Analiza nierówności kwadratowej zupełnej z parametrem

Analiza nierówności kwadratowej zupełnej z parametrem

Źródło: Herbert Bieser from Pixabay, domena publiczna.

W tym materiale zajmiemy się analizą nierówności kwadratowej zupełnej z parametrem. Będzie ona polegała na znajdowaniu takich wartości rzeczywistych parametru, dla których zbiór rozwiązań nierówności spełnia określony warunek.

Twoje cele

- Przeprowadzisz analizę nierówności kwadratowej zupełnej z parametrem.
- Obliczysz, dla jakich wartości parametru nierówność kwadratowa zupełna jest sprzeczna lub prawdziwa dla dowolnej liczby rzeczywistej.
- Znajdziesz wszystkie takie wartości rzeczywiste parametru, aby zbiór rozwiązań nierówności spełniał określony warunek.

Przeczytaj

Pamiętasz?

Nierównością kwadratową z niewiadomą x nazywamy każdą nierówność postaci $ax^2 + bx + c > 0$ lub $ax^2 + bx + c \geq 0$ lub $ax^2 + bx + c < 0$ lub $ax^2 + bx + c \leq 0$, gdzie a, b, c są ustalonymi liczbami rzeczywistymi i $a \neq 0$.

Nierówność kwadratową nazywamy zupełną, jeżeli $b \neq 0$ i $c \neq 0$.

Nierówność kwadratową nazywamy niezupełną jeżeli $b = 0$ lub $c = 0$.

Jeżeli $b = 0$ i $c = 0$ to nierówność kwadratowa jest postaci $ax^2 > 0$ lub $ax^2 < 0$ lub $ax^2 \geq 0$ lub $ax^2 \leq 0$.

Przykład 1

Rozwiążemy nierówność $mx^2 + (m-1)x + 2 > 0$ dla $m = 0$, $m = 1$, $m = 2$.

Rozwiązanie

Dla $m = 0$ mamy:

$0 \cdot x^2 + (0-1)x + 2 > 0$

$-x + 2 > 0$

$-x > -2 \mid : (-1)$

$x < 2$

$x \in (-\infty, 2)$

Dla $m = 1$ mamy:

$x^2 + (1-1)x + 2 > 0$

$x^2 + 2 > 0$

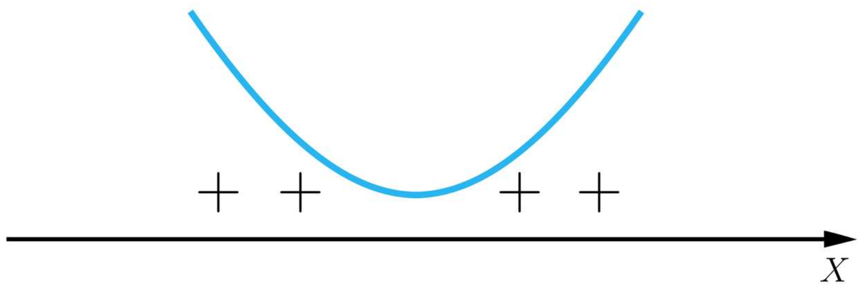
Nierówność jest prawdziwa dla dowolnego $x \in \mathbb{R}$.

Dla $m = 2$ mamy:

$2x^2 + (2-1)x + 2 > 0$

$2x^2 + x + 2 > 0$

$\Delta = 1 - 16 = -15$



$x \in \mathbb{R}$

Przykład 2

Dla jakich wartości parametru p dziedziną funkcji $f(x) = \frac{1}{px^2+px+4}$ jest zbiór liczb rzeczywistych?

Rozwiązanie

Wyrażenie $px^2 + px + 4$ musi być różne od zera.

1. Dla $p = 0$ otrzymujemy $4 \neq 0$.

Jest to prawda dla $x \in \mathbb{R}$.

2. Dla $p \neq 0$ otrzymujemy $px^2 + px + 4 \neq 0$.

Aby równanie kwadratowe $px^2 + px + 4 = 0$ nie posiadało miejsc zerowych $\Delta < 0$.

$\Delta = p^2 - 16p$

$p^2 - 16p < 0$

$p(p - 16) < 0$

$p = 0 \vee p = 16$

$p \in (0, 16)$

Uwzględniając (1) lub (2): $p \in \langle 0, 16)$.

Aby dziedziną funkcji był zbiór liczb rzeczywistych parametr $p \in \langle 0, 16)$.

Przykład 3

Dla jakich wartości parametru k zbiór rozwiązań nierówności $(k + 2)x^2 + x + 4 > 0$ jest niepustym przedziałem ograniczonym?

Rozwiązanie

1. Rozpatrzymy najpierw warunek $k+2=0$.

$k=-2$

Wtedy mamy:

$x+4>0$

$x>-4$

$x\in(-4,\infty)$

Nie otrzymaliśmy przedziału ograniczonego, czyli $k=-2$ nie spełnia warunków zadania.

2. Jeżeli $k+2\neq 0\Rightarrow k\neq -2$ otrzymujemy wtedy nierówność kwadratową. Aby zbiorem rozwiązań był przedział ograniczony muszą zachodzić warunki:

$$\begin{cases} 1.\ \ a<0 \\ 2.\ \ \Delta>0 \end{cases}$$

1. $k+2<0$

$k<-2$

$k\in(-\infty,-2)$

2. $\Delta=1-16(k+2)>0$

$1-16k-32>0$

$-16k>31$

$k<-\frac{31}{16}$

Uwzględniając koniunkcję (1) i (2): $k\in(-\infty,-2)$.

Przykład 4

Dla jakich wartości parametru m zbiór rozwiązań nierówności $x^2-4x+3<0$ zawiera się w zbiorze rozwiązań nierówności $-x^2+(m-3)x+1>0$?

Rozwiązanie

Najpierw rozwiążemy nierówność $x^2-4x+3<0$.

$\Delta=16-4\cdot 3=4$

$\sqrt{\Delta} = 2$

$x_1 = \frac{4-2}{2} = 1$

$x_2 = \frac{4+2}{2} = 3$

$x \in (1, 3)$

Czyli funkcja $f(x) = -x^2 + (m-3)x + 1$ musi przyjmować wartości dodatnie w przedziale $(1, 3)$. Ramiona paraboli, bedącej wykresem funkcji, skierowane są do dołu i wartości funkcji mają być nieujemne na końcach przedziału $(1, 3)$.

Czyli:

$\begin{cases} 1.\ f(1) \geq 0 \\ 2.\ f(3) \geq 0 \end{cases} \wedge \Delta > 0$

$\Delta = (m-3)^2 + 4 = m^2 - 6m + 9 + 4 = m^2 - 6m + 13$

$m^2 - 6m + 13 > 0$

$m \in \mathbb{R}$

1. $-1 + (m-3) + 1 \geq 0$

$m - 3 \geq 0$

$m \geq 3$

2. $-9 + (m-3) \cdot 3 + 1 \geq 0$

$3(m-3) \geq 8$

$3m - 9 \geq 8$

$3m \geq 17$

$m \geq \frac{17}{3}$

Czyli z (1) i (2): $m \in \left\langle 5\frac{2}{3}, \infty \right)$

Przykład 5

Obliczymy, dla jakich wartości parametru p nierówność kwadratowa $2x^2 + (p-3)x + p^2 \geq 0$ jest prawdziwa dla dowolnego $x \in \mathbb{R}$.

Rozwiązanie

Ponieważ współczynnik przy x^2 jest dodatni ramiona paraboli skierowane są do góry. Aby parabola przyjmowała wartości nieujemne wyróżnik trójmianu kwadratowego $\Delta \leq 0$.

$\Delta = (p-3)^2 - 4 \cdot 2p^2 = p^2 - 6p + 9 - 8p^2 = -7p^2 - 6p + 9$

$-7p^2 - 6p + 9 \leq 0$

$\Delta_p = 36 + 4 \cdot 7 \cdot 9 = 36 + 252 = 288 = 12\sqrt{2}$

$p_1 = \frac{6-12\sqrt{2}}{-14} = \frac{6\sqrt{2}-3}{7}$

$p_2 = \frac{6+12\sqrt{2}}{-14} = \frac{-3-6\sqrt{2}}{7}$

$p \in \left(-\infty, \frac{-3-6\sqrt{2}}{7}\right\rangle \cup \left\langle \frac{-3+6\sqrt{2}}{7}, \infty\right)$

Słownik

nierówność kwadratowa zupełna

nierówność, w której wszystkie współczynniki są różne od zera

Animacja

Polecenie 1

Zapoznaj się ze sposobem przeprowadzania analizy nierówności kwadratowej zupełnej w zależności od parametru i przeanalizuj informacje zawarte w animacji.

Film dostępny pod adresem https://zpe.gov.pl/a/DE5z2s1nl

Film nawiązujący do treści lekcji dotyczący analizy nierówności kwadratowej zupełnej z parametrem.

Polecenie 2

Wyznacz takie wartości parametru m, dla których nierówność $m^2x^2 - 2x(m+1) - 4 < 0$ jest sprzeczna dla dowolnego $x \in \mathbb{R}$.

Sprawdź się

Pokaż ćwiczenia:

Ćwiczenie 1

Ćwiczenie 2

Ćwiczenie 3

Ćwiczenie 4

Ćwiczenie 5

Ćwiczenie 6

Ćwiczenie 7

Ćwiczenie 8

Dla nauczyciela

Autor: Jolanta Schilling

Przedmiot: Matematyka

Temat: Analiza nierówności kwadratowej zupełnej z parametrem

Grupa docelowa:

III etap edukacyjny, liceum, technikum, zakres rozszerzony

Podstawa programowa:

Treści nauczania – wymagania szczegółowe:

III. Równania i nierówności.

Zakres rozszerzony. Uczeń:

5) analizuje równania i nierówności liniowe z parametrami oraz równania i nierówności kwadratowe z parametrami, w szczególności wyznacza liczbę rozwiązań w zależności od parametrów, podaje warunki, przy których rozwiązania mają żądaną własność, i wyznacza rozwiązania w zależności od parametrów.

Kształtowane kompetencje kluczowe:

- kompetencje w zakresie rozumienia i tworzenia informacji;
- kompetencje matematyczne oraz kompetencje w zakresie nauk przyrodniczych, technologii i inżynierii;
- kompetencje cyfrowe;
- kompetencje osobiste, społeczne i w zakresie umiejętności uczenia się.

Cele operacyjne:

Uczeń:

- przeprowadza analizę nierówności kwadratowej zupełnej z parametrem;
- oblicza dla jakich wartości parametru nierówność kwadratowa zupełna jest sprzeczna lub prawdziwa dla dowolnej liczby rzeczywistej;
- znajduje wszystkie takie wartości rzeczywiste parametru, aby zbiór rozwiązań nierówności spełniał określony warunek;
- przeprowadza rozumowania związane z analizą nierówności kwadratowej zupełnej z parametrem, formułuje wnioski i uzasadnia ich poprawność.

Strategie nauczania:

- konstruktywizm.

Metody i techniki nauczania:

- śnieżna kula;
- dyskusja;
- rozmowa nauczająca z wykorzystaniem animacji.

Formy pracy:

- praca indywidualna;
- praca w grupach;
- praca całego zespołu klasowego.

Środki dydaktyczne:

- komputery z głośnikami i dostępem do Internetu, słuchawki;
- zasoby multimedialne zawarte w e–materiale;
- tablica interaktywna/tablica, pisak/kreda.

Przebieg lekcji

Faza wstępna:

1. Nauczyciel podaje temat i cele zajęć oraz wspólnie z uczniami ustala kryteria sukcesu.
2. Uczniowie przypominają sobie w grupach wiadomości i umiejętności związane ze sposobami rozwiązywania nierówności kwadratowych zupełnych.

Faza realizacyjna:

1. Uczniowie pracują w grupach metodą śnieżnej kuli. Najpierw wymieniają się wiadomościami dotyczącymi sposobów rozwiązań nierówności kwadratowej zupełnej, które przypomnieli w domu. Następnie łączą się w grupy 4 osobowe omawiają przykłady z sekcji Przeczytaj.
2. Uczniowie oglądają animację i analizują nierówności kwadratowe zupełne z parametrem.
3. Uczniowie w parach wykonują ćwiczenia interaktywne wskazane przez nauczyciela. Wspólnie omawiają odpowiedzi.

Faza podsumowująca:

1. Jako podsumowanie nauczyciel zadaje uczniom pytania dotyczące ćwiczeń interaktywnych.

2. Nauczyciel omawia przebieg zajęć, wskazuje mocne i słabe strony pracy uczniów, udzielając im tym samym informacji zwrotnej.

Praca domowa:

- Polecenie 2 umieszczone pod animacją.

Materiały pomocnicze:

Nierówność kwadratowa

Wskazówki metodyczne:

Przykłady zawarte w animacji uczniowie mogą przeanalizować w parach na lekcji dotyczącej rozwiązywania nierówności kwadratowych z parametrem.