



Momenty bezwładności brył jednorodnych.

- [Wprowadzenie](#)
- [Przeczytaj](#)
- [Grafika interaktywna](#)
- [Sprawdź się](#)
- [Dla nauczyciela](#)



Momenty bezwładności brył jednorodnych.

Czy to nie ciekawe?

Jeśli używamy wiertarki, wiertło obraca się wokół najdłuższej osi, bo tak sobie zazwyczaj życzymy. Jeśli zamykamy podłogę, kij szczotki wykonuje skomplikowany ruch, zwykle nie tylko postępowy. Hantelkę łapiemy blisko środka masy, zapobiegając obrotowi. A jakiej trzeba użyć siły dla wprawienia w ruch obrotowy drzwi, czyli prostopadłościanu mogącego obracać się wokół jednego z boków (zwykle dłuższego)?

Aby przy zadanych siłach działających na bryłę sztywną móc opisać jej ruch obrotowy wokół ustalonej z góry osi, musimy znać jej moment bezwładności względem tej osi. Jest to analogiczna sytuacja do znanej nam z opisu ruchu postępowego, gdzie miarą „sprzeciwu” ciała wobec działającej na nie siły jest masa - zazwyczaj dana w problemie, dla ciał jednorodnych proporcjonalna do ich objętości.

W mechanice bryły sztywnej niebanalnym problemem jest obliczenie momentu bezwładności. Temu poświęcony jest niniejszy e-materiał.



Rys. a. Zdjęcie historycznych drzwi w Pradze. Jak dużego momentu siły trzeba aby je otworzyć? Fot. Matěj Bařha [CC BY-SA 3.0], [via Wikimedia Commons](#)

Twoje cele

W tym e-materiale:

- dowiesz się, czym jest moment bezwładności;
- wyznaczysz momenty bezwładności wybranych jednorodnych brył.

Przeczytaj

Warto przeczytać

Na wstępie przypomnijmy, że **moment bezwładności** dla skończonego zbioru punktów materialnych definiujemy jako sumę momentów bezwładności wszystkich jego elementów:

$$I = \sum_{i=1}^n I_i = \sum_{i=1}^n m_i r_i^2, \quad (1)$$

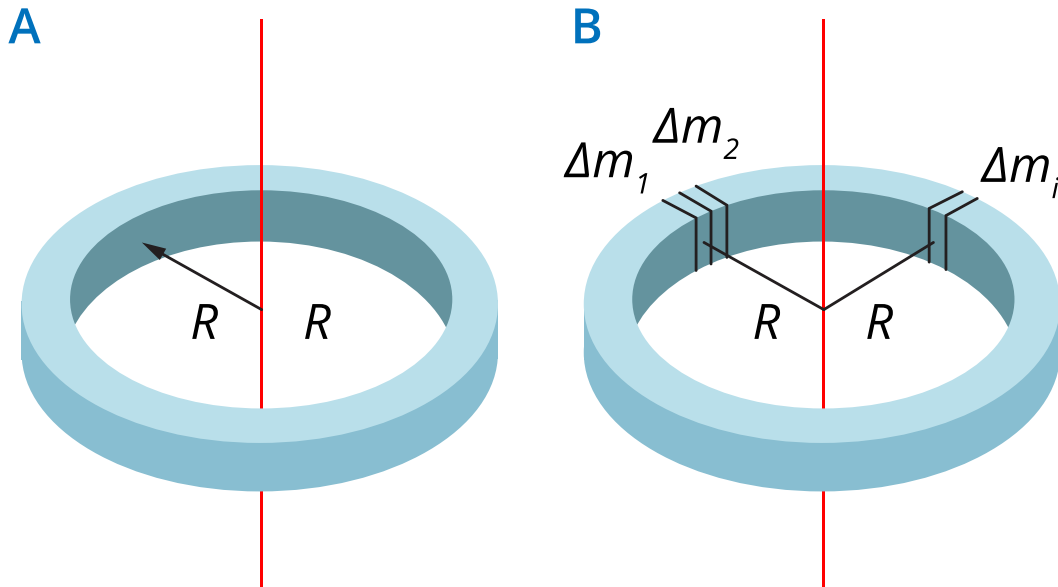
przy czym r_i oznacza odległość i -tego elementu od osi obrotu. Korzystając z tej zależności, odpowiednio uogólnionej, można obliczyć moment bezwładności dowolnej bryły sztywnej. Dla znanych nam z geometrii brył zwykle jesteśmy w stanie podać pewną wielkość r o wymiarze długości, w pewnym sensie charakterystyczną dla bryły. Dla walca czy sfery będzie to promień, dla stożka – promień jego podstawy. Uwaga – wybór ten może się wydawać „naturalny”, ale nie jest jednoznaczny – jest kwestią umowy.

Dla ustalonego dla danej bryły promienia r wynik sumowania w (1) będzie można przedstawić jako

$$I = k m r^2, \quad (2)$$

gdzie k to bezwymiarowy współczynnik, który zależy od kształtu bryły i tego, którą oś wybraliśmy. Na przykład dla cienkiego pręta o długości l i masie m współczynnik ten wynosi $\frac{1}{3}$, jeśli obrotu dokonujemy wokół osi prostopadłej do pręta, przechodzącej przez jego koniec. Jeśli obracamy pręt wokół środka masy, prostopadle do jego osi, to współczynnik otrzymujemy $k = \frac{1}{12}$. A jaka będzie wartość współczynnika k dla rury?

Spójrzmy na Rys. 1. Widać na nim cienkościenną rurę o promieniu R i zaniedbywalnej grubości ΔR . Podzielimy ją na n małych elementów, jak na części B Rys. 1. Masa każdego z tych elementów będzie wynosiła Δm_i . Jaki będzie moment bezwładności takiej bryły?



Rys. 1. Cienkościenny pierścień o promieniu R podzielony na n małych elementów.

Skorzystajmy ze wzoru (1). Otrzymamy

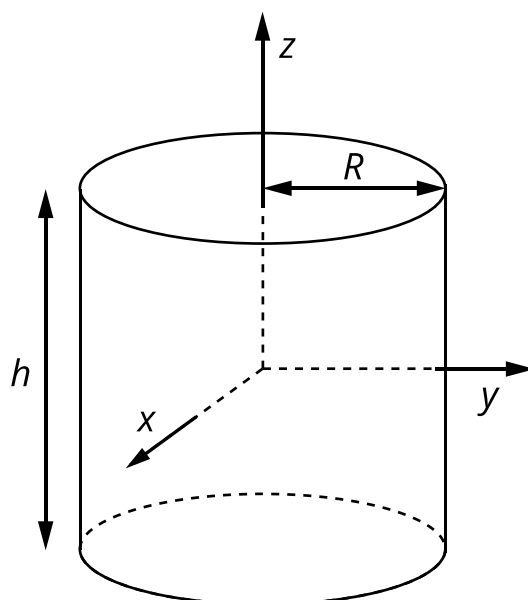
$$\begin{aligned}
 I &= \sum_{i=1}^n \Delta m_i r_i^2 = \Delta m_1 R^2 + \Delta m_2 R^2 + \dots + \Delta m_n R^2 = \\
 &= (\Delta m_1 + \Delta m_2 + \dots + \Delta m_n) R^2 = m R^2 .
 \end{aligned}
 \tag{3}$$

Zatem moment bezwładności cienkościennej rury względem jej osi symetrii wynosi

$$I = m R^2 .
 \tag{4}$$

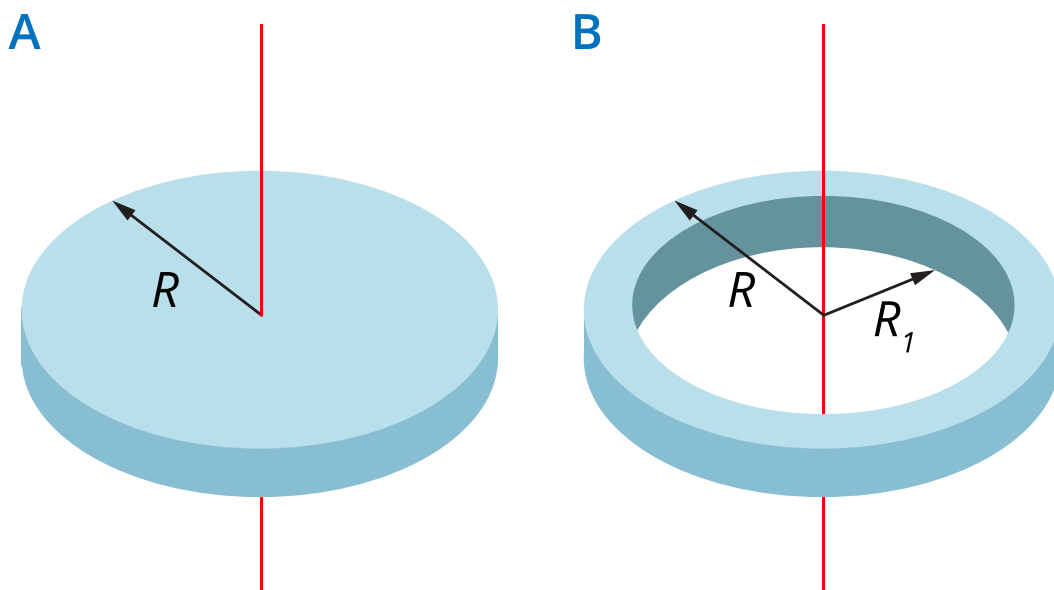
Zauważmy, że nigdzie nie pojawia się tu wysokość (czy długość) tej rury, tj. rozmiar wzdłuż osi symetrii. Możemy więc równie dobrze patrzeć na (4) jako na wyrażenie na moment bezwładności cienkiego pierścienia o promieniu R i masie m - znów: względem osi prostopadłej do jego płaszczyzny, przechodzącej przez jego środek. Możemy powiedzieć, że współczynnik k ze wzoru (2) wynosi tu 1, ale gdybyśmy z jakichkolwiek względów zechcieli zmienić umowę co do promienia, k również by się zmieniło, ponieważ wielkość fizyczna I pozostaje niezmienną.

Obliczymy teraz moment bezwładności jednorodnego walca o wysokości h i promieniu R względem osi pokrywającej się z jego osią symetrii obrotowej, jak na Rys. 2. Naszym zadaniem będzie znalezienie wartości współczynnika k , który wprowadziliśmy we wzorze (2).



Rys. 2. Walec o wysokości h i promieniu R

W pierwszym kroku podzielimy ten walec na dwie części. Z walca „wytniemy” cienki pierścień o grubości ΔR . Jego promień zewnętrzny nadal będzie wynosił R , a wewnętrzny $R_1 = R - \Delta R$.



Rys. 3. Wycięcie z jednorodnego walca cienkiego pierścienia

Moment bezwładności całego ciała jest sumą momentów bezwładności jego składowych. Moment bezwładności pełnego walca o promieniu R oznaczmy przez I_{wR} . Analogicznie, moment bezwładności mniejszego walca o promieniu R_1 oznaczmy przez I_{wR_1} . Moment bezwładności pierścienia to I_p , opisany wzorem (4). Ale skoro

$$I_{wR} = I_p + I_{wR_1},$$

(5)

to

$$I_p = I_{wR} - I_{wR_1}.$$

(6)

Innymi słowy: moment bezwładności pierścienia to różnica momentu bezwładności całego walca o promieniu R i walca o promieniu R_1 . Masa pierwotnego walca to m . Masa mniejszego - co można pokazać, licząc ich objętości - wynosi $m_1 = m \frac{R_1^2}{R^2}$. Wstawiając ten wynik do wzoru (4), otrzymamy

$$\begin{aligned} I_p &= I_{wR} - I_{wR_1} = kmR^2 - km_1R_1^2 = \\ &= kmR^2 - km \frac{R_1^2}{R^2} R_1^2 = k \frac{m}{R^2} (R^4 - R_1^4). \end{aligned}$$

(7)

Ze wzoru na różnicę kwadratów wynika, że

$$I_p = \frac{km}{R^2} (R^4 - R_1^4) = k \frac{m(R^2 - R_1^2)}{R^2} (R^2 + R_1^2),$$

ale czynnik $\frac{m(R^2 - R_1^2)}{R^2}$ to masa pierścienia m_p . Wobec tego

$$I_p = km_p (R^2 + R_1^2).$$

(8)

Ponieważ założyliśmy, że pierścień jest bardzo cienki, to możemy przyjąć, że $R_1 \approx R$. Wtedy (8) uprości się do

$$I_p \approx 2km_p R^2.$$

(9)

Ale to jest inne wyrażenie wyniku, który już znamy. Przyrównując lewe strony (9) i (4), otrzymujemy wartość współczynnika k

$$m_p R^2 = 2km_p R^2,$$

skąd

$$k = \frac{1}{2},$$

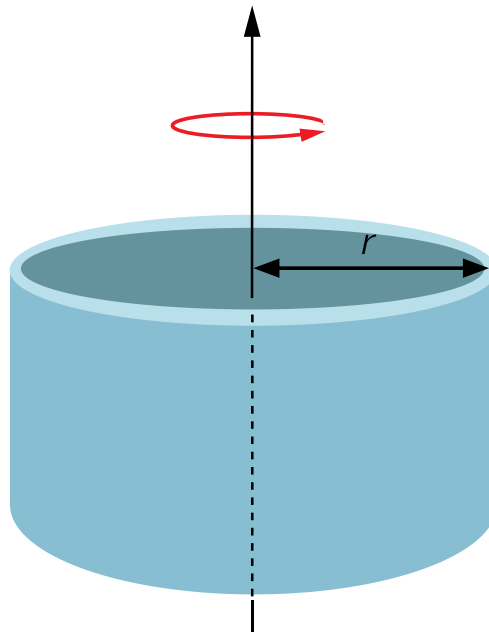
więc ostatecznie

$$I_p = \frac{1}{2} m R^2.$$

Ogólnie rzecz biorąc tego typu składanie i wycinanie jak powyżej, daje prawidłowy wynik, ale nie zawsze mamy odpowiednik wzoru (4). Np. gdybyśmy chcieli w ten sposób „poskładać” kulę z koncentrycznych sfer, możemy to zrobić, ale jeśli nie znamy momentu bezwładności sfery, powyższa metoda najwyżej pozwoli nam powiązać współczynniki k dla sfery i kuli. W harmonii poniżej możesz zapoznać się z wyrażeniami opisującymi momenty bezwładności różnych jednorodnych brył.

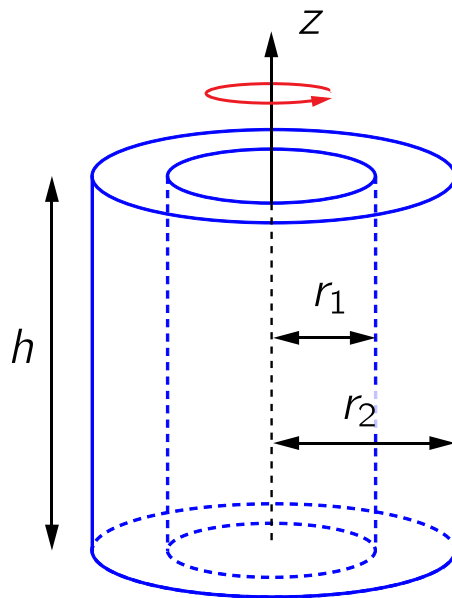
Wyrażenia opisujące momenty bezwładności kilku brył względem pokazanych osi. Każda z brył ma masę m i stałą gęstość ρ .

Cienkościenne rura o promieniu r



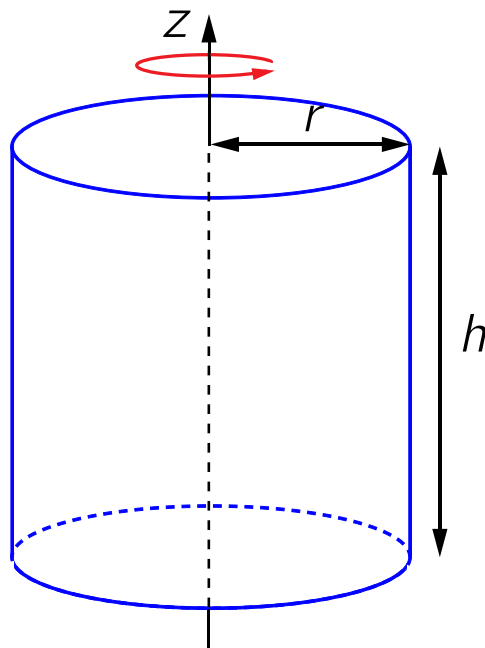
$$I = mr^2$$

Rura o promieniach wewnętrznym r_1 i zewnętrznym r_2



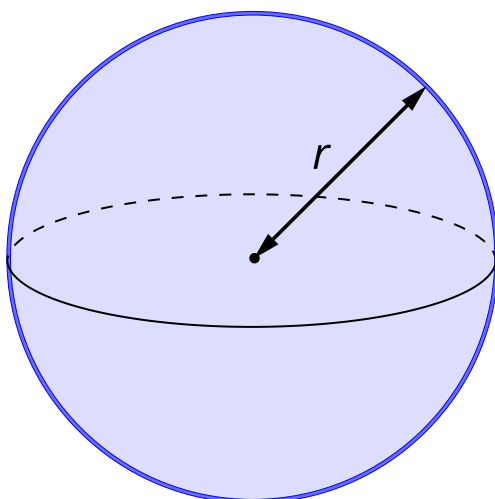
$$I_z = \frac{1}{2} m (r_1^2 + r_2^2) = \frac{1}{2} \pi \rho h (r_2^4 - r_1^4)$$

Lity walec o promieniu r



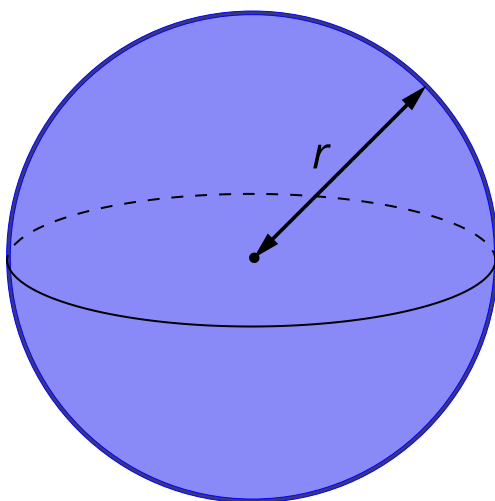
$$I_z = \frac{1}{2} m r^2$$

Sfera o promieniu r , obrót względem dowolnej średnicy



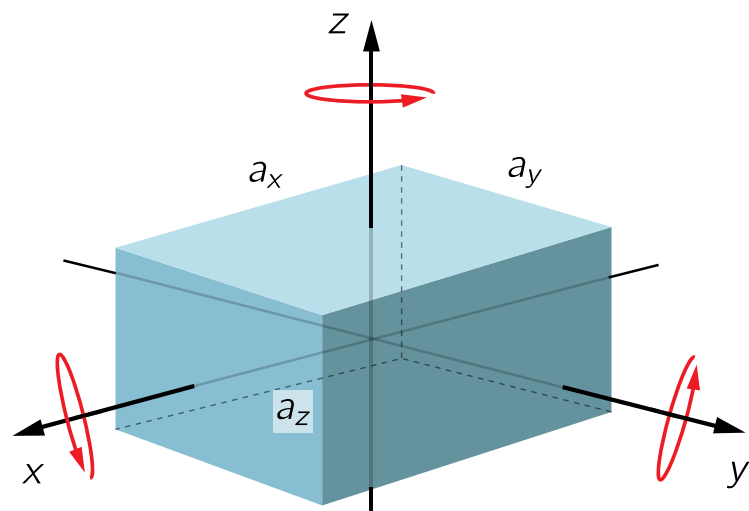
$$I = \frac{2}{3}mr^2$$

Kula o promieniu r , obrót względem dowolnej średnicy



$$I = \frac{2}{5}mr^2$$

Prostopadłościan o krawędziach długości a_x , a_y i a_z .

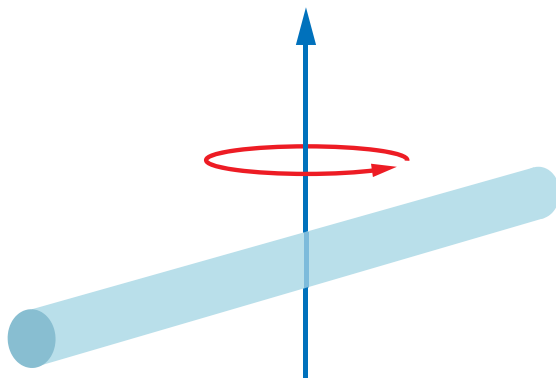


$$I_x = \frac{1}{12} m (a_y^2 + a_z^2)$$

$$I_y = \frac{1}{12} m (a_z^2 + a_x^2)$$

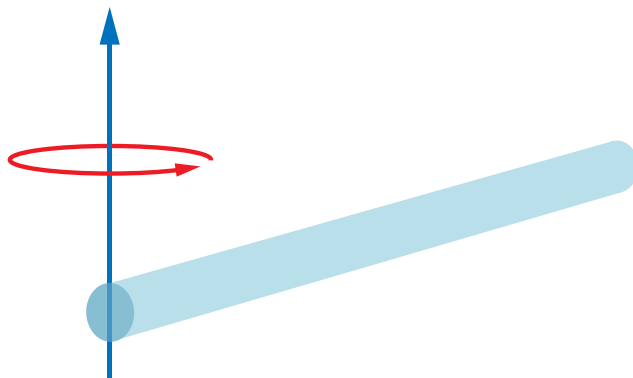
$$I_z = \frac{1}{12} m (a_x^2 + a_y^2)$$

Pręt o długości l i zaniedbywalnej grubości przekroju poprzecznego, oś obrotu w środku masy pręta.



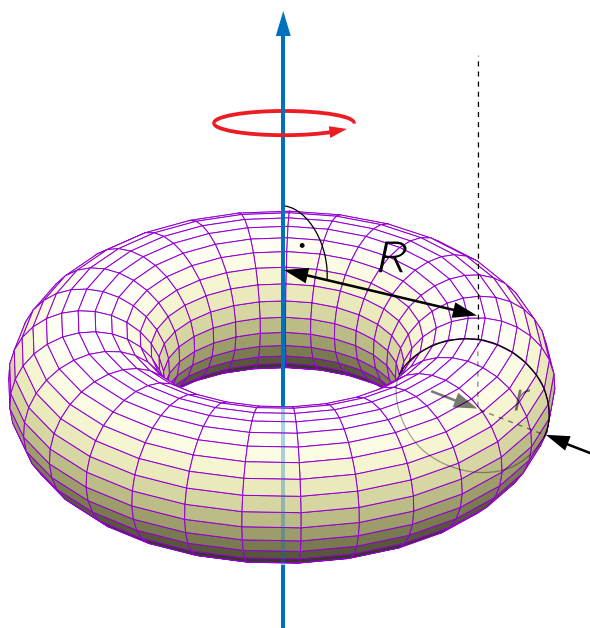
$$I = \frac{1}{12} m l^2$$

Pręt o długości l i zaniedbywalnej grubości przekroju poprzecznego, oś obrotu na końcu pręta.



$$I = \frac{1}{3}ml^2$$

Torus o promieniach głównym R i wewnętrznym r . Oś obrotu pokrywa się z osią symetrii obrotowej torusa.



$$I = m\left(R^2 + \frac{3}{4}r^2\right)$$

Słowniczek

moment bezwładności

(ang. *moment of inertia*) wielkość fizyczna opisująca bezwładność w ruchu obrotowym, analogicznie do roli masy w opisie ruchu postępowego.

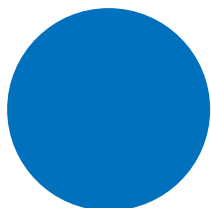
torus

(ang. *torus*) dwuwymiarowa powierzchnia obrotowa powstała z obrotu okręgu wokół prostej w płaszczyźnie tego okręgu, nieprzecinającej go. Kształt torusa mają popularne pączki typu donut (ang. *doughnut*).

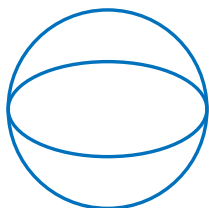
Grafika interaktywna

Momenty bezwładności wybranych brył jednorodnych

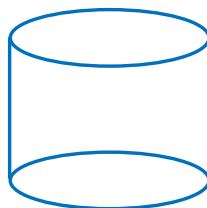
W poniższej grafice interaktywnej możesz sprawdzić, jakie momenty bezwładności mają ciała o różnych kształtach.



KULA



SFERA



WALEC



PRĘT



OBRĘCZ

Polecenie 1

Założmy, że dysponujemy prętem o ustalonej długości, który możemy dowolnie wyginać. Czy większy moment bezwładności będzie miał pręt prosty, czy wygięty w okrąg (osie takie, jak w infografice)?

☐ Okrąg

☐ Pręt prosty

Sprawdź się

Pokaż ćwiczenia:   

Ćwiczenie 1



Dopasuj wzór na moment bezwładności do opisu ruchu obrotowego bryły:

Kula, obrót wokół osi przechodzącej przez środek

$$mR^2$$

Walec, obrót wokół osi symetrii

$$\frac{2}{5}mR^2$$

Pręt, obrót wokół osi prostopadłej przechodzącej przez koniec

$$\frac{1}{3}ml^2$$

Pręt, obrót wokół osi prostopadłej przechodzącej przez środek

$$\frac{1}{12}ml^2$$

Obręcz, obrót wokół osi symetrii

$$\frac{1}{2}mR^2$$

Ćwiczenie 2



Które ciało będzie miało większy moment bezwładności - obręcz, czy walec, jeśli oba mają promień R i masę m ?

☐ walec

☐ obręcz

Ćwiczenie 3



Oblicz moment bezwładności walca o masie 10 kg i średnicy 20 cm, obracającego się wokół osi symetrii. Wynik podaj z dokładnością do jednej cyfry znaczącej.

$I_w =$ kg m^2 .

Ćwiczenie 4



Z ołowiu (gęstość $\rho_{\text{Pb}} = 11\,340 \text{ kg/m}^3$) wykonano kulę o masie m i promieniu R_k . Następnie ołów przetopiono i uformowano z niego nowy odlew w kształcie walca. Wykonano go w taki sposób, że moment bezwładności kuli i walca są takie same. Jaka jest wysokość H nowego walca, jeśli promień pierwotnej kuli wynosił $R_k = 1\text{m}$? Odpowiedź zapisz w formie nieskracalnego ułamka.

$$H = \boxed{} \text{ m.}$$

Ćwiczenie 5



Sękacz to tradycyjne ciasto z Podlasia. Powstaje przez obracanie ciasta nad rożnem - gdy się spiecze, polewa się wypiek kolejną i kolejną warstwą, tworząc coraz grubszy twór. W ten sposób całość zarówno przybiera na masie, jak i staje się coraz większa. Jaki jest stosunek momentu bezwładności nowej warstwy do momentu bezwładności walca, na którym została ona utworzona? Przyjmijmy, że sękacz jest jednorodnym walcem o promieniu R . Załóżmy ponadto, że za każdym obrotem powstaje nowa warstwa o tej samej grubości ΔR , która jest pomijalna przy R , a zatem ciasto z nowej warstwy możemy uznać za cienkocienną rurę.

☐ $2 \frac{\Delta R}{R}$

☐ 2

☐ $4 \frac{\Delta R}{R}$

☐ $\frac{1}{2}$

Ćwiczenie 6



Piłka ma średnicę 160 mm i masę 2800 g, jest wypełniona w środku. Jaki jest jej moment bezwładności? Odpowiedź podaj w notacji wykładniczej - z całkowitym wykładnikiem i mantysą z przedziału $<1,10>$). Mantysę podaj z dokładnością do dwóch cyfr znaczących.

$$I_k = \boxed{} 10^{\boxed{}} \text{ kg m}^2.$$

Ćwiczenie 7



Typowa piłka do tenisa ma średnicę 6,65 cm i masę 56 g, w środku ma powietrze, którego obecność zaniedbujemy. Jaki jest jej moment bezwładności względem osi przechodzącej przez jej środek? Odpowiedź podaj w notacji wykładniczej, z dokładnością do trzech cyfr znaczących.

$$I_s = \boxed{} \cdot 10^{\boxed{}} \text{ kg m}^2.$$

Ćwiczenie 8



Bryła przedstawiona na rysunku poniżej powstaje przez wycięcie z jednorodnego walca o masie m i promieniu R czterech jednakowych fragmentów o rozmiarze kątowym $\alpha \in (0; \pi/2)$. Oblicz jego moment bezwładności.



Dla nauczyciela

Imię i nazwisko autora:	Dariusz Aksamit
Przedmiot:	Fizyka
Temat zajęć:	Momenty bezwładności ciał dla różnych jednorodnych brył
Grupa docelowa:	III etap edukacyjny, liceum, technikum, zakres rozszerzony
Podstawa programowa	Cele kształcenia – wymagania ogólne Wykorzystanie pojęć i wielkości fizycznych do opisu zjawisk oraz wskazywanie ich przykładów w otaczającej rzeczywistości. Rozwiązywanie problemów z wykorzystaniem praw i zależności fizycznych. Zakres rozszerzony Treści nauczania – wymagania szczegółowe I. Wymagania przekrojowe. Uczeń: 16) przeprowadza obliczenia i zapisuje wynik zgodnie z zasadami zaokrąglania oraz zachowaniem liczby cyfr znaczących wynikającej z dokładności pomiaru lub z danych; III. Mechaniki bryły sztywnej. Uczeń: 2) stosuje pojęcie bryły sztywnej; opisuje ruch obrotowy bryły sztywnej wokół osi;

Kształtowane kompetencje kluczowe:	Zalecenia Parlamentu Europejskiego i Rady UE z 2018 r.: - kompetencje w zakresie rozumienia i tworzenia informacji, - kompetencje matematyczne oraz kompetencje w zakresie nauk przyrodniczych, technologii i inżynierii, - kompetencje cyfrowe, - kompetencje osobiste, społeczne i w zakresie umiejętności uczenia się,
Cele operacyjne:	Uczeń: • objaśnia, jak obliczać moment bezwładności różnych jednorodnych brył • komentuje wzory opisujące momenty bezwładności jednorodnych brył
Strategie i metody nauczania	Strategia Kształcenia Wyprzedzającego
Formy zajęć:	Praca indywidualna
Środki dydaktyczne:	Komputery
Materiały pomocnicze: -	
PRZEBIEG LEKCJI	
Faza wprowadzająca:	
Nauczyciel przypomina definicję momentu bezwładności bryły sztywnej jako sumy momentów bezwładności jej poszczególnych składowych. Następnie wyprowadza z tej definicji wzór na moment bezwładności rury cienkościennej oraz walca, tak jak zaprezentowano to w niniejszym e-materiale. Następnie prosi uczniów o włączenie grafiki interaktywnej.	
Faza realizacyjna:	

Podczas pracy z grafiką nauczyciel prosi uczniów o sprawdzenie, czy wyprowadzony przez niego wzór jest taki sam. Po potwierdzeniu nauczyciel prosi uczniów o sprawdzenie, jakie są momenty bezwładności dla pozostałych brył, których nie omówiono. Uczniowie odczytują te wzory, nauczyciel zapisuje je na tablicy.

Następnie nauczyciel poleca uczniom sprawdzić obliczenia – uczeń wybiera dowolny obiekt, ustawia parametry według własnego uznania i wykonuje własne obliczenia momentu bezwładności, następnie porównuje je z wynikiem pokazywanym przez program.

Faza podsumowująca:

Nauczyciel sugeruje uczniom przepisanie wniosków z tablicy, czyli listy momentów bezwładności dla różnych brył, do zeszytu. Nauczyciel poleca rozwiązać pierwsze zadanie z zestawu ćwiczeń. Nauczyciel zadaje uczniom pracę domową.

Praca domowa:

Zadania z zestawu ćwiczeń, których nie rozwiązano w trakcie lekcji.

Wskazówki metodyczne opisujące różne zastosowania danego multimedium

Zgodnie z powyżej omówionym przebiegiem lekcji. Można również zacząć od rozwiązywania zadań, a pracę z grafiką zostawić na koniec lekcji jako podsumowanie.