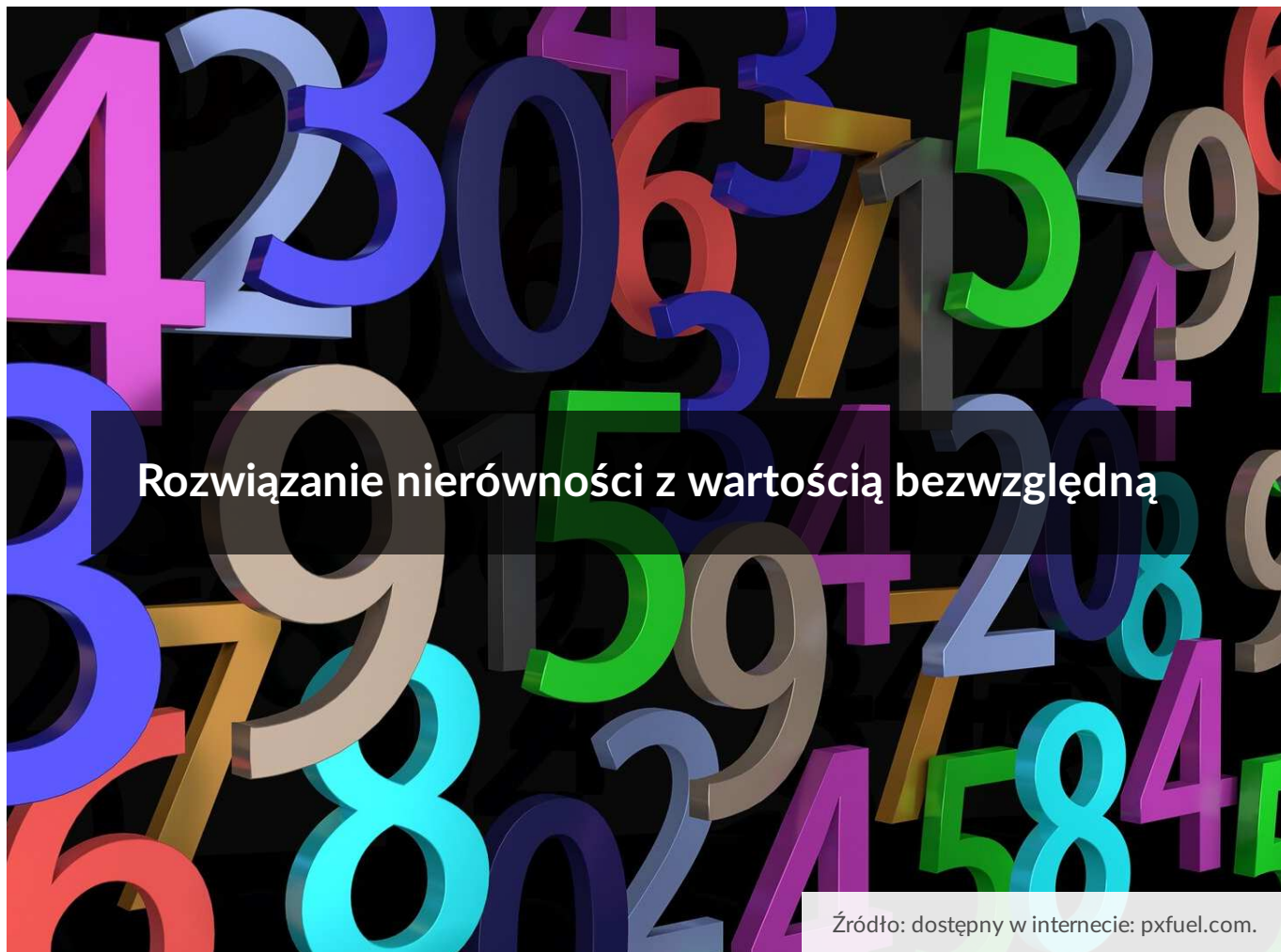




Rozwiązanie nierówności z wartością bezwzględną

- Wprowadzenie
- Przeczytaj
- Animacja
- Sprawdź się
- Dla nauczyciela



Rozwiązanie nierówności z wartością bezwzględną

Źródło: dostępny w internecie: pxfuel.com.

Wiesz już jak rozwiązywać nierówności, w których pojawia się wartość bezwzględna liczby. Umiesz zastosować definicję geometryczną i algebraiczną modułu, a także jego własności, aby znaleźć zbiór rozwiązań takich nierówności.

W tym materiale dowiesz się jak należy rozwiązywać trudniejsze nierówności, w których pojawia się więcej niż jeden moduł oraz takie, w których niewiadoma znajduje się pod modułem i poza nim.

Twoje cele

- Utrwalisz definicję geometryczną i algebraiczną wartości bezwzględnej liczby a .
- Udoskonalisz umiejętności rozwiązywania nierówności typu $|x| > a$, $|x| \geq a$ oraz $|x| < a$, $|x| \leq a$.
- Nauczysz się rozwiązywać trudniejsze nierówności z modułem.

Przeczytaj

Przeanalizuj przykłady przedstawiające rozwiązania trudniejszych nierówności z wartością bezwzględną. Przed ich przeczytaniem spróbuj samodzielnie wybrać sposób potrzebny do rozwiązania nierówności, spośród już poznanych. Pamiętaj, że często trzeba będzie skorzystać z więcej niż jednej metody i rozpatrzyć kilka przypadków.

Przypomnij sobie pojęcia alternatywy i koniunkcji nierówności.

Przykład 1

Rozwiąż nierówność $||x + 2| - 4| + 1 \leq 3$.

Przekształcamy nierówność równoważnie, a następnie opuszczamy zewnętrzny moduł, korzystając z poznanej już własności wartości bezwzględnej liczby.

Dla dowolnego $a \in \mathbb{R}$ i dowolnego $b > 0$:

$$|a| \leq b \Leftrightarrow -b \leq a \leq b.$$

$$||x + 2| - 4| + 1 \leq 3 \quad | -1$$

$$||x + 2| - 4| \leq 2$$

$$-2 \leq |x + 2| - 4 \leq 2 \quad | +4$$

$$2 \leq |x + 2| \leq 6$$

Otrzymaliśmy **koniunkcję dwóch nierówności**: $|x + 2| \geq 2 \wedge |x + 2| \leq 6$.

Rozwiązujemy je kolejno.

- **warunek I:**

$$|x + 2| \geq 2$$

$$x + 2 \leq -2 \vee x + 2 \geq 2$$

$$x \leq -4 \vee x \geq 0$$

A zatem pierwszy warunek spełniają liczby $x \in (-\infty, -4) \cup \langle 0, \infty \rangle$.

- **warunek II:**

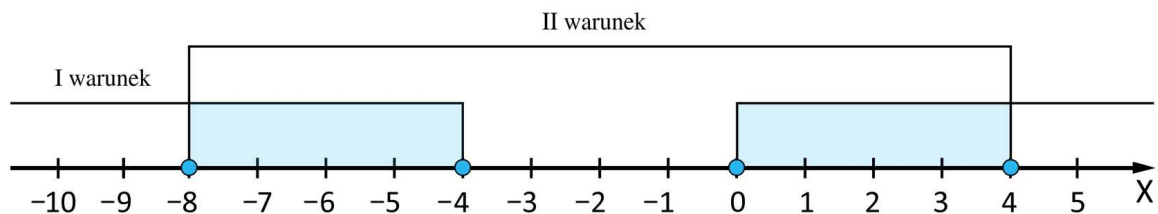
$$|x + 2| \leq 6$$

$$-6 \leq x + 2 \leq 6 \quad | -2$$

$$-8 \leq x \leq 4$$

Drugi warunek spełniają liczby $x \in \langle -8, 4 \rangle$.

Możemy zaznaczyć otrzymane zbiory rozwiązań na jednej osi liczbowej.



Rozwiązaniem jest iloczyn otrzymanych przedziałów, a więc ostatecznie:

$$x \in \langle -8, -4 \rangle \cup \langle 0, 4 \rangle$$

Przykład 2

Rozwiąż nierówność $4 \cdot |x + 3| + 2x > 6$.

W tym przykładzie skorzystamy z algebraicznej definicji wartości bezwzględnej.

Rozpatrzmy więc dwa przypadki, gdzie ostatecznym rozwiązaniem będzie [alternatywa dwóch nierówności](#)

- **przypadek I:**

$$x + 3 \geq 0 \Leftrightarrow x \geq -3 \Rightarrow |x + 3| = x + 3$$

Wtedy nierówność przyjmuje postać:

$$4 \cdot (x + 3) + 2x > 6$$

$$4x + 12 + 2x > 6$$

$$6x > -6$$

$$x > -1$$

Rozwiązaniem tego warunku są liczby spełniające układ nierówności

$$\begin{cases} x \geq -3 \\ x > -1 \end{cases} \Rightarrow x \in (-1, \infty)$$

- **przypadek II:**

$$x + 3 < 0 \Leftrightarrow x < -3 \Rightarrow |x + 3| = -x - 3$$

Wtedy nierówność przyjmuje postać:

$$4 \cdot (-x - 3) + 2x > 6$$

$$-4x - 12 + 2x > 6$$

$$-2x > 18$$

$$x < -9$$

Rozwiązaniem tego warunku są liczby spełniające układ nierówności

$$\begin{cases} x \leq -3 \\ x < -9 \end{cases} \Rightarrow x \in (-\infty, -9).$$

Ostatecznie:

$$x \in (-\infty, -9) \cup (-1, \infty)$$

Przykład 3

Rozwiąż nierówność $3\sqrt{x^2 + 2x + 1} + 2 \cdot |x + 1| \leq 10$.

Przy rozwiązywaniu tej nierówności, będziemy korzystać z własności wartości bezwzględnej.

Dla dowolnego $a \in \mathbb{R}$:

$$\sqrt{a^2} = |a|$$

$$3\sqrt{x^2 + 2x + 1} + 2 \cdot |x + 1| \leq 10$$

$$3\sqrt{(x + 1)^2} + 2 \cdot |x + 1| \leq 10$$

$$3 \cdot |x + 1| + 2 \cdot |x + 1| \leq 10$$

Otrzymaliśmy dwa takie same moduły, a więc możemy je dodać.

$$5 \cdot |x + 1| \leq 10$$

$$|x + 1| \leq 2$$

Taką nierówność już doskonale potrafisz rozwiązać.

$$-2 \leq x + 1 \leq 2$$

$$-2 - 1 \leq x \leq 2 - 1$$

$$-3 \leq x \leq 1$$

Zapisujemy zbiór rozwiązań:

$$x \in \langle -3, 1 \rangle.$$

Słownik

alternatywa dwóch nierówności

dwie nierówności połączone spójnikiem logicznym „lub” (\vee); jej zbiorem rozwiązań są liczby, które spełniają pierwszą lub drugą nierówność

koniunkcja dwóch nierówności

dwie nierówności połączone spójnikiem logicznym „i” (\wedge); jej zbiorem rozwiązań są liczby, które spełniają jednocześnie pierwszą i drugą nierówność

Animacja

Polecenie 1

Zapoznaj się z kolejnymi przykładami rozwiązywania nierówności z modułami, przeanalizuj przedstawione metody.

Film dostępny pod adresem <https://zpe.gov.pl/a/DcPF0WUNm>

Film nawiązujący do treści materiału dotyczącego nierówności z wartością bezwzględną.

Polecenie 2

Rozwiąż nierówności. Spróbuj zastosować przedstawione w animacji metody.

a. $||x| - 4| \leq 3$

b. $||x + 1| - 2| - 3| > 4$

Sprawdź się

Pokaż ćwiczenia:   

Ćwiczenie 1



Ćwiczenie 2



Ćwiczenie 3



Ćwiczenie 4



Ćwiczenie 5



Ćwiczenie 6



Ćwiczenie 7



Przyporządkuj nierówności odpowiedni wykres, następnie odczytaj z nich zbiór rozwiązań nierówności.

Ćwiczenie 8



Dane są zbiory:

$$A = \{x \in \mathbb{R} : \sqrt{x^2 + 6x + 9} + |x + 3| > 4\}$$

$$B = \{x \in \mathbb{R} : 2 \cdot |x - 2| + \sqrt{4x^2 - 16x + 16} \leq 16\}$$

Wyznacz zbiory: $A \cup B$, $A \cap B$, $A \setminus B$, $B \setminus A$.

Dla nauczyciela

Autor: Beata Wojciechowska

Przedmiot: Matematyka

Temat: Rozwiązywanie nierówności z wartością bezwzględną

Grupa docelowa:

III etap edukacyjny, liceum, technikum, zakres rozszerzony

Podstawa programowa:

I. Liczby rzeczywiste. Zakres podstawowy.

Uczeń:

7) stosuje interpretację geometryczną i algebraiczną wartości bezwzględnej, rozwiązuje równania i nierówności typu: $|x + 4| = 5$, $|x - 2| < 3$, $|x + 3| \geq 4$.

Kształtowane kompetencje kluczowe:

- kompetencje w zakresie rozumienia i tworzenia informacji
- kompetencje matematyczne oraz kompetencje w zakresie nauk przyrodniczych, technologii i inżynierii
- kompetencje cyfrowe
- kompetencje osobiste, społeczne i w zakresie umiejętności uczenia się

Cele operacyjne:

Uczeń:

- utrwała definicję geometryczną i algebraiczną wartości bezwzględnej
- utrwała rozwiązywanie prostych nierówności typu $|x| \geq a$, $|x| \leq a$ oraz $|x - a| \geq b$, $|x - a| \leq b$
- rozwiązuje trudniejsze nierówności z modułami

Strategie nauczania:

- konstruktywizm

Metody i techniki nauczania:

- analiza przypadku
- rozmowa nauczająca z wykorzystaniem przykładów i medium bazowego

Formy pracy:

- praca indywidualna
- praca w grupach
- praca w parach

Środki dydaktyczne:

- komputery z głośnikami i dostępem do Internetu, słuchawki
- zasoby multimedialne zawarte w e-materiale
- tablica interaktywna/tablica, pisak/kreda

Przebieg lekcji

Faza wstępna:

1. Nauczyciel podaje temat i cele zajęć oraz wspólnie z uczniami ustala kryteria sukcesu.
2. Uczniowie przypominają sobie wiadomości i umiejętności dotyczące rozwiązywania prostych nierówności z wartością bezwzględną.

Faza realizacyjna:

1. Uczniowie pracują w parach metodą analizy przypadku. Analizują przykłady zawarte w części „Przeczytaj”.
2. Uczniowie wspólnie z nauczycielem analizują i omawiają przykład przedstawiony w medium bazowym, a następnie wykonują zawarte pod nim polecenie. Wątpliwości konsultują z nauczycielem.
3. Uczniowie pracując indywidualnie wykonują ćwiczenia interaktywne 1 – 8.

Faza podsumowująca:

1. Jako podsumowanie nauczyciel zadaje uczniom pytania dotyczące ćwiczeń. Uczniowie wskazują nauczycielowi, na jakie trudności natknęli się rozwiązując zadania. Wspólnie znajdują rozwiązanie problemów.
2. Nauczyciel omawia przebieg zajęć, wskazuje mocne i słabe strony pracy uczniów, udzielając im tym samym informacji zwrotnej.

Praca domowa:

Uczniowie wykonują ćwiczenia, których nie zdążyli zrobić na lekcji.

Materiały pomocnicze:

- [Wartość bezwzględna - definicja](#)
- [Równania i nierówności liczbowe. Przedziały liczbowe](#)

Wskazówki metodyczne:

Uczniowie mogą wykorzystać materiały multimedialne do utrwalenia wiadomości z lekcji i jako pomoc przy odrabianiu pracy domowej.