dostępny w internecie: pixabay.com, domena publiczna.

Znasz już wykresy funkcji trygonometrycznych: sinus, cosinus, tangens. Omawiając przekształcenia wykresów funkcji, dowiedziałeś się, w jaki sposób z wykresu funkcji  $y = f(x)$  otrzymać wykresy funkcji:  $y = -f(x)$ ,  $y = f(-x)$ ,  $y = f(x - a) + b$ ,  $y = f(|x|)$  oraz  $y = |f(x)|$ . Na tej lekcji dowiesz się, jak stosować poznaną wiedzę do przekształcania wykresów funkcji trygonometrycznych, dzięki czemu będzie można analizować własności tych funkcji.

### Twoje cele

- Nauczysz się przekształcać wykresy funkcji trygonometrycznych.
- Nauczysz się, jak z wykresu funkcji  $y = f(x)$  otrzymać wykresy funkcji:  $y = af(x)$  oraz  $y = f(ax)$ .

# Przeczytaj

Na początek lekcji przypomnimy definicje poznanych przekształceń wykresów funkcji.

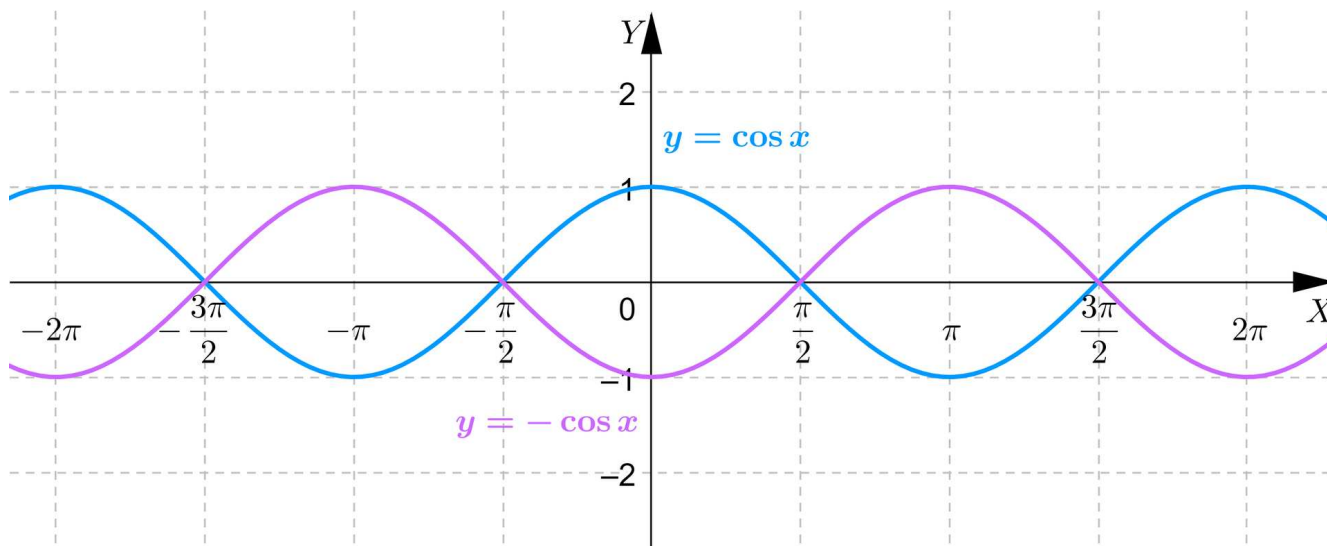
**Twierdzenie: o wykresie funkcji  $y = -f(x)$**

Wykres funkcji  $y = -f(x)$  otrzymujemy przez przekształcenie wykresu funkcji  $y = f(x)$  w symetrii względem osi  $X$ .

## Przykład 1

Narysujemy wykres funkcji  $y = -\cos x$ .

Przekształcamy wykres funkcji  $y = \cos x$  w symetrii względem osi  $X$  i otrzymujemy wykres funkcji  $y = -\cos x$ .



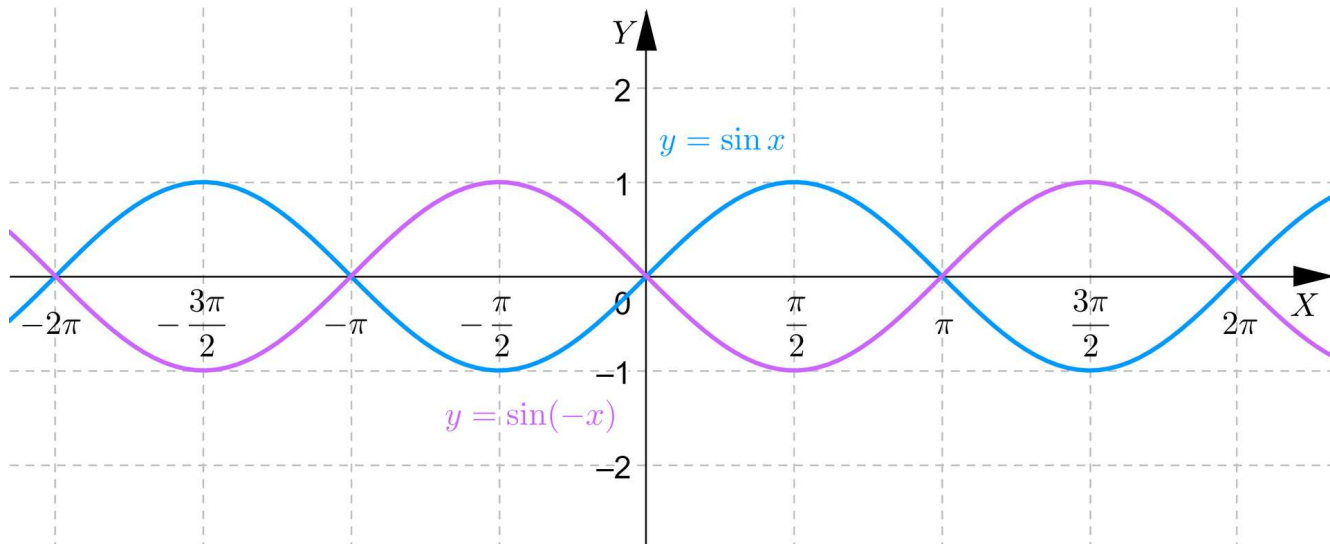
**Twierdzenie: o wykresie funkcji  $y = f(-x)$**

Wykres funkcji  $y = f(-x)$  otrzymujemy przez przekształcenie wykresu funkcji  $y = f(x)$  w symetrii względem osi  $Y$ .

## Przykład 2

Narysujemy wykres funkcji  $y = \sin(-x)$ .

Przekształcamy wykres funkcji  $y = \sin x$  w symetrii względem osi  $Y$  i otrzymujemy wykres funkcji  $y = \sin(-x)$ .



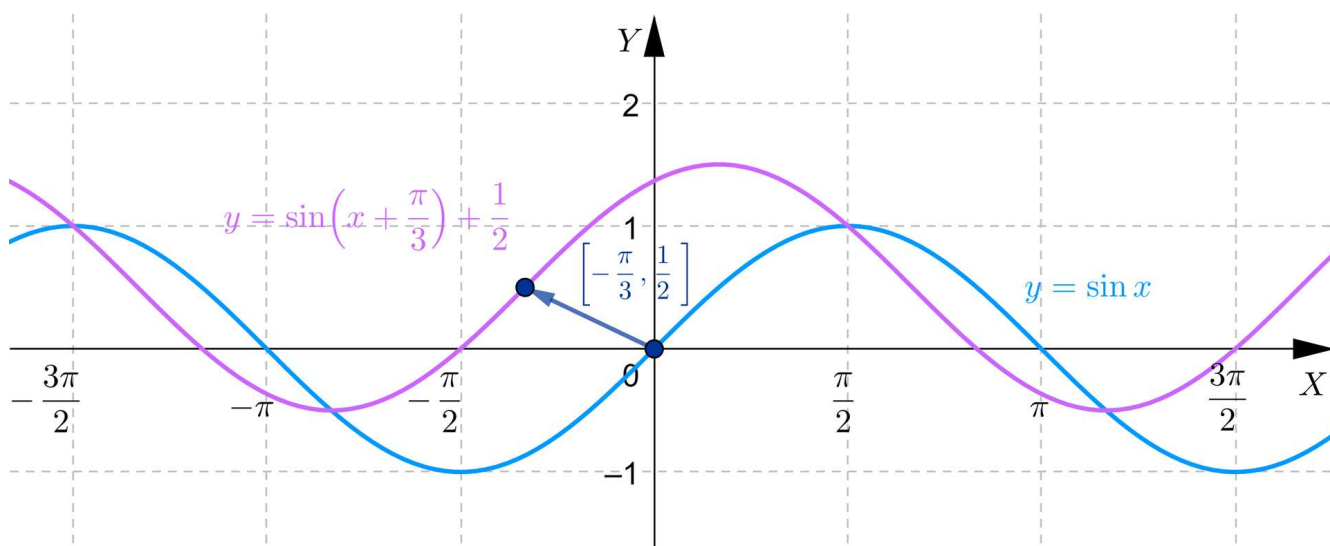
**Twierdzenie: o wykresie funkcji  $y = f(x - p) + q$**

Wykres funkcji  $y = f(x - p) + q$  otrzymujemy przez przekształcenie wykresu funkcji  $y = f(x)$  w translacji o wektor  $[p, q]$ .

### Przykład 3

Narysujemy wykres funkcji  $y = \sin\left(x + \frac{\pi}{3}\right) + \frac{1}{2}$ .

Przekształcamy wykres funkcji  $y = \sin x$  w translacji o wektor  $\left[-\frac{\pi}{3}, \frac{1}{2}\right]$  i otrzymujemy wykres funkcji  $y = \sin\left(x + \frac{\pi}{3}\right) + \frac{1}{2}$ .



**Twierdzenie: o wykresie funkcji  $y = |f(x)|$**

Aby narysować wykres funkcji  $y = |f(x)|$ , wykonujemy następujące czynności:

1. rysujemy wykres funkcji  $y = f(x)$ ,
2. punkty wykresu funkcji  $y = f(x)$ , znajdujące się pod osią  $X$ , odbijamy symetrycznie względem osi  $X$ ,

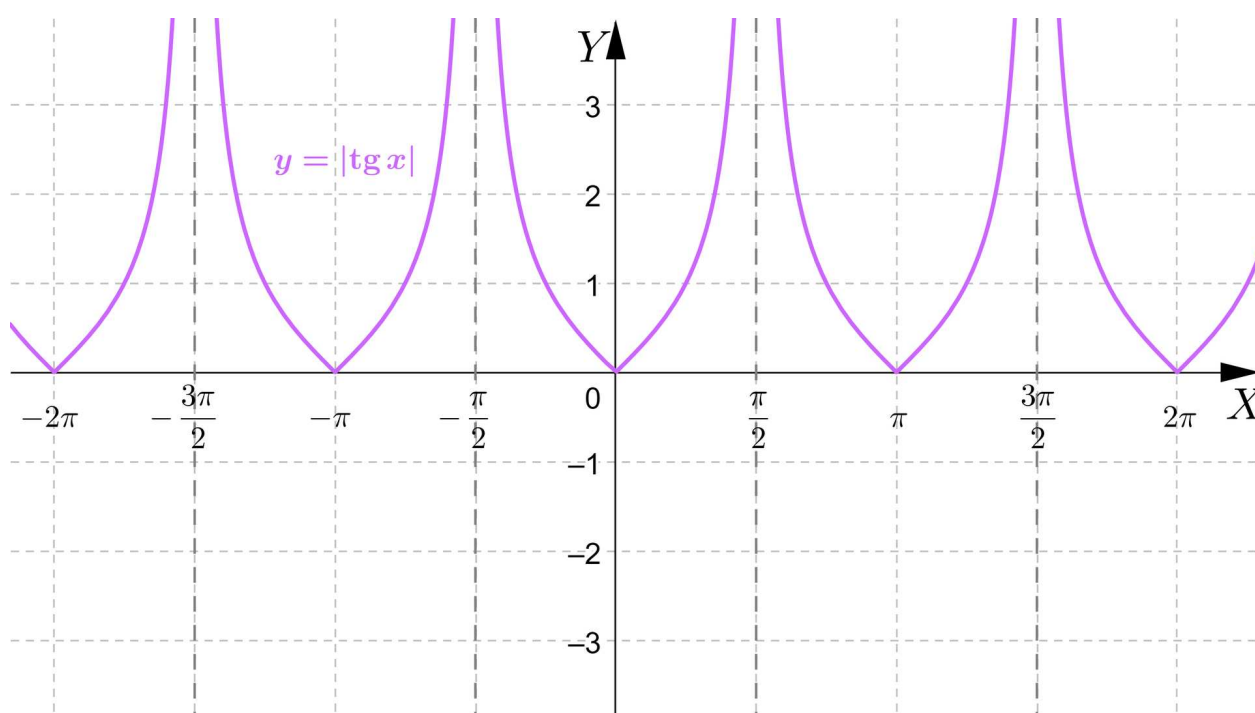
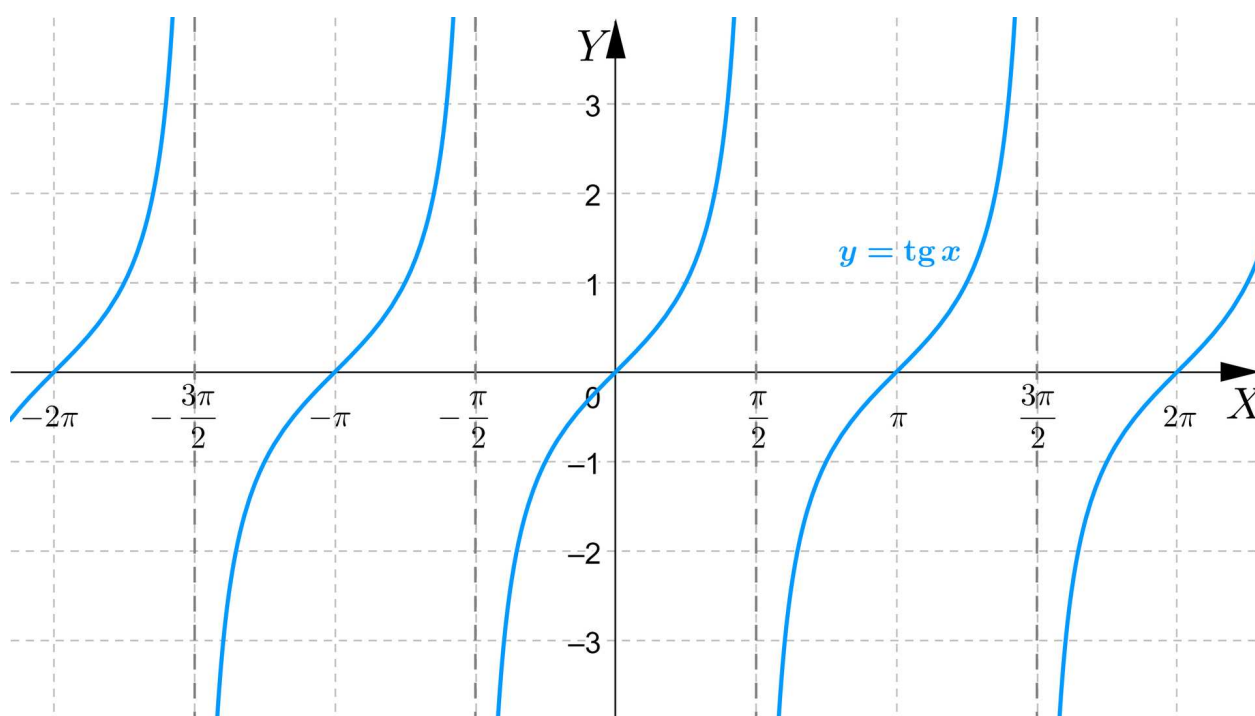
3. punkty wykresu funkcji  $y = f(x)$ , znajdujące się nad osią  $X$  i na osi  $X$  pozostawiamy bez zmian.

Opisane przekształcenie będziemy nazywać: **symetrią częściową względem osi  $X$** .

#### Przykład 4

Narysujemy wykres funkcji  $y = |\operatorname{tg} x|$ .

Przekształcamy wykres funkcji  $y = \operatorname{tg} x$  w **symetrii częściowej względem osi  $X$**  i otrzymujemy wykres funkcji  $y = |\operatorname{tg} x|$ .



**Twierdzenie: o wykresie funkcji  $y = f(|x|)$**

Aby narysować wykres funkcji  $y = f(|x|)$ , wykonujemy następujące czynności:

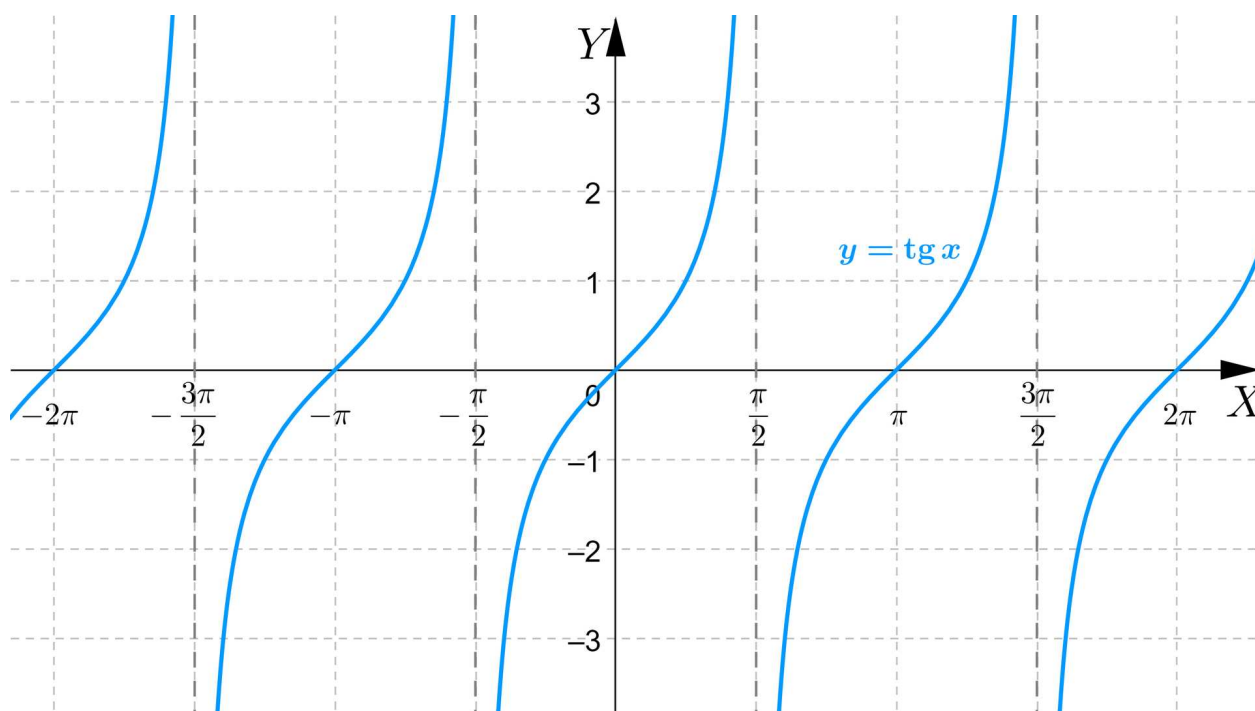
1. rysujemy wykres funkcji  $y = f(x)$ , ograniczając się tylko do tych części wykresu, dla których  $x \geq 0$  (części wykresu leżące w I i IV ćwiartce układu współrzędnych i na osi  $Y$ ),
2. odbijamy symetrycznie względem osi  $Y$  wykres funkcji  $y = f(x)$  dla  $x \geq 0$  i otrzymujemy część wykresu dla  $x < 0$ .
3. Wykres funkcji  $y = f(x)$  jest sumą dwóch, powyżej skonstruowanych wykresów funkcji.

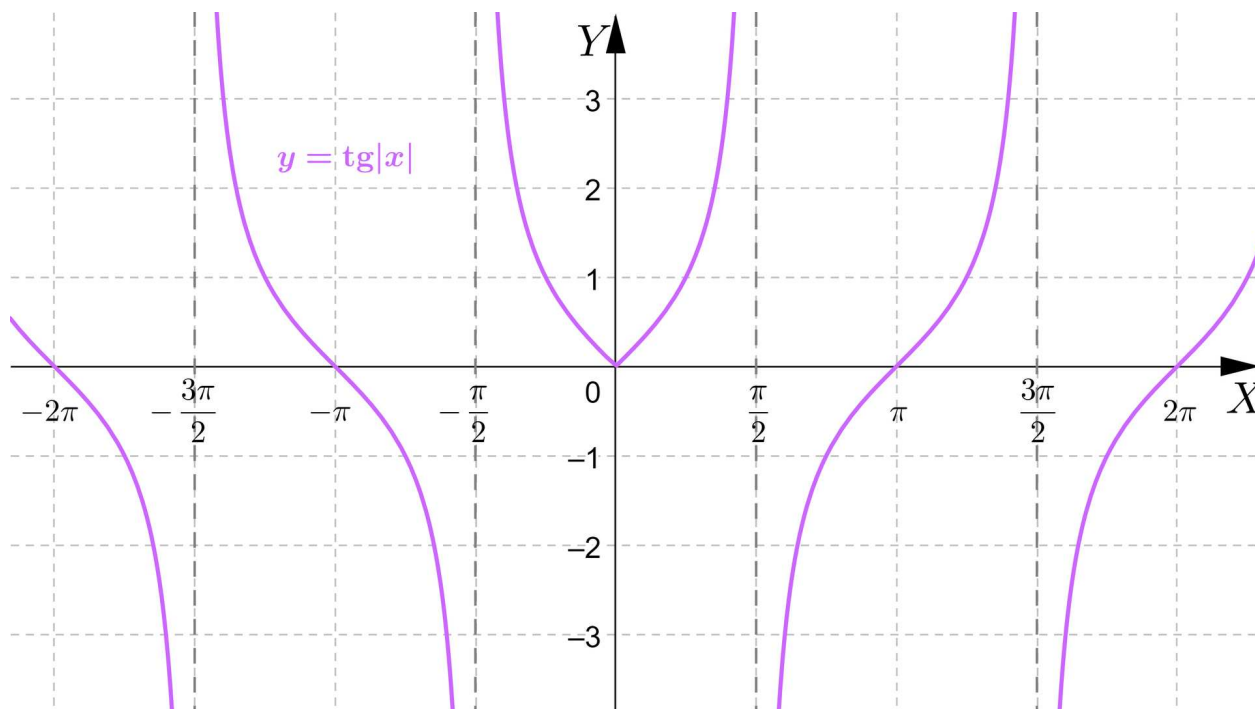
Opisane przekształcenie będziemy nazywać: **symetrią częściową względem osi  $Y$** .

**Przykład 5**

Narysujemy wykres funkcji  $y = \operatorname{tg}|x|$ .

Przekształcamy wykres funkcji  $y = \operatorname{tg} x$  w **symetrii częściowej względem osi  $Y$**  i otrzymujemy wykres funkcji  $y = \operatorname{tg}|x|$ .





### Przykład 6

Opiszemy przekształcenia, jakie należy wykonać, aby z wykresu funkcji  $y = \sin(x - \frac{\pi}{6})$  otrzymać wykres funkcji  $y = |\cos(|x + \frac{3\pi}{4}|) - \frac{1}{2}|$ .

### Rozwiązanie

Najpierw zmienimy we wzorze funkcji  $y = \sin(x - \frac{\pi}{6})$  funkcję sinus na cosinus za pomocą wzorów redukcyjnych:

$$\sin(x - \frac{\pi}{6}) = \cos(\frac{\pi}{2} - (x - \frac{\pi}{6})) = \cos(\frac{2\pi}{3} - x) = \cos(x - \frac{2\pi}{3})$$

Następnie wykonamy przesunięcie wykresu funkcji  $y = \cos(x - \frac{2\pi}{3})$  o wektor  $[-\frac{2\pi}{3}, 0]$  i otrzymamy wykres  $y = \cos(x)$ .

Kolejnym przekształceniem będzie symetria częściowa względem osi  $Y$ , której efektem będzie wykres funkcji:  $y = \cos(|x|)$ .

Przekształcamy wykres  $y = \cos(|x|)$  w translacji wektor  $[-\frac{3\pi}{4}, -\frac{1}{2}]$  i otrzymujemy wykres funkcji  $y = \cos(|x + \frac{3\pi}{4}|) - \frac{1}{2}$ .

Ostatnim przekształceniem będzie symetria częściowa względem osi  $X$ , dzięki czemu otrzymamy szukany wykres  $y = |\cos(|x + \frac{3\pi}{4}|) - \frac{1}{2}|$ .

## Słownik

symetria częściowa względem osi  $X$

przekształcenie, za pomocą którego z wykresu funkcji  $y = f(x)$  otrzymujemy wykres funkcji  $y = |f(x)|$

### **symetria częściowa względem osi Y**

przekształcenie, za pomocą którego z wykresu funkcji  $y = f(x)$  otrzymujemy wykres funkcji  $y = f(|x|)$

# Animacja

---

## Polecenie 1

Zapoznaj się z animacją, a następnie wykonaj polecenie 2.

# Wystąpił błąd

Film nawiązujący do treści materiału nawiązującej do przekształcania wykresów funkcji trygonometrycznych.

---

## Polecenie 2

# Sprawdź się

---

Pokaż ćwiczenia:   

Ćwiczenie 1



Ćwiczenie 2



Ćwiczenie 3



Ćwiczenie 4



Ćwiczenie 5



Ćwiczenie 6

Ćwiczenie 7



Opisz przekształcenia, jakie należy wykonać, aby z wykresu funkcji  $y = 3 \cos(x + \frac{\pi}{3})$  otrzymać wykres funkcji  $y = -\sin(|x + \frac{\pi}{4}|) + 1$ .

Ćwiczenie 8



Narysuj wykres funkcji  $y = -2 \operatorname{tg}(|x + 1|) + 2$ .

# Dla nauczyciela

---

**Autor:** Jacek Dymel

**Przedmiot:** Matematyka

**Temat:** Przekształcanie wykresów funkcji trygonometrycznych

**Grupa docelowa:**

III etap edukacyjny, liceum ogólnokształcące, technikum, zakres rozszerzony

**Podstawa programowa:**

Cele nauczania – wymagania ogólne:

V. Funkcje. Zakres podstawowy. Uczeń:

12) na podstawie wykresu funkcji  $y = f(x)$  szkicuje wykresy funkcji  $y = f(x - a)$ ,  $y = f(x) + b$ ,  $y = -f(x)$ ,  $y = f(-x)$ ;

Zakres rozszerzony. Uczeń spełnia wymagania określone dla zakresu podstawowego, a ponadto:

1) na podstawie wykresu funkcji  $y = f(x)$  rysuje wykres funkcji  $y = |f(x)|$ .

VII. Trygonometria.

Zakres rozszerzony. Uczeń spełnia wymagania określone dla zakresu podstawowego, a ponadto:

2) posługuje się wykresami funkcji trygonometrycznych: sinus, cosinus, tangens;

3) wykorzystuje okresowość funkcji trygonometrycznych;

**Kształtowane kompetencje kluczowe:**

- kompetencje w zakresie rozumienia i tworzenia informacji;
- kompetencje matematyczne oraz kompetencje w zakresie nauk przyrodniczych, technologii i inżynierii
- kompetencje cyfrowe
- kompetencje osobiste, społeczne i w zakresie umiejętności uczenia się

**Cele operacyjne:**

Uczeń:

- przekształca wykresy funkcji trygonometrycznych,
- rysuje wykresy funkcji:  $y = af(x)$  oraz  $y = f(ax)$  na podstawie wykresu funkcji  $y = f(x)$ .

### **Strategie nauczania:**

- konstruktywizm;
- konektywizm.

### **Metody i techniki nauczania:**

- odwrócona klasa;
- metaplan;
- dyskusja.

### **Formy pracy:**

- praca indywidualna;
- praca w parach;
- praca w grupach;
- praca całego zespołu klasowego.

### **Środki dydaktyczne:**

- komputery z głośnikami, słuchawkami i dostępem do internetu;
- zasoby multimedialne zawarte w e-materiale;
- tablica interaktywna/tablica, pisak/kreda.

### **Przebieg lekcji**

#### **Przed lekcją:**

1. Nauczyciel prosi uczniów o zapoznanie się z treściami zapisanymi w sekcji „Przeczytaj”.

#### **Faza wstępna:**

1. Przedstawienie tematu zajęć: „Przekształcanie wykresów funkcji trygonometrycznych” oraz wspólne z uczniami ustalenie kryteriów sukcesu.
2. Rozpoznawanie wiedzy uczniów.

#### **Faza realizacyjna:**

1. Nauczyciel prosi, aby wybrany uczeń przeczytał polecenie numer 1 z sekcji „Animacja” – „Obejrzyj uważnie prezentację, a następnie wykonaj polecenie pod prezentacją” Następnie prosi uczniów, aby zapoznali się z materiałem. Po ustalonym wcześniej czasie pyta czy były wątpliwości z jego zrozumieniem i tłumaczy je.
2. Prowadzący zapowiada uczniom, że w kolejnym kroku będą rozwiązywać ćwiczenia nr 1 i 2 z sekcji „Sprawdź się”. Każdy z uczniów robi to samodzielnie. Po ustalonym czasie

- wybrani uczniowie przedstawiają rozwiązania. Nauczyciel w razie potrzeby koryguje odpowiedzi, dopowiada istotne informacje, udziela uczniom informacji zwrotnej.
3. Kolejny etap to liga zadaniowa - uczniowie wykonują w grupach na czas ćwiczenia 3-5 z sekcji „Sprawdź się”, a następnie omawiają je na forum.
  4. Uczniowie wykonują indywidualnie ćwiczenia numer 6, 7 i 8 po wykonaniu każdego z nich następuje omówienie rozwiązania przez nauczyciela.

#### **Faza podsumowująca:**

1. Omówienie ewentualnych problemów z rozwiązaniem ćwiczeń z sekcji „Sprawdź się”.
2. Nauczyciel ponownie odczytuje temat lekcji: „Przekształcanie wykresów funkcji trygonometrycznych” i inicjuje krótką rozmowę na temat kryteriów sukcesu. Czego się uczniowie nauczyli? Na koniec prosi chętnego ucznia o podsumowanie i – jeśli to potrzebne – uzupełnia informacje.

#### **Praca domowa:**

1. Uczniowie opracowują FAQ (minimum 3 pytania i odpowiedzi prezentujące przykład i rozwiązanie) do tematu lekcji („Przekształcanie wykresów funkcji trygonometrycznych”).

#### **Materiały pomocnicze:**

[Wykresy i własności funkcji trygonometrycznych](#)

#### **Wskazówki metodyczne:**

- Nauczyciel może wykorzystać medium w sekcji „Animacja” do pracy przed lekcją. Uczniowie zapoznają się z jego treścią i przygotowują do pracy na zajęciach w ten sposób, żeby móc samodzielnie rozwiązać zadania w temacie „Przekształcanie wykresów funkcji trygonometrycznych”.